Hans Ruegg

Matemática activa

para familias educadoras y escuelas alternativas

Primaria II

9 a 12 años

Parte B (Geometría, Razonamiento, etc.)

Hans Ruegg

Matemática activa

para familias educadoras

y escuelas alternativas

Primaria II

(de 9 a 12 años aproximadamente)

Parte B:

Geometría, Razonamiento, y temas adicionales

Se ofrecen los siguientes libros de "Matemática Activa ...":

Pre-Matemática (4 a 6 años aprox.) - con hojas de trabajo incluidos.

Primaria I (6 a 9 años aprox.)

Primaria I, Libro de trabajo

Primaria II (9 a 12 años aprox.) Parte A: Aritmética / **Parte B: Geometría, Razonamiento, y temas adicionales**

Primaria II, Libro de trabajo

Secundaria I (12 a 15 años aprox.)

Secundaria II (Pre-universitario)

Matemática Divina (Complemento para educadores)

Matemática activa para familias educadoras y escuelas alternativas
Primaria II (9 a 12 años)
Parte B: Geometría, Razonamiento, y temas adicionales

Edición digital 2023. Distribución gratuita. Prohibida su venta.

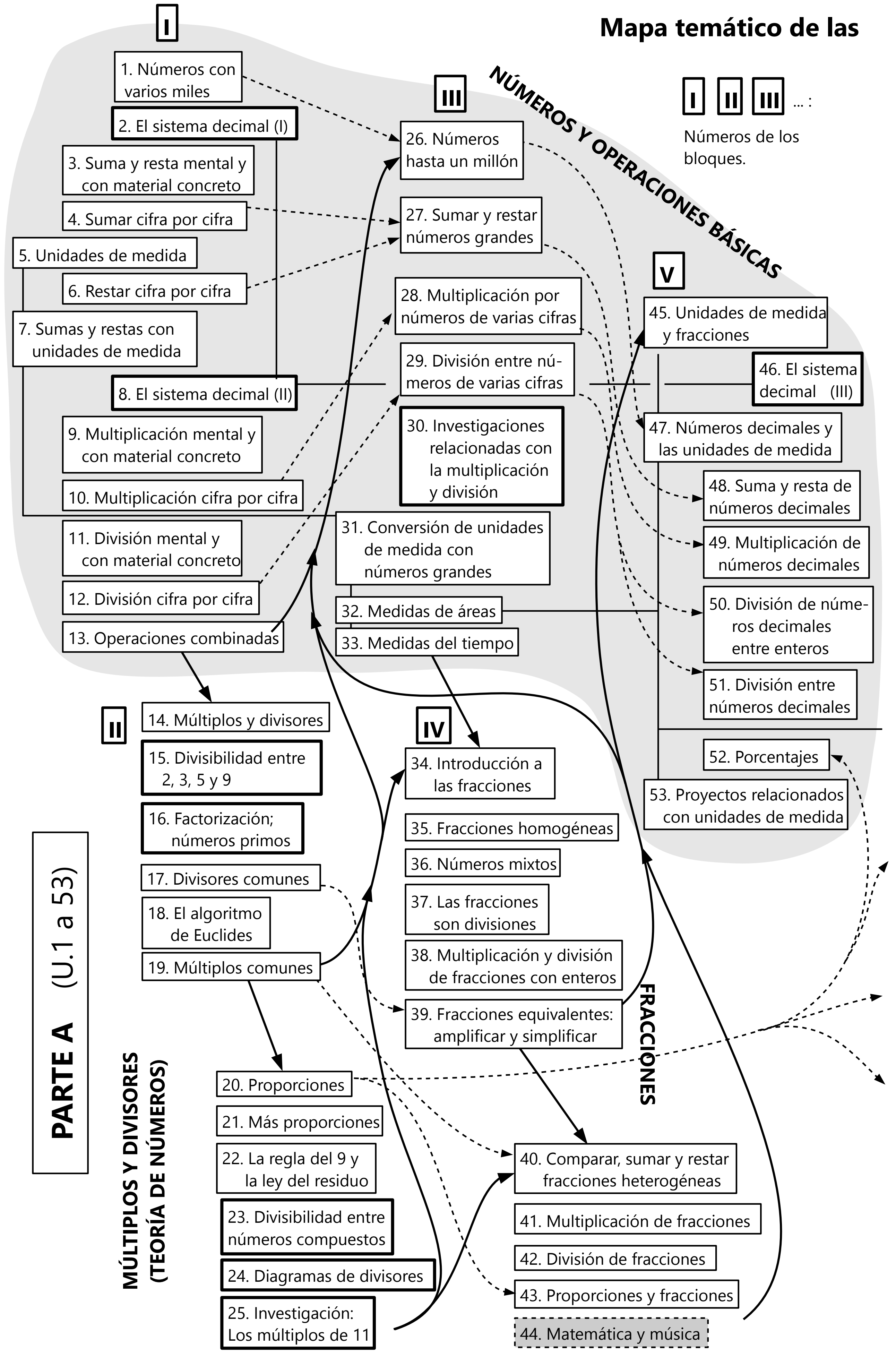
Contacto por internet para consultas:
https://educacionCristianaAlternativa.wordpress.com/libros-de-matematica-activa/

Unas demostraciones en video de los métodos de la matemática activa se encuentran en:
http://www.youtube.com/user/educadorDiferente

Índice de contenido

Las Unidades 1 a 53 (Bloques I a V) se encuentran en la Parte A.

Mapa temático de las



unidades de aprendizaje

PARTE B (U.54 a 96)

VI — **GEOMETRÍA**

54. Figuras geométricas básicas
55. Recortables sencillos
56. Construcciones básicas con regla y escuadra
57. Uso del compás
58. Casitas de cartulina
59. Ángulos y el transportador
60. Espejos y simetría
61. Tangram; Origami
62. Punto medio y ángulo recto con el compás
63. Más recortables
64. Mosaicos de polígonos regulares
65. Perímetros y áreas
66. Coordenadas cartesianas
67. Planos y mapas
68. Uso de la brújula
69. Transformaciones de figuras en el sistema de coordenadas
70. Proporciones en la geometría
71. Orientación en tres dimensiones, y medidas de volúmenes
72. Cuerpos geométricos

VII — **JUEGOS, ESTRATEGIA**

73. Juegos de razonamiento estratégico
74. Ajedrez
77. Análisis de juego: El gato
78. Análisis de juego: ¿Quién llega a 100?
79. Análisis de juego: Golf matemático

75. Actividades de razonamiento numérico
76. Rompecabezas y problemas diversos
80. Números romanos
81. Los números figurativos de los pitagoreos

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

82. Experimentos de probabilidad y combinatoria
83. Gráficos estadísticos
84. El promedio

CONJUNTOS

85. Relaciones y patrones
86. Operaciones con conjuntos
87. El entero y sus partes en conjuntos con intersección
88. Problemas de repaso

VIII — **TEMAS MÁS AVANZADOS**

89. Introducción a las potencias
90. Introducción a las raíces
91. Números astronómicos
92. Números negativos
93. Introducción a las leyes de los signos
94. Áreas de triángulos, y de figuras compuestas de triángulos
95. Propiedades de ángulos
96. Aplicaciones adicionales de la semejanza geométrica

Cuadros con borde grueso marcan temas con un fuerte componente de investigación propia.

Cuadros sombreados marcan temas con proyectos prácticos, artísticos, o que conectan la matemática con otros campos del conocimiento.

Flechas interrumpidas conectan temas que corren en paralelo, pero que no necesariamente se deben tratar seguidos.

Flechas ininterrumpidas señalan varias opciones de un orden recomendado para avanzar entre bloques o medios bloques. *(Los temas de los Bloques VI y VII pueden tratarse intercalados con los temas de los Bloques I a V.)*

Líneas horizontales y verticales conectan los temas recurrentes del sistema decimal, y de las unidades de medida.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Dios, mi Padre celestial, por haberme dado fuerzas para la elaboración y publicación de este libro.

Agradezco a todos mis alumnos y las familias educadoras que participaron en la aplicación experimental de estos métodos y me permitieron desarrollarlos y mejorarlos.

Agradezco a los estudiantes de mis cursos a distancia, por sus comentarios y sugerencias.

Agradezco a todos los colaboradores de escuelas alternativas que me brindaron ideas, me abrieron las puertas de sus escuelas y compartieron su trabajo conmigo.

Agradezco a todos los amigos que contribuyeron a este proyecto con su apoyo económico y logístico.

Agradezco a mi esposa por todo su amor, ánimo y paciencia que me brindó durante los tiempos de trabajo intenso en este libro.

Nota lingüística:

Aprendí el idioma español en un tiempo cuando todavía se daba por sentado que un plural masculino incluye tanto a seres masculinos como femeninos, como es de hecho la regla oficial. Por tanto, para evitar complicaciones del lenguaje y para que nadie se sienta excluido, deseo aclarar desde el inicio que en este libro el plural "niños" incluye también a las niñas; el plural "padres" incluye también a las madres; el plural "educadores" incluye también a las educadoras; el plural "profesores" incluye también a las profesoras; etc; al igual como el plural femenino "personas" incluye también a los varones. Igualmente cuando se usan palabras como "el educador", "el niño", "una persona" en un sentido genérico, se incluyen tanto varones como mujeres. Algunas veces he diferenciado cuando me dirijo al lector o la lectora individual; pero por lo general he preferido ahorrarme los(las) "(os)" y "(as)" innecesarios(as), y librarme de malabares tales como: "Las y los educadores(as) buenos(as) son amigos(as) de los niños y las niñas pequeños(as)." Eso no implica menosprecio hacia nadie. La matemática no hace diferencia entre varones y mujeres; es igualmente accesible para todos.

Bloque VI: Geometría
(Unidades 54 a 72)

IMPORTANTE:

La *Parte A* de este libro (Aritmética) contiene una introducción pedagógica extensa, y pautas prácticas para el uso de las Unidades de aprendizaje. Estas secciones no se repiten aquí; pero todo lo dicho allí debe tomarse en cuenta también al trabajar con esta *Parte B*.

Este bloque une los temas relacionados con la geometría y la orientación en el espacio. Se ubica en esta parte del libro para mantener los temas de cálculo numérico juntos (Bloques I a V). Pero eso no significa que las prácticas de la geometría deban esperar hasta que los alumnos dominen todos los temas de los bloques anteriores. Al contrario, muchas Unidades de este bloque tienen sólo prerrequisitos mínimos en cuanto al cálculo numérico. Por tanto, se puede comenzar ya *al inicio* del nivel de Primaria II, y los temas de geometría pueden intercalarse con los otros temas a lo largo del período entero.

Un aprendizaje *activo* de la geometría se enfocará más que todo en el diseño y la transformación creativos de figuras; o sea, en las construcciones geométricas y en trabajos manuales relacionados con tales construcciones. Por eso, este libro enfatiza mucho la geometría *constructiva*; un tema que recibe poca atención en la mayoría de los programas tradicionales. Los alumnos que han diseñado y creado figuras geométricas con sus propias manos, tendrán más facilidad más adelante para comprender también las propiedades teóricas de estas figuras.

A lo largo de las actividades de este bloque, muchas propiedades geométricas se introducen casualmente, como "de paso", sin enseñarlas formalmente, y a veces sin formularlas con todo rigor matemático. Eso se hizo al propósito. Es que la comprensión plena de las propiedades geométricas requiere *demostrarlas* lógicamente; y eso a su vez requiere una capacidad de razonamiento abstracto bien desarrollada. La memorización de propiedades y definiciones no tiene mucho sentido cuando se hace sin esta comprensión más profunda. Por eso dejamos las demostraciones y el aprendizaje de los enunciados formales para el nivel de Secundaria. Al nivel de Primaria, el énfasis está en la experiencia concreta, la observación, y el entendimiento funcional de ciertas propiedades.

También queremos despertar el interés y el entusiasmo por la geometría, mediante aplicaciones interesantes o sorprendentes en proyectos de arte, trabajos manuales, y rompecabezas. Definiciones o teoremas que van más allá de eso, se mencionan de manera informal, pero no son objetivos "obligatorios" del aprendizaje. Así por ejemplo las secciones de "Vocabulario matemático" deben entenderse como un "diccionario" para poder entender las descripciones de las actividades, pero no como "contenidos obligatorios" que deban memorizarse para exámenes.

Este bloque contiene varias Unidades opcionales; o sea, los conceptos necesarios de la geometría se pueden adquirir sin trabajar esas Unidades. Se trata mayormente de proyectos prácticos, aplicando la geometría a diversas manualidades. Se recomienda dar a cada niño la opción de escoger entre estos proyectos aquellos que le interesan.
También algunas de las actividades de investigación son opcionales; particularmente las tareas marcadas con asterisco, que son desafíos más exigentes para alumnos particularmente interesados o talentosos.

El tema de las coordenadas cartesianas une la geometría con el cálculo numérico, por lo cual se puede introducir en ambos contextos. En este bloque lo encontramos en relación con las figuras geométricas, mientras en la *Unidad 83* este tema aparece en relación con un tema numérico, los gráficos estadísticos.

Unidad 54 - Figuras geométricas básicas

Prerrequisitos:

- Conocimientos y experiencias básicas con figuras geométricas *(Primaria I)*.

Materiales necesarios:

- Geoplano y ligas.

Para los educadores

Esta Unidad introduce muchos nombres y definiciones de figuras geométricas. Algunos de estos nombres ya serán conocidos desde antes; otros serán nuevos. No es necesario que los niños dominen todos los nombres al terminar esta Unidad; muchos de ellos se repasarán en Unidades siguientes. Otros son tan poco usuales ("heptágono", "eneágono") que no hay necesidad de memorizarlos, excepto posteriormente si fuera necesario para pasar algún examen oficial.

Mucho más importante es que los niños sepan observar y reconocer las propiedades geométricas de una figura: ¿Cuántos lados tiene? ¿Tiene lados rectos o curvados? ¿Tiene lados paralelos? ¿Tiene ángulos rectos? ¿Es congruente con otra figura? ¿Es convexo o cóncavo? – Diversos nombres son "abreviaciones" de las propiedades geométricas de una figura; por ejemplo "rectángulo" o "paralelogramo".

Nota: El concepto de un "ángulo recto" se usa con tanta frecuencia que lo introducimos aquí de manera informal, aunque formalmente todavía no hemos introducido el concepto de "ángulo". Eso lo haremos en la *Unidad 59*.

Por ahora podemos explicar que dos rectas están "en ángulo recto" o "perpendiculares" si se cruzan de la misma forma como las líneas del papel cuadriculado.

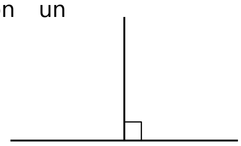
TALLER

Figuras en el geoplano

Que los niños formen libremente unas figuras en el geoplano. Durante esta actividad podemos de manera informal repasar los nombres de las figuras geométricas que ya hemos introducido en el nivel de Primaria I. Quizás tenemos que buscar oportunidades para introducir algunos de los menos usuales: Trapecio, rombo, heptágono, ...

Al conversar acerca de las figuras que forman los niños, podemos usar también algunos otros términos geométricos, como por ejemplo: "congruente", "paralelas", "diagonales", "ángulo recto", etc. (Vea el *"Vocabulario matemático"* de esta Unidad.)

Nota: En los diagramas geométricos, normalmente los ángulos rectos se indican con un pequeño cuadrado:



Dibujar figuras geométricas básicas

En las actividades de esta Unidad todavía no insistimos en construcciones exactas. (Con eso comenzaremos en la *Unidad 56.*) Por ahora, los niños pueden dibujar sus figuras a mano alzada, o si desean con regla, pero todavía no requerimos que las paralelas o los ángulos rectos sean completamente exactos.

Para repasar los nombres de las figuras, pueden usar las tarjetitas de la ***Hoja de trabajo 54.1***: Una persona saca una tarjeta, pero no la muestra a la otra persona; solamente lee a voz alta la palabra escrita en el reverso. La otra persona dibuja la figura indicada. Después controlan ambos con la ayuda de la tarjeta si el dibujo corresponde a la descripción.

Juego: El instructor de dibujo

Este juego se puede jugar entre dos personas: una es instructor, la otra es dibujante. El instructor tiene delante de sí un "original" de un dibujo geométrico sencillo. (Pueden cortar la ***Hoja***

de Trabajo 54.2, en tarjetitas y usar los ejemplos, o pueden diseñar sus propios ejemplos.) El dibujante no puede ver el original, y el instructor no puede ver lo que dibuja el dibujante. La tarea del instructor consiste en dar al dibujante unas instrucciones lo suficientemente precisas para que el dibujante pueda reproducir el dibujo que el instructor tiene por delante. La tarea del dibujante consiste en seguir fielmente las instrucciones. El instructor puede decir por ejemplo: "Dibuja un rectángulo echado sobre su lado más largo. Dibuja un círculo pequeño dentro del rectángulo, más hacia su lado derecho. ..." (Etc.) Cuando el dibujante señala que terminó el dibujo, ambos comparan el dibujo con el original. Si ocurrieron errores, ambos analizan juntos cómo se originaron los errores y cómo podrían evitarlos.

Nota: Al analizar los errores, algunos niños tienen la tendencia de culpar al otro: "¡Tú no has dibujado como yo he dicho!" – "No, ¡tú me has dicho que lo haga así, tú me lo has dicho mal!" ... Tenemos que señalarles que eso no produce ningún avance, y que es más constructivo que cada uno asuma la responsabilidad por lo que él mismo puede mejorar: "Ah sí, debería haberte dicho que este rectángulo es más alto que largo." – "No entendí bien lo que significa que el círculo está sobre la punta del triángulo; debería haberte preguntado." Etc.

Variaciones para grupos más grandes:

Este juego se puede jugar también como juego grupal. Por ejemplo:

- Un instructor, muchos dibujantes. Un niño es instructor, todos los demás son dibujantes que siguen las instrucciones. Al final se comparan los resultados de todos. *(Si algunos dibujantes obtienen el dibujo correcto y otros no, probablemente los últimos no estaban atentos a las instrucciones, o no las entendieron bien. En cambio, si nadie logró reproducir el dibujo correcto, probablemente las instrucciones no eran claras.)*

- Muchos instructores, un dibujante. El dibujante dibuja sobre una pizarra, visible para todos. Los demás niños tienen todos un original por delante. (Tienen que mantenerlos de manera que el dibujante no los puede ver.) Por turnos, cada uno puede dar una instrucción al dibujante. Esto incluye la posibilidad de que un niño puede corregir una instrucción errónea que alguien dio anteriormente. La meta es que el grupo de instructores en conjunto logre que el dibujante produzca el dibujo correcto.

- Concurso entre dos grupos. Como la variante anterior, pero ahora son dos grupos de instructores, cada uno con su dibujante y con su propia pizarra. Gana el grupo cuyo dibujante es el primero en obtener el dibujo correcto. Los niños tienen que entender que todos los instructores de un grupo, juntos con su dibujante, son un único equipo que tienen que coordinar sus esfuerzos para ganar al otro equipo.
En esta variante se puede acordar que los instructores, en vez de hablar por turnos, pueden hablar libremente cuando quieren. (Ellos mismos tendrán que descubrir que si todos gritan a la vez, su dibujante no va a entender nada.)
Esta forma del juego requerirá a un adulto (o quizás adolescente) como árbitro que vigila para que no se rompan las reglas, y que puede intervenir en casos de disputas.

Para impedir interferencias de un grupo en el trabajo del otro, se puede hacer lo siguiente:
a) Ubicar los grupos de tal manera que nadie puede ver la pizarra del otro grupo. – O:
b) Dar distintos originales a los dos grupos (pero de la misma dificultad).

Clasificar figuras geométricas

Para esta actividad necesitamos las tarjetas de figuras geométricas (***Hoja de trabajo 54.1***).

En una hoja grande, dibujen un círculo que representa un conjunto. Definan qué clase de figuras deben entrar al conjunto. Por ejemplo: Todos los cuadriláteros; todas las que tienen dos lados paralelos; todas las que tienen un ángulo recto; todas las convexas; etc. – Después pongan dentro del conjunto las tarjetas que corresponden.

Después hagan lo mismo con *dos* conjuntos que tienen una intersección. Ahora hay que colocar cada tarjeta exactamente en el área que le corresponde. Por ejemplo, si uno de los conjuntos significa "Triángulos", y el otro "Figuras con un ángulo recto", ¿cuáles tarjetas pertenecen a la intersección? ¿Cuáles solamente a "Triángulos"? ¿Cuáles solamente a "Ángulo recto"? ¿Y cuáles quedan afuera?

(Vea también en la sección "Principios matemáticos" acerca de la clasificación exacta de los cuadriláteros.)

Arte geométrico sencillo

Podemos animar a los niños a crear unos dibujos compuestos de figuras geométricas. Lo más práctico será una representación de algún artefacto humano como un mueble, una máquina, o un edificio. Pero quizás algunos niños querrán dibujar animales, árboles, flores, montañas, u otros objetos, de manera "geométrica". Otros quizás querrán crear una composición abstracta.

Principios matemáticos

¿Un cuadrado es un rectángulo?

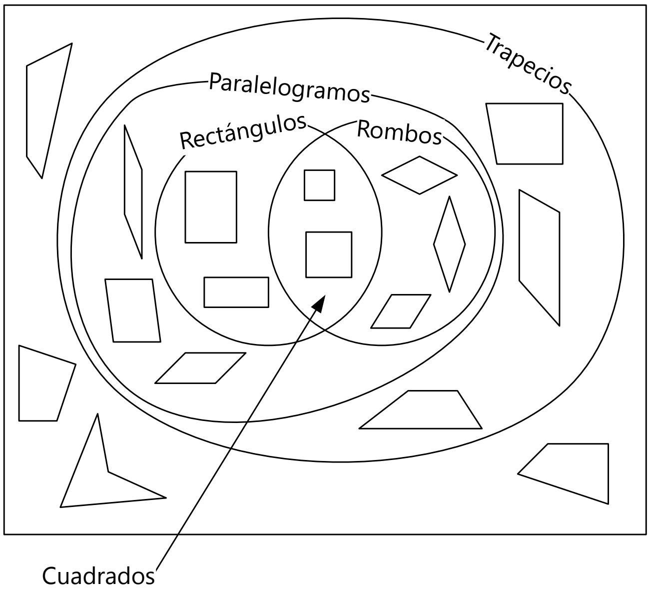
Cuando una tarea requiere formar un "conjunto de rectángulos", muchos niños (y también adultos) dejan los cuadrados afuera: "Es un cuadrado, no es un rectángulo." Pero según su definición geométrica, un rectángulo es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos. Un cuadrado sin duda cumple con estas condiciones. Entonces los cuadrados son a la vez rectángulos (aunque rectángulos especiales).

En las actividades con bloques lógicos hemos clasificado los cuadrados como "no-rectángulos", porque allí necesitábamos cuatro clases de formas claramente distinguidas. Pero ahora que comenzamos a clasificar las figuras *geométricamente*, tenemos que regirnos según sus propiedades geométricas. Las propiedades geométricas de un cuadrado lo clasifican claramente como un rectángulo.

De manera similar, los cuadrados están también incluidos en los rombos. Un rombo se define como un cuadrilátero con cuatro lados iguales. Un cuadrado cumple con esta definición.

La clasificación de los cuadriláteros, hasta donde se introduce en esta Unidad, se puede representar con el siguiente diagrama:

Cuadriláteros



Si desean, pueden practicar eso con figuras cortadas de cartón, y el diagrama de los conjuntos sobre un papel grande.

Vocabulario matemático

Paralelas: Dos rectas son paralelas cuando no tienen intersección, aun si se prolongan infinitamente.

Rectas secantes: Rectas que se cortan en algún punto, o sea que no son paralelas.

Perpendicular: En ángulo recto.

Polígono: Una figura plana cerrada con lados rectos.

Vértice: Una "punta" de un polígono, donde se unen dos lados adyacentes.

Diagonal: Línea recta que une dos vértices no adyacentes de un polígono.

Convexo: Un polígono se llama "convexo" cuando todos sus vértices van "hacia afuera". (Este es el caso normal.)

Cóncavo: Un polígono se llama "cóncavo" cuando uno o varios de sus vértices van "hacia adentro".

Unas definiciones un poco más técnicas son las siguientes:
- Un polígono es cóncavo cuando por lo menos una de sus diagonales se encuentra en su exterior; de otro modo es convexo.
- Una figura es cóncava cuando existe por lo menos una recta que la corta en más que dos puntos.

Congruente: Figuras congruentes se pueden colocar una encima de la otra, de manera que coinciden.

Semicírculo: La mitad de un círculo.

Polígonos especiales:

Triángulo: Polígono con tres lados.

Cuadrilátero: Polígono con cuatro lados.

Rectángulo: Cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.

Paralelogramo: Cuadrilátero con lados paralelos de dos en dos.

Trapecio: Cuadrilátero con dos lados paralelos.

Rombo: Cuadrilátero con cuatro lados iguales.

Pentágono: Polígono con cinco lados.

Hexágono: Polígono con seis lados.

Heptágono: Polígono con siete lados.

Octágono: Polígono con ocho lados.

Nonágono o Eneágono: Polígono con nueve lados.

Decágono: Polígono con diez lados.

Dodecágono: Polígono con doce lados.

Unidad 55 - Recortables sencillos

Materiales necesarios:

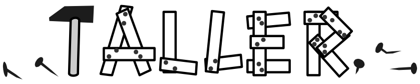
- Colores, tijera, goma, regla.
- (Opcional): Cartulina

Para los educadores

Armar recortables es un excelente entrenamiento para la inteligencia geométrica y la orientación en el espacio. A muchos niños les gusta este pasatiempo, y les fascina ver como la hoja plana se convierte en un objeto tridimensional.

Esta Unidad presenta diversos modelos prediseñados en sus hojas de trabajo. Más tarde, los niños aprenderán a construir sus propios modelos *(Unidades 58, 63)*.

Los proyectos de recortables son opcionales. Aquellos niños que no les gusta este tipo de trabajos, pueden en su lugar escoger otros proyectos.



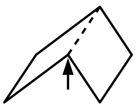
Instrucciones generales para los recortables prediseñados (Hojas de trabajo)

Significado de las líneas

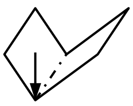
Todos los modelos recortables prediseñados de este libro usan el mismo código de líneas que indican cómo armarlos:

——— (línea gruesa continua): Cortar a lo largo de estas líneas.

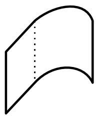
- - - - - - (línea interrumpida): Doblar hacia afuera (hacer un "cerro").

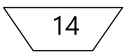


-·-·-·- (linea con raya-punto): Doblar hacia adentro (hacer un "valle").



· · · · (línea punteada): Indica el comienzo de una parte redondeada (no doblar).





(Contorno con líneas delgadas): Pegar aquí la lengüeta con el número correspondiente.

(Contorno con líneas delgadas interrumpidas): Pegar al reverso la lengüeta con el número correspondiente.

La numeración de las lengüetas no está relacionada con el orden en que se debe trabajar. Solamente indica la correspondencia de dónde pegarlas.

Consejos generales para armar recortables

Si deseas que tus modelos sean más estables, copia o pega el molde sobre cartulina antes de armarlo.

Las partes se dejan doblar con mayor facilidad y exactitud si se rayan primero ligeramente con la parte redondeada de una tijera (no con la punta), a lo largo de las líneas que se deben doblar. Coloca una regla al lado de la línea y repásala con la tijera, como trazando.

Si usas papel, alternativamente puedes doblarlo a lo largo de una regla, sin rayar. Pero si trabajas con cartulina, la técnica de rayar es mucho mejor.

Por lo general, se recomienda el siguiente orden:

1. Pintar
2. Rayar
3. Cortar
4. Doblar
5. Pegar.

Para pegar las partes, usa goma blanca (líquida) o pegamento de silicona. Las barras adhesivas que se usan comúnmente para pegar papeles en los cuadernos, no son recomendables para estos trabajos, porque no pegan lo suficientemente fuerte; los modelos podrán despegarse.

Cada lengüeta que se pega, debe apretarse en su posición por suficiente tiempo para que quede bien pegada, o sea hasta que la goma esté medianamente seca.

Si una lengüeta se encuentra en el interior del modelo y no se puede alcanzar con el dedo para apretar, se puede entrar con un lápiz, bolígrafo, o similar para apretarla desde adentro.

Cuando el modelo está terminado, debe secar por suficiente tiempo antes de manipularlo o jugar con él.

Instrucciones específicas acerca de los modelos:

Casitas y carro (Hoja de trabajo 55.1):

Estos modelos sencillos no deben necesitar mayores explicaciones. Los dibujos en la hoja indican cómo deben verse las casitas cuando estén terminadas.

Cohete espacial (Hoja de trabajo 55.2):

Las ranuras marcadas con 1 y 2 deben cortarse con un cúter antes de pegar el modelo.
Comienza a pegar los cohetes desde la punta para formar un cono. Después usa las lengüetas pequeñas para pegar el cono al cuerpo del cohete. Finalmente cierra el cilindro. Aprieta las lengüetas desde adentro, entrando con un lápiz o bolígrafo.
Los dos cohetes auxiliares (pequeños) se unen al cohete grande, metiendo las lengüetas 1 y 2 dentro de las ranuras 1 y 2. Las lengüetas se pueden pegar al interior.
Las dos partes del medio se meten desde abajo al cohete grande, como muestra el dibujo del medio.

Puente (Hoja de trabajo 55.3):

Las tiras A y B se redondean sin doblar, para formar arcos. Se pegan por un lado a la parte C en los lugares indicados, y por el otro lado a los arcos de la parte grande. (La parte C es la parte interior del puente.) Después se pega la parte grande para terminar el puente según el dibujo. Los "pies" del puente quedan abiertos; se puede introducir por allí un lápiz o bolígrafo para apretar las lengüetas al pegarlas, si fuera necesario.

Casa con balcón (Hoja de trabajo 55.4):

La parte E es el pilar que sostiene el techo sobre la esquina del balcón. Por el lado inferior, sus lengüetas deben introducirse en la apertura de la pieza C y pegarse por debajo (dos lengüetas a la pieza C, y dos en las paredes de la casa). Después de eso, se recomienda pegar primero las partes del balcón (A, B, C), y sólo después cerrar la casa y el techo alrededor. En el momento de colocar el techo, se pegan las lengüetas superiores del pilar E a la esquina del techo en el lugar apropiado, por afuera. Si desean que se vea más perfecto, pueden alternativamente también en el techo abrir una apertura para pegar esas lengüetas a su interior.

¿A dónde vamos desde aquí?

El tema de los recortables continúa en las *Unidades 58 y 63,* donde aprenderemos a construir nuestros propios modelos.

Unidad 56 - Construcciones básicas con regla y escuadra

Prerrequisitos:

- Entender medidas en centímetros y milímetros.
- Conocer conceptos geométricos básicos (punta, recta, ángulo recto, paralelas ...) *(Unidad 54)*.

Materiales necesarios:

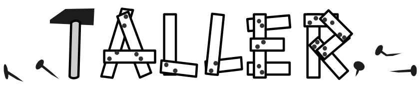
- Regla, escuadra, lápiz con buena punta.

Para los educadores

El buen manejo de las herramientas de dibujo requiere práctica. Por tanto, comenzamos con unos ejercicios que pueden parecer un poco tediosas o "demasiado sencillos". Pero estos ejercicios permiten fijarnos desde el inicio en diversos detalles que influencian en la precisión del dibujo, como se indica en las instrucciones del Taller.

Esta Unidad es importante también porque contiene una primera introducción a unos conceptos muy fundamentales de la geometría: Puntos, rectas, segmentos, intersecciones, distancia entre paralelas, distancia entre un punto y una recta, etc.

Para animar a los niños, podemos mostrarles unos ejemplos de trabajos realizados por alumnos mayores en el transcurso de algunos de los proyectos posteriores *(Unidades 58, 60, 63, 69, etc)*. Así pueden entender que estos ejercicios preliminares son necesarios para que más adelante ellos también podrán producir trabajos como estos. Los alumnos están ahora en una edad donde podemos esperar que ya tengan cierta medida de perseverancia al aprender una nueva destreza.



Nos alistamos para practicar dibujos geométricos

Aseguremos primero que tengamos el lugar de trabajo y las herramientas adecuadas:

- La luz del ambiente debe ser suficiente para poder ver los detalles pequeños en el papel.

- El papel debe colocarse sobre una superficie perfectamente plana. Si la mesa es rugosa, la hoja puede ponerse encima de un cuaderno o libro grande.

- Se deben usar regla y escuadra en buen estado, sin mellas o rajaduras.

- El lápiz debe estar bien afilado para que la línea resulte nítida. Los lápices de mina dura se pueden afilar con más precisión que los de mina blanda.

- Es recomendable usar papel en blanco, no cuadriculado, porque las cuadrículas pueden distraer de las construcciones que estamos realizando.

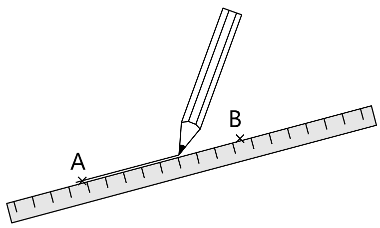
Marcar puntos

El objeto geométrico más elemental es el punto. Desde la escritura estamos acostumbrados a dibujar los puntos como pequeños circulitos o manchitas. Pero en el dibujo geométrico queremos hacerlo con mayor exactitud: Marcamos los puntos con una pequeña cruz de dos líneas rectas cortas. La intersección de dos líneas marca la ubicación del punto con mayor precisión que una manchita.

P ×

Unir puntos mediante rectas

Dos puntos definen una recta. O sea, si tengo dos puntos dados, entonces existe una única recta que pasa por ambos puntos. Puedo colocar la regla de manera que pasa por ambos puntos, y dibujar la recta siguiendo la regla.

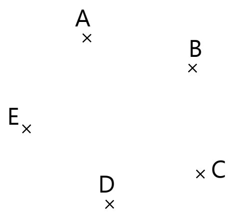


Al dibujar líneas rectas con la regla, toma en cuenta lo siguiente:

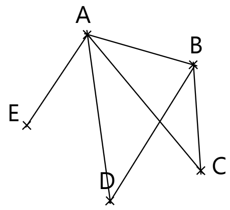
- La línea siempre aparece a una pequeña distancia de la regla o escuadra, aun con un lápiz bien afilado. Por eso, la regla o escuadra debe colocarse no directamente sobre el lugar donde se quiere dibujar la línea, sino a una pequeña distancia de ella (aprox. medio milímetro).

- Mientras dibujas la línea, aprieta la regla firmemente para que no se mueva accidentalmente. Estira hacia ambos lados los dedos de la mano que sostiene la regla, de manera que puedes sostener una parte más larga de la regla; así se moverá menos.

Ejercicio: Marca cinco puntos, de manera que queden aproximadamente en forma de un círculo:



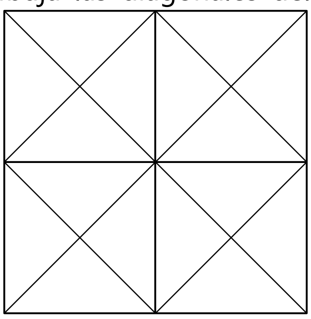
Ahora une los puntos de dos en dos con rectas, cada par de puntos que encuentras. O sea, cada uno de los puntos debe quedar unido con cada uno de los otros cuatro puntos. ¿Qué figura aparece? *(El dibujo al lado está sin completar.)*



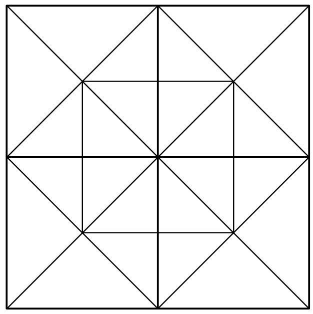
Después haz lo mismo con seis puntos. Si tienes perseverancia, hazlo también con siete puntos.

Hoja de trabajo 56.1:

Arriba: Con la regla, dibuja las diagonales del cuadrado. Después une los puntos medios de los lados del cuadrado entre sí. Se formará un cuadrado más pequeño que está "parado sobre su punta":

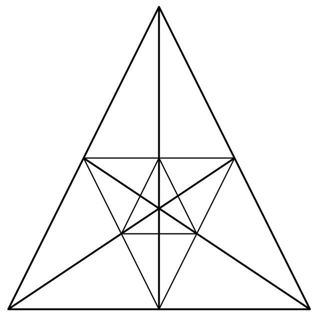


Las diagonales del cuadrado grande cortan los lados del cuadrado pequeño en sus puntos medios. Vuelve a unir estos puntos medios. Obtendrás otro cuadrado más pequeño, esta vez orientado como el grande:



Repite este proceso hasta que los cuadrados se vuelvan tan pequeños que ya no los puedes dibujar. ¿Cuántos cuadrados logras hacer?

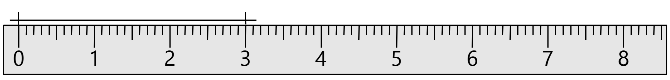
Abajo: Haz lo mismo con este triángulo. Une los puntos medios de sus lados; después los puntos medios de los lados del nuevo triángulo, y así sucesivamente hasta que ya no puedes más.



Medir y marcar segmentos rectos

Muchas construcciones requieren segmentos rectos de una determinada longitud. Para eso no es suficiente dibujar una línea recta de la longitud deseada; porque más tarde ya no podremos distinguir su inicio y su fin con exactitud. Especialmente si tuvimos que borrar y corregir la recta varias veces, como sucede a menudo en los primeros intentos.

Dibujamos entonces primero una línea recta *un poco más larga* que la longitud requerida. Después marcamos el inicio y el fin con unas rayas cortas, midiendo con la regla:



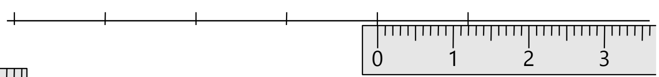
Así los extremos del segmento quedan claramente marcados, igual como marcamos los puntos.

Ejercicios:

1. Dibuja segmentos rectos de las siguientes longitudes:

4 cm, 3 cm 9 mm, 18.7 cm, 56 mm, 1 mm.

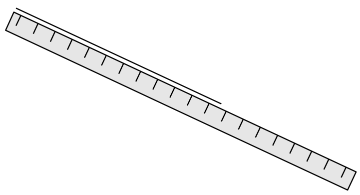
2. Dibuja una recta de 20 cm de largo, todavía sin marcar puntos en la recta.
Cerca del extremo izquierdo marca un punto de inicio.
Comenzando desde el punto de inicio, marca en la misma recta sucesivamente 16 segmentos de 12 mm cada uno. Para cada nuevo segmento, coloca el cero de la regla al punto donde el segmento anterior termina, y mide 12 mm desde allí.



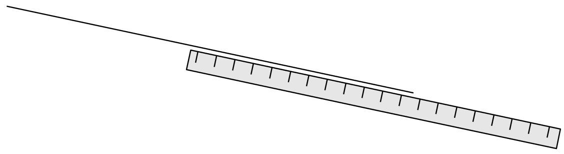
Después de dibujar, calcula cuánto deben medir todos estos segmentos juntos. Controla con la regla cuánto miden tus segmentos juntos, desde el punto de inicio hasta el final del último segmento. ¿Cuán cerca o lejos estás de la medida exacta?

Prolongar una recta

A veces tenemos una recta ya dibujada, pero resulta que es demasiado corta. Por ejemplo, necesitamos la intersección de esta recta con otra recta, pero la intersección se encuentra más allá de la parte que está dibujada. O necesitamos dibujar un segmento recto de 25cm, pero tenemos solamente una regla de 20cm de largo. Entonces colocamos la regla a la parte dibujada de la recta, y seguimos trazándola en la misma dirección. Si la regla es suficientemente larga, la colocamos de tal manera que abarca la parte entera que ya está dibujada. Así sale más exacto.



Si la regla no alcanza para eso, tratamos de abarcar por lo menos una parte suficientemente larga. A veces es necesario prolongar una recta en dos etapas: Primero la prolongamos hasta donde alcanza la regla, después trasladamos la regla más allá y seguimos trazando.



(Notamos entonces que la prolongación sale más exacta con una regla más larga.)

Practíquenlo con algunas rectas, o con la Hoja de trabajo.

Hoja de trabajo 56.2 *(primera mitad)*

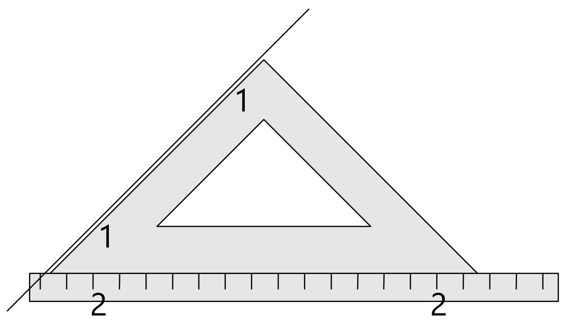
1. Une los puntos indicados, usando la regla.

2. Prolonga las rectas, de la manera como acabamos de explicar, por ambos lados hasta que llegues al marco del cuadro.

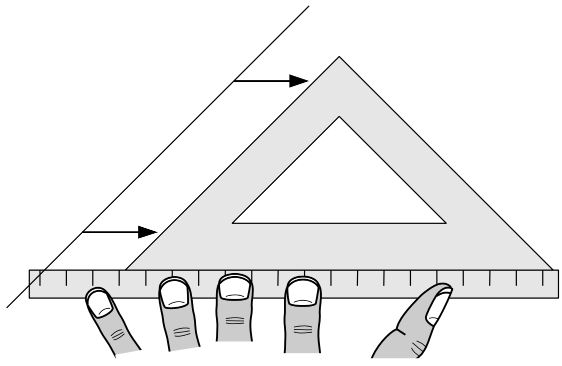
Dibujar una recta paralela a una recta dada

Usando la regla y la escuadra juntos, podemos fácilmente construir rectas paralelas.

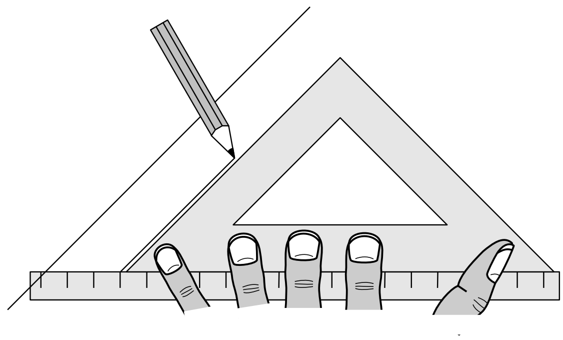
Colocamos primero la escuadra con uno de sus lados a la recta dada (1).
Después colocamos la regla a uno de los otros lados de la escuadra (2) – ¡sin mover la escuadra!



Después mantenemos con una mano la regla firmemente en su posición, mientras con la otra mano deslizamos la escuadra a lo largo de la regla:



Ahora soltamos la regla, sujetamos la escuadra en su posición, y dibujamos nuestra recta:



Si queremos que la paralela pase por un punto determinado, simplemente deslizamos la escuadra hasta que su lado coincida exactamente con ese punto.

Hoja de trabajo 56.2 *(segunda mitad):*

Con estos ejercicios puedes practicar la construcción que acabamos de explicar.

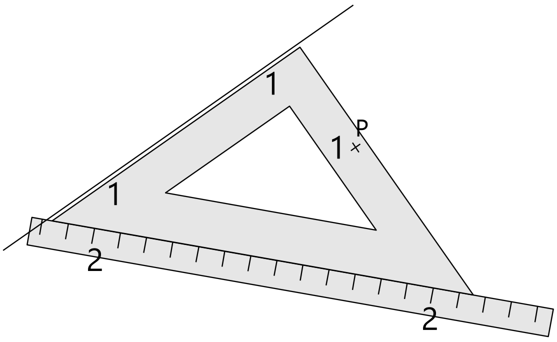
Pregunta capciosa

En el Lago Titicaca se hundió un barco, exactamente en la frontera entre Perú y Bolivia. ¿En cuál de estos países hay que enterrar a los sobrevivientes?

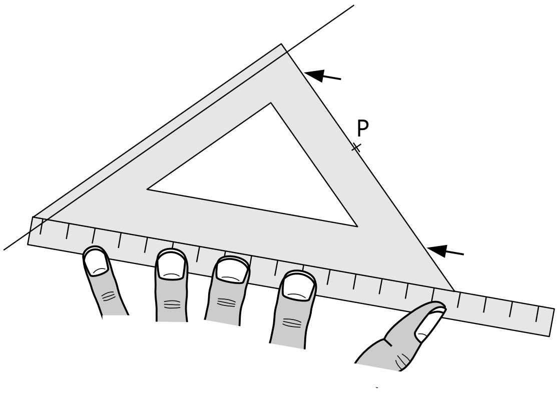
Dibujar ángulos rectos

Este método es muy similar al anterior. La escuadra tiene un ángulo recto en uno de sus vértices; éste nos sirve para construir rectas perpendiculares (en ángulo recto).
Los principiantes a menudo dibujan ángulos rectos directamente alrededor de este ángulo recto de la escuadra. Pero así el ángulo sale redondeado, y su punto más importante, el vértice, no se puede ubicar con exactitud. El siguiente método es mucho más exacto:

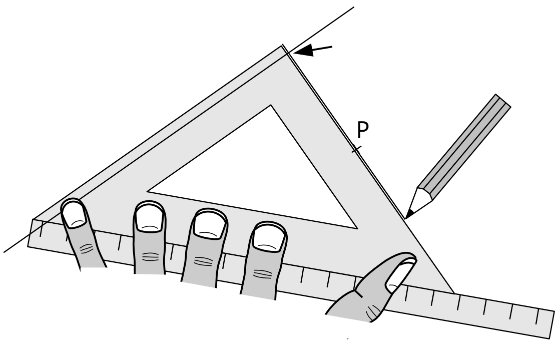
Supongamos que queremos dibujar una recta perpendicular a la recta dada, y que pase por el punto marcado. Colocamos la escuadra con uno de sus lados cortos al lado de la recta dada, de manera que su lado corto quede un poco encima del punto dado (1). Después colocamos la regla al lado largo de la escuadra, como en la construcción de las paralelas (2):



Después deslizamos la escuadra un poco a lo largo de la regla, hasta que su lado corto coincida con el punto dado:

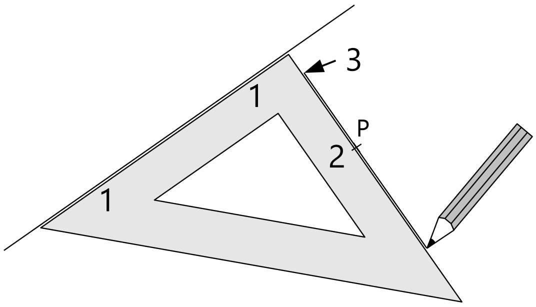


Ahora podemos dibujar la recta perpendicular, y queda exacta, con una intersección nítida:

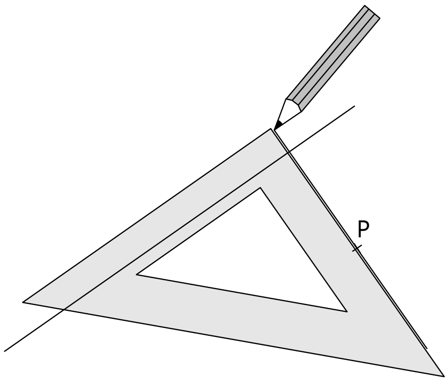


- Alternativamente, existe un método que evita la maniobra de trabajar con dos herramientas simultánea-mente; pero es un poco menos exacto:

Colocamos un lado corto de la escuadra sobre la recta (1), de manera que el otro lado corto pase por el punto dado (2). Eso tiene que hacerse con mucha exactitud. Entonces trazamos la línea hasta *un poco antes* del vértice de la escuadra. (Si continuáramos con la línea hasta el mismo vértice de la escuadra, se redondearía y ya no sería exacta.)



Después colocamos la escuadra de manera que su lado corto siga coincidiendo con la recta que acabamos de trazar, pero que pase más allá de la recta dada. Así podemos prolongar la recta que hemos trazado, y obtenemos una intersección nítida:



Hoja de trabajo 56.3:

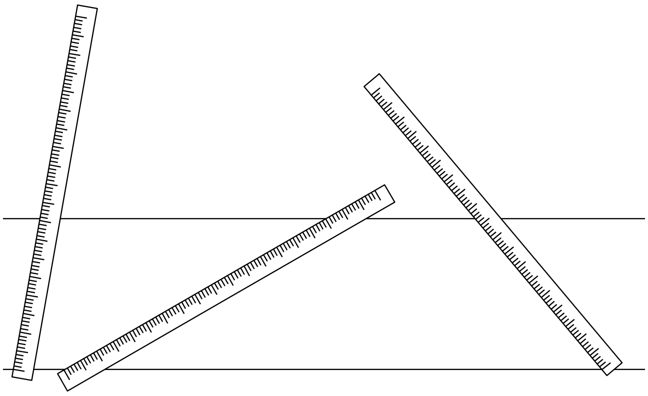
1. Aquí puedes practicar la construcción que acabamos de explicar.

Nota: Algunos niños pueden confundirse en el último ejemplo del no.1, porque la intersección entre la recta y su perpendicular queda afuera del cuadro. Pero eso no hace daño, se puede construir igual.

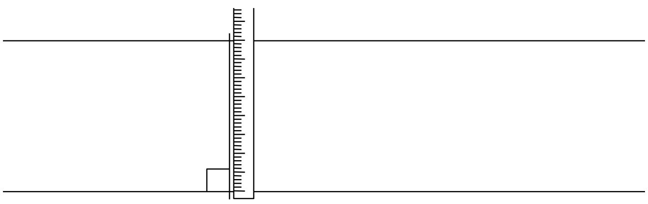
2. Hay que completar el muro, repitiendo el mismo patrón. Se puede hacer construyendo paralelas, o también rectas perpendiculares. Que los niños piensen para los diferentes elementos del dibujo: ¿Cómo saldrá más exacto, construyendo paralelas o construyendo perpendiculares?

Distancia entre rectas paralelas

¿Cómo medimos la distancia entre dos paralelas? Podríamos colocar la regla de cualquier manera, y obtendríamos en cada medición un resultado distinto.



Esa no es la manera de hacerlo. Cuando hablamos de la distancia entre rectas paralelas, nos referimos a la distancia *más corta*. Esa es la que se mide *en ángulo recto* a las paralelas. Entonces tenemos que construir primero en algún lugar una recta que cruza las dos paralelas en ángulos rectos. Después medimos la distancia entre los dos puntos de intersección.



Hoja de trabajo 56.3, no.3: Distancias entre paralelas

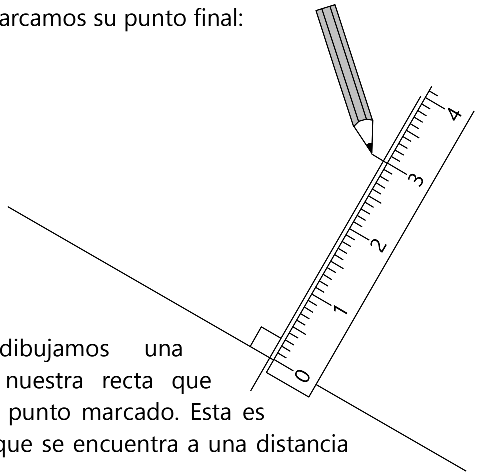
En cada ejemplo, mide y escribe la distancia entre las paralelas dadas. Recuerda que para medir correctamente, tienes que construir primero una recta perpendicular a las paralelas.

En el no.3 será necesario prolongar una de las paralelas (o ambas) para poder construir y medir una perpendicular.

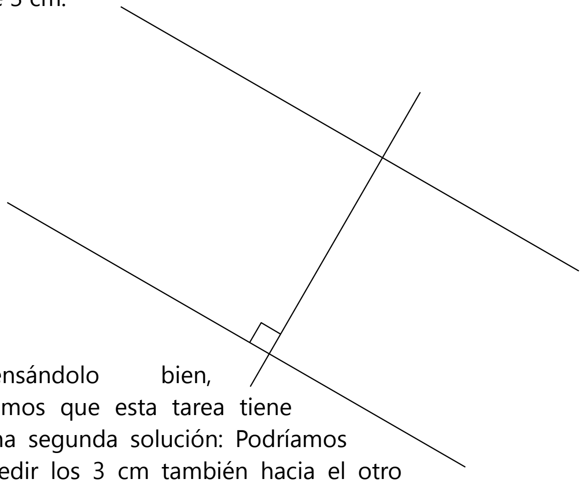
Construcción de una paralela a una distancia dada

Tenemos una recta, y queremos construir una paralela a una distancia de 3 cm. ¿Cómo hacemos eso? (Que los niños lo piensen primero. Quizás descubren la respuesta por sí mismos.)

Recordemos que la distancia se mide en ángulo recto. Por tanto, primero tenemos que construir una recta perpendicular a la recta dada. Podemos hacerlo en cualquier lugar, pero que tenga una intersección con nuestra recta, y que permita medir desde allí la distancia de 3 cm. Entonces medimos la distancia de 3 cm desde la intersección y marcamos su punto final:



Después dibujamos una paralela a nuestra recta que pasa por el punto marcado. Esta es la paralela que se encuentra a una distancia de 3 cm:



Pensándolo bien, vemos que esta tarea tiene una segunda solución: Podríamos medir los 3 cm también hacia el otro lado. O sea, existen *dos* paralelas que tienen una distancia de 3 cm de nuestra recta; una por cada lado.

> **Vocabulario matemático**
>
> **Segmento *(de una recta):*** Porción de una recta que es delimitada por dos puntos determinados de la recta.
>
> **Punto de intersección *(de dos rectas):*** El punto que pertenece a ambas rectas (en el lugar donde se cruzan).

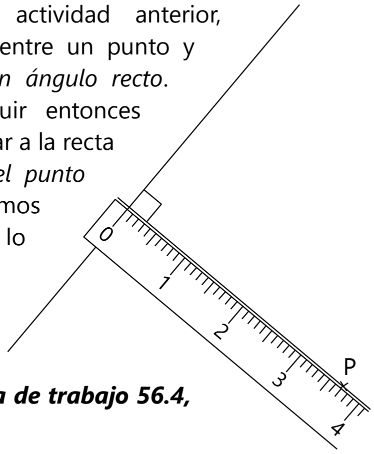
Hoja de trabajo 56.4, no.1: Construcción de paralelas

Practica la construcción que acabamos de explicar. Recuerda que siempre existen *dos* paralelas en la distancia indicada; construye ambas.

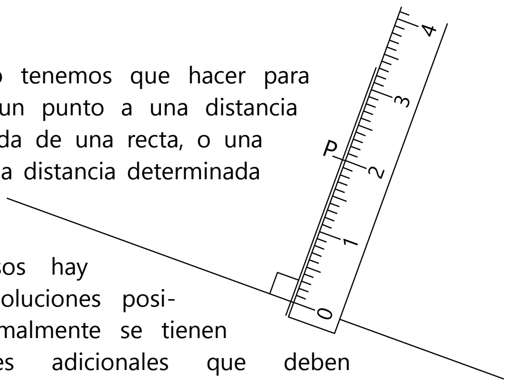
Nota: Al hablar de "la distancia entre dos rectas paralelas", hemos asumido silenciosamente que esa distancia *es la misma por todas partes*. Si quisiéramos ser matemáticamente rigurosos, tendríamos que demostrar primero que eso es realmente así. En el nivel de Secundaria I entraremos en unos detalles de tales demostraciones. Por ahora nos contentamos con ver que al observar las paralelas, este hecho parece obvio; y podemos añadir la siguiente explicación "no rigurosa": Si la distancia no fuera siempre la misma, habría un lado por donde la distancia disminuye. Entonces, si continuáramos en esa dirección, la distancia seguiría disminuyendo hasta que en algún momento sería cero – o sea las rectas se cruzan, y entonces no serían paralelas.

Distancia entre un punto y una recta

Igual como en la actividad anterior, también la distancia entre un punto y una recta se mide *en ángulo recto*. Tenemos que construir entonces una recta perpendicular a la recta dada, *que pase por el punto dado*. Después podemos medir la distancia a lo largo de esta recta:



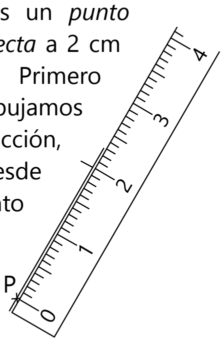
Puedes practicarlo con la ***Hoja de trabajo 56.4, no.3.***



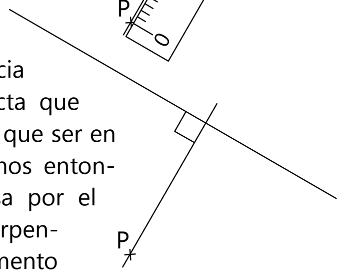
Lo mismo tenemos que hacer para construir un punto a una distancia determinada de una recta, o una recta a una distancia determinada de un punto. En estos casos hay muchas soluciones posibles. Normalmente se tienen condiciones adicionales que deben cumplirse; pero eso sería demasiado difícil a este nivel, excepto en unas situaciones muy elementales.

Vamos a construir un punto a una distancia de 2 cm de la recta dada: Primero construimos una recta perpendicular a la recta dada. (Ya que no hay otras condiciones dadas, podemos hacerlo en cualquier lugar.) Después medimos sobre esta recta perpendicular 2 cm desde su intersección con la recta dada. Marcamos el punto final de esta distancia. Este punto cumple la condición: está a una distancia de 2 cm de la recta dada.

En el siguiente ejemplo tenemos un *punto* dado, y queremos construir una *recta* a 2 cm de distancia de este punto. Primero medimos 2 cm desde el punto. Dibujamos una recta hacia cualquier dirección, medimos sobre esta recta 2 cm desde el punto dado, y marcamos el punto final.



Ahora, para que este segmento sea realmente la distancia entre el punto y la recta que vamos a construir, tiene que ser en ángulo recto. Construimos entonces una recta que pasa por el punto marcado, y es perpendicular a nuestro segmento de 2 cm:

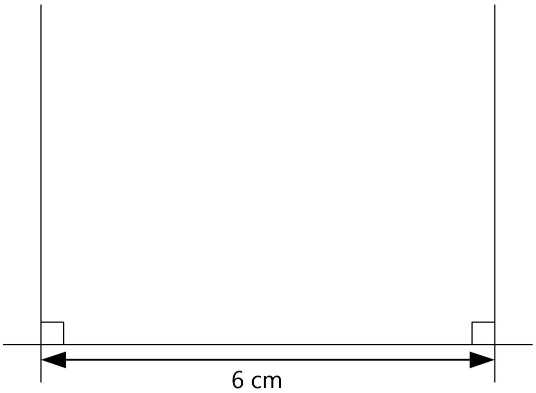


Practícalo con la ***Hoja de trabajo 56.4, no.2 y 4.***

Construcción de rectángulos

Con lo que hemos hecho hasta ahora, estamos listos para construir nuestra primera figura geométrica: un rectángulo con medidas dadas. Digamos que queremos un rectángulo de 6 por 4 cm. ¿Cómo lo construiremos para que sea exacto? Que los niños lo piensen un poco; quizás podrán hacerlo sin más instrucciones. Solamente hay que estar conscientes de las condiciones que se deben cumplir: Los lados deben medir 6 cm resp. 4 cm; y en los vértices debemos tener ángulos rectos.

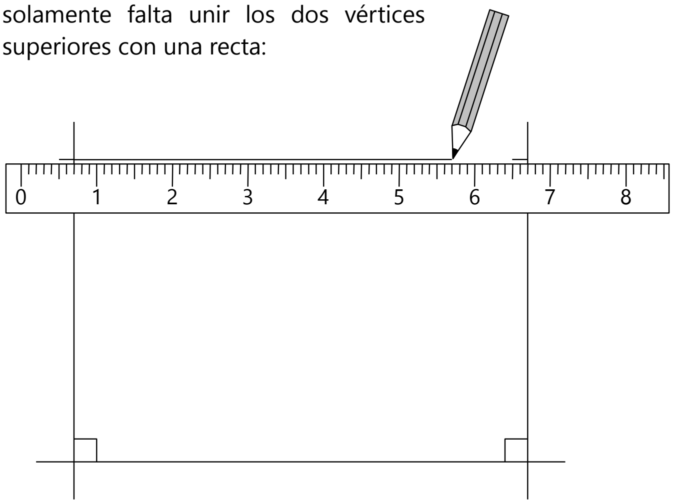
- Bien, para quienes prefieren seguir instrucciones, aquí hay una "receta":



Comencemos con la base de 6 cm. Dibujamos un segmento recto de esta longitud. Después construimos rectas perpendiculares a este segmento en sus dos puntos marcados *(Dibujo anterior)*.

En cada una de estas rectas perpendiculares medimos 4 cm desde la base, y marcamos el punto final de esta distancia:

Ahora tenemos los cuatro vértices del rectángulo, y solamente falta unir los dos vértices superiores con una recta:



- ¿Tiene el lado superior la misma longitud como la base?

(Mídelo con la regla. Debe medir exactamente 6 cm.)

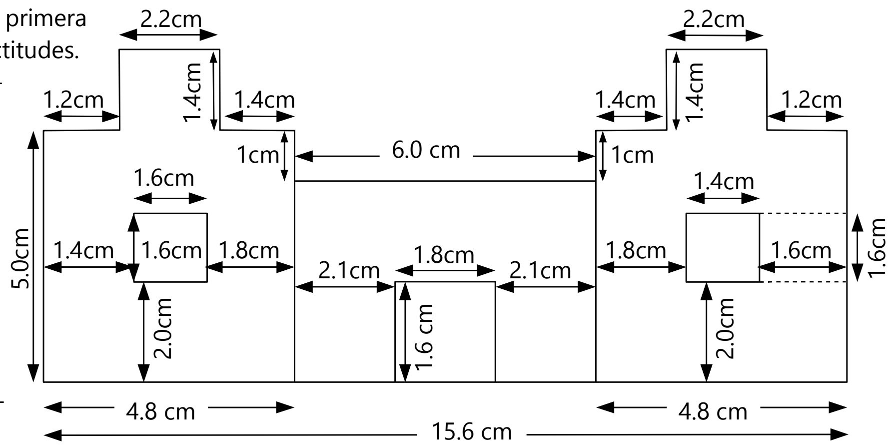
Si todas estas comprobaciones resultan bien, podemos estar contentos. Si no, habrá que intentarlo una vez más.

Hagan algunos otros rectángulos con otras medidas.

Ejercicio: Reproduce la siguiente figura según las medidas indicadas. (Todos los ángulos son rectos.)

Sin embargo, si hacemos esto por primera vez, puede haber todavía unas inexactitudes. Se recomienda controlar si la construcción es exacta:

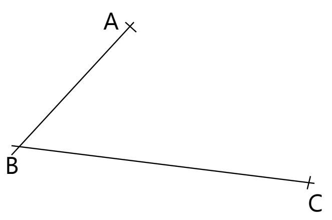
- ¿Es el lado superior paralelo a la base? (Usa la escuadra y la regla como si quisieras construir una paralela a la base. Comprueba si esta paralela coincide con el lado superior de tu rectángulo.)
- ¿Los vértices superiores tienen ángulos rectos? (Coloca la escuadra dentro de las esquinas para comprobarlo.)



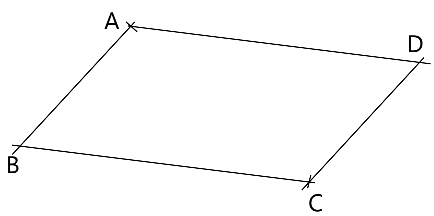
Ampliaciones

Construcción de un paralelogramo

Para construir un paralelogramo, podemos comenzar con un vértice y dos lados cualesquieras que parten desde ese vértice. Mientras no hay otras condiciones que debemos cumplir, estos lados pueden tener cualquier longitud y cualquier ángulo entre sí.



Ahora, para completar el paralelogramo tenemos que cumplir la condición de que sus lados son paralelos entre sí de dos en dos. Entonces construimos una paralela a AB que pasa por C, y una paralela a BC que pasa por A. Con eso, el paralelogramo está completo:



Hoja de trabajo 56.5: Construcción de rectángulos y paralelogramos

Los nos.1 y 2 contienen una pequeña pregunta de investigación. Podemos formularla de esta otra manera: Si pudiéramos construir *todos* los puntos que cumplen la condición, ¿qué figura geométrica formarían? *(Vea Anexo A.)*

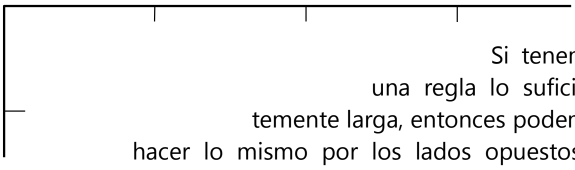
Los nos.3 a 6 se pueden todos solucionar con construir rectas perpendiculares o paralelas. (Para el no.6, recuerda que un rombo es también un paralelogramo, o sea sus lados opuestos son paralelos.)

Cortar papeles o tarjetas rectangulares

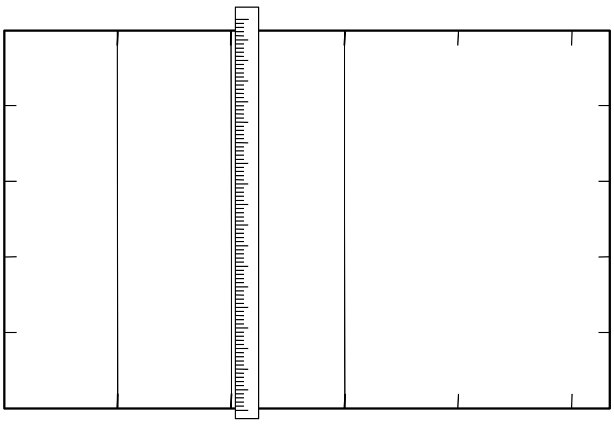
A veces necesitamos cierta cantidad de tarjetas o papeles rectangulares; por ejemplo para hacer tarjetas de invitación, para fabricar un juego de cartas, o para otros propósitos. Ahora ya sabes todo lo necesario para cortar tales tarjetas de un papel o una cartulina más grande con exactitud.

Normalmente, el papel o la cartulina ya tiene una forma rectangular. En este caso no necesitamos construir un ángulo recto: podemos usar directamente los ángulos de las esquinas del papel. Supongamos que queremos tarjetas de 7 x 10 cm. Entonces por un lado del papel marcamos segmentos de 7cm, y por el otro lado, en ángulo recto al primero, segmentos de 10 cm.

En un ejercicio anterior hemos marcado segmentos sucesivos, comenzando cada vez con el cero de la regla. Hemos visto que eso introduce cierta inexactitud. Resulta más exacto utilizar todo el largo de la regla para marcar tantos segmentos sucesivos como podemos. Por ejemplo si tenemos una regla de 30cm y queremos marcar segmentos de 7cm, podemos hacer marcas en 7cm, 14cm, 21cm y 28cm. Así ya hemos marcado cuatro segmentos sucesivos.

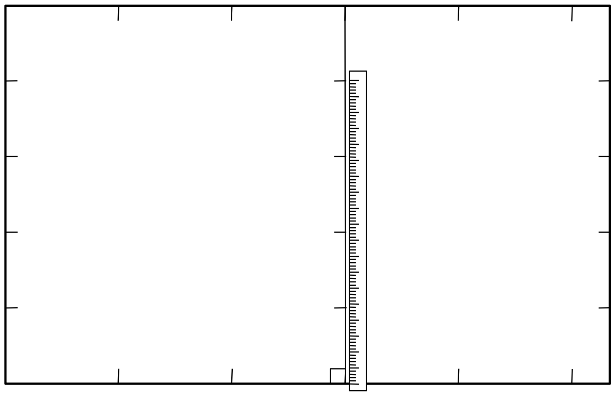


Si tenemos una regla lo suficientemente larga, entonces podemos hacer lo mismo por los lados opuestos, y después unimos las marcas correspondientes con líneas rectas, usando la regla. Así los rectángulos ya están marcados.

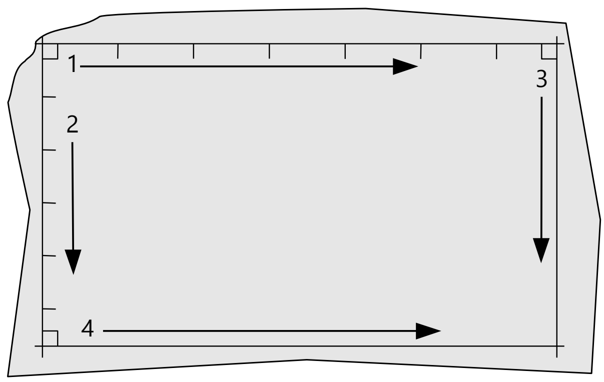


Pero si tenemos un papel o una cartulina grande, la regla no alcanzará para unir ambos extremos. ¿Qué hacemos en este caso? – Piénsalo primero, antes de seguir leyendo.

Una solución consiste en hacer marcas intermedias en la mitad del papel. Entonces podemos unir las marcas de un borde con las marcas del medio, y éstas con las marcas del otro lado. (O si la regla tampoco alcanza hasta la mitad del papel, hacer marcas intermedias a intervalos más cortos.) Solamente tenemos que recordar que las distancias, para que sean exactas, tienen que medirse en ángulo recto. Entonces tenemos que construir primero una recta en ángulo recto al borde del papel, y después medir las distancias sobre esta recta.



- Por el otro lado, si tenemos un recorte de papel o cartulina que no es rectangular, tenemos que construir primero una esquina en ángulo recto para empezar. Desde allí podemos marcar los segmentos a lo largo de los lados que forman esta esquina. Cuando llegamos al final de cada lado, construimos allí un nuevo ángulo recto, y así podemos completar la construcción.



Matemática divina

El camino recto

Una definición popular de una recta es la siguiente: "La recta es la línea más corta entre dos puntos." La recta es el camino que nos lleva más directamente a la meta, sin torcer por un lado y otro.

La Biblia dice acerca de Dios: "Todos sus caminos son rectitud; Dios de verdad, y ninguna iniquidad hay en él. Él es justo y recto." (Deuteronomio 32:4)
También dice: "El camino del hombre perverso es torcido y extraño; pero la obra del limpio es recta." (Proverbios 21:8)

"Recto" significa también "justo, íntegro". Actuando con integridad y justicia, llegamos más directamente a la meta que Dios tiene para nosotros. Un camino torcido parece inclinarse primero hacia un lado y después hacia otro, no tiene una dirección clara. Una persona íntegra, en cambio, no disimula: da a conocer claramente adónde se dirige.

¿A dónde vamos desde aquí?

Se recomienda continuar en orden, para completar la práctica de las construcciones básicas. Después de la siguiente Unidad (57) estaremos listos para casi cualquier clase de construcciones.

Unidad 57 - Uso del compás

Prerrequisitos:
- Conceptos básicos de figuras geométricas *(Unidad 54).*
- Construcciones básicas con regla y escuadra *(Unidad 56)*.

Materiales necesarios:
- Compás, regla, escuadra, lápiz.
- *(para fabricar los conos en "Ampliaciones":)* Cartulina, tijera, goma.

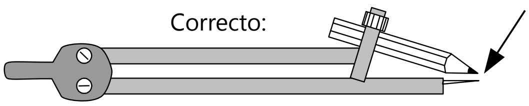
TALLER

Alistamos el compás

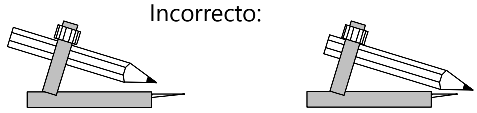
La apertura de los brazos del compás debe poder ajustarse con un poco de esfuerzo, y debe mantenerse fija mientras dibujamos. Muchos compases tienen un tornillo por cada lado de su vértice que permite regular la facilidad con que se mueve el brazo: si el brazo está demasiado flojo, ajuste el tornillo; si está demasiado duro, aflójelo.

Las dos puntas del compás (la punta de metal y la punta del lápiz) deben tener la misma longitud, para poder dibujar arcos con exactitud.

Correcto:

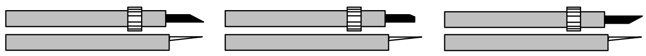


Incorrecto:



La punta del lápiz debe estar bien afilada. Si usamos un modelo de compás con una mina sola (sin lápiz completo), ésta se afila con un poco de lija de grano fino, limándola por un lado en dirección diagonal, de manera que la punta quede por el lado de la punta de metal:

Correcto: | Incorrecto: Punta no afilada | Incorrecto: Punta volteada



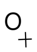
Para usar el compás, el papel no debe encontrarse sobre una superficie demasiado dura: debe ser posible clavar la punta de metal en la superficie. Una mesa de madera normalmente sirve bien; o se puede colocar el papel encima de un cuaderno grande.

Dibujar círculos

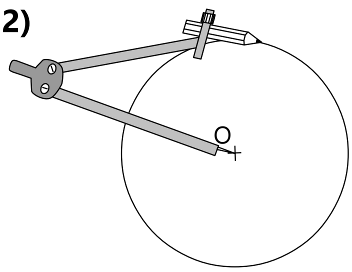
Este es el uso más conocido del compás. Pero veremos más adelante que el compás tiene otros usos no menos importantes.

Al trabajar con círculos, a menudo es importante saber dónde se encuentra el *centro* del círculo. Por tanto se recomienda mucho, marcar el centro de un círculo *antes* de dibujarlo. Una vez que el círculo está dibujado y hemos sacado el compás del papel, a menudo ya no es posible ubicar su centro.
Entonces, marcamos primero un punto (como hemos aprendido en la Unidad anterior) como centro del círculo que vamos a dibujar. Después colocamos la punta de metal del compás en este punto y dibujamos el círculo.

1)



2)

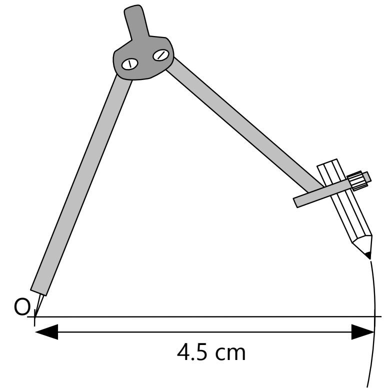


Mientras estamos dibujando con el compás, nunca hay que coger sus dos brazos simultáneamente, porque eso podría inadvertidamente cambiar su ángulo de apertura. Cogemos el compás arriba en su vértice, y presionamos ligeramente sobre el brazo que tiene la punta de metal. El otro brazo (el que tiene el lápiz) debe poder moverse libremente con poca o ninguna presión.
Mientras damos la vuelta alrededor del círculo, inclinamos el compás ligeramente para que el brazo con el lápiz se esté "arrastrando" un poco, pero nunca empujando.

Practíquenlo algunas veces hasta que los círculos les resulten bien.

Dibujar un círculo con radio dado

Queremos dibujar un círculo que tenga un radio de 4.5 cm. Definimos primero dónde estará su centro. Desde este punto medimos y dibujamos un segmento recto de 4.5 cm de largo. Colocamos la punta de metal del compás en el punto inicial del segmento (o sea, donde será el centro del círculo). Ajustamos la apertura de los brazos hasta que la punta del brazo con el lápiz coincida con el punto final del segmento. Dibujamos el círculo con esta apertura del compás.



Hoja de trabajo 57.1: Dibuja círculos

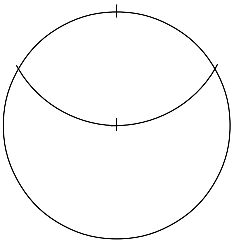
Sigue las instrucciones. Por ejemplo para dibujar un círculo con centro en R, que pasa por C, coloca la punta de metal del compás en R, y estira o ajusta su otro brazo hasta que la punta de lápiz coincide con C. Entonces dibuja el círculo con este radio.

Hoja de trabajo 57.2 – No.1: Dibuja círculos con radios dados – Usa la construcción descrita anteriormente.

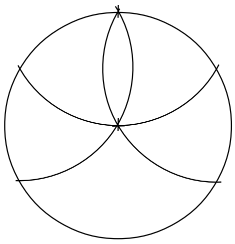
Nota: En el transcurso de estas actividades de construcción, y las siguientes, podemos introducir informalmente términos como "centro", "circunferencia", "radio", "diámetro", etc. *(Vea en "Vocabulario matemático".)*

Flores de círculos

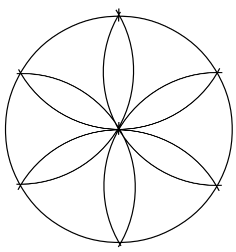
Este es un pequeño proyecto de arte que hace uso del compás. Comenzamos con un círculo. (¡No olviden marcar el centro primero!) Durante el proceso entero, nunca hay que alterar la apertura del compás, para dibujar todos los arcos con el mismo radio. – Marcamos un punto en la circunferencia, y dibujamos desde allí un arco desde una intersección con la circunferencia hasta la otra, dentro del círculo. Si lo hemos hecho con exactitud, este arco debe pasar por el centro del círculo.



Dibujamos arcos iguales desde las dos intersecciones del primer arco con la circunferencia:



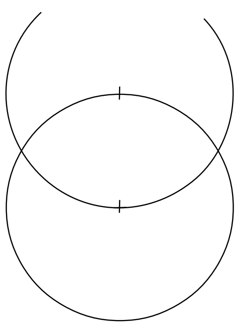
Continuamos así hasta que los arcos vuelvan a unirse por el otro lado de la circunferencia. Si lo hacemos con exactitud, se unirán en un solo punto opuesto al punto donde comenzamos, y todos los arcos pasarán por el centro del círculo:



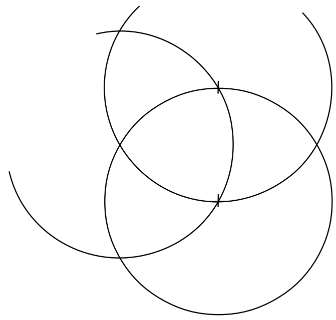
Coloreamos esta "flor" para que la obra de arte sea completa.

(¿Por qué los arcos se unen tan exactamente por el lado opuesto del círculo? – En la sección "Principios matemáticos" hay una explicación.)

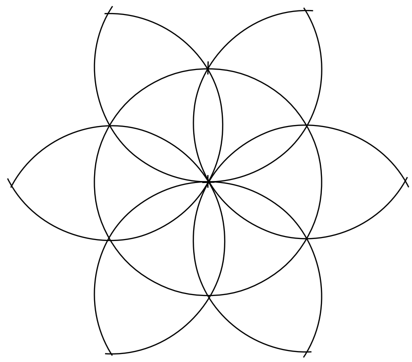
2. Para otro tipo de "flor" usamos la misma construcción, pero prolongamos los arcos afuera del círculo hasta tener aproximadamente $^3/_4$ de un círculo:



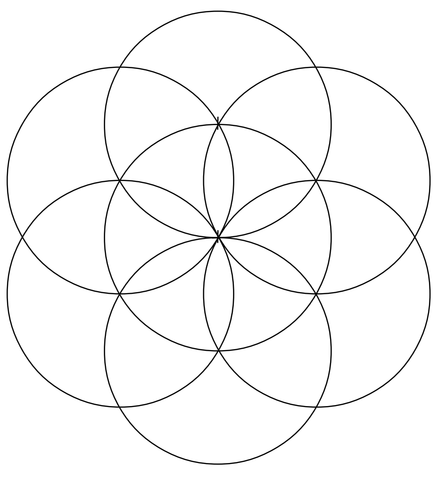
Ahora, cuando dibujamos el siguiente arco de la misma manera, se cruza con el primer arco afuera del círculo.



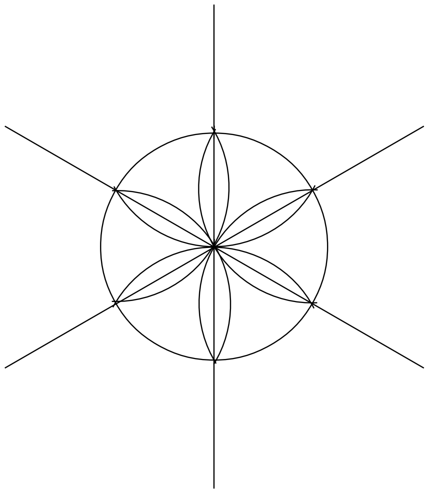
Podemos borrar las partes de los arcos que van más allá del punto de intersección; esos ya no necesitamos. Con el tiempo podrán estimar mejor hasta dónde dibujar los arcos para que se produzca la intersección. Al final quedará así:



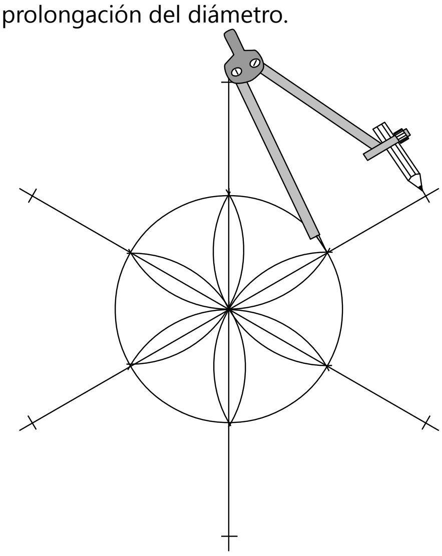
3. Otra flor resulta con la misma construcción como antes, pero en vez de dibujar solamente arcos, dibujamos círculos completos. Eso quedará así:



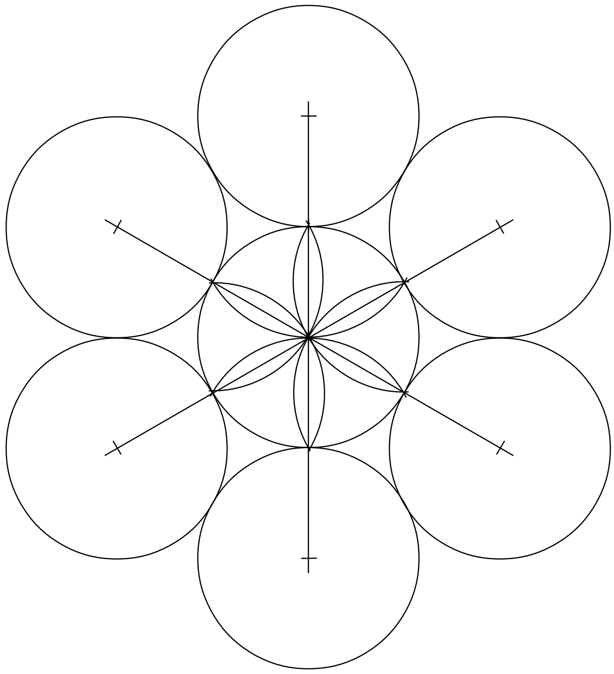
4. Un ejemplo más: Para este hay que empezar con un círculo un poco más pequeño que los anteriores. Dibujamos una flor como la primera. Después construimos los diámetros del círculo que pasan por las intersecciones de los arcos, y los prolongamos hacia afuera:



En cada una de estas prolongaciones de los diámetros marcamos un segmento con la longitud de un radio del círculo, comenzando en la circunferencia. Eso lo podemos hacer también con el compás: Colocamos la punta del compás en el punto de la circunferencia, y dibujamos una rayita corta que tiene una intersección con la prolongación del diámetro.



Con los puntos extremos de estos segmentos como centro, dibujamos nuevos círculos alrededor del primero, con el mismo radio. Si lo hacen exactamente, estos círculos se tocarán todos entre sí:

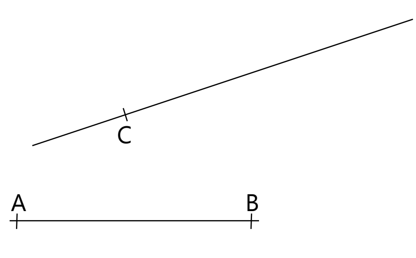


Podemos dejarlo así; o podemos repetir en cada uno de los círculos exteriores el mismo diseño como en el círculo interior; o podemos combinar el diseño no.3 con éste.

Hagan sus propios experimentos con el compás: quizás inventan otros tipos interesantes de flores de círculos.

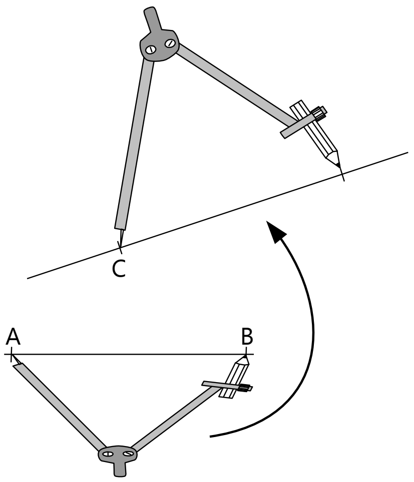
Uso del compás para copiar distancias

Si dejamos la apertura del compás constante sin alterarla, podemos usarla para "trasladar" segmentos a otros lugares. Por ejemplo, tengo un segmento AB en una recta, y quiero construir un segmento de la misma longitud en otra recta, comenzando desde el punto C.



Podríamos medirlo con la regla, y después construir la misma medida en la otra recta. Pero quizás el segmento AB no mide un número exacto de milímetros; entonces esto produce una pequeña inexactitud. Con el compás podemos hacerlo de manera más "limpia":

Colocamos la punta de metal del compás en el punto A, y ajustamos su apertura para que la punta de lápiz coincida con el punto B. Después llevamos la punta de metal al punto C (¡sin alterar la apertura del compás!), y marcamos desde allí la apertura del compás sobre esta recta. Con eso ya tenemos el segmento buscado.



Vemos que este problema tiene dos soluciones; porque podríamos haber marcado también un segmento hacia el lado *izquierdo* de C.

De la misma manera podemos "trasladar" círculos y otras figuras geométricas. Para construir un círculo del mismo tamaño como un círculo dado, necesitamos conocer el centro del primer círculo. Desde allí "medimos" con el compás la distancia hasta su circunferencia. Ahora la apertura del compás es igual al radio del primer círculo; y podemos dibujar otro círculo con el mismo radio en cualquier parte que deseamos.

Hoja de trabajo 57.2 – No.2, 3, 4

Todas estas actividades requieren copiar segmentos con el compás. La idea es que se use el método descrito anteriormente; no que se midan los segmentos con regla.

El no.3, sin embargo, requiere que se trace una recta desde P, para poder marcar en esta recta dos veces el radio del círculo. Pero esta medición del radio debe hacerse con el compás, para practicar.

En el último ejemplo del no.4, quizás algunos niños se confunden cuando se dan cuenta de que la solución queda afuera del cuadro. Pero no hay ningún problema con prolongar la recta más allá del cuadro. A veces tenemos que “pensar más allá de nuestro cajón”.

Vocabulario matemático

Centro *(de un círculo):* El punto del medio de un círculo, que tiene la misma distancia desde todos los puntos de la circunferencia.

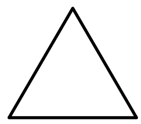
Circunferencia: La línea que forma el contorno de un círculo. Todos sus puntos tienen la misma distancia del centro.

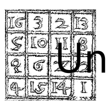
Radio *(de un círculo):* La distancia entre el centro y la circunferencia de un círculo.

Diámetro *(de un círculo):* La longitud de un segmento que atraviesa el círculo y pasa por su centro. Por tanto, mide el doble del radio. – El diámetro es la mayor distancia posible entre dos puntos de una circunferencia.

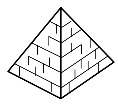
Arco *(circular):* Parte de una circunferencia.

Triángulo equilátero: Un triángulo que tiene tres lados iguales.





Un poco de historia



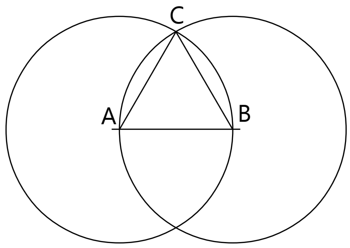
Muchas de las construcciones que practicamos aquí, se remontan a los antiguos griegos de hace más de 2000 años. Para ellos era muy importante, realizar todas las construcciones solamente con regla (sin graduación) y compás. Entonces ellos no podían medir un segmento con la regla y dibujar otro con la misma medida. Necesariamente tenían que hacerlo con el compás.
Pero ellos todavía no tenían compases tan buenos como nosotros. Para ellos no fue posible mantener la apertura del compás mientras lo transportaban de un lugar a otro.

Por eso, el problema de construir un segmento igual a otro fue mucho más complicado para ellos. Euclides, en su famoso libro "Elementos", lo enseña así:

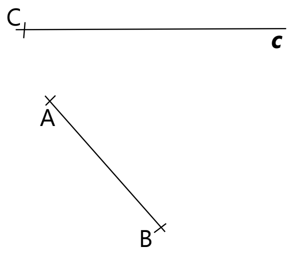
Primero aprendemos a construir un *triángulo equilátero*, o sea un triángulo que tiene sus tres lados iguales. Esta construcción necesitaremos más adelante:

Queremos que el segmento AB sea un lado del triángulo. Dibujamos un círculo con centro en A y radio AB. Después dibujamos un círculo con centro en B y radio AB. Donde se cortan los dos círculos, se encuentra el tercer vértice del triángulo:

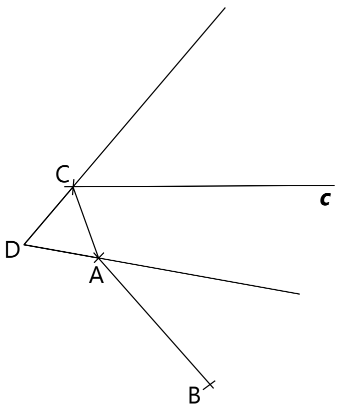
AC es un radio del círculo con centro en A y radio AB, por eso es igual a AB. BC es un radio del círculo con centro en B y radio AB, por eso es también igual a AB. Por tanto, los tres lados del triángulo son iguales.



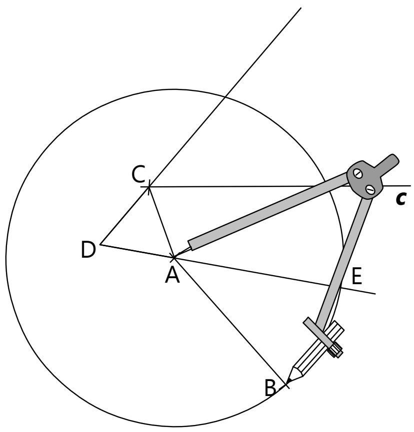
Ahora pasamos al problema de construir un segmento igual. Queremos un segmento igual a AB, que comience en C y y esté sobre la recta ***c***:



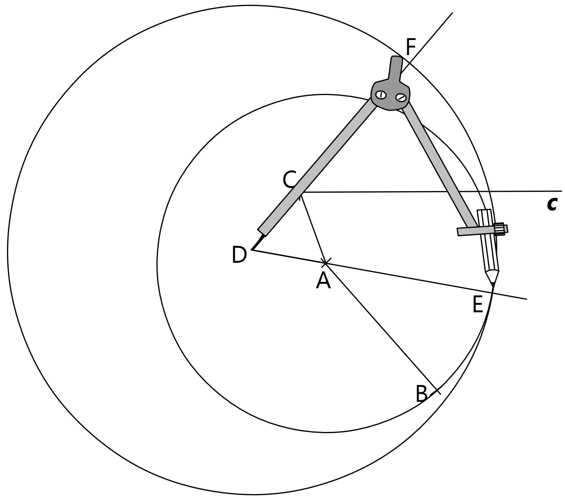
Primero unimos A con C, y construimos un triángulo equilátero sobre AC. Prolongamos los lados del triángulo más allá de A y de C: (No estoy dibujando los círculos aquí, para que no tengamos demasiadas líneas más adelante.)



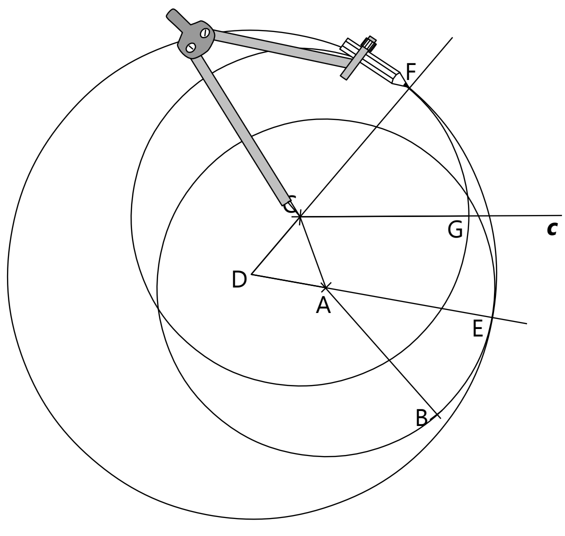
Dibujamos un círculo con centro en A y radio AB. Esto produce la intersección E, y sabemos que AE = AB.



Ahora dibujamos un círculo con centro en D y radio DE. Lo que nos interesa es su intersección con el otro lado prolongado del triángulo; la llamamos F.



Tenemos que razonar un poco para entender la utilidad de esta construcción: DE es la suma de nuestro segmento AB más el lado del triángulo. Por causa del círculo que hemos construido, DF = DE. Pero DF es la suma del lado del triángulo más el segmento CF. Y los lados del triángulo son todos iguales. Por eso, CF es igual a nuestro segmento original AB. ¡Ya hemos "transportado" nuestro segmento al punto C!
Solamente falta ubicarlo sobre la recta ***c***. Dibujamos un círculo con centro en C y radio CF. Donde este círculo corta la recta ***c***, termina el segmento que estamos buscando (CG):



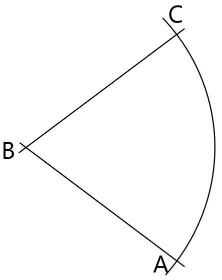
Seamos agradecidos por tener mejores herramientas que los antiguos griegos, así podemos hacer las cosas de manera más sencilla. Por el otro lado, ¡es bueno seguir sus razonamientos para entrenar nuestra inteligencia!

TALLER (Continúa)

Construcción de un rombo con el compás

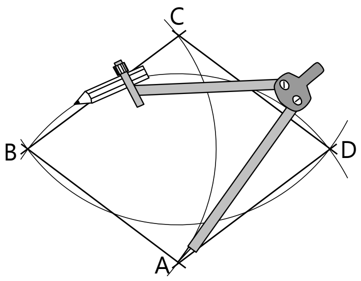
Usaremos esta capacidad del compás de "trasladar distancias" para algunas otras construcciones.

Dibujamos un arco de círculo (marcando el centro primero), y dos de sus radios. (El ángulo entre los radios no importa, mientras no tenemos otras condiciones que cumplir.) Estos dos radios representan dos lados de un rombo, y queremos completar el rombo. Llamamos el centro B, y los puntos finales de los radios A y C.



Un rombo es un cuadrilátero con cuatro lados iguales. Los dos lados que tenemos ya son iguales, porque son radios de un mismo arco de círculo. Necesitamos dos otros lados de este mismo tamaño.

Sin alterar la apertura del compás, colocamos su punta de metal en el punto A y dibujamos desde allí un arco de círculo con el mismo radio, "hacia afuera". Después – siguiendo con la misma apertura del compás – dibujamos otro arco de círculo desde C como centro, de manera que forma una intersección con el arco anterior. Llamamos D a esta intersección. Unimos AD y CD con segmentos rectos.



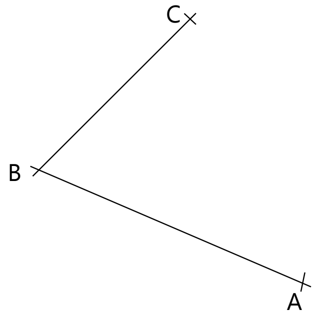
Ahora, AD y CD son radios de arcos que hemos dibujado con el mismo radio como el primero. Por tanto, estos segmentos miden igual como BA y BC. Efectivamente hemos construido un rombo: Sus cuatro lados son iguales.

Construyan unos rombos para practicar esta construcción.

Nota: Podríamos construir un rombo de otra manera, tomando en cuenta que un rombo es también un paralelogramo, o sea que sus lados son paralelos de dos en dos. Entonces podemos completarlo como el paralelogramo en la Unidad anterior: Después de construir el primer arco con los puntos A y C, podríamos construir una paralela a BA que pasa por C, y una paralela a BC que pasa por A. Así también se completa el rombo.

Construcción de un paralelogramo con el compás

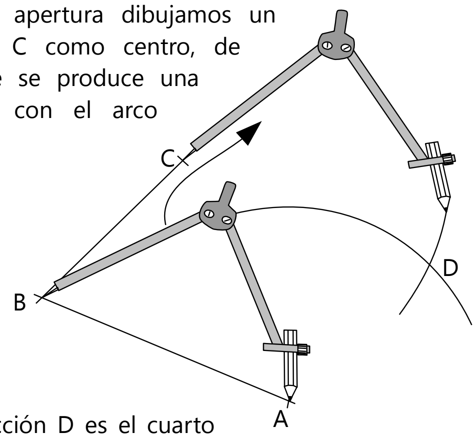
En la Unidad anterior hemos construido paralelogramos mediante rectas paralelas. Pero un paralelogramo puede construirse también con la ayuda del compás, de manera similar como antes construimos el rombo:



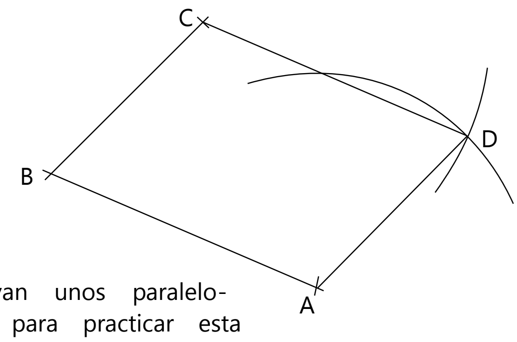
Comenzamos con dos lados adyacentes a un vértice común. Por lo demás, estos dos lados pueden tener posiciones cualesquieras, porque no hay otras condiciones que cumplir.

En un paralelogramo, dos lados opuestos son paralelos. Pero no solamente eso: tienen también la misma longitud.
(Todavía no haremos una demostración exacta de eso. Pero parece lógico, porque estos dos lados se encuentran entre otro par de paralelas, que son los otros dos lados; y sabemos que la distancia entre dos paralelas es la misma por todas partes; entonces parece lógico que lo mismo aplica también a distancias "inclinadas" como lo son nuestros dos lados paralelos.)

Usamos esta propiedad para completar nuestro paralelogramo con el compás:
"Medimos" el segmento BC con el compás. O sea, colocamos la punta del compás en B, y ajustamos su apertura hasta que la punta de lápiz coincide con el punto C. *Con esta misma apertura del compás* dibujamos un arco desde el punto A como centro.
Después "medimos" el segmento BA con el compás. Con esta misma apertura dibujamos un arco desde C como centro, de manera que se produce una intersección con el arco anterior.



Esta intersección D es el cuarto vértice del paralelogramo: CD es un radio de un arco que se dibujó con un radio igual a BA, entonces CD=BA. Y AD es un radio de un arco dibujado con un radio igual a BC, entonces AD=BC. O sea, los lados opuestos son iguales; por tanto es un paralelogramo.



Construyan unos paralelogramos para practicar esta construcción.

Hoja de trabajo 57.3 – Construcciones de rombos y paralelogramos

Con estos problemas pueden practicar las construcciones anteriores. Los números *4, *5 y *6 son desafíos un poco más difíciles. Si lo han pensado por mucho tiempo y no pudieron solucionarlos, consulten el *Anexo A*.

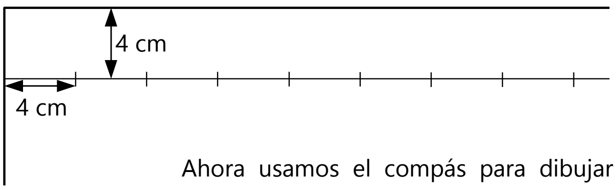
Ampliaciones

Fabricamos unos conos para juegos de mesa

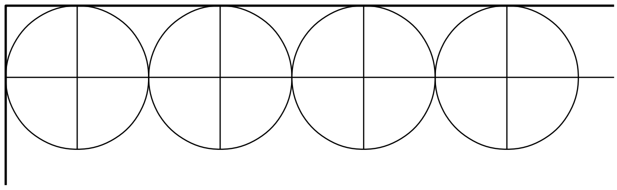
Estos conos de cartulina nos pueden servir para jugar juegos de mesa como Ludo, Damas chinas, y similares. Podemos usarlos también para las actividades de división con material contable como las que hicimos en la *Unidad 11* y en el nivel de Primaria I.

Los fabricamos de la siguiente manera:

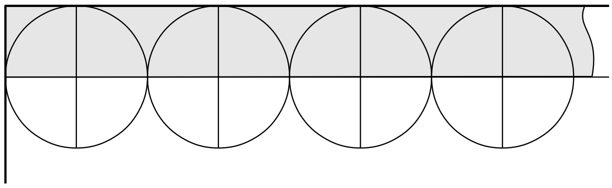
Construimos una serie de círculos del mismo tamaño (por ejemplo de 4 cm de radio), tantos como deseamos. De cada círculo se producirán dos conos.
Para conseguir una fila ordenada de círculos sin desperdiciar mucha cartulina, podemos construir primero una paralela a uno de los bordes de la cartulina, a una distancia de 4 cm. En esta paralela marcamos segmentos de 4 cm desde el borde de la cartulina:



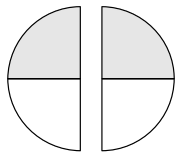
Ahora usamos el compás para dibujar los círculos, con la ayuda de los segmentos que ya están marcados. Construimos también los diámetros verticales de los círculos (en ángulo recto a la paralela larga):

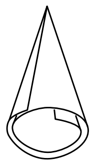


Plastificamos las mitades superiores de todos los círculos con cinta adhesiva transparente. Esto ayuda para que los conos duren más tiempo.



Ahora cortamos los círculos, y partimos cada círculo en dos por el diámetro vertical, de manera que cada semicírculo tenga una mitad plastificada y otra mitad sin plastificar.



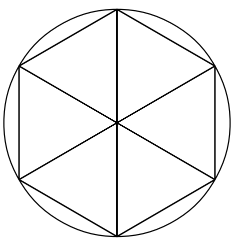


En cada semicírculo cubrimos la mitad sin plastificar con goma, lo enrollamos y lo pegamos en forma de cono.

Principios matemáticos

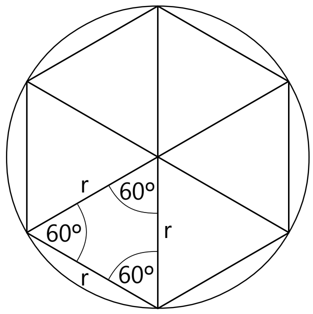
Por qué funciona la "flor de círculos"

Los conceptos matemáticos para explicar este fenómeno pueden ser demasiado avanzados para niños de primaria. Algunos podrán entenderlo después de comprender los polígonos regulares *(Unidad 64)* y las propiedades de los ángulos *(Unidad 95)*.



Un hexágono regular puede dividirse desde su centro en seis triángulos:

El ángulo en el centro (la "vuelta completa" de 360º) queda entonces dividido en 6 ángulos de 60º. Los segmentos que unen el centro con los vértices, son radios del círculo, y por tanto miden todos igual.



Entonces tenemos triángulos isósceles. Esto significa que sus otros dos ángulos son iguales entre sí. Y puesto que la suma de los ángulos en un triángulo es 180º, estos ángulos miden cada uno (180 – 60) ÷ 2 = 60º.
Se trata entonces de triángulos con tres ángulos iguales de 60º; o sea *triángulos equiláteros*. Por tanto, sus lados exteriores también deben ser iguales al radio.

Entonces, si escogemos un punto en la circunferencia y medimos desde allí con el compás una distancia igual al radio hacia ambos lados, llegamos a los dos vértices adyacentes del hexágono regular. Y si desde allí continuamos este proceso, obtenemos los otros vértices.

Unidad 58 - Casitas de cartulina

Prerrequisitos:
- Construcciones básicas con regla, escuadra y compás *(Unidades 56 y 57)*.
- Haber armado unos recortables prediseñados *(Unidad 55)*.

Materiales necesarios:
- Varias cajitas como muestras.
- Cartulina, regla, escuadra, lápiz, borrador, colores, tijeras, goma.
- Cubitos de madera; por ejemplo los cubitos de unidad de las regletas Cuisenaire.

Para los educadores

La construcción de recortables propios es una aplicación interesante de las técnicas de dibujo geométrico que aprendimos hasta ahora. Es además un buen desafío a la imaginación tridimensional. Se recomienda que los niños adquieran primero algunas experiencias armando recortables prediseñados *(Unidad 55)*, antes que comiencen a diseñar los suyos propios.

La construcción de recortables propios puede ser un desafío también para muchos padres y educadores. Si usted se siente inseguro(a) en esta clase de actividades, practíquelo primero por usted mismo según las instrucciones del Taller, antes de hacerlo con los niños. Quizás conoce a alguien que tiene más experiencia con este tipo de trabajos y a quien puede pedir ayuda; o a un profesional en un campo afín como arquitectura, construcción, o diseño técnico.

Posiblemente los primeros modelos de los niños saldrán todavía imperfectos e inexactos. Eso no hace daño. Si los niños experimentan que su casita al armarla sale chueca, aprenderán con la experiencia cuán importante es la exactitud en las construcciones geométricas. Los modelos posteriores seguramente saldrán mejor.

El "Vocabulario matemático" de esta Unidad menciona varios términos relacionados con poliedros. Algunos de estos términos se pueden introducir de manera informal mientras trabajamos con los recortables, identificando sus propiedades geométricas. Pero no es necesario introducir todos estos términos "a la fuerza" ahora. El tema de los poliedros se retomará en las *Unidades 63 y 72*, donde podemos poner más énfasis en los términos y clasificaciones.

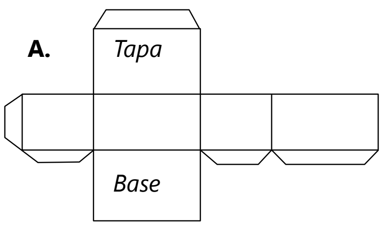
TALLER

Examinamos cajitas

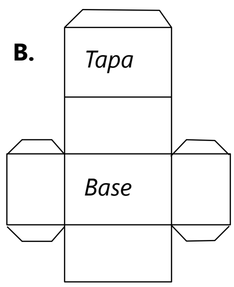
Consigan algunas cajitas de cartón: cajitas de crema dental, de jabón, de medicamentos, de alimentos, etc. Investiguen como están hechas. Desprendan cuidadosamente las partes que están pegadas con goma, para que puedan abrirlo todo y ver como la caja estaba originalmente diseñada en un cartón plano.

Si tienen diferentes tipos de cajitas, probablemente verán que no todas están diseñadas de la misma manera. Existen diferentes maneras de combinar las caras de la caja para conseguir una misma forma. Por ejemplo para una caja cuya cara superior funciona como tapa:

A.



B.



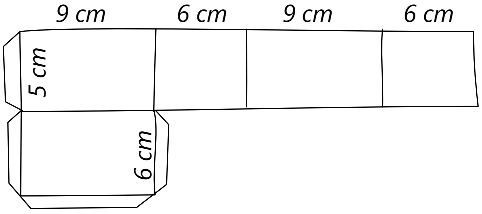
Algo que todos los diseños tienen en común, son las lengüetas adicionales en algunas partes, que sirven para poner goma y pegar una cara a otra. Examinen dónde es necesario tener una de esas lengüetas. *(Notarán que dos caras siempre se pegan en una arista común. La lengüeta puede adherirse a una o a la otra de estas dos caras; pero no a ambas.)*

Construimos nuestra propia cajita

Diseñamos ahora nuestra propia cajita. Que cada niño decida acerca de las medidas de su cajita: largo, ancho, y altura. Que piense también dónde estará ubicada la tapa: ¿Se abrirá la cara superior? ¿o una de las caras laterales? ¿o la caja estará abierta, sin tapa?

Ahora piensen cómo tiene que ser el diseño de la caja desdoblada sobre la cartulina. ¿Cómo tenemos que ubicar sus diferentes caras? – Obviamente, todas son rectángulos. Pero ¿cómo los combinamos para que estén en el orden correcto para formar la caja? ¿Dónde aparece el largo de la caja, dónde su ancho, dónde su altura?

Después dibujamos un borrador del diseño que queremos realizar en cartulina, indicando la ubicación de todas las partes y sus medidas. Por ejemplo así, para una caja abierta sin tapa:



El borrador no necesita ser una construcción exacta; puede dibujarse a mano alzada y sin preocuparse por medidas exactas.

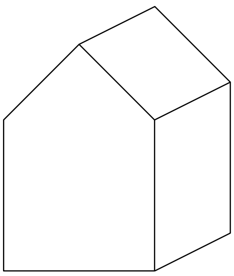
Sin embargo, para niños que hacen esto por primera vez puede ser bueno que dibujen su borrador más o menos a escala. (Por ejemplo pueden dibujarlo en papel cuadriculado, a una escala tal que cada cuadradito del papel corresponda a un centímetro en el modelo final). Después, que corten y armen su borrador (pero sin ponerle goma), como si fuera ya el modelo final, para verificar si el diseño está bien. Así pueden detectar de antemano si hay medidas que no coinciden, lengüetas mal ubicadas, etc. Si el diseño está mal, pueden hacer un nuevo borrador antes de construir el modelo final.

Como regla general, es mejor diseñar demasiadas lengüetas que muy pocas. Si al armar el modelo notamos que una lengüeta no es necesaria, podemos cortarla fácilmente. Pero es más trabajoso añadir una lengüeta adicional si nos damos cuenta de que falta una.

Realizar un diseño propio puede ser un desafío bastante grande a la imaginación tridimensional. Algunos niños preferirán guiarse con el modelo de una de las cajitas que examinamos en la actividad anterior, solamente adaptando algunas de sus medidas. Otros querrán desde el inicio realizar su propia creación. En este caso pueden necesitar bastante ayuda de un adulto o de un alumno mayor y experimentado, para entender cómo tendrá que ubicar las diferentes caras de la caja.

Finalmente construimos el modelo final en una hoja de cartulina, con las medidas que hemos indicado en el borrador. Lo pintamos, cortamos y armamos como los recortables prediseñados de la *Unidad 55*.

Casas y torres sencillas

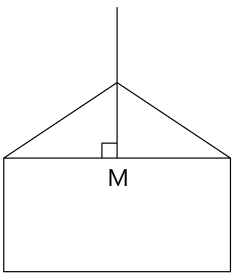


Casa con techo en caballete:

Esta figura no difiere mucho de una caja rectangular. Dos de sus paredes, y las superficies del techo, son rectángulos. Las paredes laterales se pueden construir combinando un rectángulo con un triángulo encima. En nuestro caso se trata de un triángulo *isósceles*: dos de sus lados son iguales. Entonces tenemos que iniciarnos en la construcción de triángulos.

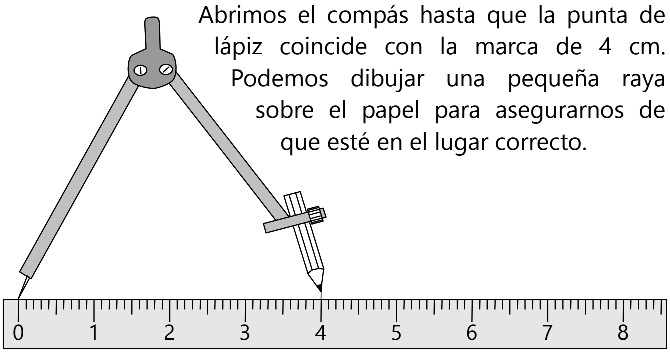
¿Cómo aseguramos que los triángulos sean isósceles, o sea que el caballete se encuentre en el medio?

1. Una posibilidad consiste en construir la *mediatriz* de la base: Medimos y marcamos el punto medio (M) de la base. Construimos un ángulo recto en M. Esta recta perpendicular es la mediatriz. Podemos escoger cualquier punto en la mediatriz como vértice superior de nuestro triángulo: va a salir isósceles, porque la mediatriz está en el medio entre los extremos de la base.



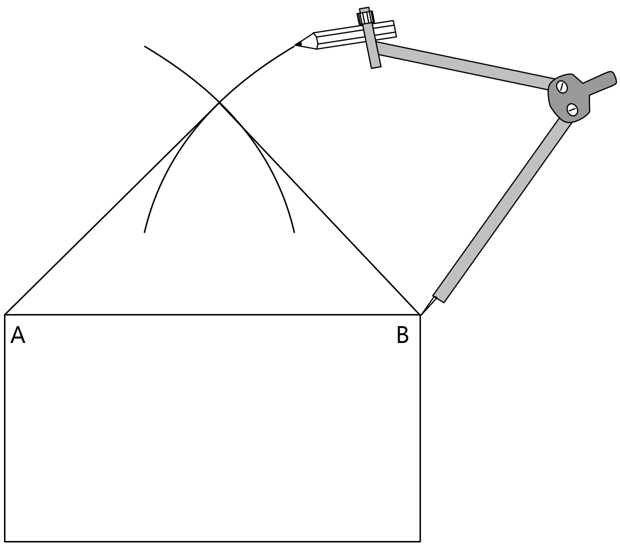
(En la *Unidad 62* examinaremos las propiedades de la mediatriz. Allí aprenderemos también un método de construirla con el compás.)

2. Una segunda posibilidad consiste en definir de antemano la longitud de los lados del triángulo. Podemos escoger cualquier medida mayor que la mitad de la base. "Medimos" esta longitud con el compás, usando una regla: Digamos que el lado del triángulo debe medir 4 cm. Colocamos la regla sobre el papel. Ponemos la punta de metal del compás en el papel, inmediatamente al lado de la regla, donde está su cero. Abrimos el compás hasta que la punta de lápiz coincide con la marca de 4 cm. Podemos dibujar una pequeña raya sobre el papel para asegurarnos de que esté en el lugar correcto.

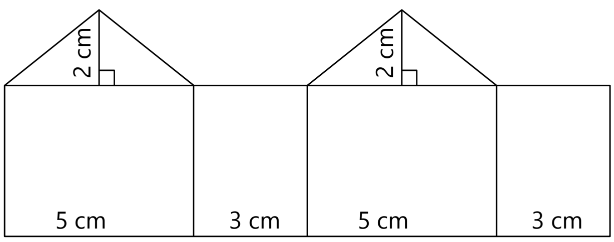


Ahora la apertura del compás mide 4 cm: Cualquier círculo o arco que dibujamos (sin cambiar la apertura), tendrá un radio de 4 cm.

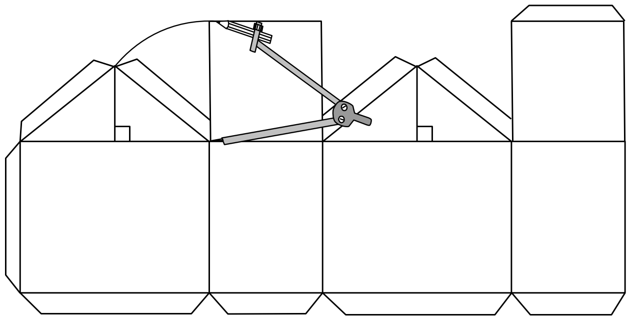
Dibujamos un arco con centro en A, y otro arco con centro en B (siempre sin alterar la apertura del compás). La intersección de los dos arcos es el vértice superior de nuestro triángulo. Los lados de este triángulo son radios de nuestros arcos; por eso deben tener la misma longitud de 4 cm.



Para construir las cuatro paredes de la casa, tenemos que imaginarnos la casa "desdoblada". Los dos tipos de paredes se van a alternar: una pared rectangular, una con el triángulo encima, otra rectangular, otra con el triángulo. Y las paredes opuestas tienen que ser congruentes. Las dos paredes rectangulares deben tener el mismo largo. Y los dos triángulos deben ser congruentes. Entonces el segundo triángulo debe construirse de la misma manera como el primero, con las mismas medidas. Si lo construimos con el método de la mediatriz, debemos usar la misma altura como en el primero. Si lo construimos con el compás, debemos usar la misma longitud de los lados.

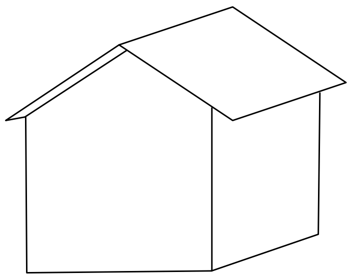


Ahora falta todavía el techo. Sus caras son rectángulos. El techo se pega al lado inclinado del triángulo, entonces el lado lateral del techo debe tener la misma longitud como el lado inclinado del triángulo. Podemos medirlo con regla o "copiar" la longitud con el compás. Finalmente añadimos las lengüetas para poner goma:



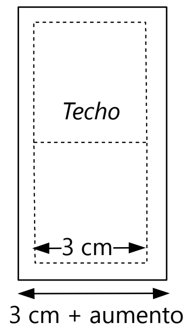
Las lengüetas de abajo no son necesarias para armar la casa; podemos usarlas si queremos pegar la casa acabada sobre un papel o cartón. Si no quieren hacer eso, pueden omitir esas lengüetas de abajo.

Ahora podemos añadir puertas y ventanas a nuestra casa, pintarla como deseamos, y después cortar y armarla.

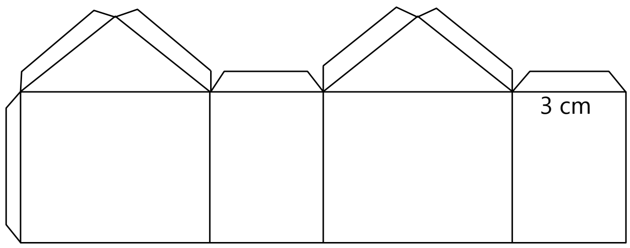


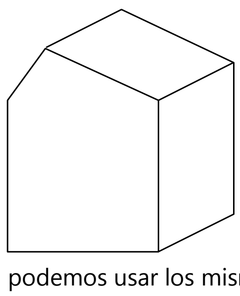
Casa con techo que sobresale:

La casa se ve un poco más bonita si el techo sobresale por los lados.



Si queremos esto, tenemos que construirla en dos piezas: las paredes aparte y el techo aparte. Las paredes se construyen igual como en el modelo anterior. El techo tiene que hacerse un poco más grande por todos los lados para que sobresalga.

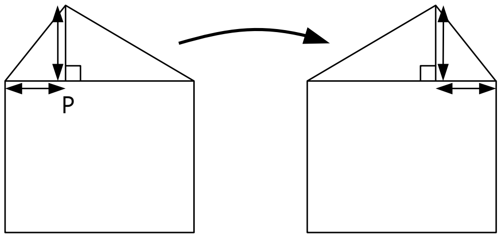




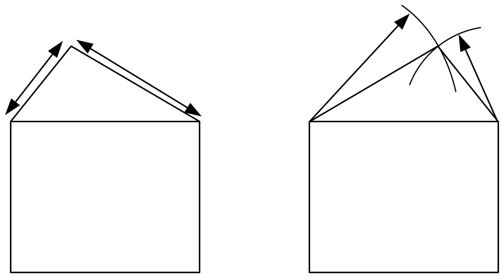
Casa con caballete asimétrico:

En este caso podemos dibujar un triángulo cualquiera, porque su punta no necesita estar en el medio. ¡Pero el segundo triángulo (en la pared opuesta) debe ser congruente al primero! Para eso podemos usar los mismos métodos como antes:

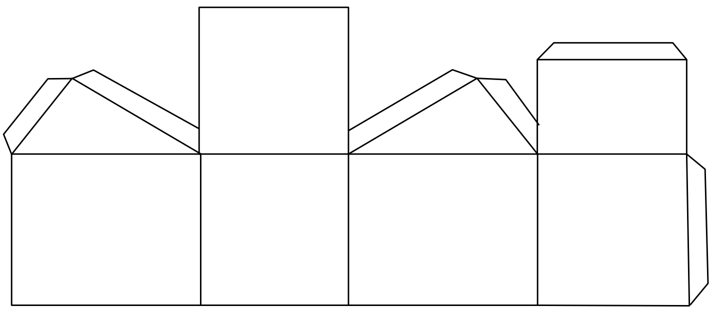
1. En vez de construir la mediatriz, podemos construir el ángulo recto en cualquier lugar (P) que no sea el punto medio. Ahora tenemos *dos* medidas que tenemos que "trasladar" al otro triángulo para que sea congruente: La distancia de P desde el extremo de la base, y la altura del triángulo.



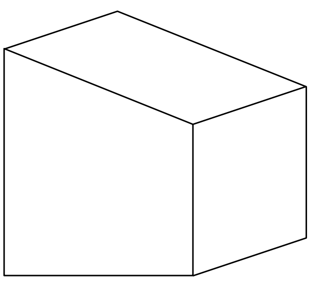
2. Para usar el método del compás, podemos definir las longitudes de los lados con anticipación; o podemos construir el primer triángulo "como sea" y después copiar sus medidas al segundo. De todos modos, tenemos que dibujar uno de los arcos con la longitud del lado más largo, y el otro arco con la longitud del lado más corto.



En ambos casos, tenemos que tomar en cuenta que el segundo triángulo tiene que ser "*reflejado en espejo*" respecto al primero. Si no entienden por qué, al armar el modelo ya van a darse cuenta.



Las medidas del techo se "copian" de los lados del triángulo, como en la primera construcción. Pero aquí también tenemos que tomar en cuenta que tenemos dos medidas distintas: una cara del techo será más ancha que la otra.



Casa con techo inclinado de una sola cara:

Si construyeron y analizaron los modelos anteriores, seguramente ya no será difícil descubrir cómo construir este modelo.

Vocabulario matemático

Triángulo isósceles: Un triángulo que tiene dos lados iguales.

Poliedro: Cuerpo geométrico con caras planas y aristas rectas.

Cara *(de un poliedro)*: Uno de los polígonos que conforman un poliedro.

Arista: Segmento recto que es común a dos caras de un poliedro.

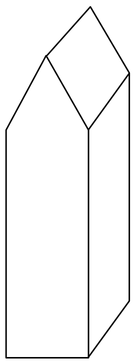
Vértice (de un poliedro): "Punta", donde se unen varias aristas.

Prisma: Poliedro que consiste en una base y una cara superior congruentes, unidas por aristas paralelas.

Prisma recto: Prisma cuyas aristas laterales forman ángulos rectos con la base.

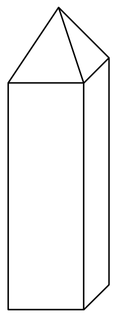
Prisma rectangular: Prisma compuesto de rectángulos; la forma de un ladrillo o una caja.

Pirámide: Poliedro que termina arriba en una punta, donde se unen todas las aristas procedentes de los vértices de la base.

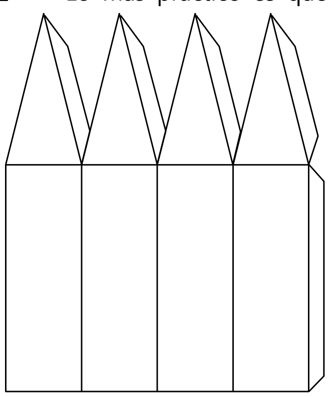


Torre con techo en caballete:

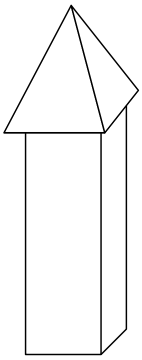
Si queremos una torre, podemos construirla igual como la casa, solamente más alta y menos ancha. Todo lo demás es igual como en la construcción de la casa.



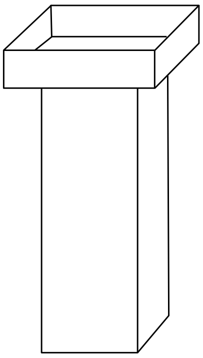
Torre con techo en pirámide:



Lo más práctico es que la torre tenga una base cuadrada. En este caso, las cuatro caras del techo son triángulos congruentes. Podemos construirlos igual como los triángulos en las paredes de las casas; solamente tenemos que dibujar la línea de separación como una línea para doblar, porque en este modelo los triángulos se doblan hacia adentro.
Para que la base salga cuadrada, todas las paredes deben tener el mismo ancho.



Si queremos el mismo modelo con un techo que sobresale, tenemos hacerlo en dos partes: las cuatro paredes en una parte, y los cuatro triángulos del techo juntos en otra parte, un poco más grandes que en el modelo de una sola pieza. Descubran ustedes mismos cómo hacerlo.



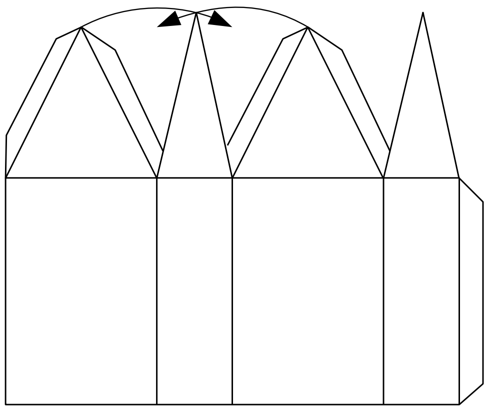
Torre con techo plano y parapeto:

Este modelo tiene que construirse en dos partes: Las paredes como en los modelos anteriores. El techo tiene la forma de una caja abierta. Eso ya lo conocemos; no debe ser difícil.

Después de construir algunos modelos como estos, seguramente los niños podrán usar su creatividad para inventar otros modelos propios.

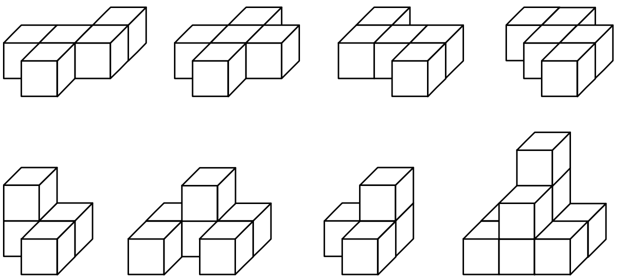
Torre rectangular con techo en pirámide:

Si la torre tiene una base rectangular en vez de cuadrada, el techo consistirá en dos tipos distintos de triángulos. Pero sus cuatro *aristas* tienen todas la misma longitud. Comencemos por ejemplo con el triángulo sobre la pared más ancha. Para construir ahora el otro triángulo, tenemos que usar la misma longitud para su lado. Entonces tenemos que hacerlo necesariamente con el método del compás.

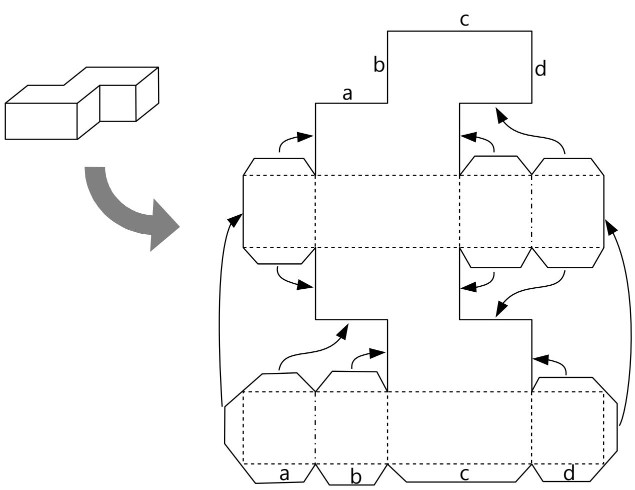


Construcciones con cubos

Construyan alguna figura sencilla con cubitos de madera, como estas:



Después intenten reproducir la misma figura con un recortable de cartulina; pero no fabricando cubos sueltos, sino diseñando un recortable que produce la figura entera de una vez. Esto es un buen desafío para la imaginación tridimensional. Aquí un ejemplo con una figura sencilla:



Inténtenlo primero con figuras sencillas, después con unas más complejas.

Matemática divina

Una casa para Dios

Construir casas es una actividad importante, no solamente en la vida diaria. A los antiguos israelitas Dios les mandó construir una casa para él, el "tabernáculo" en el desierto. Les dio las medidas exactas para la construcción (Éxodo capítulos 26 y 27). Entonces los detalles geométricos deben ser importantes para Dios.

Más tarde, el rey Salomón hizo construir un templo firme en lugar del tabernáculo. Las medidas del templo eran el doble de las medidas del tabernáculo.

La "casa" misma del tabernáculo consistía en dos partes. La parte interior, el "lugar santísimo", tenía la forma de un cubo de 10 codos por cada lado. (A este lugar podía entrar solamente el sumo sacerdote, y una sola vez al año, para tener un encuentro con Dios e interceder por el pueblo.) Delante de ese lugar se encontraba el "lugar santo" que tenía la forma de dos cubos juntos, o sea 10 x 10 x 20 codos. Así que la casa entera tenía la forma de tres cubos juntos.

Pero ya en aquellos tiempos, el pueblo estaba consciente de que una casa hecha por hombres no puede realmente contener a Dios:

"El cielo es mi trono, y la tierra es el estrado de mis pies. ¿Qué clase de casa me edificarían?, dice el Señor, ¿o cuál es el lugar de mi descanso? ¿Acaso no hizo mi mano todo esto?"

(Isaías 66:1-2)

Cuando vino Jesús, enseñó a sus discípulos que Dios quiere vivir en cada uno de nosotros. La verdadera casa de Dios no es un edificio de madera o de piedras. La verdadera casa de Dios es la comunidad de todos quienes le siguen. Así lo dijo Pedro:
"Ustedes mismos también, como piedras vivientes sean edificados como una casa espiritual, para ser un sacerdocio santo, para ofrecer sacrificios espirituales muy bienvenidos a Dios por medio de Jesucristo."

(1 Pedro 2:4-5)

O sea, nosotros mismos somos las "piedras" que juntos formamos la casa de Dios. Y ya no entran sacerdotes a esa casa: nosotros mismos somos los sacerdotes. Y ya no es la geometría que hace que las "piedras vivientes" encajen entre sí; es ahora la armonía espiritual que existe entre todos los verdaderos seguidores de Jesús.

¿A dónde vamos desde aquí?

La *Unidad 63* contiene más actividades de construcción de recortables. Pero esas requieren un poco más de experiencia con construcciones geométricas. Se recomienda por tanto, practicar antes de eso por lo menos las construcciones de las *Unidades 59 y 60*.

Unidad 59 - Ángulos y el transportador

Prerrequisitos:
- Construcciones básicas con regla y escuadra *(Unidad 56)*.
- Uso del compás *(Unidad 57)*.

Materiales necesarios:
- Transportador, regla, escuadra, compás.
- Tiza.
- Geoplano.
- Madera delgada o cartón; clavos, tornillos o alambre.

Para los educadores

Aparte del concepto fundamental del ángulo, esta Unidad introduce también algunas aplicaciones. Por ejemplo, los ángulos se pueden usar para construir un triángulo congruente a uno dado. Por eso exploramos adicionalmente unas leyes de congruencia en triángulos y polígonos.

TALLER

Ilustraciones sencillas de un ángulo

Busquen unos objetos de la vida diaria que forman ángulos variables. Por ejemplo:

- Una puerta que se abre y cierra. Podemos trazar con tiza en el piso la ubicación de la puerta en una determinada posición, y observar el ángulo que forma con el umbral. Observamos lo que sucede con el ángulo cuando abrimos o cerramos la puerta.

- Las agujas de un reloj. Podemos observar como cambia su ángulo al pasar el tiempo.

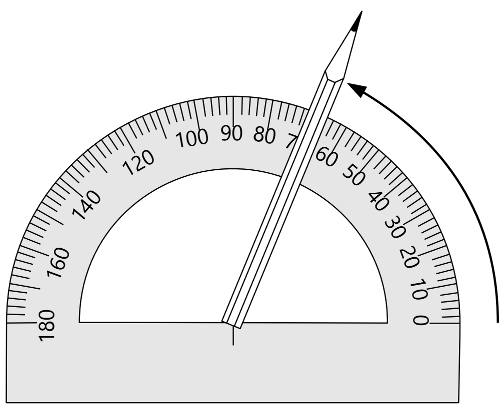
- Una tabla inclinada que forma un ángulo determinado con el piso. Podemos apoyar un extremo de la tabla sobre el piso y el otro extremo sobre algún objeto. Podemos observar lo que sucede si hacemos rodar una canica o pelotita por la tabla inclinada. Cuánto mayor el ángulo entre la tabla y el piso, más rápidamente avanzará la pelotita.

Experiencias como estas pueden servir para introducir de manera informal el concepto de "ángulo".

Nota: Por razones didácticas se recomienda *no* usar los brazos del compás para ilustrar un "ángulo", porque eso puede causar confusión. Es que el compás no es un instrumento para medir ángulos; y su "elemento funcional" es la *distancia* entre sus dos puntas, no el ángulo entre los brazos.

El transportador y los grados de un ángulo

Introducimos ahora el uso del transportador para medir ángulos. La medida de un ángulo nos dice en cuánto está "girado" un lado del ángulo respecto al otro. El transportador consiste en un semicírculo cuyo centro está marcado de manera especial. El semicírculo está dividido en 180 grados. Esto corresponde a "dar media vuelta". Podemos ilustrarlo con un objeto recto y delgado como un lápiz o un clavo: Colocamos un extremo del objeto sobre el centro del transportador, y orientamos el otro extremo según la marca de 0º. Mantenemos el centro fijo, mientras hacemos girar el objeto poco a poco. Vemos como se desplaza por la escala, y podemos leer allí cuánto ha girado: 10º, 20º, etc. Cuando le hayamos dado media vuelta, estaremos en 180º.

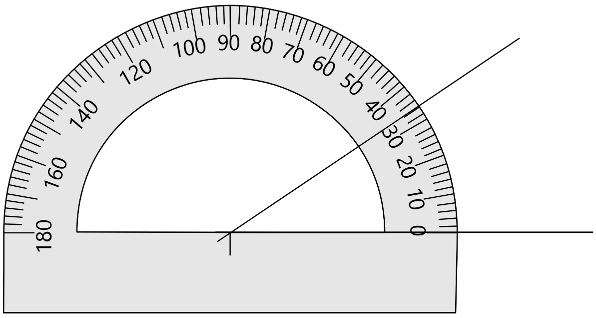


Podemos seguir girando, aunque por el otro lado ya no hay escala; pero podemos explicar que la otra mitad del círculo también tiene 180 grados. Entonces cuando hayamos llegado de vuelta al punto de inicio (0º), el objeto habrá girado 360 grados, el doble de 180.

Medir ángulos sobre el papel

Dibujamos ahora unos ángulos en un papel, y los medimos con el transportador. Se entiende por sí mismo que dibujamos los lados de los ángulos con la regla, para que sean rectos. Trazamos ambos lados un poco más allá del vértice, para que el vértice quede bien marcado por la intersección de los dos lados.

Para medir un ángulo, colocamos el transportador de manera que el vértice del ángulo se encuentre en el centro del transportador. Además, uno de los lados del ángulo debe coincidir con la marca de 0º, y el otro lado debe quedar por el lado donde está la escala.

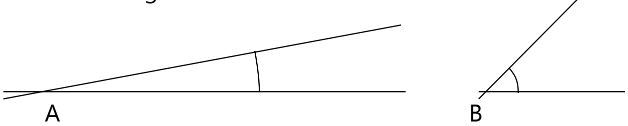


Este ángulo mide 34º.

Hoja de trabajo 59.1 *(arriba)*: Mide los ángulos dibujados, y anota sus medidas dentro de cada ángulo.

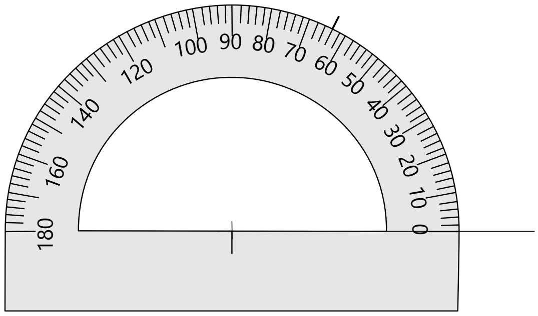
Si los lados de un ángulo son demasiado cortos para alcanzar hasta la escala del transportador, tenemos que prolongarlos.

Nota: ¡La medida de un ángulo no tiene nada que ver con el tamaño de sus lados! Solamente tiene que ver con cuánto se ha girado.



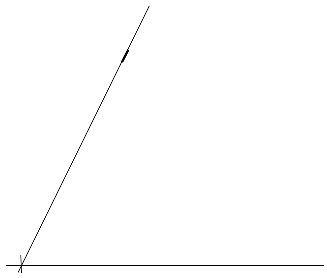
El ángulo en A se ve "mayor" en cuanto al tamaño de sus lados. Pero es un ángulo *menor* que el ángulo en B, porque en A los lados están girados muy poco el uno respecto al otro. El ángulo en A mide 11º, mientras el ángulo en B mide 46º.

Dibujar ángulos de una medida determinada



Para dibujar un ángulo, dibujamos primero uno de sus lados, y marcamos un punto como vértice. Colocamos el transportador con su centro sobre el vértice, y alineamos la recta con la marca de 0º. Marcamos según la escala del transportador el número deseado de grados (64º en el ejemplo del dibujo anterior).

Ahora podemos quitar el transportador y unir la marca con el vértice. Este ángulo mide 64º.

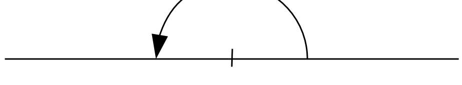


Hoja de trabajo 59.1 *(en el medio):* Construye ángulos de las medidas indicadas. Dibuja el segundo lado del ángulo por el lado donde se encuentra el número de grados.

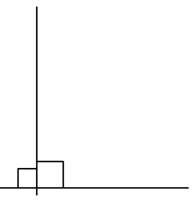
Clasificación de los ángulos

Los ángulos se clasifican de la siguiente manera:

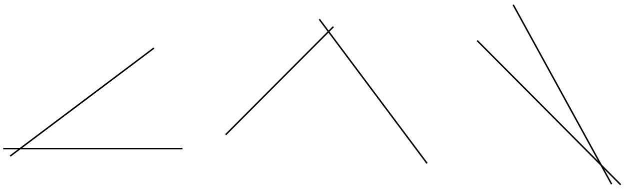
Ángulo llano: Un ángulo llano es un ángulo que se ve como una única recta. En el transportador vemos que este ángulo mide 180º.

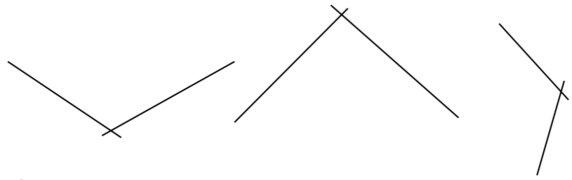


Ángulo recto: Ya conocemos el ángulo recto desde las cuadrículas del papel, y desde los rectángulos. El ángulo recto es el que está "bien parado" sobre una recta. La siguiente figura es simétrica: el ángulo a la izquierda es igual al ángulo a la derecha. Por tanto, el ángulo recto es la mitad de un ángulo llano. Mide la mitad de un ángulo llano, o sea 90º.



Ángulos agudos: Así se llaman los ángulos que son menores a un ángulo recto. Se llaman "agudos" porque los encontramos en puntas agudas, como la punta de un lápiz o de un clavo.





Ángulos obtusos: Así se llaman los ángulos mayores a un ángulo recto. Se llaman así porque un objeto que termina en un ángulo así no puede punzar fuertemente; es obtuso.

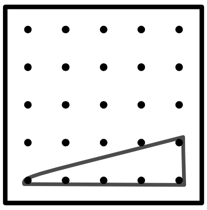
Ángulos en el geoplano

Construyan algunas figuras en el geoplano y observen los diferentes ángulos que podemos formar. Mídanlos con el transportador.

Investiguen:

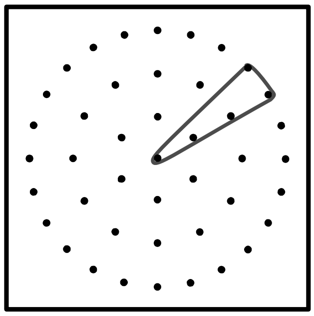
1. ¿De qué maneras podemos formar ángulos rectos en el geoplano? Claro que podemos hacer cuadrados y rectángulos, encajándolos en la cuadrícula. Pero hay otras posibilidades de formar ángulos rectos. ¿Las encuentras?

2. ¿Cuál es el ángulo más pequeño que podemos formar en el geoplano (pero que no sea cero)?
Por ejemplo el triángulo a la derecha tiene un ángulo pequeño:



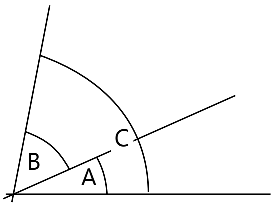
Pero podemos formar ángulos más pequeños que este. ¿Encuentras cómo? – Mide con el transportador: ¿Quién logra formar el ángulo más pequeño (pero que no sea cero)?

3. Si tienes un geoplano circular, une el clavo del centro con dos clavos adyacentes del círculo exterior. ¿Puedes calcular cuánto mide el ángulo en el centro? – Después verifica con el transportador.



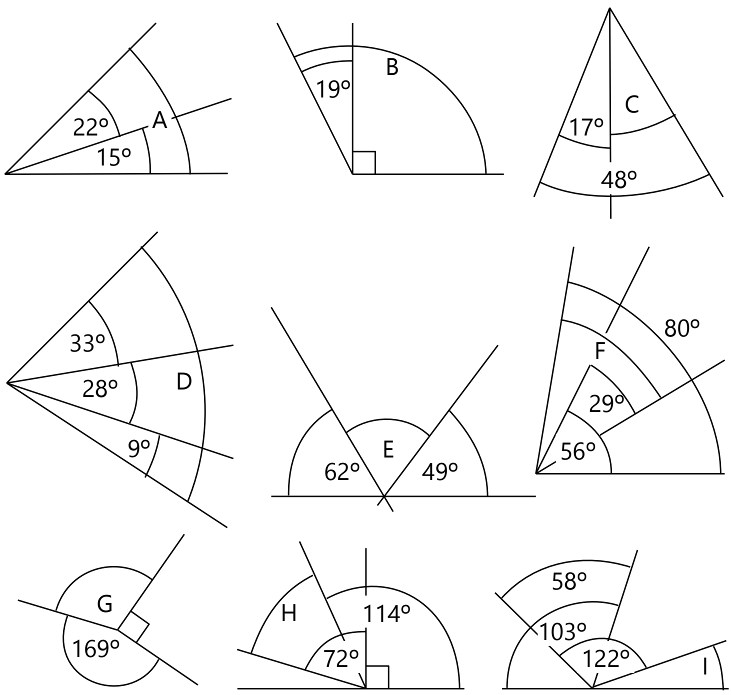
Suma y resta de ángulos

Los ángulos se suman y restan igual como segmentos en una recta. *(Vea Unidad 13.)* Solamente que aquí no nos movemos a lo largo de una recta, sino girando en un círculo. En el dibujo al lado, los ángulos A y B juntos forman un ángulo C que es la suma de ambos.



Dibuja dos ángulos en la misma posición como en este dibujo: que tienen el mismo vértice y que comparten un lado en común. (Ángulos en esta posición se llaman *ángulos adyacentes*.) Mide con el transportador ambos ángulos por separado; después mide el ángulo grande que es la suma de los dos. Verifica que la medida de este ángulo en grados es efectivamente la suma de los dos ángulos pequeños. (Puede haber pequeños errores de redondeo.)

Para practicar: Calcula las medidas de los ángulos indicados, según las medidas dadas. (Los dibujos pueden no ser correctos en cuanto a las medidas de los ángulos; hay que guiarse con los números dados.)

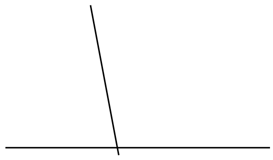


J. ¿Cuánto le falta a un ángulo de 27º para que sea un ángulo recto?

K. ¿Cuánto le falta a un ángulo de 176º para que sea un ángulo llano?

L. La suma de un ángulo de 33º y uno de 59º ¿es un ángulo agudo u obtuso?

M. La diferencia de un ángulo de 158º y uno de 61º ¿es un ángulo agudo u obtuso?



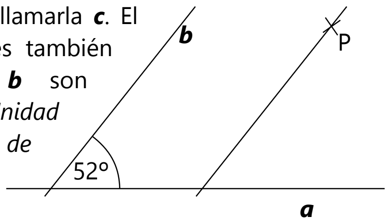
Para pensar: Cuando una recta se cruza con otra recta como en el dibujo a la izquierda, y las rectas no se cruzan en ángulo recto, entonces siempre uno de los dos ángulos será agudo y el otro será obtuso. Verifícalo. ¿Puedes explicar *por qué* es así?

(Pauta en el Anexo A.)

Construir un lado de un ángulo por un punto dado

Tenemos una recta ***a***, y un punto ***P*** afuera de la recta. Queremos construir una recta que pase por el punto ***P*** y forme un ángulo de 52º con ***a***. ¿Cómo podemos hacer eso? – Piénsenlo primero, antes de seguir leyendo.

No podemos construir esta recta directamente, porque nuestras herramientas no nos permiten cumplir ambas condiciones a la vez. Pero podemos cumplir primero sólo una de las condiciones: Construimos una recta ***b*** en un ángulo de 52º con ***a***, desde un punto cualquiera de ***a***. Ahora podemos construir una paralela a ***b*** que pase por el punto ***P***. Vamos a llamarla ***c***. El ángulo entre ***c*** y ***a*** es también 52º, porque ***c*** y ***b*** son paralelas. *(Vea en la Unidad 95, "Propiedades de ángulos".)*



Para pensar: Existe una segunda recta que también cumple las condiciones: pasa por el punto ***P*** y forma un ángulo de 52º con ***a***. ¿Cómo se ve esta segunda solución? ¿Cómo la construirías?

Nota: Una construcción alternativa consiste en construir primero una paralela a ***a*** que pasa por P. Usamos P como vértice para construir una recta en un ángulo de 52º a esta paralela. Entonces, esta recta formará también un ángulo de 52º con ***a***.

Hoja de trabajo 59.1 *(abajo):* Practica esta construcción. Es suficiente construir una de las dos soluciones en cada caso; pero si deseas puedes construir ambas.

¡No te dejes confundir si una solución "se sale" del cuadro! Eso puede suceder. – Y en el último ejemplo será necesario prolongar la recta para terminar la construcción.

Vocabulario matemático

Lados *(de un ángulo):* Las dos rectas que conforman el ángulo.

Vértice *(de un ángulo):* El punto de intersección de los dos lados del ángulo.

Ángulo agudo: Un ángulo menor a 90º.

Ángulo recto: Un ángulo de 90º.

Ángulo obtuso: Un ángulo entre 90 y 180º.

Ángulo llano: Un ángulo de 180º (corresponde a una única recta).

Ángulos adyacentes: Ángulos que tienen el mismo vértice y que comparten un lado en común.

Principios matemáticos

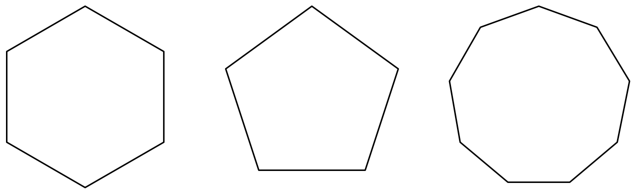
Los problemas de sumas y restas de ángulos se basan en los mismos principios como las sumas y restas de segmentos, y otros problemas similares. Lo más importante aquí es entender el principio del "entero y sus partes".

Además hay que tener presente que algunos "ángulos especiales" son conocidos: un ángulo recto mide 90º, un ángulo llano 180º, y la "vuelta completa" mide 360º.

Ampliaciones

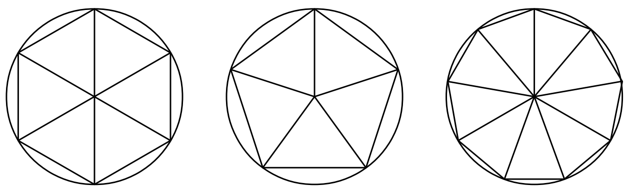
Polígonos regulares

Un polígono regular es uno que tiene todos sus lados iguales, y también los ángulos entre sus lados son iguales.



Para pensar: ¿Cómo llamamos a un polígono regular de cuatro lados?

En un polígono regular, todos sus vértices se ubican en una misma circunferencia. Si unimos el centro de esta circunferencia con todos los vértices, el polígono se divide en triángulos iguales:

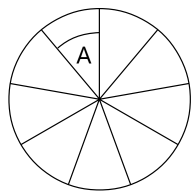


Con eso tenemos un método sencillo para construir polígonos regulares, porque también el ángulo en el centro se divide en partes iguales. Por ejemplo en el pentágono regular se divide en 5 partes. Sabemos que la vuelta completa alrededor del círculo es 360º. Entonces cada ángulo en el centro del pentágono regular mide 360 ÷ 5 = 72º. Para construir el pentágono, dibujamos primero el círculo, y un radio del círculo. Después usamos el transportador para construir a partir de este radio los ángulos de 72º. Así tendremos cinco radios en el círculo. Las intersecciones de estos radios con la circunferencia son los vértices del pentágono.

Inténtenlo con otros polígonos regulares.

(Para construir un *hexágono* regular hemos visto un método más sencillo en la *Unidad 57*.)

Podemos usar este mismo método para ***fabricar nuestro propio material de fracciones*** en sectores circulares: Por ejemplo para partir un círculo en novenos, dividimos 360º ÷ 9. El resultado nos da los ángulos en el centro del círculo. Construimos estos ángulos y cortamos el círculo a lo largo de los radios.

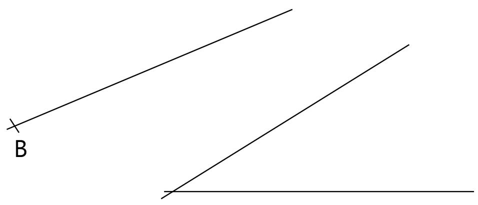


A = 360º ÷ 9

Copiar ángulos con el compás

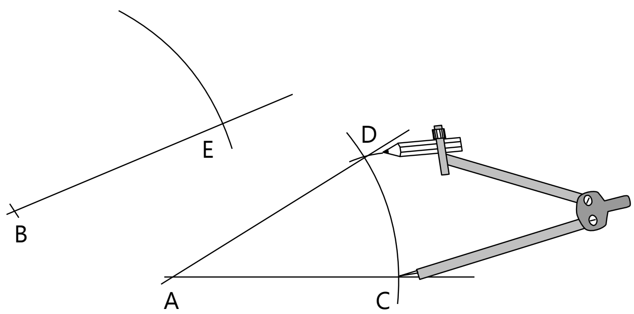
Hace más de 2000 años, los antiguos griegos ya investigaban casi todos los temas de geometría que se aprenden hoy en día en las escuelas y colegios. Ellos efectuaban todas sus construcciones únicamente con la regla (sin graduación) y el compás. Algunos maestros de esta "geometría clásica" enseñaban, por razones filosóficas, que no se debía usar ninguna otra clase de herramientas. Por eso, durante muchos siglos los matemáticos dedicaban muchos esfuerzos a investigar cuáles figuras se pueden construir únicamente con regla y compás.

Entonces, en la geometría clásica no se usa el transportador. Si tenemos un ángulo dado y queremos construir en otra parte un ángulo igual, eso se puede hacer con regla y compás. Supongamos que quiero construir en B un ángulo igual al ángulo en A:

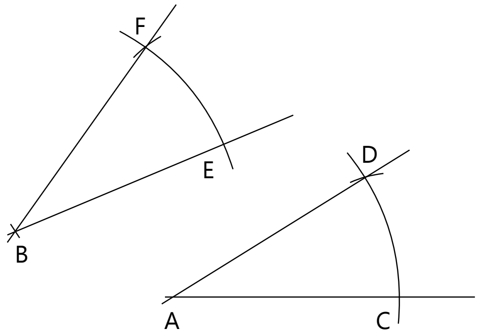


Dibujamos dentro del ángulo un arco con centro en A. La construcción saldrá más exacta, cuánto mayor es este arco.

Sin alterar la apertura del compás, construimos un arco con el mismo radio desde B. – Después colocamos la punta del compás en la intersección C y "medimos" la distancia CD (o sea, hacemos coincidir la punta de lápiz con el punto D).



Sin alterar la apertura del compás, dibujamos un arco con este mismo radio desde E. Solamente necesitamos la intersección de este arco con el arco grande (F). Unimos B con F, y tenemos nuestro ángulo:



Hemos hecho la construcción de manera que los triángulos ACD y BEF son congruentes. Por eso también el ángulo en B es el mismo como el ángulo en A.

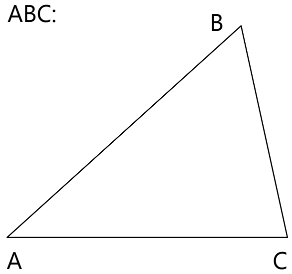
Si deseas, haz un ejemplo propio para practicar esta construcción.

Construcción de triángulos congruentes

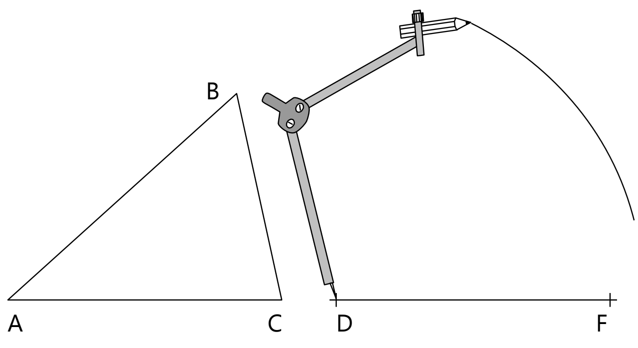
La construcción anterior fue a la vez un ejemplo de cómo construir triángulos congruentes. Vamos a ver un poco más detenidamente cómo se puede hacer eso.

Nota: *Este mismo tema se retoma en la Unidad 62. Los niños aficionados a los recortables podrán saltar la parte que sigue, y aprenderlo en el contexto de la construcción de recortables.*

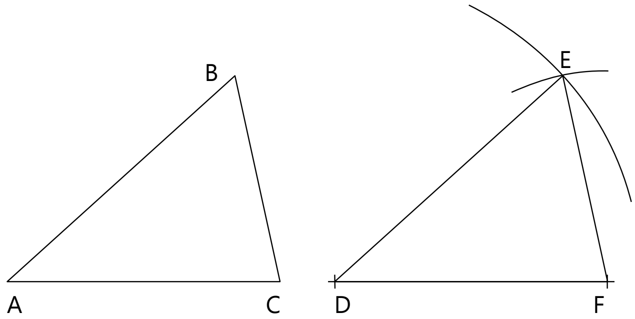
Queremos construir un triángulo congruente al triángulo ABC:



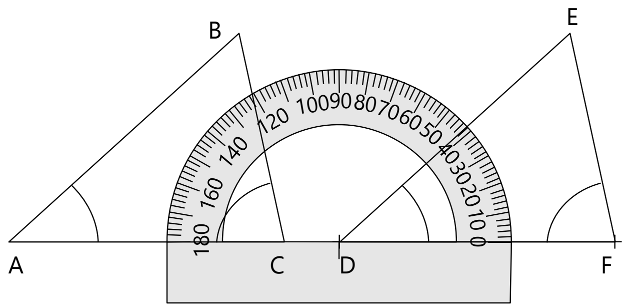
Comenzamos con un segmento recto de la misma longitud como AC. Podemos medir esta longitud con la regla. O si queremos seguir las costumbres de los antiguos griegos, podemos copiarla con el compás. – Después "medimos" con el compás la distancia AB. Sin cambiar la apertura del compás, dibujamos un arco con el mismo radio desde D como centro. Ahora ya sabemos que la punta E del nuevo triángulo debe ubicarse sobre este arco.



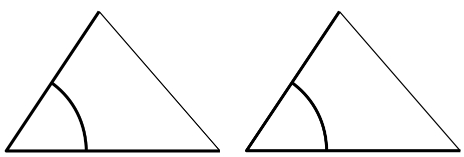
"Medimos" ahora CB con el compás. Con este mismo radio dibujamos un arco con centro en F. La intersección de este arco con el arco anterior es la punta E: DE = AB, y FE = CB. Por tanto, los dos triángulos son congruentes.



- Ya que nosotros no necesitamos someternos a las costumbres de los antiguos griegos, tenemos otras posibilidades de construir un triángulo congruente: Después de dibujar la base DF, podemos usar el transportador para medir los ángulos en A y C, y construir los mismos ángulos en D y F.



Nota: Como hemos visto en la primera construcción, dos triángulos son congruentes cuando coinciden en *todos sus lados.*
Dos triángulos son también congruentes cuando coinciden en *uno de sus lados, y dos ángulos.* Por eso funciona este método con el transportador.
Dos triángulos son congruentes también cuando coinciden en *dos lados, y el ángulo encerrado entre los dos lados.* – ¿Puedes copiar un triángulo usando esta propiedad, y con la ayuda del transportador? (Si deseas, puedes también copiar el ángulo con el método del compás que vimos antes.)



Hoja de trabajo 59.2: Construcciones de triángulos

Practica las construcciones que acabamos de explicar.

El no.1 se puede hacer de diferentes maneras: copiando los lados con el compás, midiendo y construyendo ángulos con el transportador, o copiando ángulos con el compás. Pero por lo menos *uno* de los lados debe dibujarse con la longitud correcta desde el inicio.

El no.2 necesariamente tiene que hacerse con el compás, dibujando arcos según las longitudes de los lados.

En los nos.3 y 4 se necesitará el transportador para construir los ángulos correctos.

Hoja de trabajo 59.3: Construcciones de otras figuras congruentes

El no.1 es para practicar el método de copiar ángulos con el compás.

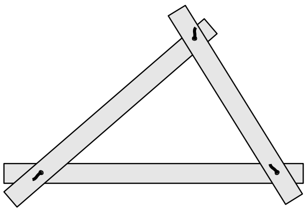
En el no.2 no será suficiente copiar solamente las longitudes de los lados para asegurar la congruencia. (¡Vea el experimento abajo!) Habrá que copiar adicionalmente por lo menos uno de los ángulos.

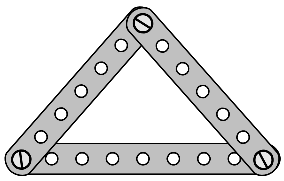
No.3: Piensa...

Un experimento con triángulos y cuadriláteros

Dos triángulos son congruentes cuando coinciden en las longitudes de todos sus lados. ¿Aplica eso también a cuadriláteros? Podemos descubrirlo con un experimento:

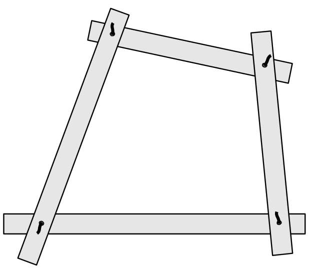
Corten cuatro tiras de diferentes longitudes de madera delgada o cartón. Primero usen solamente tres tiras. Únanlas por cada extremo con un clavo, un tornillo o un pedazo de alambre, formando un triángulo. Las uniones deben ser un poco sueltas, de manera que las tiras pueden girarse mientras están sueltas. Cuando están unidos en triángulo, ¿se puede cambiar la forma del triángulo sin deformar las tiras? Si no se puede, eso demuestra que existe un solo triángulo con estos tres lados. O sea, para la congruencia es suficiente que los tres lados coincidan.

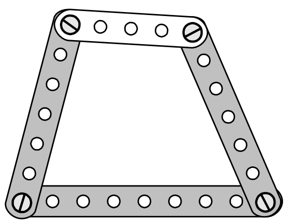




Si tienen un juego de construcción metálica, pueden también usar ese para hacer el experimento. No ajusten firmemente los tornillos en las uniones, para que las tiras de metal tengan todavía la libertad de girar.

Ahora usen las cuatro tiras y formen un cuadrilátero de la misma manera. ¿Se puede cambiar la forma del cuadrilátero sin deformar las tiras?

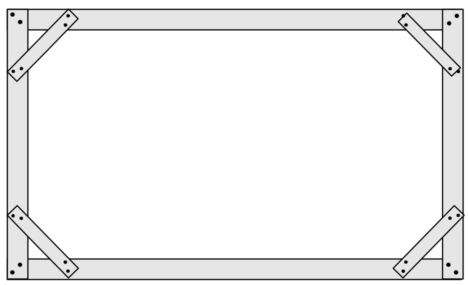




¿Qué sucederá si formamos polígonos de cinco o más lados de la misma manera?

- El experimento demuestra que en los cuadriláteros, si coinciden en todos sus lados, eso todavía no es suficiente para establecer su congruencia. Tenemos que considerar adicionalmente los *ángulos* entre sus lados. Por ejemplo, un cuadrado tiene cuatro lados iguales; pero existen otros cuadriláteros que también tienen cuatro lados iguales y no son cuadrados. ¿Cuáles? – ¿Cómo puedes entonces construir un cuadrilátero que tiene los mismos lados como un cuadrado, y sin embargo no es congruente al cuadrado?

Una aplicación práctica son los refuerzos diagonales que se usan en muchas construcciones. Por ejemplo un marco rectangular no es muy estable; se puede deformar fácilmente hacia un lado o el otro. Se volverá mucho más estable si le añadimos unos refuerzos diagonales en las esquinas. Con eso creamos triángulos, y los triángulos son mucho más estables que los cuadriláteros.



Desafío de construcción

Dibuja un cuadrilátero o pentágono irregular (con lados y ángulos de diferentes medidas). Después construye uno congruente al primero, copiando lados con el compás y ángulos con el compás o el transportador. Piensa cuáles datos tienes que copiar para tener la seguridad de que el segundo polígono sea congruente al primero. Después de terminar, corta el segundo polígono y ponlo sobre el primero para verificar la congruencia.

Un poco de historia

Los antiguos griegos usaban para “ángulo” la palabra “gony” que significa “rodilla”. De allí viene el sufijo “-gono” en palabras como “polígono”, “pentágono”, etc.

Nuestra palabra “ángulo” viene del latín “angulus” que significa “esquina”.

Matemática divina

Ángulos rectos

¿Por qué el "ángulo recto" se llama así? – Imagínate un plano horizontal. Si queremos colocar allí un poste "bien parado", tenemos que ponerlo en ángulo recto respecto al suelo. En la situación tridimensional vemos que el poste está "recto" en todas las direcciones; no está inclinado hacia ningún lado. Está en ángulo recto respecto a *toda* recta del plano horizontal.

Así una persona "recta" está "bien parada" y no se deja inclinar por favoritismos hacia ningún lado. Tampoco se inclina hacia las opiniones de los poderosos, o hacia las que están actualmente de moda. La persona recta está orientada directamente hacia arriba; o sea, se orienta según las normas superiores de Dios que vienen "desde arriba".

La ley de Dios dice: "No harás agravio en el juicio: no tendrás respeto al pobre, ni honrarás la persona del grande: con justicia juzgarás a tu prójimo." (Levítico 19:15) Un juez recto aplica la ley de manera equitativa, sin hacer acepción de personas, sin favorecer al rico ni al pobre.

¿A dónde vamos desde aquí?

Si los alumnos ya tienen suficientes conocimientos de cálculo numérico, después de entender el concepto de los ángulos, podrán resolver los problemas con gráficos circulares en las *Unidades 52 y 83*.

La *Unidad 95* continúa con más propiedades de los ángulos.

El tema de los polígonos regulares se retoma en la *Unidad 64*.

Unidad 60 - Espejos y simetría

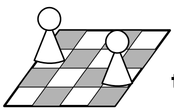
Prerrequisitos:
- Construcciones y conceptos geométricos básicos: Rectas, ángulos, etc.

Materiales necesarios:
- Espejos; de preferencia pequeños rectangulares sin marco, o con un marco muy delgado.
- Figuras de juego.
- Dos geoplanos.
- *(Para el periscopio):* 2 espejitos, tubo de cartón, cinta adhesiva, tijeras.
- *(Para el calidoscopio):* 3 espejitos largos delgados (o lámina reflectante), tubo de cartón, lámina transparente, papel trasluciente, papel de colores, pegamento de silicona o cinta adhesiva, tijeras, perlas transparentes u objetos similares.

Para los educadores

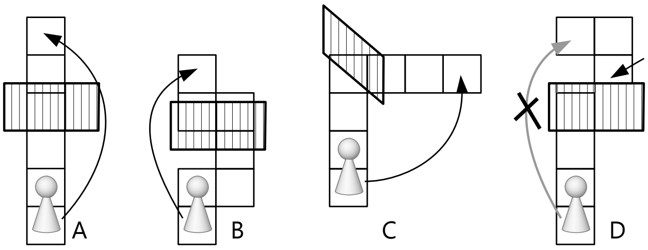
Las preguntas de la sección "Investigación" tienen pautas en el *Anexo A*. Pero hay que probarlo primero por un buen tiempo para entrenarse en observar y razonar, antes de consultar las pautas.

TALLER



Juego: El espejo teletransportador

Este juego se puede jugar a solas o entre dos personas. Necesitas las ***Hojas de trabajo 60.2-3*** como tablero de juego. Corta y pégalas juntas según las indicaciones. Puedes pegarlo todo sobre un cartón para que sea más estable. Para la forma más sencilla del juego, colocas una figura de juego en el primer círculo abajo en el camino. Necesitas también un espejo pequeño. Coloca el espejo verticalmente sobre el tablero, de manera que una parte del camino se refleja en él. El espejo puede "transportar" tu figura de juego al cuadrado donde aparece en el espejo, *si todos los cuadrados del camino reflejado son también cuadrados del camino verdadero*. Si se cumple esta condición, puedes sacar tu figura de su lugar y colocarla al lugar donde apareció en el espejo. El "arte" del juego consiste entonces en saber dónde colocar el espejo. Se trata de llevar la figura hasta la meta con el menor número de movimientos.



En los ejemplos A, B y C, la figura puede avanzar al cuadro indicado. En el ejemplo D, con el espejo en esta posición no se puede avanzar, porque el camino reflejado no coincide con el camino verdadero.

Si se juega de dos personas, una comienza con su figura por el lado izquierdo, y la otra, con una figura de otro color, por el lado derecho. Las figuras se mueven por turnos. Se aplica la regla adicional de que ninguna figura se puede transportar a un cuadro que ya está ocupado por otra figura. Gana quien llega primero a la meta.

Otra variante se puede jugar con dos figuras para cada jugador. Las dos figuras comienzan en los dos círculos al inicio del camino. Si el espejo se puede posicionar de tal manera que *ambas* figuras se reflejan a cuadros desocupados del camino (y todos los cuadros intermedios también pertenecen al camino), entonces ambas se pueden transportar a la vez. Si solamente el reflejo de una de ellas aparece en un cuadro desocupado del camino, entonces solamente esa figura puede moverse. Si se juega solo, ambas figuras tienen que llegar a la meta. Si se juega de dos personas y cada una pudo entrar con una de sus figuras a la meta, el juego termina con empate.

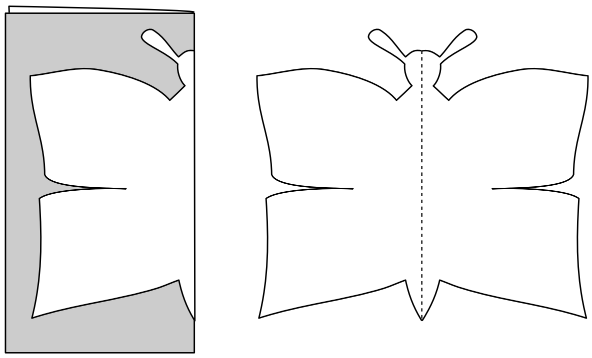
Encontrar ejes de simetría

En una figura simétrica es posible colocar un espejo en una posición determinada, de manera que el reflejo en el espejo completa la mitad visible para formar juntos la figura original. La recta donde se puede colocar el espejo se llama ***eje de simetría***.

Practica con las figuras de la ***Hoja de trabajo 60.1*** *(arriba)*. Algunas figuras tienen varios ejes de simetría. Con un poco de práctica, pronto podrás descubrir ejes de simetría sin usar el espejo.

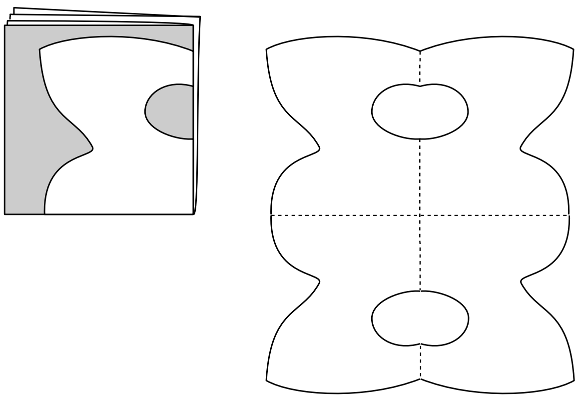
Proyecto de arte: Adornos de papel

Dobla un papel por la mitad. (Puede ser la mitad o la cuarta parte de una hoja.) Corta una figura, pero deja intacta la parte donde el papel está doblado. Ábrelo. Tendrás una figura simétrica.



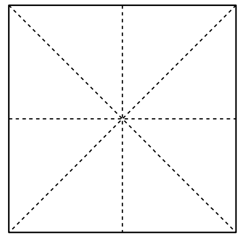
Investiga: ¿Cómo tienes que cortar la hoja para que al abrirla obtengas un círculo? ¿un corazón? ¿una letra A? ¿una letra E?

Haz lo mismo otra vez, pero ahora dobla la hoja dos veces: verticalmente por la mitad, y después horizontalmente por la mitad. Obtendrás una figura con dos ejes de simetría.

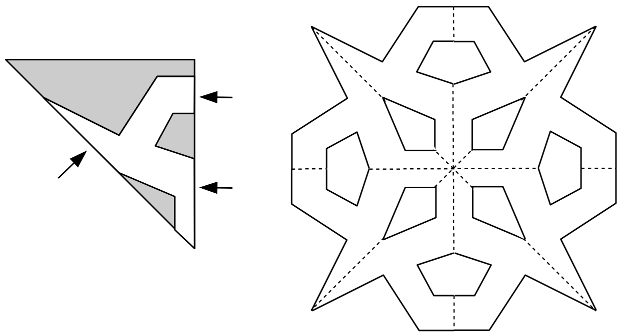


¿Cómo tienes que cortar el papel doblemente doblado para obtener un círculo? ¿un marco cuadrado? ¿una estrella de cuatro puntas? ¿la figura de un 8?

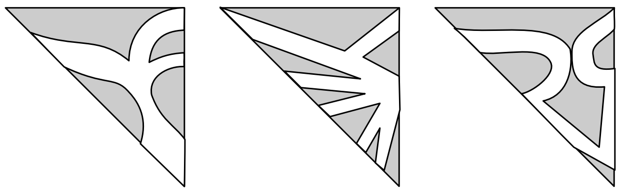
Para hacer estrellas, flores, etc, se ve aun mejor con cuatro ejes de simetría. Para eso necesitas un papel cuadrado. Dóblalo verticalmente, después horizontalmente, y después diagonalmente:



Corta una figura, pero sin partir el papel completamente por las partes donde está doblado.



Experimenta con diversos diseños. Los siguientes dan resultados interesantes:



Inventa tus propios diseños. Puedes usar estas figuras para adornar la casa, para fabricar tarjetas de invitación, y para otros propósitos.

Pregunta capciosa:
¿Quién es esa persona que tiene el mismo tamaño que yo, el mismo cabello que yo, la misma cara que yo, la misma piel que yo, pero no soy yo?

Respuesta en el Anexo A.

Geoplanos simétricos

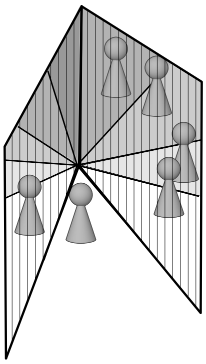
Esta actividad la pueden hacer entre dos personas. Cada una necesita un geoplano, y además necesitan un espejo. Una persona forma cualquier figura o diseño en su geoplano. Coloquen un espejo verticalmente entre los dos geoplanos. Ahora la segunda persona intenta armar en su geoplano una figura idéntica a la que se ve en el espejo; o sea el reflejo simétrico de la primera figura.

Alternativamente pueden construir la figura simétrica sin usar el espejo. Solamente al final pongan el espejo para controlar si la figura es correcta.

Investigación

Experimento: Ángulo de espejos

Con cinta adhesiva, pega dos espejitos rectangulares juntos por uno de sus lados, con sus caras reflejantes hacia adentro. Los espejos deben poder cerrarse completamente, y abrirse en forma de ángulo.



Coloca este "ángulo de espejos" verticalmente sobre un papel, y pon una figura de juego dentro del ángulo. Si deseas, puedes además dibujar algún ornamento sobre el papel. Observa los reflejos de las figuras. ¿Cuántas figuras reflejadas puedes ver?

Abre y cierra el ángulo de los espejos lentamente. Observa lo que sucede con los reflejos de la figura.

Notarás que en algunos momentos especiales, la imagen parece "encajar" perfectamente. En otros momentos, parece como si hubiera "medios reflejos". Pon los espejos en una posición donde la imagen encaja perfectamente. Traza sobre el papel las rectas donde los espejos se apoyan sobre el papel. Quita los espejos y mide el ángulo con el transportador. Anota: ¿Cuántas figuras pudiste ver en esta posición de los espejos? ¿Cuánto midió el ángulo en esta posición?
Haz lo mismo con otras posiciones donde la imagen "encaja". ¿Cuánto mide el ángulo cuando se ven 3 figuras (la original y 2 reflejadas)? ¿y cuando se ven 4 figuras? ¿5, 6, 7? Haz una tabla de los resultados y observa. ¿Encuentras una relación matemática entre el número de figuras y los ángulos? ¿Puedes explicar de dónde viene esa relación?

Construir y observar figuras simétricas

En la ***Hoja de trabajo 60.1*** *(en el medio)* dibuja el reflejo de la figura, respecto a la recta vertical que marca el eje de simetría. Después hacemos unas observaciones acerca de la figura y su reflejo:

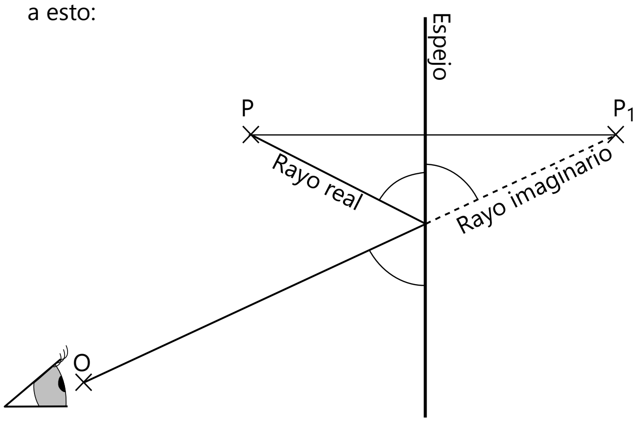
Escoge algún punto de la figura original y márcalo con un color. Marca su reflejo con el mismo color.

1) Mide la distancia desde el punto marcado hasta el eje de simetría. Mide la distancia de su reflejo hasta el eje de simetría. ¿Qué observas?

2) Une el punto y su reflejo con una recta. ¿De qué manera corta esta recta el eje de simetría?

3) Repite las mismas observaciones con otro punto de la figura y su reflejo. Saca tus conclusiones.

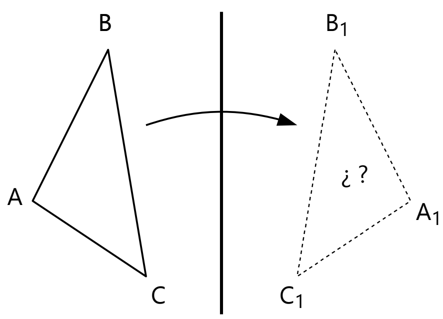
***4)** Investiga el camino por el cual viaja la luz cuando observas el reflejo de un objeto en un espejo: Imagínate que hay un espejo en el eje de simetría, y estás observando la figura reflejada. Marca un punto un poco afuera del dibujo, que representa la posición de tu ojo. Desde allí estás observando el reflejo de un punto P. O sea, ves el reflejo como si la luz estuviera viniendo desde allí en línea recta hacia tu ojo. Escoge el reflejo de uno de los puntos que marcaste en las actividades anteriores, y únelo en línea recta con la posición de tu ojo que marcaste.
Pero en realidad, el reflejo en el espejo no existe. En realidad, el espejo refleja la luz que viene desde el punto real, para que llegue a tu ojo *como si viniera desde el punto reflejado.* – Une el punto original con la intersección del eje de simetría con el rayo de luz que dibujaste antes. Ahora tu construcción debe verse similar a esto:



Investiga las propiedades geométricas de esta construcción: ¿Qué puedes decir acerca de las longitudes y direcciones de los rayos de luz, los ángulos que forman, etc.?

Construcción geométrica de una figura simétrica

En la hoja de trabajo tuvimos la cuadrícula como ayuda para dibujar el reflejo de la figura. Ahora haremos lo mismo sin cuadrícula, con una construcción puramente geométrica. Toma una hoja en blanco, sin cuadrícula, y dibuja una figura y un eje de simetría a su lado. Será más fácil si es una forma geométrica bien delineada. Puedes empezar con un simple triángulo, pero que no sea demasiado regular:



Recuerda las propiedades geométricas que descubriste con las preguntas de investigación. Tomando en cuenta estas propiedades, ¿cómo puedes construir geométricamente el reflejo de la figura? (Por supuesto que necesitarás construir unas líneas auxiliares.)

Si pudiste hacerlo con un triángulo, inténtalo con una figura más complicada. *(Vea también la Unidad 69.)*

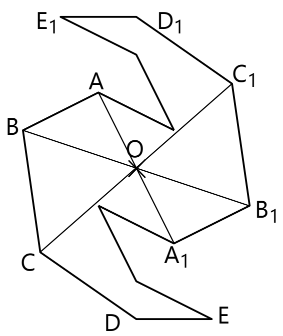
Ampliaciones

Otros tipos de simetría

La simetría en espejo, como la hemos analizado en el Taller, se llama más exactamente ***simetría axial***. Se distinguen otras clases de simetría:

Simetría central

Figuras con simetría central tienen un ***centro de simetría*** que consiste en un único punto. Cada punto reflejado se encuentra exactamente al lado opuesto del centro, a la misma distancia que el punto original.

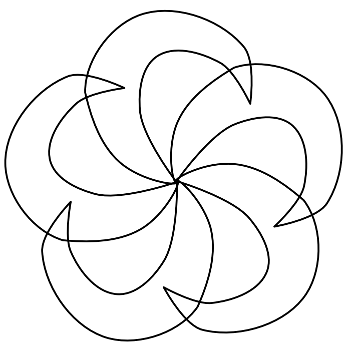


Notamos que esto equivale a una rotación alrededor del centro por 180º (por lo menos mientras nos limitamos a la geometría plana).* Entonces podemos comprobar si una figura tiene simetría central, si la giramos por 180º y verificamos si así es idéntica a la figura original.

Hoja de trabajo 60.1 *(abajo):* Marca en cada figura el centro de simetría, si es que lo tiene.

Simetría rotacional

Una figura tiene simetría rotacional si se puede girar por algún ángulo determinado, y entonces es igual a la original. Por ejemplo la siguiente figura no tiene simetría axial ni central, pero tiene simetría rotacional respecto a un ángulo de 72º:



---

*) En el espacio tridimensional, el asunto es más complicado. Allí existe la simetría respecto a un plano, respecto a una recta, y respecto a un punto. No necesitamos entrar a eso ahora. Pero si desean, pueden verificar que en el espacio 3D, la simetría respecto a una recta corresponde a una rotación por 180º. Por el otro lado, no es posible hacer coincidir una figura tridimensional con su reflejo simétrico respecto a un plano, o respecto a un punto. Nos encontraremos con este asunto en la *Unidad 71*, en la actividad "Tetris tridimensionales".

Vocabulario matemático

Eje de simetría: Recta en la cual se refleja una figura simétrica.

Simetría axial: Simetría respecto a una recta (eje de simetría).

Simetría central: Simetría respecto a un punto (centro de simetría).

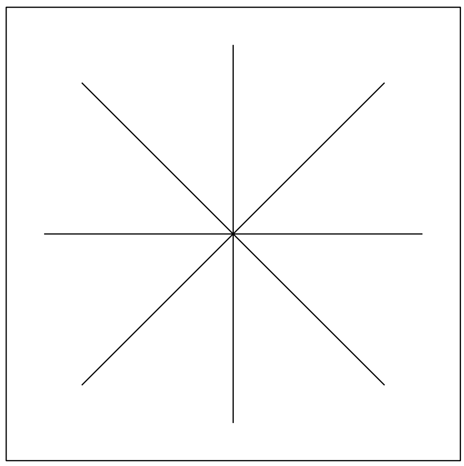
Simetría rotacional: Simetría que produce una figura congruente al girar o rotarla por un ángulo determinado.

En la geometría plana, la simetría central equivale entonces a un caso especial de simetría rotacional, donde el ángulo de rotación es 180º.

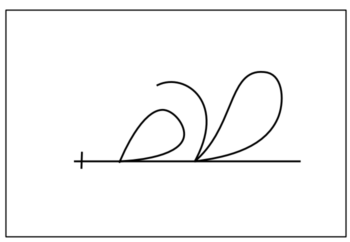
Para pensar: ¿Es la simetría rotacional lo mismo como lo que se observó en el experimento del "ángulo de espejos"? ¿Por qué sí, o por qué no?

Proyecto de arte: Una figura con simetría rotacional

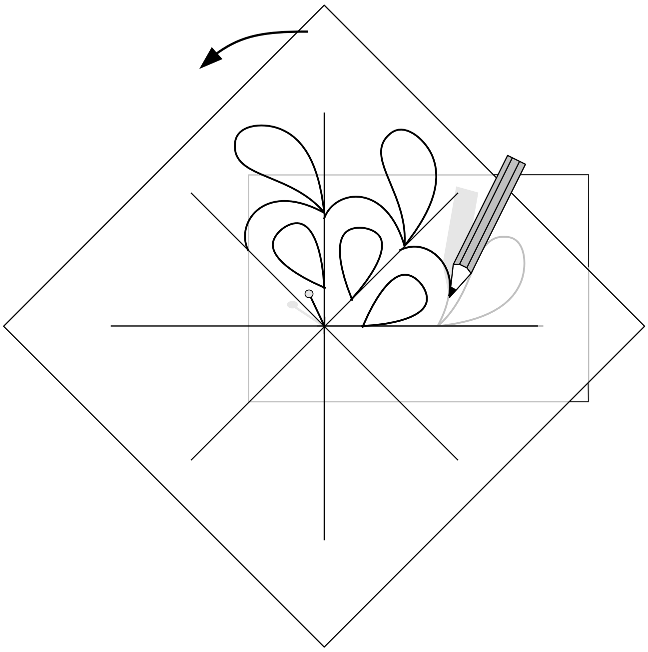
Necesitas una hoja de papel delgada, de manera que transluce un dibujo que pones debajo. Sobre esta hoja marca un centro, y con la ayuda del transportador traza desde el centro las rectas guía según el ángulo rotacional que escoges. (Trázalas finamente con lápiz, de manera que podrás borrarlas después de que el dibujo esté terminado.) Para que la figura se "cierre" completamente, el ángulo debe ser un divisor de 360º. Por ejemplo para un ángulo de 45º, las rectas guía se verán así:



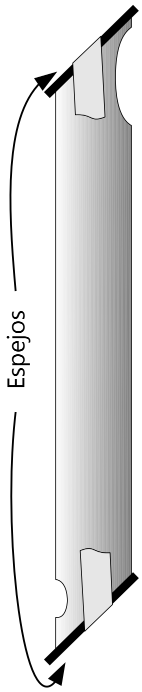
En otra hoja aparte, dibuja con trazos bien visibles un sector o "brazo" del dibujo que quieres crear. Por ejemplo puedes usar un plumón negro delgado. A un lado de este dibujo parcial marca el centro de la rotación, y traza desde allí una única recta guía, también bien visible.



Coloca esta hoja sobre un cartón grueso. Encima de esta hoja coloca la hoja delgada con las líneas guía, de manera que los centros coinciden. Sujeta ambas hojas con un alfiler clavado en el centro. Gira la hoja superior hasta que una de sus líneas guía coincide con la línea guía del dibujo que está debajo. Calca este dibujo en la hoja superior.
Después gira la hoja superior hasta que la siguiente línea guía coincide con la línea guía del dibujo que está debajo. Cálcalo otra vez. Sigue girando hasta la siguiente línea guía y calca otra vez.



Continúa hasta que hayas pasado por todas las líneas guía. Después puedes sacar las hojas del cartón, y colorear tu dibujo.

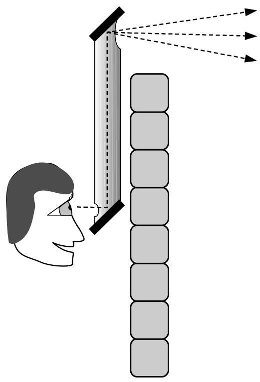


Fabricamos un periscopio

Necesitas un tubo de cartón de unos 30cm de largo, y dos espejos pequeños. Corta los extremos del tubo en dirección diagonal. Corta también una apertura en la parte más larga que queda de cada extremo. Pega sobre cada extremo del tubo uno de los espejos con buena cinta adhesiva, con la superficie reflejante hacia el interior del tubo.

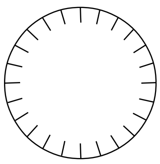
Ahora, si miras por una de las aperturas, debes poder ver lo que se ve desde la otra apertura.

Por ejemplo si estás detrás de un muro alto, pero el extremo del periscopio sobresale sobre el muro, debes poder ver lo que hay al otro lado. Eso se debe a la manera como los espejos reflejan la luz ("Investigación", pregunta 4). – Los submarinos usan periscopios para ver por encima de la superficie del mar, mientras el submarino está sumergido a poca profundidad.

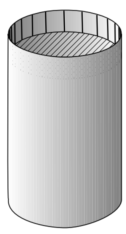


Fabricamos un calidoscopio

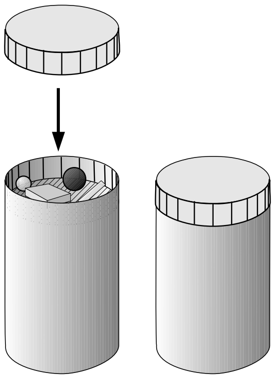
Necesitas un tubo de papel higiénico o similar. De una lámina transparente corta un círculo, con un radio 1 cm mayor que el radio del tubo. Haz cortes de 1 cm de largo desde el borde hacia el centro.



Dobla estos cortes, y pega el círculo de lámina dentro del tubo, a 1 cm de uno de sus extremos. Usa pegamento de silicona o cinta adhesiva.

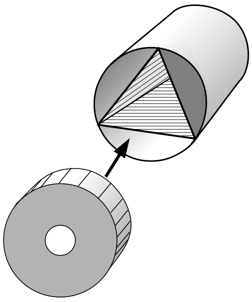


Corta otro círculo igual de un papel trasluciente. Pon en el espacio encima de la lámina transparente unas perlas transparentes de diferentes colores y formas, u otros pequeños objetos transparentes. Después pega el círculo trasluciente sobre el extremo del tubo que contiene la lámina y las perlas. *(Vea el dibujo siguiente.)*



Desde el otro lado, pon dentro del tubo tres espejos delgados en forma de triángulo, con sus caras reflejantes hacia adentro. Estos espejos deben ser cortados a medida (pedirlo en una vidriería): Su largo debe ser 1 cm menos que el largo del tubo, y su ancho depende del lado del triángulo. *(Vea la Nota 2 al final.)*

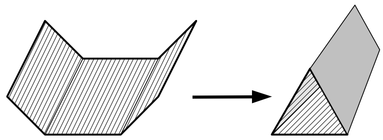
De un papel grueso o cartulina, corta un círculo igual como los primeros; pero córtale adicionalmente en su centro un circulito de aproximadamente 1cm de diámetro. Pega este círculo sobre el extremo abierto del tubo.



Para que se vea más bonito, forra el tubo con un papel de colores.

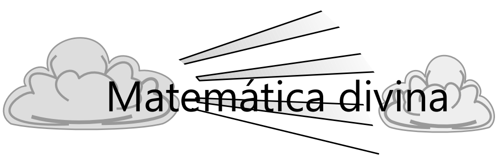
Ahora mira por la apertura del tubo, dirigiendo el otro extremo hacia la luz. Gira el tubo lentamente. Las perlas que se mueven, junto con sus reflejos multiplicados en los espejos, forman toda clase de figuras fascinantes.

Nota 1: Si trabajas con cuidado, en vez de espejos el calidoscopio puede funcionar también con lámina reflejante, del tipo que se usa para empaquetar galletas o como papel de regalo. Corta un rectángulo de cartón delgado, pero firme, con medidas que corresponden a la medida de los tres espejos juntos, puestos lado a lado. Raya y dóblalo en sus tercios para obtener la figura del triángulo. Corta tres tiras de la lámina reflejante, con las medidas requeridas para los espejos, y pégalas cuidadosamente, sin arrugarlas, sobre los tres lados interiores del triángulo. Pon este triángulo de láminas en lugar de los espejos.



Nota 2: ¿Cuál es el ancho requerido de los espejos o láminas reflejantes para formar el triángulo? La siguiente construcción puede darnos la respuesta:

Dibuja un círculo correspondiente al radio interior del tubo, menos el grosor de un espejo. En la *Unidad 57* hemos construido hexágonos regulares. Haz esa misma construcción, pero usa solamente cada otro vértice del hexágono. Así obtendrás un triángulo regular (equilátero) inscrito al círculo. Mide su lado; éste es el ancho que deben tener los espejos.



Reflejando la luz de Jesús

Jesús dijo: "Yo soy la luz del mundo" (Juan 8:12). También dijo a sus amigos: "Ustedes son la luz del mundo" (Mateo 5:14). Si tú amas a Jesús, poco a poco te vas a parecer más a Él. Si haces lo que Él te dice, vas a ser como un espejo que refleja la luz de Jesús: Si haces lo bueno, las otras personas van a ver en ti lo bueno que es Jesús. (Lee también 2 Corintios 3:18.)

En la matemática se dice que una figura reflejada en espejo es *congruente* a la figura original. Si confiamos en Jesús, él puede hacer este milagro de que nuestra vida sea más y más congruente con la vida de él.

Unidad 61 - Arte y juego geométrico: El Tangram y el origami

Prerrequisitos:
- Conocimiento básico de las figuras geométricas.
- Concepto de diagonales, ángulos, área, ...

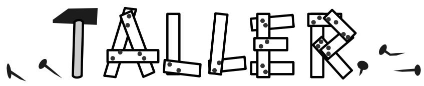
Materiales necesarios:
- *(para el Tangram):* Cartón delgado y tijeras; o madera contrachapada (triplay) y sierrita; goma.
- *(para el origami):* Papeles de diferentes colores; tijeras.

Para los educadores

Esta Unidad es opcional; pero se recomienda mucho trabajarla, por lo menos con aquellos niños que muestran interés en ello. A muchos niños les gusta resolver rompecabezas y hacer trabajitos manuales.

Estas actividades son una buena preparación para entender más adelante ciertas propiedades de ángulos y áreas *(Unidades 64, 65, 70, 94, 95)*. Se recomienda dar suficiente tiempo para estas actividades lúdicas y artísticas, porque aquí se construye el fundamento experimental para entender los conceptos teóricos que se introducirán más tarde.

Se incluyen además diversos desafíos de investigación que ayudan a descubrir propiedades geométricas con la ayuda de las piezas del Tangram y del arte de doblar papel.



Fabricamos un juego de Tangram

El Tangram es un rompecabezas muy antiguo de origen chino. Consiste en siete figuras geométricas que juntas forman un cuadrado. Con estas piezas se pueden formar e inventar una multitud de figuras.

Copien o peguen el molde de la ***Hoja de trabajo 61.1*** sobre un pedazo de cartón o de madera contrachapada (triplay). Si optan por pegar el papel, distribuyan la goma por todas partes de manera uniforme, para que el papel no se despegue después de cortar. – Si optan por copiar el diseño, tómenlo como una oportunidad para practicar construcciones geométricas: Usen regla, escuadra y compás de manera correcta; fíjense en que los ángulos y las longitudes sean exactos. Con los conocimientos geométricos que los niños tienen ahora, ya deberían ser capaces de reproducir este diseño con exactitud.

Si varios niños fabrican simultáneamente sus propios juegos de Tangram, se recomienda que cada uno pinte sus piezas con un color característico para que después pueda distinguir las suyas.

Figuras para formar con el Tangram

Las siguientes dos páginas muestran algunas figuras que se pueden formar con las piezas del Tangram. La regla es que para cada figura se deben usar las siete piezas, ninguna más y ninguna menos.
(Soluciones en el Anexo A.)

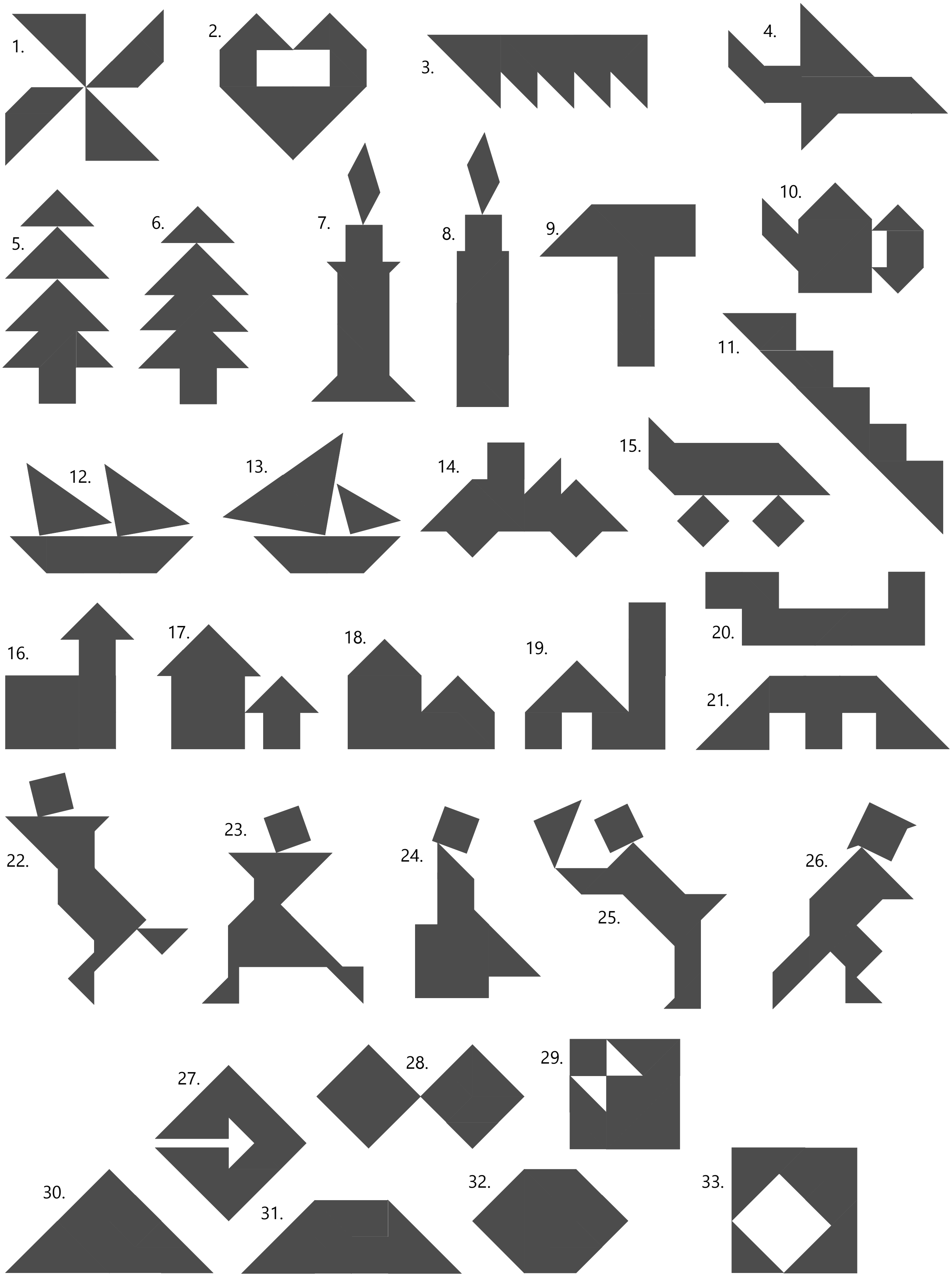
La reproducción de figuras como éstas da lugar a experimentar diversas propiedades geométricas acerca de los cuadrados y triángulos; ángulos rectos y otros ángulos; áreas; etc. También se puede observar cómo algunas piezas pequeñas juntas pueden formar una forma igual a una de las piezas mayores. (¿Cómo se pueden formar el cuadrado pequeño, el paralelogramo, o uno de los triángulos mayores, con las piezas menores?) – La sección de "Investigación" contiene unas preguntas geométricas más específicas que se pueden explorar con las piezas del Tangram.

Concurso de Tangram

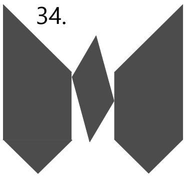
Si desea, puede organizar un concurso de reproducir figuras de Tangram: Con anticipación, prepare unas hojas con algunas figuras como las de las siguientes páginas, dibujadas (o cortadas de papel colorado) en grande, de manera que una figura ocupe una hoja entera. Los niños no deben ver estas figuras con anticipación. El concurso puede ser individual, o en equipos de dos. Cada niño o equipo necesita su propio juego de Tangram. Muestre la primera figura a todos. Quien la arma primero, tiene un punto. Después pase a la siguiente figura.

Inventar figuras propias

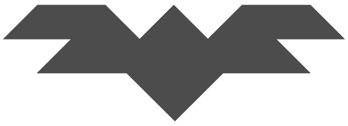
Aun más interesante es usar nuestra creatividad para inventar figuras nuevas que se pueden formar con las piezas del Tangram: figuras geométricas; casas o torres; objetos; animales; figuras humanas; etc. Pueden hacer una exposición con las figuras nuevas que inventaron.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.

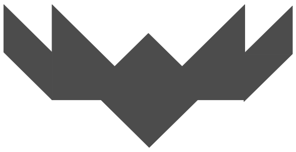
34.



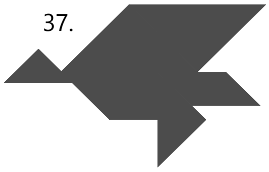
35.



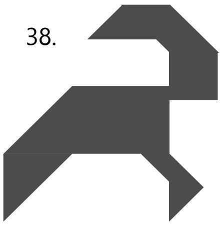
36.



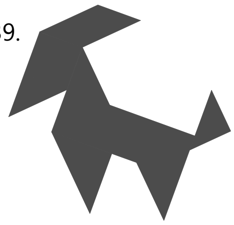
37.



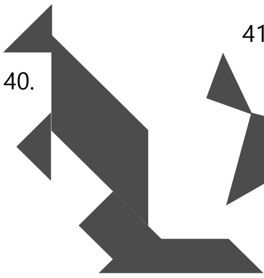
38.



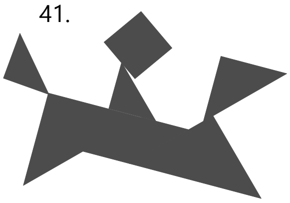
39.



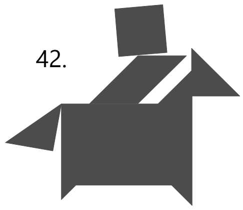
40.



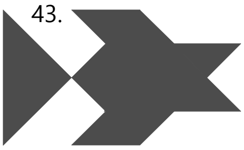
41.



42.



43.



44.

45.

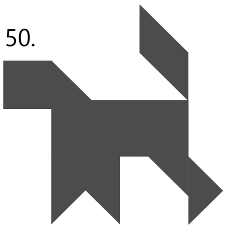
46.

47.

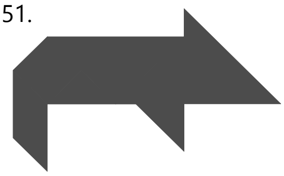
48.

49.

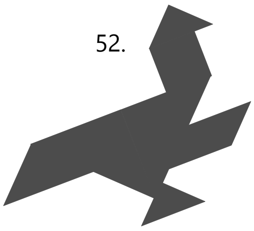
50.



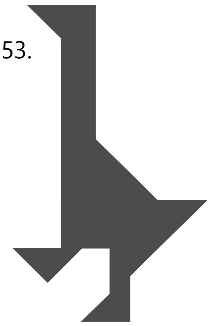
51.



52.

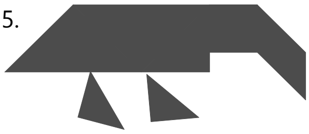


53.

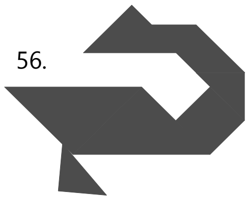


54.

55.



56.



57.

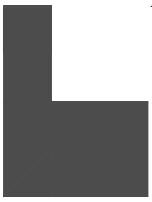
58.

59.

60.

61.

62.



63.

Investigación

Investigaciones con el Tangram

Preguntas sobre ángulos:

1) ¿Cuánto miden los ángulos de los triángulos del tangram?

2) ¿Cuánto miden los ángulos del paralelogramo del tangram?

Preguntas sobre áreas:

3) Forma un cuadrado con algunas piezas del tangram (o usa el cuadrado pequeño). Encuentra o forma un triángulo cuya área es la mitad del área del cuadrado.

4) Forma un cuadrado con las piezas del tangram (o usa el cuadrado pequeño). Encuentra o forma un triángulo cuya área es igual al área del cuadrado.

5) Forma un cuadrado con las piezas del tangram (o usa el cuadrado pequeño). Ahora forma otro cuadrado cuyo lado es el doble del lado del primer cuadrado. ¿Cuánto mide el área de este cuadrado, en comparación con el área del primer cuadrado?

6. a) Si tienes un cuadrado, ¿cómo puedes formar un cuadrado con un área que es el doble del primero?

b) ¿Qué representa el lado del nuevo cuadrado, respecto al cuadrado original?
(El problema puede plantearse con el cuadrado pequeño del tangram; o también con el cuadrado completo que contiene las siete piezas del tangram. En este caso el problema consiste en formar un único cuadrado con las catorce piezas de *dos* juegos de tangram.)

7.a) Si tienes un cuadrado, ¿cómo puedes formar un cuadrado con un área que es la mitad del primero?
b) ¿Qué representa el lado del nuevo cuadrado, respecto al cuadrado original?

Nota: Se entiende por sí mismo que las figuras que se pueden formar de las mismas piezas, tienen áreas iguales. Si un niño tiene problemas en entender eso, todavía no ha alcanzado el nivel de desarrollo que es necesario para entender la geometría, y debería todavía trabajar con temas más elementales.

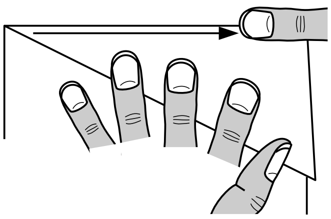
TALLER *(continúa)*

La geometría del origami

El origami, este antiguo arte japonés de doblar papel, es otra gran oportunidad para experimentar conceptos geométricos. Seguramente pueden encontrar muchas ideas para modelos de origami en libros o en internet. Abajo presentaré solamente dos ejemplos, para ilustrar cómo los términos geométricos entran de manera natural en la descripción de un modelo de origami.

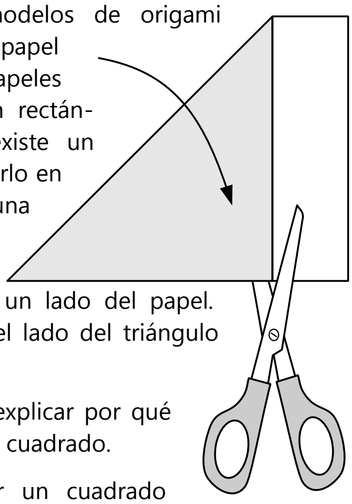
Pautas generales:

Para que salgan exactos, los modelos de origami deben doblarse sobre la mesa, no cogiéndolos en el aire. Al doblar, primero pon el papel cuidadosamente en su posición y mantenlo allí con una mano. Con un dedo de la otra mano apriétalo firmemente a lo largo de la entera doblez nueva.



Cómo cortar un cuadrado de un rectángulo:

La mayoría de los modelos de origami requieren una hoja de papel cuadrada; pero los papeles vienen normalmente en rectángulos. En este caso existe un método fácil de convertirlo en un cuadrado: Dobla una esquina del papel diagonalmente, de manera que coincide con un lado del papel. Corta por donde pasa el lado del triángulo que obtuviste.

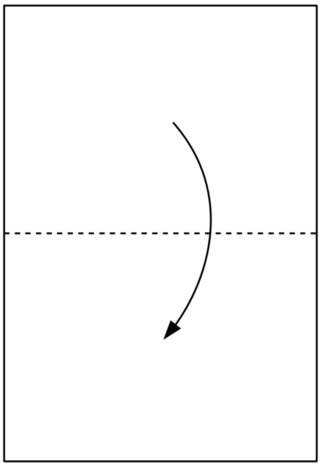


Para pensar: Trata de explicar por qué este método produce un cuadrado.

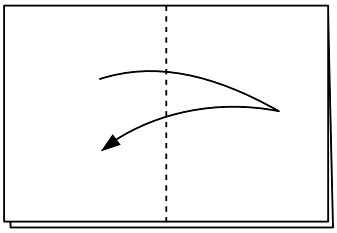
Si tenemos que cortar un cuadrado pequeño de un pliego de papel grande, es preferible hacer una construcción con regla y escuadra como aprendimos en la *Unidad 56*. O puedes hacer una "construcción" de origami. La sección de "Investigación" contiene un problema al respecto (Pregunta *12).

Un barquito velero

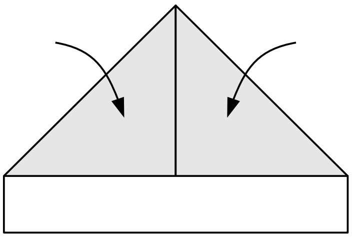
1. Para este barquito necesitas un papel en forma de *rectángulo*. Dóblalo por la mitad, *paralelo* al *lado* más corto.



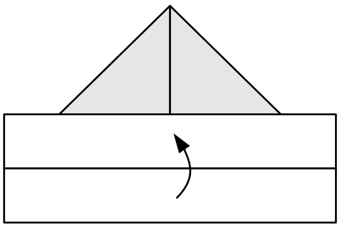
2. Dóblalo otra vez por la mitad, en *ángulo recto* al lado que acabas de doblar, y vuelve a abrirlo.



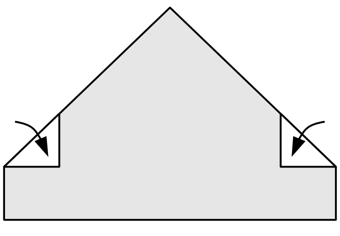
3. Dobla ambas esquinas superiores *diagonalmente* hacia la doblez del medio, de manera que se forma un *triángulo* por ambos lados:



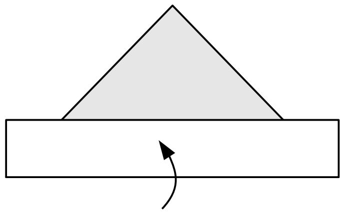
4. Dobla la parte inferior del papel hacia arriba, *paralelo* al *lado* inferior.



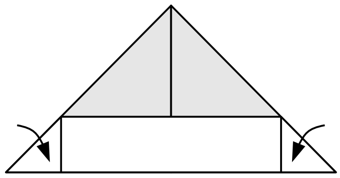
5. Voltea el modelo y dobla los *triángulos* sobresalientes hacia adelante.



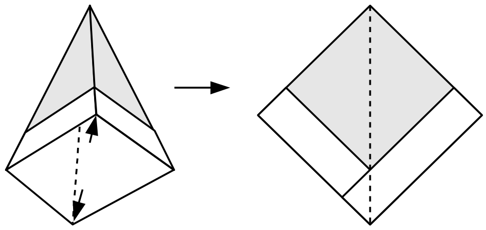
6. Dobla la parte inferior del papel hacia arriba, como en el paso 4.



7. Voltea el modelo otra vez y dobla como en paso 5.

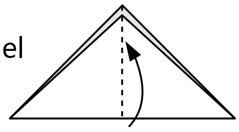


8. Ahora tienes un "sombrero" *triangular*. Mete tu mano dentro del "sombrero" y jala el *punto medio* de su borde hacia arriba. Al mismo tiempo, con la otra mano jala el *punto medio* de su otro borde hacia abajo. Aplana la figura en esta nueva posición. El *triángulo* se habrá convertido en un *cuadrado*.

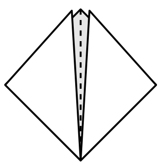


(¡Esta conversión de un triángulo en un cuadrado es bastante interesante geométricamente! Obsérvala detenidamente para ver qué está pasando.)

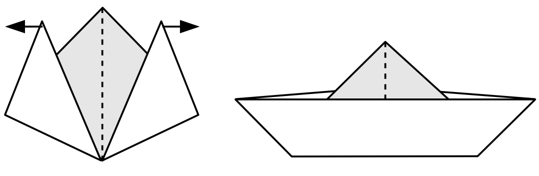
9. Dobla el *vértice* inferior del *cuadrado* hacia arriba, de manera que coincide con su *vértice* superior. Voltea el modelo y haz lo mismo por el otro lado. Tendrás nuevamente un "sombrero" *triangular*, pero más pequeño que el anterior.



10. Convierte este "sombrero" nuevamente en un cuadrado, como en el paso 8.

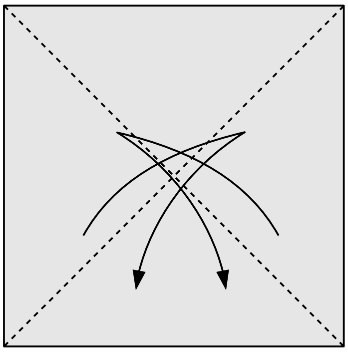


11. Coge las dos puntas superiores y jálalas cuidadosamente hacia afuera. Aparecerá la figura de un barquito en forma de *trapecio*, con su vela *triangular* en el medio.

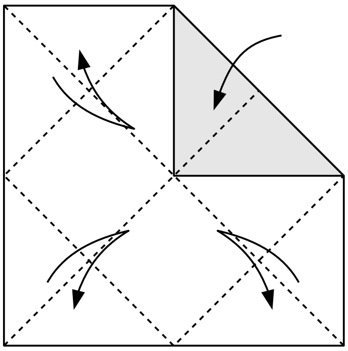


Un pez

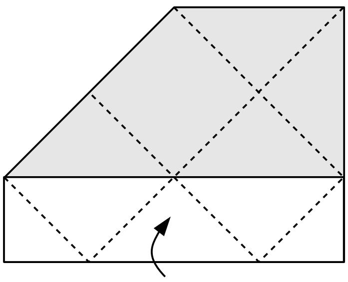
1. Comienza con un papel *cuadrado*. Dóblalo por ambas *diagonales* y ábrelo otra vez.



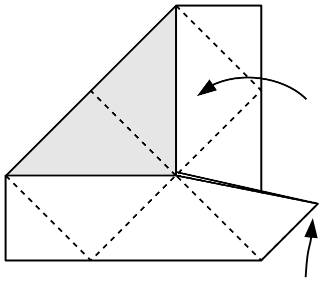
2. Voltéalo. Dobla sus cuatro esquinas al *centro* del *cuadrado*. (El centro está marcado por la *intersección* de las dos *diagonales*.) Vuelve a abrir todas menos una.



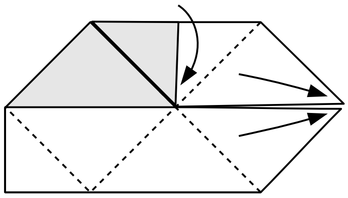
3. Voltéalo otra vez. Dobla el borde inferior del papel hacia el centro, *paralelamente* al lado *inferior* del *cuadrado*.



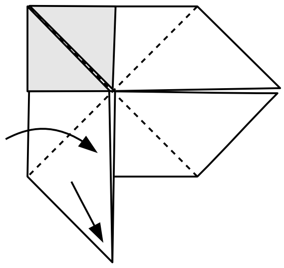
4. Dobla de la misma manera el borde derecho; pero jala hacia arriba la esquina inferior del cuadrado, de manera que quede parada *verticalmente* en forma de *triángulo*. Dobla este triángulo hacia el lado derecho.



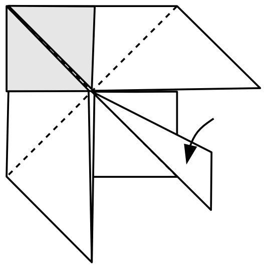
5. Dobla el borde superior hacia el *centro*, igual como los otros. Como en el paso 4, jala la esquina del cuadrado hacia arriba para formar un *triángulo* parado, y dobla este triángulo también hacia la derecha.



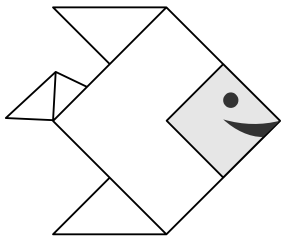
6. Dobla el borde izquierdo de la misma manera como los anteriores (Pasos 4 y 5). Dobla el *triángulo* hacia abajo.



7. Dobla el lado largo del *triángulo* inferior derecho hacia abajo, de manera que coincide con lo que antes era la *diagonal* del cuadrado.



8. Voltea el modelo, ¡y el pez ya está listo! Dibújale ojo y boca, y píntalo.



Investigación

Investigaciones relacionadas con el origami:

Los siguientes desafíos deben resolverse únicamente doblando el papel; sin hacer marcas con lápiz, ni usar regla, escuadra, u otras herramientas.

8) Mitad de un segmento:

Tienes una tira de papel con una determinada longitud. ¿Cómo puedes convertirla en una tira que tiene la mitad del largo de la tira original? (Solamente con doblar el papel, sin medirlo con la regla ni usar otras herramientas.)

9) Triple de un segmento:

Tienes una tira de papel con una determinada longitud. De otro papel más grande quieres medir una tira con el triple de la longitud de la primera tira. ¿Cómo puedes hacer eso, solamente doblando el papel, sin usar regla ni otras herramientas?

10) Mitad de un ángulo:

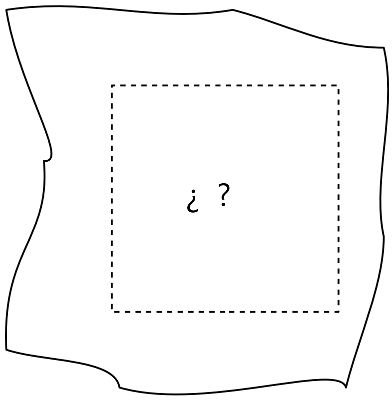
Tienes un papel con una esquina doblada o cortada en un ángulo determinado. ¿Cómo puedes producir un ángulo que mide *la mitad* de ese ángulo, solamente doblando el papel, sin usar otras herramientas?

11) Mitad de un cuadrado:

Tienes un papel cuadrado. ¿Cómo puedes doblarlo de manera que su forma siga cuadrada, pero su área sea la mitad del cuadrado original? – Se debe hacer *solamente doblando el papel*, sin cortar, sin hacer construcciones con lápiz, sin usar ninguna herramienta.

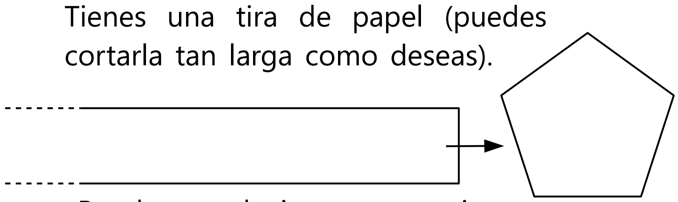
****12) Desafío cuadrado:***

Tienes un pedazo de papel roto de manera completamente irregular por todos lados, sin ningún lado recto. La tarea consiste en doblar este papel en forma de un cuadrado *exacto*. No se permite el uso de ninguna herramienta: ni lápiz, ni regla, ni ninguna otra herramienta aparte de tus propias manos. ¿Cómo se puede lograr eso?



*****13) Desafío pentagonal:***

Tienes una tira de papel (puedes cortarla tan larga como deseas).



¿Puedes producir con esta tira un pentágono regular, solamente doblando?

Si lo has intentado por mucho tiempo y no lo logras, puedes consultar el Anexo A.

Unidad 62 - Punto medio y ángulo recto con el compás

Prerrequisitos:

- Construcciones básicas con el compás *(Unidad 57)*.

Materiales necesarios:

- Regla, compás.

Para los educadores

Normalmente no usamos el compás para construir un ángulo recto. Sin embargo, aprender esta construcción tiene unos beneficios educativos:

- Ilustra los métodos de la geometría clásica, como la enseñaban los antiguos griegos, quienes no permitían el uso de otras herramientas aparte de la regla (sin graduación) y el compás.

- Enseña implícitamente diversas propiedades geométricas de triángulos isósceles, rombos, mediatrices, propiedades de simetría, etc. No enseñaremos todas estas propiedades explícitamente a este nivel; pero las experiencias concretas con la construcción edifican un fundamento experimental que facilitará la comprensión más adelante, cuando introduciremos estas propiedades formalmente.

- Se basa en la construcción de la mediatriz, la cual sí se construye preferiblemente con la ayuda del compás.

La sección de ***"Investigación"*** contiene unos desafíos de construcción que serán bastante difíciles a este nivel. Si notamos que los niños todavía no entienden cómo se puede hacer, dejamos estos problemas para más tarde. (El *Anexo A* contiene pautas adicionales para los problemas de investigación.)

TALLER

Construir el punto medio entre dos puntos

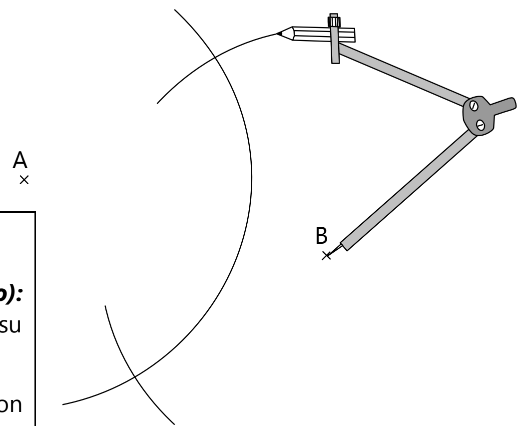
Volvamos una vez más al tiempo de los antiguos griegos *(vea Unidad 59, "Copiar ángulos con el compás")*. Queremos encontrar el punto medio entre dos puntos.
Podríamos medirlo con la regla y calcular la mitad. Pero las reglas de los antiguos griegos no tenían ninguna escala para medir. Ellos usaban sus reglas solamente para trazar líneas rectas, no para medir longitudes.
Podríamos doblar el papel, de manera que los dos puntos queden uno encima del otro; entonces la mitad está donde el papel está doblado. Pero los antiguos griegos no tenían papeles finos como nosotros. Solamente tenían papiros y pergaminos, que no son transparentes y tampoco se doblan tan fácilmente.
Entonces los antiguos griegos tenían que usar su ingenio para construir el punto medio solamente con compás y regla. Observa la siguiente construcción:

Vocabulario matemático

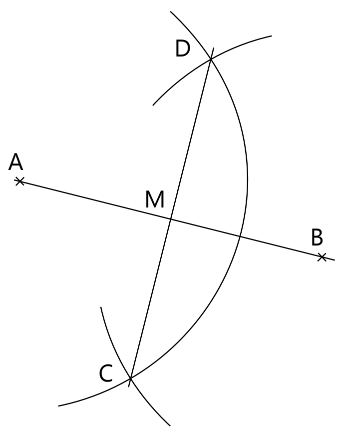
Mediatriz *(de un segmento recto):* La recta que corta el segmento en su punto medio y en ángulo recto.

Triángulo isósceles: Triángulo con dos lados iguales.

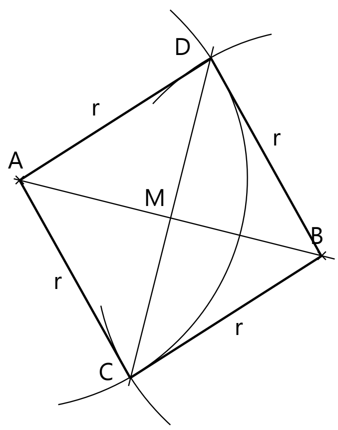
Dibujamos un arco con centro en A. El radio no es tan importante; pero se recomienda que sea un poco menor (no mucho) que la distancia AB. Después, *con el mismo radio*, dibujamos un arco igual con centro en B. En realidad no es necesario dibujar los arcos completos; lo único que necesitamos son sus intersecciones:



Unimos los puntos A y B con una recta. También unimos las intersecciones de los arcos con una recta. La intersección de estas dos rectas es el punto medio entre A y B:



¿Por qué es esto así? – En realidad hemos construido un rombo con sus diagonales, porque los cuatro lados AC, AD, BC y BD miden todos igual: tienen la longitud del radio de nuestros arcos.



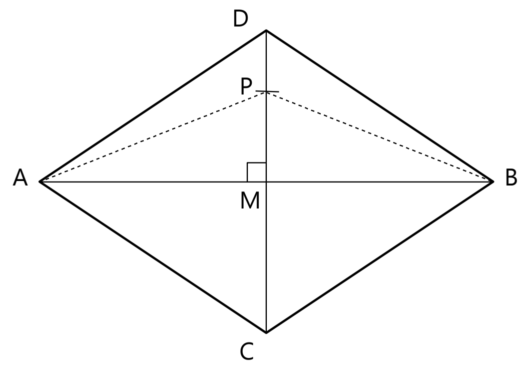
Observemos algunas de las propiedades del rombo: Cada diagonal por sí sola divide el rombo en dos triángulos congruentes, porque estos dos triángulos tienen sus lados iguales. *(Vea Unidad 59: Construcción de triángulos congruentes.)* Entonces tenemos una figura simétrica: La diagonal horizontal es un eje de simetría, y la diagonal vertical también es un eje de simetría. B es el reflejo de A en el eje vertical, y D es el reflejo de C en el eje horizontal.

Recordemos las propiedades de simetría *(Unidad 60)*: Un punto y su reflejo tienen la misma distancia del eje de simetría. Por tanto, M es efectivamente el punto medio entre A y B. También es el punto medio entre C y D.

Pero hay más: La recta que une un punto con su reflejo, es perpendicular al eje de simetría. Entonces *las diagonales de un rombo se cruzan en ángulo recto.*

Practica: Dibuja dos puntos, y construye su punto medio con esta construcción.

Nota 1: La recta CD corta el segmento AB en su punto medio y en ángulo recto. La recta que cumple estas condiciones, se llama ***mediatriz*** de AB.
La mediatriz es a la vez el *eje de simetría* entre A y B. Si escogemos cualquier punto P en la mediatriz, las distancias AP y BP serán iguales.



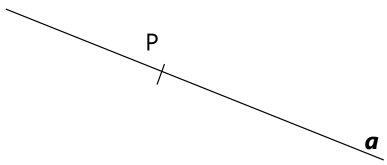
Nota 2: Las dos mitades de un rombo son triángulos con dos lados iguales. (Por ejemplo el triángulo ACD, o el triángulo ABC.) Triángulos con esta propiedad se llaman ***triángulos isósceles***. Observando el dibujo, quizás puedes deducir algunas propiedades de los triángulos isósceles.

Investigación

Construir un ángulo recto con regla y compás

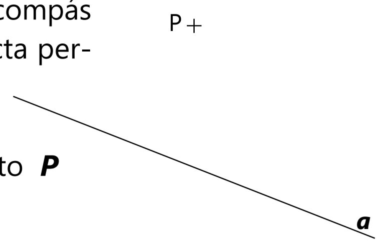
Los antiguos griegos tampoco usaban escuadras. Aun los ángulos rectos los tenían que construir únicamente con regla y compás. ¿Cómo lo hicieron?

Al final de la última actividad hemos visto que las diagonales de un rombo se cruzan en ángulo recto. Entonces podemos usar esta propiedad para construir ángulos rectos. Investiga cómo hacer esto para resolver los siguientes problemas de construcción:



1. Con regla y compás construye una recta perpendicular a la recta ***a***, que pasa por el punto P que pertenece a ***a***.

2. Con regla y compás construye una recta perpendicular a la recta ***a***, que pasa por el punto ***P*** afuera de ***a***.



Otros desafíos de construcción

Investiga cómo puedes resolver también los siguientes problemas de construcción, usando únicamente la regla y el compás:

3. Dibuja un segmento recto AB. Construye un cuadrado tal que AB es su diagonal.

4. Dibuja un círculo con centro C. Construye un cuadrado inscrito al círculo (o sea, que sus cuatro vértices se encuentren sobre la circunferencia).

*5. Construye una paralela a una recta dada, usando solamente regla y compás.

**6. Se tiene un círculo sin conocer su centro. Descubre una construcción que permite encontrar el centro del círculo.

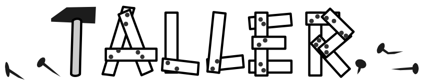
Unidad 63 - Más recortables

Prerrequisitos:
- Casitas de cartulina *(Unidad 58)*.

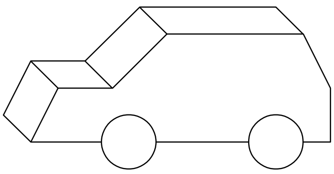
Materiales necesarios:
- Regla, escuadra, compás, transportador.
- Cartulina, colores, tijeras, goma.

Para los educadores

Las actividades de construir recortables *(como en la Unidades 55 y 58)* son opcionales. Pero presentan muy buenas oportunidades de practicar construcciones geométricas, con una actividad que les gusta a muchos niños.

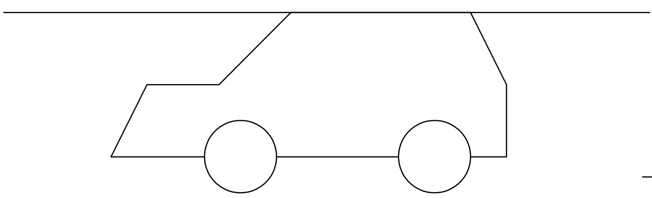


Carros y similares

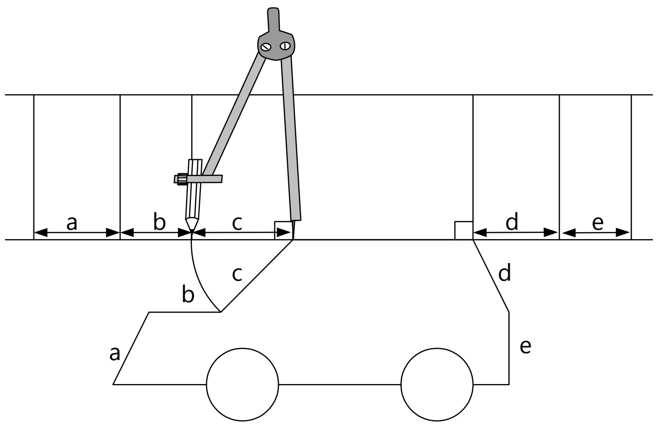


Este carro sencillo consiste solamente en dos caras iguales (o sea, reflejadas), y el techo de en medio. Por debajo queda abierto. Para construir un modelo de este tipo hay que comenzar con una de sus caras, y delimitarla enteramente con líneas *rectas* (con excepción de las ruedas).

Después de terminar una cara del carro, construimos sobre su lado superior una tira recta que formará el techo. Los dos lados de esta tira deben ser paralelos. La distancia entre las paralelas determina el ancho del carro.

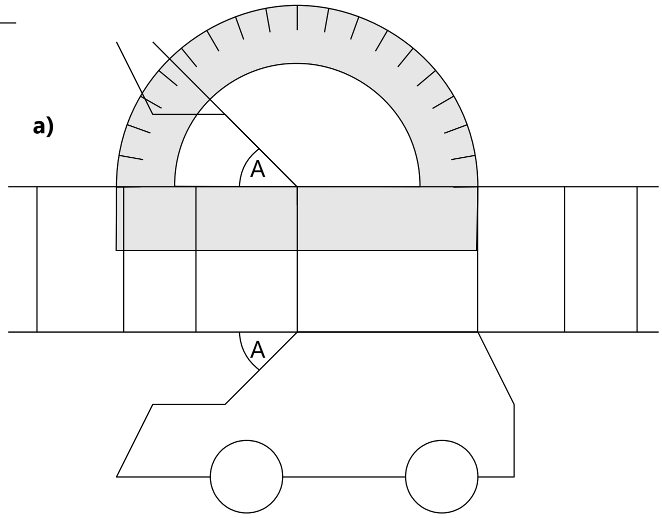


Dividimos esta tira en rectángulos, de manera que la longitud de cada rectángulo corresponde sucesivamente a la longitud de uno de los segmentos de la cara del carro:



Finalmente construimos al lado opuesto de esta tira la otra cara del carro, congruente a la primera, pero reflejada. Tenemos entonces el desafío de construir una figura congruente a otra. Hemos visto en la *Unidad 59 (sección "Ampliaciones")*, que en una figura más compleja que un triángulo no es suficiente copiar las medidas de los lados. Esta situación nos ofrece la oportunidad de explorar varios métodos de construir una figura congruente. Por ejemplo:

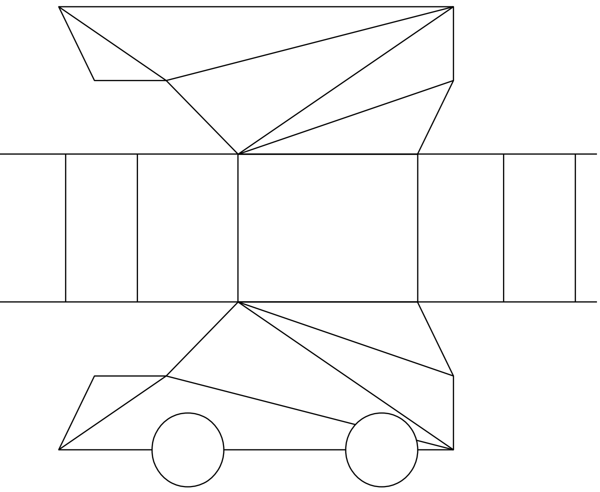
a)



a) Copiamos no solamente las longitudes de los segmentos, sino también los *ángulos* entre ellos (usando el compás o el transportador).

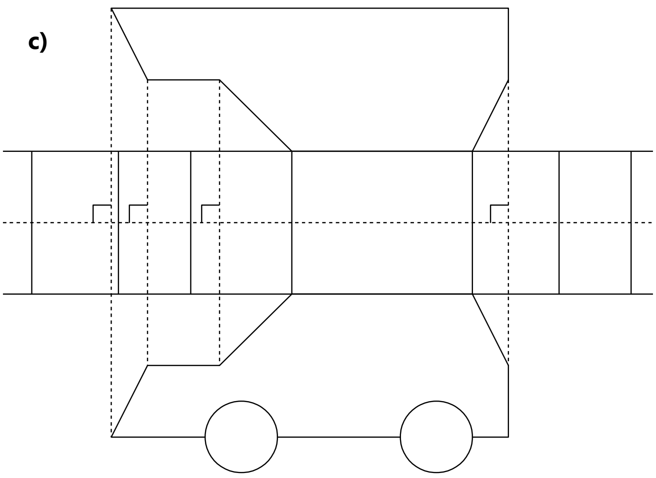
b) Dividimos la primera cara del carro en triángulos, dibujando unas diagonales. Entonces podemos construir triángulos congruentes, usando las longitudes de los lados y también de las diagonales.

b)



c) Usamos propiedades de simetría *(vea Unidad 60)*: En el medio de la tira del techo construimos otra paralela que tiene la misma distancia hacia las dos primeras paralelas. Este es el eje de simetría de la construcción entera. Ahora podemos reflejar simétricamente todos los vértices de la primera cara del carro al otro lado, y así obtenemos la segunda cara.

c)

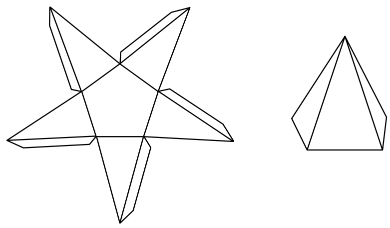


Geométricamente, el cuerpo resultante es un *prisma recto:* Tiene dos caras congruentes y paralelas (las dos caras del carro), cuyos vértices se unen mediante aristas perpendiculares a estas dos caras.

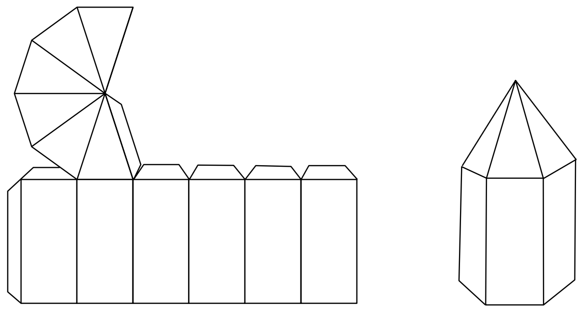
Quizás tienen ideas para otros objetos que se pueden formar con una construcción similar: un puente, una cama, animales, etc.

Pirámides regulares

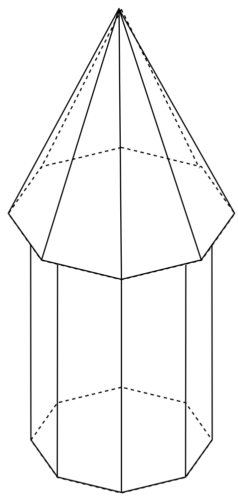
En la *Unidad 58* ya hemos construido pirámides cuadradas (o sea, con un cuadrado como base). Podemos construir pirámides con otros polígonos regulares como base: un pentágono, un hexágono, etc. Eso no es difícil, porque las aristas de los triángulos laterales son todas iguales. Entonces solamente tenemos que construir triángulos isósceles congruentes sobre los lados del polígono base:



De la misma manera podemos construir torres con techos en forma de pirámide. Para variar, podríamos también organizar los triángulos del techo de otra forma y mantenerlos unidos por sus aristas laterales, como en este modelo de una torre hexagonal:



O podemos construir la pirámide del techo aparte y hacerla un poco más grande para que sobresalga. Descubran ustedes mismos cómo realizar esta construcción en dos partes *(derecha)*:

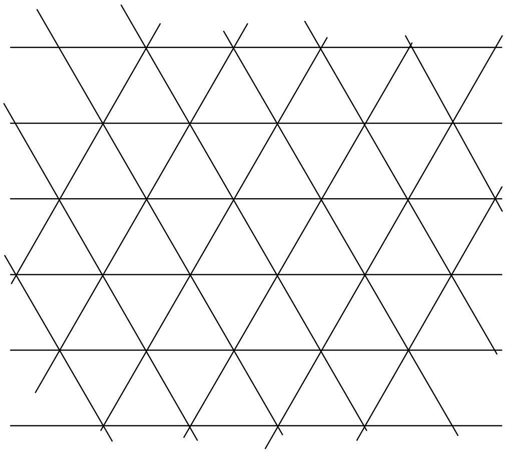


Con los conocimientos que tenemos ahora, todavía no podemos construir pirámides *irregulares*. Esas tendrían aristas de diferentes longitudes que no se pueden calcular tan fácilmente. Será un desafío para el nivel de Secundaria I.

Los cinco poliedros regulares

Podemos construir modelos de los cinco poliedros regulares *(vea Unidad 72)*. Para eso necesitamos construir solamente polígonos regulares, y copiarlos de manera congruente.

Tres de estos cuerpos consisten en triángulos: el ***tetraedro***, el ***octaedro*** y el ***icosaedro***. Para éstos, lo más práctico es construir primero una "malla" de triángulos equiláteros:

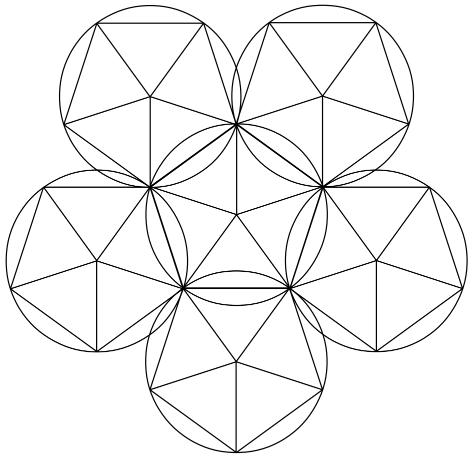


Para eso podemos comenzar con un único triángulo (o con una "estrella" de tres rectas en ángulos de 60º), prolongar sus lados, y marcar segmentos iguales en estas rectas. Después necesitamos solamente trazar paralelas por los puntos marcados.

Una vez que tenemos esta "malla", podemos seleccionar los triángulos que necesitamos para nuestros cuerpos, y añadir las lengüetas para poner goma. Esto es muy fácil para el tetraedro, un poco más difícil para el octaedro, y bastante difícil para el icosaedro. Quizás hay que hacer primero un "borrador" en papel, cortar y doblarlo y experimentar un poco, hasta descubrir cómo tienen que organizarse los triángulos para obtener un icosaedro. Después podemos realizar la construcción definitiva en cartulina. (En el icosaedro se juntan cinco triángulos en cada vértice.)

El ***hexaedro (cubo)*** es tan fácil que a estas alturas no debe necesitar instrucciones.

Para el ***dodecaedro*** tenemos que construir pentágonos regulares. Como en la malla de triángulos, podemos comenzar con uno solo. (Partimos un círculo en cinco partes iguales, usando el transportador.) Después construimos sobre sus lados unos triángulos isósceles con lados iguales al radio del círculo. Eso nos da los centros de los nuevos círculos donde podemos construir los pentágonos adyacentes. Podemos hacerlo nuevamente con el transportador, o podemos usar el compás para "copiar" la longitud del lado del primer pentágono.



Analizando esta figura, notamos que ciertos lados de los pentágonos caen en una sola recta, y que los lados de cada pentágono son paralelos a los lados de los otros pentágonos. Podemos aprovechar estas propiedades para facilitar la construcción: Muchas partes se pueden completar simplemente trazando paralelas.

Ahora tenemos que añadir una figura igual a esta por uno de sus lados, y así tendremos el total de los doce pentágonos que forman el dodecaedro.

Principios matemáticos

La construcción del carrito repasa diversos principios relacionados con la ***congruencia***, como los que ya hemos introducido en la *Unidad 59*, por ejemplo en el “Experimento con triángulos y cuadriláteros”.

¿A dónde vamos desde aquí?

Los alumnos a quienes les gustan las construcciones tridimensionales, probablemente estarán interesados también en las *Unidades 71 y 72* acerca de las tres dimensiones del espacio y los cuerpos geométricos. Si lograron construir sus propios recortables, deben tener ya las capacidades para trabajar esas Unidades ahora.

Unidad 64 - Mosaicos de polígonos regulares

Prerrequisitos:

- Conceptos básicos de figuras geométricas *(Unidad 54)* y ángulos *(Unidad 59)*.

Materiales necesarios:

- Cartón o madera, cúter o sierrita, pintura.
- Regla, escuadra, compás, transportador *(para quienes prefieren construir los polígonos por sí mismos)*.

Para los educadores

Otra unidad opcional, que permite experimentar de manera concreta las propiedades de polígonos, ángulos, etc.

El material consiste en polígonos regulares, todos con lados del mismo tamaño, de manera que pueden combinarse juntos en forma de mosaicos. Para mayor variación se incluyen algunas piezas adicionales basadas en los mismos polígonos: paralelogramos, trapecios, etc.

Puede ser un poco difícil aun para adultos, construir los polígonos de manera que los lados de todos sean iguales. Por eso se proveen moldes en la ***Hoja de trabajo 64.1***. Estos moldes se pueden copiar o pegar sobre cartón o madera, y después cortar y pintar las piezas. Los niños pueden ayudar en estos trabajos con las destrezas que tienen. (Si les falta práctica en trabajos con madera, pueden también encargar el trabajo a un carpintero.)

TALLER

Fabricamos las piezas del mosaico

Fabricaremos un mosaico que permite armar diversos ornamentos; y además puede ayudarnos a descubrir algunas propiedades geométricas. Para no exigir construcciones demasiado complicadas, la ***Hoja de trabajo 64.1*** contiene moldes para las piezas, que pueden copiarse a un pedazo de cartón o madera. Copien cada pieza tantas veces como desean, corten y píntenlas.
- Si desean un desafío a su habilidad de realizar construcciones geométricas, pueden también intentar construir estas piezas por ustedes mismos. Casi todas las piezas del mosaico consisten en polígonos regulares; tienen sus lados con la misma medida para que puedan encajar en forma de mosaico.

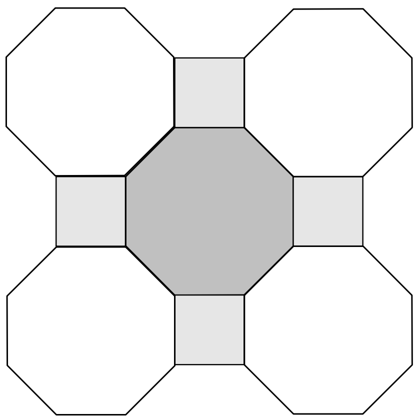
Para facilitar una mayor variedad de combinaciones, la hoja de trabajo contiene unas piezas adicionales que no son polígonos regulares, pero están relacionadas con ellos:

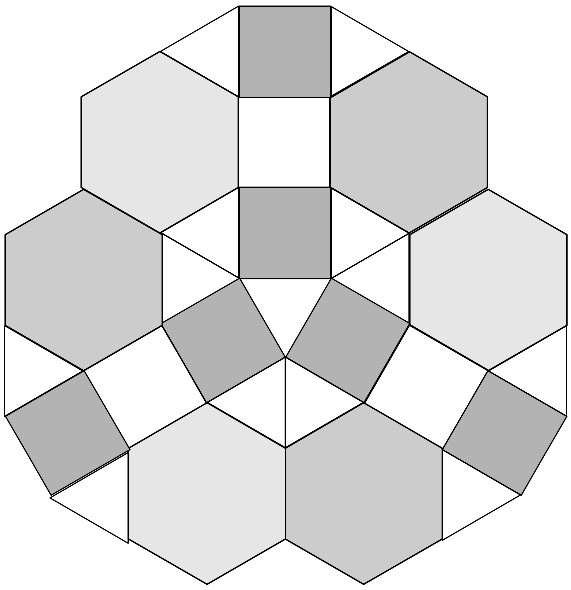
Los *triángulos rectángulos-isósceles (D)* son mitades de cuadrados. Los *paralelogramos (C)* se pueden formar de dos de estos triángulos, así que están también relacionados con los cuadrados.
Los *rombos (H)* son iguales a dos triángulos equiláteros juntos; entonces se pueden combinar con esos, pero también con los hexágonos. Los *trapecios isósceles (I)* son mitades de hexágonos; entonces ellos también combinan bien con los triángulos y los hexágonos.

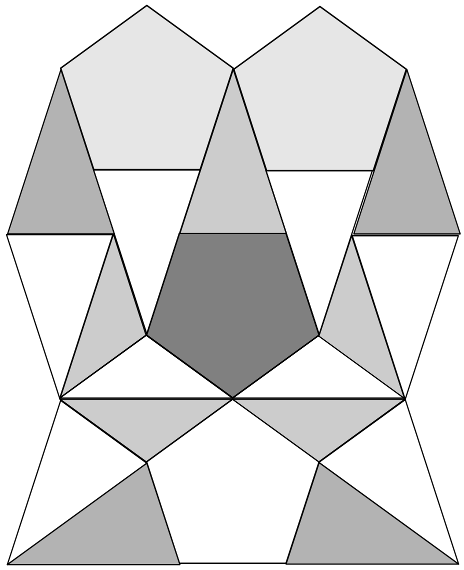
Los dos tipos de *triángulos isósceles (F, G)* (no rectángulos) son partes de un pentágono, como muestra el dibujo pequeño en la hoja. El pentágono es difícil de combinar con otros polígonos, y aun con otros pentágonos. Estos triángulos permiten crear combinaciones con pentágonos.

Creamos mosaicos

Formen diferentes mosaicos con estas piezas. Prueben qué combinaciones son posibles con polígonos iguales, o diferentes. Mientras hacen esto, pueden observar qué propiedades descubren acerca de los ángulos o las áreas de los distintos polígonos, o cualquier otra propiedad interesante que les llama la atención.







Un poco de historia

Los antiguos romanos usaban la técnica del mosaico para crear cuadros grandes, compuestos de miles de piedritas de diferentes colores, cortadas en pequeños rectángulos, triángulos, y otras formas.

Investigación

Usa las piezas del mosaico para descubrir las respuestas a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto miden los ángulos de un hexágono regular?

2. ¿Con cuáles polígonos regulares se puede cubrir un plano sin dejar espacios vacíos? – o sea, que puedes formar un patrón regular donde se repite siempre el mismo polígono, y no quedan huecos?

3. ¿Puedes encontrar tales patrones regulares que consisten en una combinación de dos o más polígonos distintos, pero que también se repiten siempre de la misma manera?

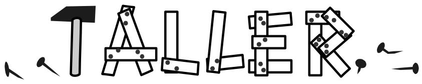
4. a) Con los pentágonos regulares y los triángulos que son partes de pentágonos, intenta formar pentágonos regulares más grandes, sin que queden huecos. ¿Qué tamaños de pentágonos puedes formar?
b) ¿Puedes formar con estas piezas un pentágono grande, tal que contenga dentro de sí un pentágono de cada uno de los tamaños menores?

5. ¿Cómo puedes formar un dodecágono regular (12 lados), usando otros polígonos regulares y sin que queden huecos?

Unidad 65 - Perímetros y áreas

Prerrequisitos:
- Medidas de áreas *(Unidad 32)*.
- Multiplicación y división de fracciones con enteros *(Unidad 38)*.

Materiales necesarios:
- Objetos de la vida diaria.
- Cinta métrica.



Perímetros en la vida diaria

Busquen situaciones donde usamos el perímetro de una figura. Por ejemplo si queremos atar una cinta o cuerda alrededor de una caja, la longitud de la cinta alrededor es el perímetro de la sección respectiva de la caja. O si queremos forrar un objeto con una tira de papel alrededor, la longitud necesaria de la tira es el perímetro del objeto. Lo mismo podemos observar en latas de alimentos o botellas de bebidas que tienen un etiqueta pegada alrededor: Si desprendemos la etiqueta, su longitud es el perímetro de la lata o botella.

A una escala mayor, tenemos que calcular con perímetros cuando queremos cercar un terreno: La longitud total del cerco es el perímetro del terreno.
Antiguamente, las ciudades se rodeaban de murallas. Para calcular la cantidad de material que se necesita para construir una muralla, se debe saber el perímetro de la ciudad. Un vigilante que camina sobre la muralla, tiene que recorrer este perímetro para dar una vuelta completa alrededor de la ciudad.

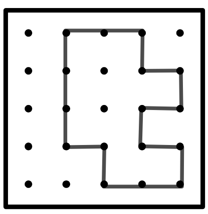
Pueden medir los perímetros de algunos objetos más o menos planos: el tablero de la mesa; la pizarra; un cuaderno; la tapa de una olla; etc. También pueden medir el perímetro de la casa o del terreno donde viven.

Averigüen (en un atlas, un libro de geografía, o en internet) la longitud total de las fronteras de su país. Este es el perímetro del país.

Perímetros en el geoplano

Construyan unas figuras en el geoplano y averigüen sus perímetros:

a) Construye figuras que tienen únicamente ángulos rectos. En estas podemos contar cuántas unidades mide su perímetro. (Consideramos como "unidad" la distancia entre dos clavos adyacentes.)



b) Si quieres medir los perímetros de otras figuras, tienes que usar una pita o lana que no se estira, en vez de las ligas. Amarra un extremo de la lana en un clavo y construye una figura. Marca el final del perímetro en la lana con un nudo o una marca de bolígrafo. Después estira la lana y mide con la ayuda de los clavos del geoplano, cuántas "unidades" mide el perímetro. En este caso normalmente no saldrá un número entero de unidades.

Construimos figuras y medimos sus perímetros

Con la ayuda de una regla, dibuja unos polígonos (figuras cerradas con lados rectos). Pueden ser tan irregulares como quieres, y pueden tener tantos lados como quieres, pero los lados deben ser rectos. Mide sus lados y calcula sus perímetros.

Imagina o dibuja y calcula:

1. ¿Cuánto mide el perímetro de un rectángulo con lados 4 cm y 6.5 cm?

2. ¿Cuánto mide el perímetro de un cuadrado con lados de 7 cm?

3. ¿Cuánto mide el perímetro de un triángulo con lados 13 cm, 17 cm y 25 cm?

4. ¿Cuánto mide el perímetro de un triángulo equilátero con lados de 2 cm?

5. ¿Cuánto mide el perímetro de un hexágono regular con lados de 5 cm?

6. ¿Cuánto mide el perímetro de un octágono regular con lados de 2.5 cm?

Contamos y comparamos perímetros y áreas

Hoja de trabajo 65.1:

Las figuras están dibujadas de manera que el lado de un cuadradito mide 1 cm. Entonces cada cuadradito tiene un área de 1 cm^2.

Determina el perímetro de cada figura, contando el número de segmentos que lo rodean, y escríbelo.

Determina el área de cada figura, contando el número de cuadraditos que contiene, y escríbelo.

¿Cuál figura tiene el menor perímetro? ¿cuál el mayor?

¿Cuál figura tiene la menor área? ¿cuál la mayor?

Vemos en estos ejemplos que no siempre hay una relación directa entre perímetro y área. Una figura puede tener un perímetro mayor que otra, pero un área menor, y vice versa.

Para pensar: ¿Cómo se ve una figura que tiene un perímetro grande y un área pequeña? ¿Puedes dibujar una figura así? ¿Y cómo se ve una figura que tiene un perímetro pequeño y un área grande? ¿Puedes dibujar una figura así?

Repaso: Áreas de rectángulos

Si hiciste la *Unidad 32*, ya sabes calcular las áreas de rectángulos. Por si ya no estás seguro cómo hacerlo, repasa y practica con los siguientes ejemplos:

Calcula el área de un rectángulo con lados 16 cm y 7 cm.

Calcula el área de un rectángulo con lados 200 m y 45 m.

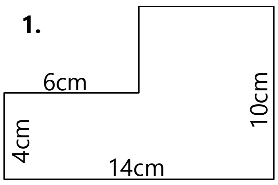
Calcula el área de un cuadrado con lados de 14 mm.

Calcula el área de un cuadrado con lados de 80 cm.

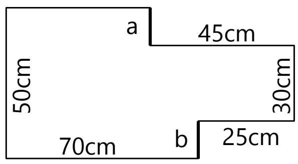
Áreas compuestas

Las figuras siguientes tienen únicamente ángulos rectos en sus vértices. Descubre cómo calcular sus perímetros y sus áreas. Calcula y escríbelos.

1.



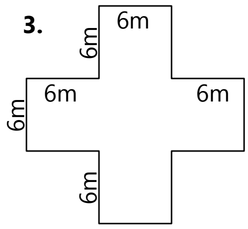
2.



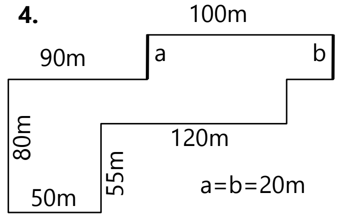
a=b

(Pauta: Si todos los ángulos son rectos, las figuras se pueden descomponer en rectángulos.)

3.



4.



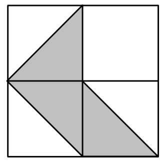
Vocabulario matemático

Perímetro: El perímetro de una figura geométrica es la distancia que recorre su contorno. En un polígono, el perímetro es la suma de sus lados.
Los perímetros se miden en unidades de medida *lineales*, porque tienen una sola dimensión (longitud).

Área: El área de una figura geométrica es la cantidad de superficie que abarca la figura.
Las áreas se miden en unidades de medida *de área (Unidad 32)*, porque tienen dos dimensiones (largo y ancho).

Fracciones de áreas

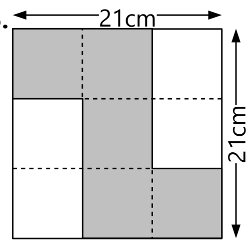
¿Qué fracción del cuadrado está sombreada?



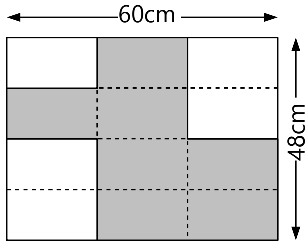
Con la ayuda de fracciones podemos calcular áreas como estas. Por ejemplo, si adicionalmente sabemos que un lado del cuadrado mide 12 m, entonces el cuadrado entero tiene un área de 144 cm^2. Te habrás dado cuenta de que las partes sombreadas son $^3/_8$ del cuadrado. Entonces miden $^3/_8$ de 144 cm^2, o sea 54 cm^2.

¿Puedes descubrir cuánto miden las siguientes áreas?

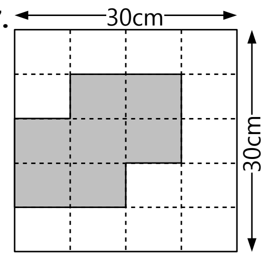
5.



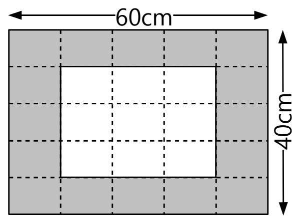
6.



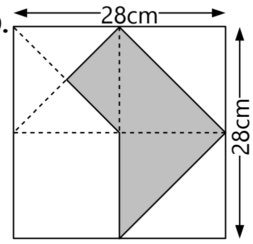
7.



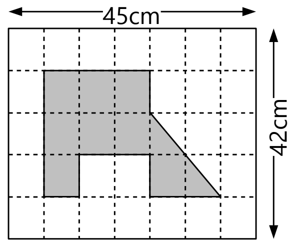
8.



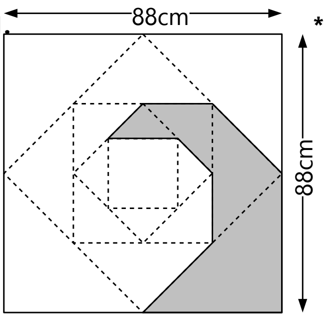
9.



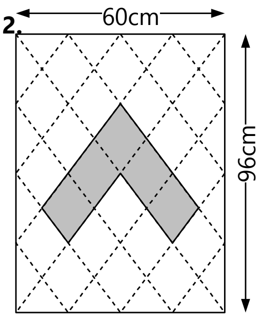
10.



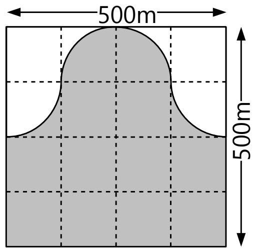
***11.**



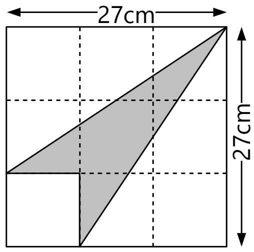
***12.**



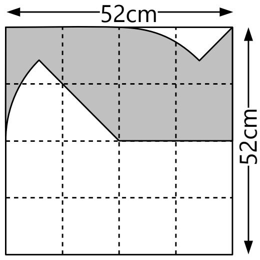
15.



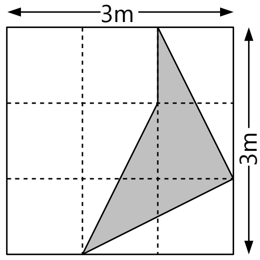
16.



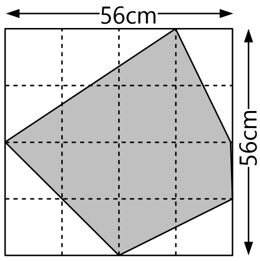
17.



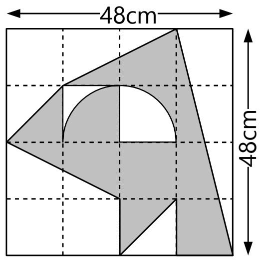
18.



19.

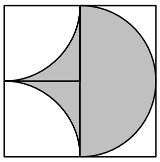


20.



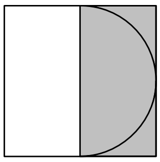
Rompecabezas de áreas

Mira la figura a la derecha. Queremos saber cuánto mide el total de las áreas sombreadas:



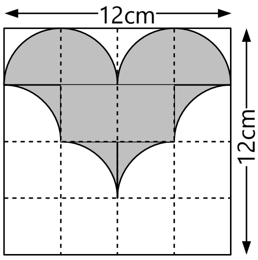
Todavía no sabemos cómo calcular áreas circulares. Pero eso no es necesario. Podemos imaginarnos las áreas como piezas de un rompecabezas, y armarlas de otra manera:

Ahora tenemos un rectángulo, y eso lo podemos calcular.

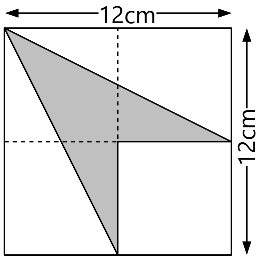


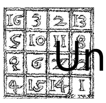
Descubre cómo calcular las siguientes áreas. En cada ejemplo se quiere saber el área sombreada:

13.

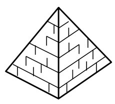


14.





Un poco de historia



Los comienzos de la geometría

"Geometría" significa "Medición de la tierra". La primera cultura que se interesó seriamente por la geometría, fueron los antiguos egipcios. El país de Egipto se extiende a las orillas del río Nilo. Cada año, el Nilo inundaba los campos en su alrededor. Estas inundaciones eran importantes para la agricultura, porque el Nilo trajo mucho lodo fértil que abonaba los campos. Pero al mismo tiempo se borraban todos los límites entre los terrenos. Por eso era necesario cada año medir el terreno para fijar nuevamente los límites correctos, de manera que los propietarios seguían teniendo las mismas áreas de terreno como antes. Así desarrollaban los egipcios diversos métodos para medir y calcular áreas y perímetros. Más tarde usaban sus conocimientos de geometría para construir las famosas pirámides.

El pueblo de Israel vivía 400 años en Egipto. Durante ese tiempo deben haber aprendido los métodos geométricos de los egipcios. Aunque la historia no lo relata, es muy probable que aplicaron esos conocimientos de geometría para repartir la tierra de Canaán entre sus tribus de manera equitativa.

Más tarde, unos filósofos griegos (empezando con Thales de Mileto y Pitágoras) fueron iniciados por los egipcios en la geometría, y la desarrollaron más. Los griegos llegaron a unos conocimientos muy avanzados de geometría. El libro "Los Elementos" por Euclides (siglo 3 antes de Cristo) sirvió como texto fundamental de enseñanza en las escuelas de Europa y de los Estados Unidos hasta un pasado muy reciente.

Investigación

Una paradoja de medidas

(Una paradoja es un hecho o razonamiento que parece contradecir la razón.)

"¡Mira!", exclama Ernesto. "He dibujado un rectángulo donde el perímetro es igual al área. Sus lados miden 3 cm y 6 cm. El perímetro es 18 cm, y el área es igual: 18 cm^2."

- "Verdad, interesante", dice su amigo Enrique. "Pero encontré algo aun más interesante: Vamos a calcularlo en milímetros. Entonces el perímetro de tu rectángulo es 180 mm, y su área es 1800 mm^2. ¡Ahora el área es diez veces el perímetro!"
- "Pero eso no puede ser", responde Ernesto, "¡si es el mismo rectángulo!"

¿Enrique calculó mal? ¿O cómo te explicas el misterio?

Matemática divina

Una aplicación de los cálculos de perímetros y áreas, con una moraleja profunda, se encuentra en el cuento por León Tolstoi: “¿Cuánta tierra necesita un hombre?” Solamente que por su final trágico, el cuento puede todavía no ser apropiado para todos los alumnos de primaria.

¿A dónde vamos desde aquí?

Algunas otras actividades relacionadas con “rompe-cabezas” se encuentran en la *Unidad 76.*

El tema del cálculo de áreas continúa en la *Unidad 94* (opcional).

Unidad 66 - Coordenadas cartesianas

Prerrequisitos:
- Números decimales *(Bloque V)*.

Materiales necesarios:
- Juego de ajedrez.
- Geoplano.
- (Opcional) Programas de computadora: Hoja de cálculo; Programa de dibujo.

Para los educadores

En esta Unidad trataremos las coordenadas bajo su aspecto *geométrico*: Sirven para describir la ubicación de los objetos. En la *Unidad 83* usaremos coordenadas en el contexto de la estadística, y servirán también como preparación para el álgebra (funciones) más adelante.

Los primeros encuentros de los niños con sistemas de coordenadas deben haber sucedido ya en el nivel de Primaria I, por ejemplo en juegos como ajedrez o "Hundir barcos", donde cada cuadrado se identifica con un número y una letra. Pero en esos sistemas de coordenadas se usan solamente números enteros. Ahora ampliaremos este concepto para poder identificar la ubicación exacta de un punto, usando números decimales o fracciones.
Esta Unidad contiene tanto tareas con números enteros como tareas con números decimales. Para aquellos niños que no tienen experiencia previa con coordenadas, se recomienda que hagan primero las actividades con números enteros (además de jugar los juegos mencionados), y sólo después pasen a las actividades con números decimales.

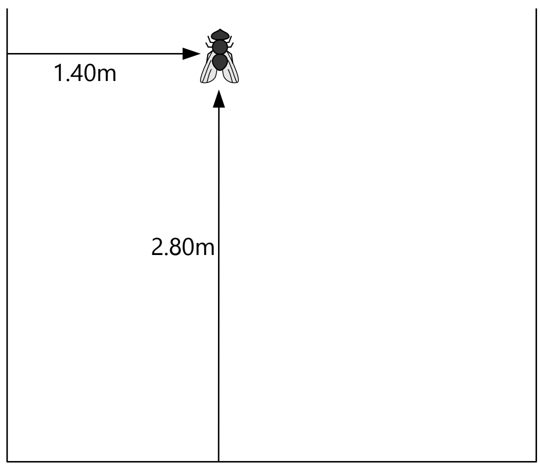
Un poco de historia

La mosca que impulsó un descubrimiento matemático

Las coordenadas rectangulares se llaman también "cartesianas", porque fueron inventadas en el siglo 17 por el filósofo y matemático René Descartes (o "Cartesius", como él se llamaba en latín).

De niño, Descartes era enfermizo y tenía que pasar mucho tiempo reposando en la cama. A su temprana edad ya se ocupaba de diversos problemas filosóficos y matemáticos. No se sabe con certeza si la siguiente historia es verdadera. Pero se cuenta que en uno de esos días que René tuvo que pasar en la cama, vio una mosca caminando por el techo de su habitación. Quiso describir a sus amigos dónde exactamente se encontraba la mosca. Entonces se le ocurrió que podía decirles las distancias desde las paredes hasta donde estaba la mosca, y así sus amigos iban a encontrar la mosca.

O sea, poniéndolo con las medidas que usamos hoy en día, René podría haber dicho por ejemplo: "La mosca está a 1.40 metros de la pared izquierda, y a 2.80 metros de la pared delantera." Midiendo estas distancias, se podía encontrar la mosca.



Esta es la idea fundamental de las coordenadas rectangulares: Se definen dos *ejes* en ángulo recto (la pared izquierda y delantera de la habitación). Ahora cada punto del plano se puede identificar claramente con un par ordenado de *coordenadas:* las distancias desde el punto hacia cada uno de los ejes. En el ejemplo anterior, la posición de la mosca tiene las coordenadas (1.40; 2.80).

Las coordenadas cartesianas fueron un "invento" muy importante en la matemática, porque permitieron por primera vez relacionar la geometría con la aritmética: Ahora las figuras geométricas se podían describir y calcular mediante números.

(Las Hojas de trabajo 66.1-2 retoman el tema de la mosca.)

TALLER

Coordenadas en la vida diaria

El principio de las coordenadas se usa por ejemplo al enumerar los cuadros de un tablero de ***ajedrez*** (***a5***, ***e2***, etc), o en otros juegos que requieren ubicarse en una cuadrícula, como **"*Hundir barcos*"** *(vea en el libro de Primaria I)*.

Si los niños practicaron alguna vez usar una ***hoja de cálculo*** en una computadora, habrán visto que allí se enumeran las celdas de la misma manera. También los ***programas de dibujo*** (como "Paint" de Windows) usan coordenadas para indicar la posición del puntero, o las dimensiones de una región seleccionada. Si los niños están usando uno de esos programas, que experimenten con diversas figuras, observando el indicador de las coordenadas. Un niño podría crear un dibujo con líneas, rectángulos y círculos, y anotar las coordenadas respectivas, para que otro niño reproduzca el mismo dibujo a base de las coordenadas.

Todos los ejemplos mencionados hasta ahora, todavía no son coordenadas cartesianas en el sentido estricto, porque usan solamente números enteros y describen regiones cuadradas, no puntos individuales. Usando solamente números enteros de metros, Descartes no podría haber descrito exactamente la posición de la mosca en el techo de su habitación. Para identificar la posición de un punto específico, tenemos que describirla con precisión, y eso requiere fracciones o números decimales.

Algunos programas de computadora para dibujo o diseño gráfico sí tienen estas coordenadas "verdaderas", porque permiten usar una "regla" en centímetros o pulgadas. Pero otros (como "Paint") solamente cuentan los píxeles, o sea los pequeños cuadraditos de color que componen una imagen, y por tanto usan solamente números enteros.

En estos programas tenemos que tomar en cuenta además que sus coordenadas están "volteadas de cabeza" respecto a las que usamos en la matemática: En el programa de computadora, las coordenadas verticales aumentan desde arriba hacia abajo, mientras en la matemática usamos coordenadas que aumentan desde abajo hacia arriba.

Coordenadas "exactas" se usan por ejemplo para indicar la ubicación exacta de un punto geográfico en un ***mapa.*** La *Unidad 67* contiene unas actividades al respecto.

Vocabulario matemático

Eje (de coordenadas): Una recta numérica que marca la dirección en la cual se miden las coordenadas. En el plano, normalmente se usan dos ejes que son perpendiculares entre sí.

Origen (de coordenadas): El punto con las coordenadas (0; 0).

Par ordenado: Un par de números (o de otros datos) es *ordenado* cuando su orden importa; o sea que cada uno de sus elementos tiene un significado definido según su posición.
Las coordenadas cartesianas en el plano se expresan en pares ordenados de números, porque por convención el primer número significa la coordenada *horizontal,* y el segundo número significa la *vertical*; así que (3; 7) no es lo mismo como (7; 3).

Coordenadas en el geoplano

El geoplano rectangular es básicamente un sistema de coordenadas cartesianas. Podemos asignar a cada clavo su coordenada correspondiente. Entonces podemos definir polígonos con sus coordenadas, y en vez de dibujarlos en papel, los representamos en el geoplano. Por ejemplo:

Forma los siguientes polígonos:

1. (2; 4) – (3; 3) – (5; 3) – (4; 4) – (2; 4);
(3; 1) – (3; 3) – (5; 3) – (5; 1) – (3; 1);
(1; 1) – (1; 3) – (2; 4) – (3; 3) – (3; 1) – (1; 1).
(3 polígonos juntos)

2. (1; 0) – (2; 1) – (3; 0) – (2; 4) – (1; 0);
(0; 3) – (2; 4) – (4; 3) – (2; 5) – (0; 3).
(2 polígonos juntos)

3. (1; 0) – (2; 2) – (4; 2) – (4; 0) – (5; 3) – (6; 4) – (4; 3) – (3; 4) – (2; 3) – (2; 4) – (1; 5) – (1; 4) – (0; 3) – (1; 3) – (1; 0).
(1 único polígono)

4. (0; 1) – (1; 0) – (2; 0) – (3; 1) – (3; 3) – (2; 5) – (1; 5) – (0; 3) – (1; 2) – (0; 2) – (0; 1);
(3; 0) – (4; 2) – (4; 5) – (3; 3) – (3; 0);
(4; 1) – (5; 0) – (6; 0) – (7; 1) – (7; 2) – (6; 2) – (7; 3) – (6; 5) – (5; 5) – (4; 3) – (4; 1).
(3 polígonos juntos)

Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 66.1: ¿Dónde se encuentra la mosca?

Arriba: Describe la ubicación de la mosca con un par de coordenadas, contando cuadrículas.

Abajo: Mide con una regla las coordenadas dónde se encuentra la mosca. La unidad de estos sistemas de coordenadas es 1 cm.

Los primeros dos dibujos permiten expresar las coordenadas en números enteros. El último requiere decimales resp. milímetros. Quizás no se podrá indicar con toda exactitud, ya que la mosca no es un punto exacto. Usen aproximadamente el centro de la mosca.

Hoja de trabajo 66.2: Dibuja la mosca

Las instrucciones se encuentran en la hoja.

Unidad 67 - Planos y mapas

Prerrequisitos:
- Conceptos geométricos básicos acerca de puntos, rectas, paralelas, ángulos rectos, etc.
- Unidades de medida de longitud.
- Proporciones *(Unidad 20)*.
- *(Para el proyecto del plano de la casa):* Construcciones geométricas con regla, escuadra, compás y transportador.
- Algunas actividades de esta Unidad requieren cálculos con decimales, y/o con números mayores a un millón.
- Unas cuantas actividades requieren conocimiento de las unidades de medida de áreas.
- Unas cuantas actividades requieren el entendimiento de las coordenadas cartesianas.

(Si los niños no cumplen algunos de los últimos requisitos, las actividades de esta Unidad brindan una oportunidad para introducir estos temas ahora, en el contexto de un proyecto práctico.)

Materiales necesarios:
- Cinta métrica.
- Regla, escuadra, transportador, compás.
- Mapas detallados de las zonas donde se harán prácticas de orientación. *(Vea las instrucciones en el Taller.)*
- Lámina transparente adhesiva para plastificar las copias de los mapas.
- *(Para visualizar las curvas de nivel):* Plastilina o arcilla; cuchillo.

Para los educadores

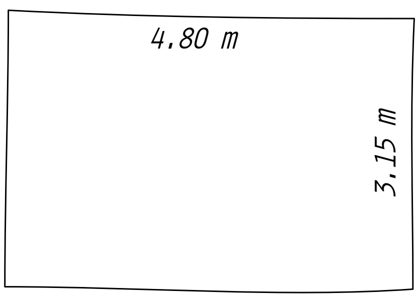
Desde el punto de vista de los currículos oficiales de muchos países, esta Unidad es "opcional". Pero desde un punto de vista práctico, la capacidad de interpretar planos y mapas es indispensable en muchas situaciones.

Esta Unidad contiene varios proyectos "grandes" que pueden ocupar un día entero o más. Mientras los niños siguen interesados en el tema, se pueden llevar a cabo varios proyectos seguidos para aprovechar la motivación de los niños. Pero también puede suceder que después de un proyecto grande los niños se cansen del tema, y entonces será mejor pasar a otro tema, y más tarde volver a esta Unidad para realizar otro proyecto.

TALLER

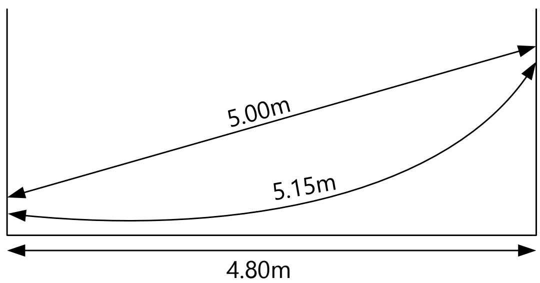
Hacemos un plano de la casa

En este proyecto práctico vamos a medir nuestra casa y dibujar un plano exacto de ella, habitación por habitación. De preferencia comenzamos con una habitación rectangular, porque esa es la figura más fácil de medir y construir. Con una cinta métrica medimos su largo y su ancho. Dibujaremos un borrador a mano alzada donde indicamos las medidas.



Este borrador nos servirá después como base para dibujar el plano definitivo.

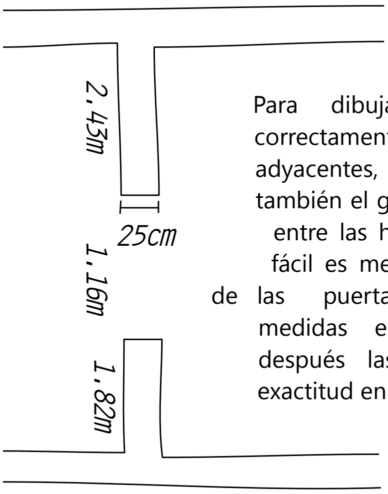
Para que las medidas salgan exactas, hay que medirlas horizontalmente; de preferencia a lo largo del piso, si es accesible. Si medimos a lo largo de una recta inclinada, o incluso una línea curvada, nuestras medidas serán equivocadas:



Podemos seguir midiendo otras habitaciones primero, o podemos empezar enseguida a construir el plano definitivo, comenzando con la habitación que hemos medido. Si participan varios niños, podemos hacer ambas cosas simultáneamente: Algunos miden, otros anotan las medidas en el borrador, otros hacen el plano definitivo.

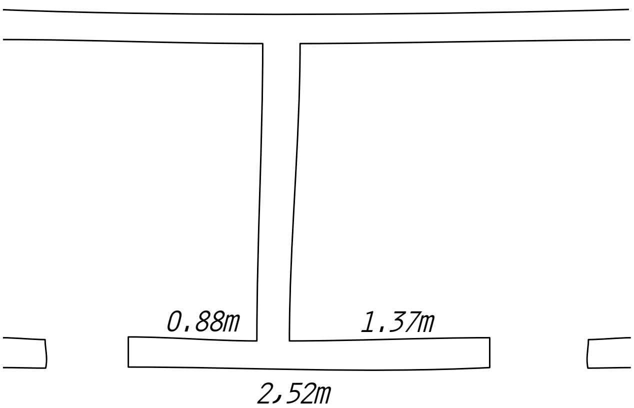
Para construir un plano exacto, todas las medidas tienen que disminuirse en la misma proporción. Esta proporción se llama la *escala* del plano. Por ejemplo una escala de 1:100 significa que las medidas se disminuyen por un factor de 100: un metro en la realidad corresponde a un centímetro en el plano. Para un plano de una casa, una escala de 1:50 o de 1:100 es buena y práctica. (Por supuesto que se podría elegir otra escala como 1:72, pero eso va a requerir unos cálculos más complicados.)

Una vez elegida la escala, tenemos que calcular cuánto miden nuestras medidas en el plano. Por ejemplo, si una habitación tiene un largo de 4.80 m y la escala es de 1:50, tenemos que dividir 4.80 m (480 cm) entre 50, y eso nos da el largo de la habitación en el plano. (¿Sabes una manera práctica de dividir un número entre 50?) – De la misma manera calculamos el ancho de la habitación, y ahora podemos construir sobre el papel el rectángulo correspondiente.



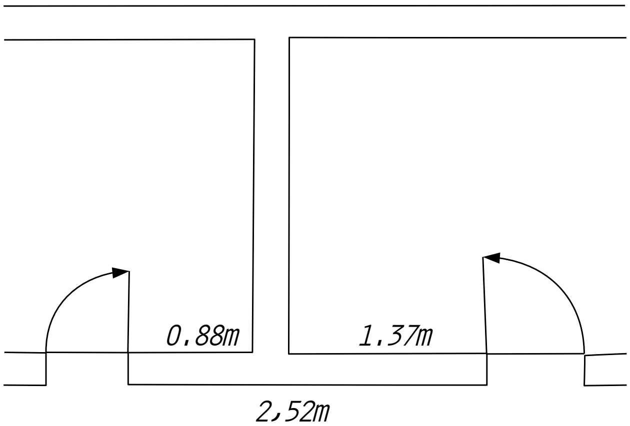
Para dibujar en el plano correctamente las habitaciones adyacentes, tenemos que medir también el grosor de las paredes entre las habitaciones. Lo más fácil es medirlo en los marcos de las puertas. Anotamos estas medidas en el borrador, y después las construimos con exactitud en el plano.

De algunas paredes podemos medir su grosor sólo indirectamente, como en la siguiente situación:

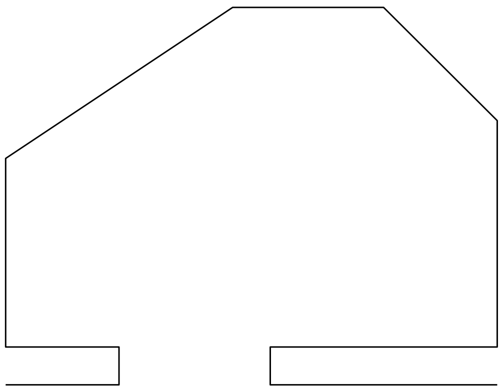


Dentro de cada habitación medimos la distancia desde la puerta hasta la pared. Afuera medimos la distancia de una puerta hasta la otra. Si construimos estas distancias a escala en el plano, el grosor de la pared automáticamente saldrá correcto. O podemos calcularlo: es la diferencia entre la medida exterior y las medidas interiores.

Dibujamos en el plano también la ubicación de las puertas y ventanas. Para eso tenemos que medir su ancho, y las distancias desde las puertas y ventanas hasta la esquina más cercana de la habitación. Convertimos estas medidas según la escala del plano y las construimos en el papel.
Una *puerta* se indica en el plano adicionalmente con un arco que indica hacia donde se abre la puerta:



Si tenemos esquinas que no están en ángulo recto, tendremos que hacer unas mediciones adicionales para reproducirlas correctamente en el plano. Por ejemplo en la situación del dibujo abajo, las longitudes de los lados no son suficientes para construir la ubicación exacta de las esquinas en el plano. Traten de descubrir por ustedes mismos cómo se puede hacer en estos casos. Usen sus conocimientos acerca de la construcción de figuras congruentes *(Unidades 58, 59, 63)*.



(¡Este es un desafío de investigación muy instructivo! Si su casa tiene esquinas que no están en ángulo recto, no pierdan esta oportunidad de entrenar su ingenio geométrico.)

Adicionalmente podemos calcular el *área* de cada una de las habitaciones (por lo menos de las rectangulares), y de la casa entera. Los niños que ya saben calcular con decimales, pueden calcular las áreas usando directamente las medidas en metros (con dos decimales) para obtener las áreas en m^2. Los que no saben calcular con decimales, tendrán que convertir las medidas en centímetros y así calcular las áreas en cm^2 , después convertirlo a m^2.

(Vea la *Unidad 47* acerca de este tema.)

Si calculan el área total de la casa a partir de su largo y ancho completo, notarán que esta área resulta mayor que la suma de las áreas de las habitaciones. Eso es porque el área total incluye las paredes interiores, las que no están incluidas en las medidas interiores de las habitaciones.

Si desean, pueden además medir algunos muebles y otros objetos grandes, y representarlos con piezas de cartulina a la misma escala como el plano. Pueden colocar estas piezas sobre el plano y probar otras maneras de ubicar los muebles.

Una maqueta de la casa

Si a los niños les gusta construir modelos recortables de cartulina *(Unidades 58, 63)*, quizás querrán fabricar un modelo tridimensional de la casa a escala.

Búsqueda del tesoro con el plano de la casa:

Cuando el plano está terminado, pueden usarlo para jugar "Búsqueda del tesoro". Como "tesoro" pueden definir algún juguete, animal de peluche, etc; o un chocolate. Una persona esconde el tesoro mientras nadie mira. Después indica en el plano dónde se encuentra el tesoro. ¿Quién lo encuentra?
Noten que la ubicación en el plano no dice nada acerca de la *altura* donde está escondido el tesoro. Puede estar abajo en el piso, a una altura mediana, o arriba justo debajo del techo. La persona que esconde el tesoro debe usar su creatividad para encontrar un buen escondite.

El plano del barrio

Consigan un plano de su barrio o ciudad. Si el plano es a una escala muy pequeña, quizás habrá que copiarlo ampliado al doble para que los niños no dificulten mucho en usarlo. – Si no encuentran donde comprar un plano, pueden entrar a los mapas de Google e imprimir la sección que corresponde a su barrio. (Allí pueden ver también una imagen satelital. Para niños que dificultan en entender los planos, puede ser bueno comenzar con una imagen satelital, porque allí podrán identificar algunos edificios conocidos, plazas, parques, campos de fútbol, y otros lugares que se notan bien desde el aire.)

Es una buena idea plastificar el plano (o sus copias que los niños van a usar) con lámina transparente adhesiva, para que dure más tiempo.

Primero identifiquen en el plano el lugar donde se encuentran. Pueden orientarse por los nombres de calles conocidas, por las formas de las intersecciones de las calles, o por un lugar fácilmente identificable que se encuentra cerca: una plaza, un parque, un puente, un edificio público, etc.

Después hagan un pequeño paseo por el barrio, e intenten constantemente identificar en el plano dónde se encuentran. En lo posible, cada participante debe tener una copia del plano.

Como siguiente desafío, un adulto o alumno mayor puede marcar con anticipación una ruta en el plano. Después, uno de los niños guía a los demás por la ruta marcada.

Medir y calcular distancias en el plano

Como nuestro plano de la casa, también el plano del barrio tiene su escala definida. En un plano oficial se debe indicar la escala, por ejemplo 1:10'000 ó 1:20'000. Pero si hicieron copias ampliadas de un plano, ¡recuerden que la ampliación altera la escala! En este caso tendrán que calcular cuál es la escala de la copia.

Para pensar: ¿A cuánto equivale un kilómetro en un plano con una escala de 1:10'000? ¿y en un plano con una escala de 1:20'000?

Los mapas de Google, y algunos otros mapas, contienen el alguna parte un segmento que indica la longitud que corresponde a un kilómetro (o a una medida menor o mayor). Si imprimieron el mapa, entonces pueden medir en el papel la longitud de este segmento, y desde allí calcular la escala. Por ejemplo, si un segmento de 4 cm corresponde a un kilómetro, ¿cuál es la proporción entre la medida real y la medida en el plano? O sea, ¿entre cuánto tiene que dividirse un kilómetro para obtener 4 cm? (Tendrán que convertir un kilómetro en centímetros para descubrirlo. Si el segmento correspondiente en su plano tiene una medida menos "práctica", tendrán que usar milímetros o décimos de milímetros; o tendrán que saber cómo dividir entre un número decimal.)

Alternativamente, podemos calcular con proporciones sin saber la escala efectiva del plano. Por ejemplo, el plano muestra un segmento de 4.5 cm, e indica que éste corresponde a 500 m en la realidad. Medimos en el plano la distancia de nuestra casa al parque, y mide 6.6 cm. ¿Cuánto mide esta distancia en realidad?

4.5 cm corresponden a 500 m.

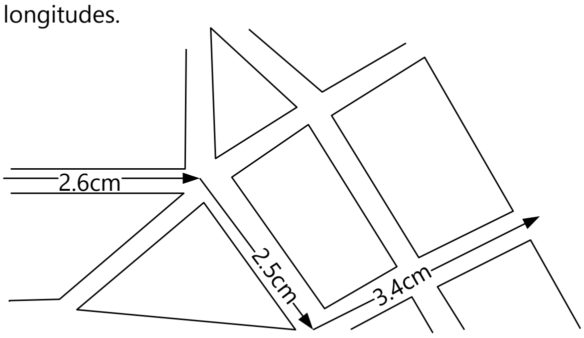
6.6 cm corresponden a ¿? m .

(Completen la proporción, usando uno de los razonamientos que practicamos en las *Unidades 20 y 43*.)

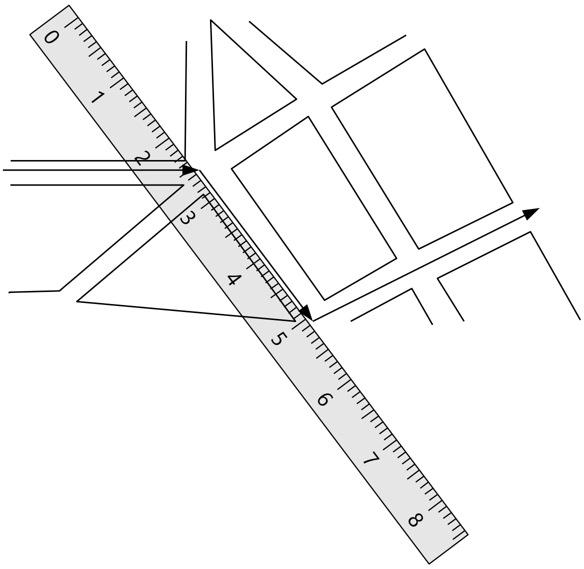
Medir distancias en el mapa

Cuando queremos saber una distancia, normalmente nos interesa la distancia que tenemos que caminar o manejar, y este camino normalmente no es una línea recta. Entonces tenemos que medir caminos que consisten en varios segmentos. Existen diversas maneras de hacer eso. Por ejemplo:

- Medimos cada segmento aparte, y sumamos sus longitudes.



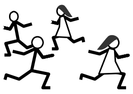
- Medimos cada segmento, pero en vez de comenzar cada vez con el cero de la regla, comenzamos en el punto donde terminó el segmento anterior. O sea, si el primer segmento midió 2.6 cm, colocamos la regla al segundo segmento de tal manera que este segmento comience en la marca de 2.6 cm de la regla. Así continuamos, y los segmentos se suman automáticamente. Al final del último segmento tenemos la medida del camino entero.



- Los dos métodos anteriores son un poco inexactos, porque introducen errores de redondeo. Más exacto, pero un poco más trabajoso, es el siguiente:
Colocamos el plano sobre un cartón. Usamos un hilo para medir. Marcamos su inicio con un nudo, y lo clavamos con un alfiler en el comienzo de nuestro camino. Ponemos un alfiler en cada punto donde el camino cambia de dirección. Ahora podemos tender el hilo a lo largo del camino. Al final del camino marcamos el hilo con un punto de lapicero o un nudo. Sacamos el hilo del mapa, y medimos su longitud desde la marca inicial hasta la marca final: esta es la longitud del camino en el mapa.

Ahora solamente nos falta calcular una proporción como arriba, y sabemos cuánto mide nuestro camino en realidad.

Midan y calculen diversos caminos en el plano: a la tienda; al mercado; a la casa de una amiga; a la casa de los abuelos; al parque; etc.



"Búsqueda del tesoro" en el barrio

Quizás no podemos realmente esconder un "tesoro" afuera en el barrio. Pero podemos preparar una "búsqueda del tesoro" con diversas preguntas o tareas que se deben averiguar mediante indicaciones en el plano. Por ejemplo, marcamos una casa en el plano y preguntamos: ¿Quién vive en esta casa? – O en otra casa que es una tienda: ¿Qué se vende en esta tienda? – O en otra: "Dibuja la puerta de esta casa." – O en otra: ¿Qué dice el letrero grande en esta casa? – O marcando la ubicación de un monumento en una plaza: ¿A quién representa este monumento? – Etc. Después enviamos a los niños con sus mapas a resolver estas tareas.
Si participan muchos niños, lo mismo se puede hacer como concurso entre varios grupos. En este caso habrá que variar entre los grupos el orden de los lugares marcados, para que no todos busquen las mismas metas al mismo tiempo.

Orientación en el campo

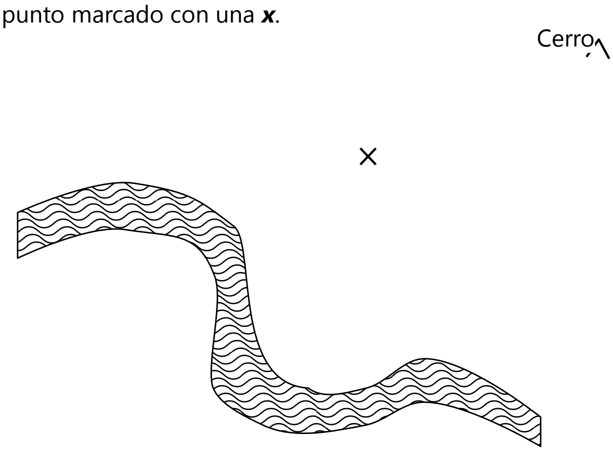
En el campo, la orientación con un mapa es más difícil. No hay muchos caminos o carreteras para orientarnos. Tenemos que guiarnos con marcas naturales como ríos, cumbres de cerros, etc. A veces hay casas aisladas, u objetos como antenas o cables de alta tensión, que figuran en el mapa. Un buen mapa indicará también las características del suelo: si es bosque, tierra cultivada, pasto, pantano, arena, o rocas. Para una orientación más exacta nos pueden ayudar las curvas de nivel *(vea más abajo)* si el terreno no es plano; y la brújula *(Unidad 68)*.
El mapa debe ser lo suficientemente detallado para permitir una buena orientación. Una escala entre 1:10'000 y 1:25'000 está bien. Se pueden hacer prácticas de orientación con mapas menos detallados; pero es más difícil.
Si no pueden encontrar un buen mapa, los mapas de Google pueden servir también para la orientación en el campo. Usen la opción "Relieve" en las opciones de vista. Si quieren adicionalmente tener información acerca de las características del suelo, pueden usar un editor gráfico para sobreponer la vista de relieve sobre la imagen satelital.
Trate de encontrar un buen lugar para prácticas de orientación en el campo. Que sea de preferencia una zona no habitada, donde no haya muchos terrenos cultivados, donde sea posible caminar por el campo fuera de los caminos, y que no presente peligros particulares como animales peligrosos, abismos, etc.
En el caso de que no encuentren un lugar adecuado cerca de donde viven, podrían planear estas actividades para alguna oportunidad de viaje a otro lugar. En este caso tendrán que conseguir o preparar los mapas con anticipación; y es recomendable que uno o dos adultos vayan con anticipación a reconocer la zona donde

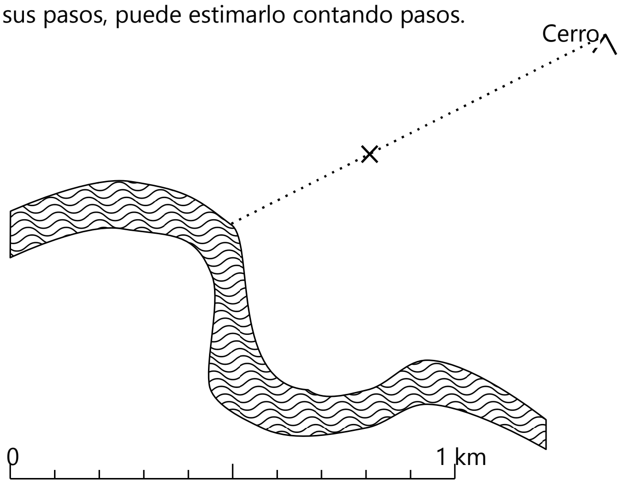
piensan llevar a cabo las actividades, para conocer el ambiente y poder prevenir posibles problemas.

Hagan unas prácticas de orientación como en el barrio: Primero hagan juntos un paseo por la zona, y que los niños identifiquen constantemente su ubicación en el mapa. Después trace una ruta en el mapa, y que los niños encuentren la ruta por sí mismos, con la ayuda del mapa.

Ya que hay menos puntos de orientación en el campo, es más importante saber estimar direcciones y distancias. En el siguiente ejemplo, el mapa muestra un río, y una cumbre de un cerro a la distancia. Se desea llegar al punto marcado con una ***x***.

El mapa nos permite definir un punto en la orilla del río, de donde la meta se encuentra exactamente en la dirección del cerro. Caminando por la orilla del río y observando sus cambios de dirección, podremos identificar este punto en el campo. Desde allí caminamos en la dirección del cerro. Midiendo en el mapa podemos calcular que la distancia desde el río hasta la meta, por la línea punteada, mide 350 metros. Ya que no hay otros puntos de orientación, la única manera de encontrar la meta consiste en estimar acertadamente los 350 metros. Por ejemplo, si alguien conoce la medida promedia de sus pasos, puede estimarlo contando pasos.

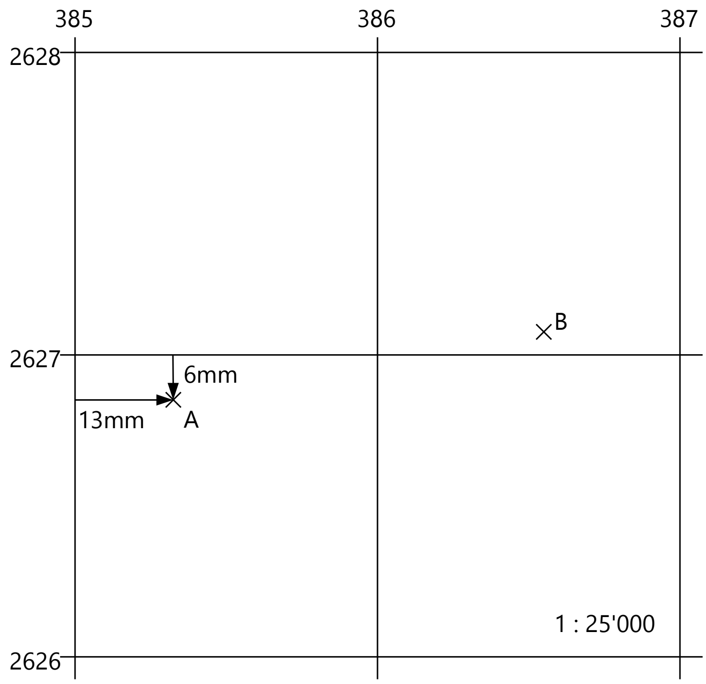




Coordenadas en el mapa

Un buen mapa contiene una cuadrícula de coordenadas. Los mapas de un área grande, como de un país entero, normalmente usan las *coordenadas geográficas* del globo terráqueo que se miden en grados, minutos y segundos (de latitud y longitud). Pero para entender este tema, será necesario entender mejor la medición de ángulos en el espacio de tres dimensiones. Por eso dejamos este tema para el nivel de Secundaria I.

En cambio, los mapas detallados de un área pequeño suelen usar el sistema de coordenadas oficial del estado, el cual consiste en una cuadrícula de kilómetros medidos desde un origen arbitrariamente definido. Estas coordenadas permiten indicar exactamente la ubicación de cualquier punto.



En el ejemplo a la derecha, el punto A se encuentra 13 mm a la derecha de la línea que indica la coordenada 385. Ya que la escala del mapa es 1:25'000, 13 mm equivalen a 13 x 25'000 = 325'000 mm = 325 m. Entonces la coordenada horizontal del punto A es 385.325. (Recordamos que el número 385 indica kilómetros.)
En dirección vertical, A se encuentra 6 mm por debajo de la coordenada 2627. 6 mm corresponden a 150 m, entonces la coordenada vertical es 2627.000 – 0.150 = 2626.850 (ya que las coordenadas *disminuyen* hacia abajo). O sea, las coordenadas de A son (385.325; 2626.850).
De la misma manera podemos verificar que las coordenadas de B son (386.550, 2627.075).

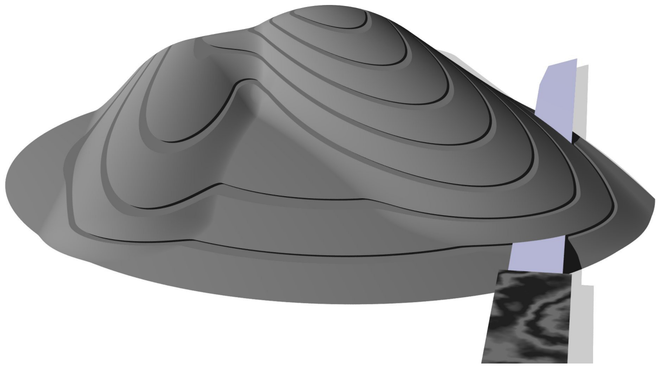
Hagan unas prácticas de calcular las coordenadas de ciertos puntos importantes en el mapa. O indiquen unas coordenadas, y que los niños averigüen qué se encuentra allí.
Pueden hacerlo en dos grupos: Cada grupo elige tres (o más) puntos claramente identificados en el mapa, y calcula sus coordenadas. Después, los grupos intercambian sus coordenadas anotadas (sin decir de qué lugares se trata), y ahora cada grupo intenta ubicar en el mapa los puntos que eligió el otro grupo.

También cuando hacemos prácticas de orientación, en vez de marcar las estaciones en el mapa, podemos indicarlas mediante sus coordenadas.

Curvas de nivel

Los mapas detallados contienen curvas de nivel que indican el relieve del terreno. Una curva de nivel une todos los puntos que se encuentran a una misma altura, por ejemplo 1200 metros sobre el nivel del mar.

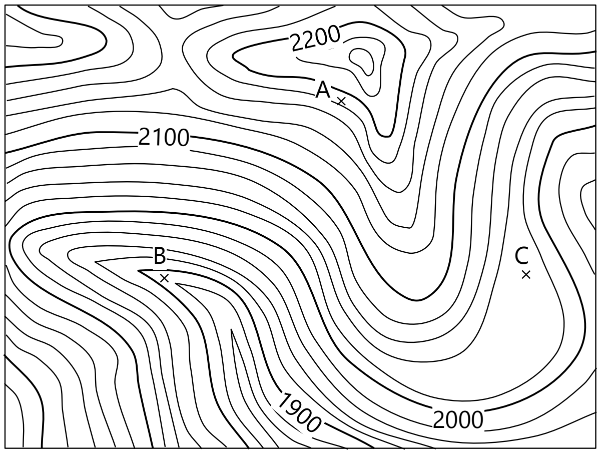
Con el siguiente experimento podemos visualizar cómo funciona esto:
Formamos un cerro de plastilina o arcilla. Háganlo de manera variada: que algunas de sus laderas sean más inclinadas y otras menos; que tenga uno o más valles; quizás que tenga más que una sola cumbre.
Con cuidado, corten este cerro con un cuchillo horizontalmente en tajadas de un mismo grosor (aproximadamente 1 cm, o más delgado si pueden). Las líneas de corte son las curvas de nivel.



Observen estas curvas de nivel: ¿Cómo se ven cerca de la cumbre? ¿Cómo se ven en una ladera muy inclinada? ¿Cómo se ven en una parte más plana?

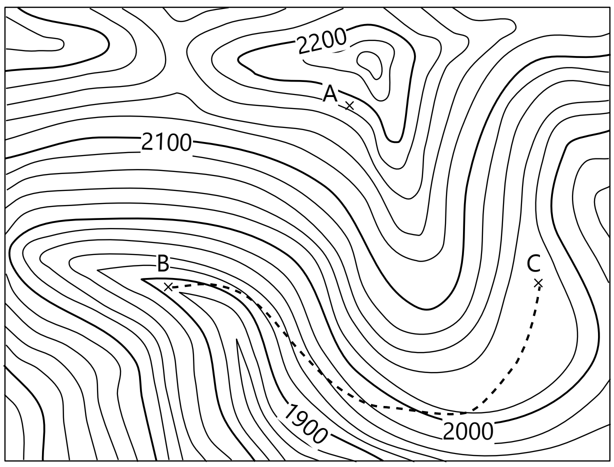
Tomen ahora un mapa que contenga curvas de nivel, de una zona que ustedes conocen. Observen las curvas de nivel. ¿Pueden reconocer algunas formas del terreno? (una cumbre de cerro; un valle o una quebrada; un lugar plano; ...)
Si no pueden conseguir mapas con curvas de nivel, recurran nuevamente a los mapas de Google. Si activan la opción "Relieve", a una escala suficientemente grande aparecerán curvas de nivel.
Como en nuestras tajadas del cerro, las curvas de nivel se siguen en intervalos verticales iguales. Un mapa detallado tiene curvas de nivel a cada 20 metros, o incluso cada 10 metros. Esta distancia vertical entre las curvas de nivel se llama *equidistancia*. En mapas menos detallados, la equidistancia puede ser de 50 o de 100 metros.

Las curvas de nivel permiten determinar la altura de cualquier punto en el mapa con bastante exactitud. En el siguiente ejemplo, el punto A se encuentra entre los 2180 y los 2200 m.s.n.m; el punto B entre los 1880 y los 1900 m.s.n.m; y el punto C entre los 2020 y los 2040 m.s.n.m. Comparando con los números en las curvas gruesas, vemos que en este mapa la equidistancia entre las curvas es de 20m.



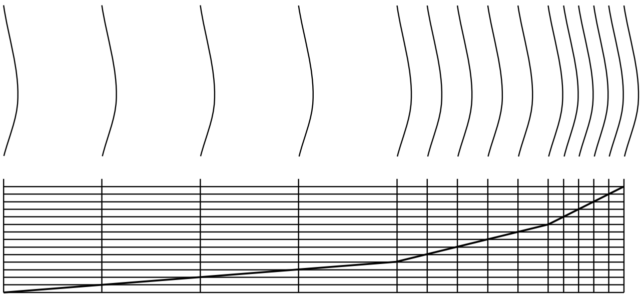
Con un poco de práctica, las curvas de nivel nos permiten "ver" la forma del terreno. Eso ayuda mucho en la orientación en el campo (excepto si el terreno es completamente plano). Así podemos ver en el ejemplo arriba que el punto A se encuentra cerca de la cumbre de un cerro; el punto B está en el fondo de una quebrada bastante angosta, y el punto C está sobre una terraza plana en la ladera del cerro.

Las curvas de nivel pueden ayudarnos a encontrar el mejor camino en un terreno accidentado. En el ejemplo del mapa arriba, supongamos que queremos caminar de B a C. Si caminamos en línea recta, tenemos que subir a mucha altura y después bajar otra vez. Eso es un esfuerzo innecesario. Un mejor camino sería el siguiente que distribuye las subidas más suavemente a lo largo de la ruta entera:

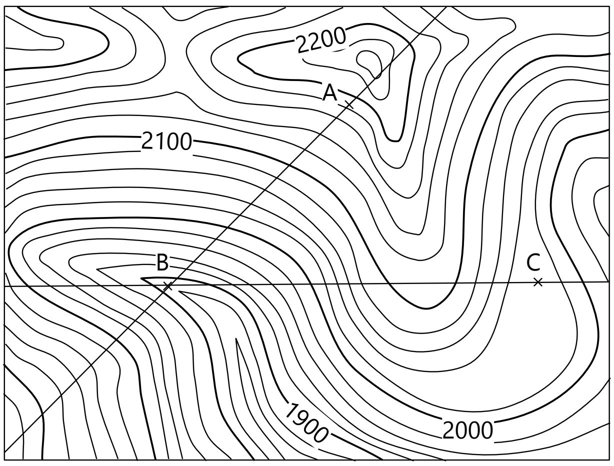


Graficamos un perfil de altura del terreno

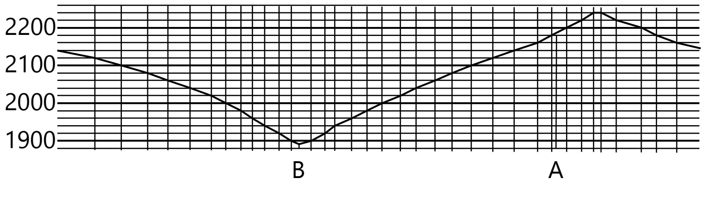
Un perfil de altura es un gráfico que muestra una sección vertical por el terreno. Las curvas de nivel permiten elaborar este tipo de gráficos. Como ejemplo muy básico, distancias pequeñas entre curvas de nivel indican pendientes accidentadas, y curvas más espaciadas indican un terreno más plano. Eso se nota si graficamos las alturas que corresponden a las siguientes curvas de nivel, a lo largo de la recta horizontal:



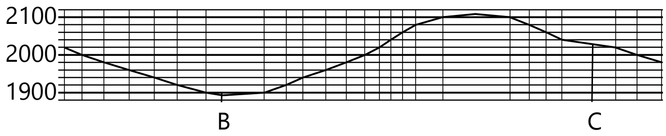
A base del mapa mostrado en el ejemplo anterior, dibujaremos dos perfiles de altura: uno a lo largo de la recta BA, y otro a lo largo de la recta BC.



En el eje horizontal representamos la recta dibujada en el mapa. Podemos usar la misma escala como en el mapa, así podemos copiar las distancias tales como aparecen en el mapa. La distancia AB en el mapa es de 3.4 cm; usaremos esta misma distancia en nuestro gráfico.
El eje vertical representa las alturas, según las curvas de nivel del mapa. En la recta BA, a 1 mm del punto B pasa la curva de nivel de 1900m, entonces en el gráfico marcamos allí un punto a la altura de 1900. Medimos en el mapa las distancias desde B hasta las siguientes curvas de nivel, a lo largo de la recta BA. En el gráfico marcamos los puntos correspondientes a las alturas de 1920m, 1940m, etc, en las distancias que hemos medido en el mapa. Así obtenemos el siguiente perfil de altura:



Hacemos lo mismo para la recta BC. Notamos que este perfil resulta un poco menos accidentado. Eso es porque el terreno está menos inclinado a lo largo de esta "ruta". Las curvas de nivel se encuentran a distancias mayores; eso indica un terreno más suave.



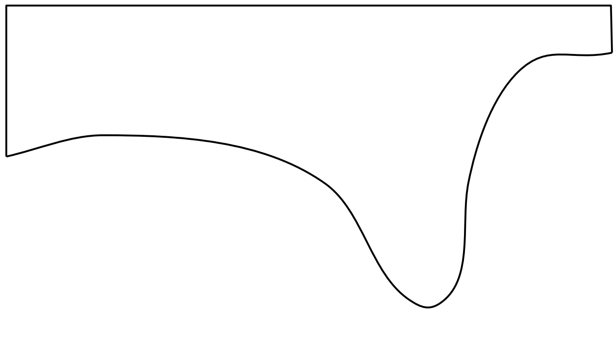
Si quisiéramos que el perfil sea "real", tendríamos que usar para las medidas de altura la misma escala como para las distancias horizontales. Pero normalmente los perfiles de altura se dibujan estirados verticalmente; o sea, 100 metros en la escala vertical ocupan un espacio mayor que 100 metros de distancia horizontal. Eso es porque con una escala "real", el perfil mostraría muy poca diferencia de altura. Si se estira verticalmente (como en los ejemplos arriba), las diferencias se acentúan más y se ven más claramente.

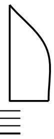
Un perfil de altura no necesita seguir una línea recta. Se pueden dibujar perfiles de altura a lo largo de una carretera, o siguiendo el curso de un río. Busquen unos trayectos interesantes en mapas de zonas que conocen, y grafiquen sus perfiles de altura.

Una maqueta del terreno

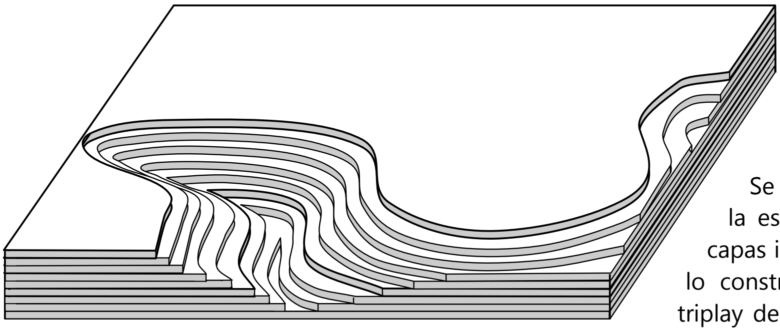
Las curvas de nivel nos permiten también fabricar modelos tridimensionales del terreno. Eso es un poco más trabajoso, pero resulta en unos modelos interesantes.

Copiamos *cada curva de nivel aparte* sobre cartón o madera triplay, y cortamos el contorno correspondiente. Donde la curva sale del mapa, cortamos según el contorno del mapa. Así por ejemplo para la curva de 2100m en el mapa de nuestro ejemplo, se cortarían las siguientes formas:





Usamos la parte superior a la curva, porque es sobre la parte superior que se elevan las partes de mayor altura. Después pegamos las partes una sobre otra, desde la curva más baja hasta la más alta. Así obtenemos un modelo que representa la forma del terreno.



Podemos pintar este modelo según las características del suelo: los bosques con verde oscuro, los pastizales con verde claro, los ríos y lagunas con azul, etc. Incluso podemos usar diversos materiales para representar la vegetación, según la escala del modelo; por ejemplo virutas finas para bosques; aserrín para un suelo arenoso, etc. Si hacemos un modelo a escala muy grande, podemos representar árboles o edificios individuales de manera realista.

Se recomienda calcular con anticipación cuál será la escala adecuada, y el grosor adecuado para las capas individuales del modelo. En el ejemplo arriba, si lo construyésemos a la misma escala y con madera triplay de 4mm, el modelo entero tendría una altura de unos 8 cm, porque contiene aproximadamente 20 diferentes niveles de altura, y 4mm x 20 = 8cm. Este modelo resultaría igual de alto como de ancho, o sea, con formas muy accidentadas. Sería más aconsejable en este caso ampliar el mapa al doble o al triple. Así será también más fácil cortar las formas.

Carrera de orientación

Cuando los niños están más seguros en la orientación en el campo, se puede practicar en forma de competencia: Alguien tiene que preparar la carrera con anticipación. En el campo se marcan cuatro, cinco o más puntos de control de manera visible, por ejemplo con una cinta ancha de plástico de un color determinado que se amarra en un árbol o arbusto a poca altura, o en una piedra grande. Deben ser ubicados de tal manera que sean bien visibles a corta distancia (unos 20 a 40 metros), pero invisibles desde una distancia mayor. Cada punto de control debe contener un símbolo de identificación que sirve para controlar si los participantes lo alcanzaron. Por ejemplo, se puede dibujar con plumón indeleble un símbolo particular en la cinta que marca el punto de control, y cada participante debe copiar este símbolo en una tarjeta de control que lleva consigo durante la carrera. O se puede colgar un sello en el punto de control, con el cual el participante sella su tarjeta de control.
En un mapa se marca la ubicación exacta de cada punto de control mediante un pequeño círculo, de manera que el punto de control se encuentra en el centro del círculo. (Alternativamente, se pueden dar las *coordenadas* de los puntos de control.) Los participantes no pueden ver los mapas marcados antes que empiece la carrera.
Se define un lugar en el campo, cercano a los puntos de control, como punto de inicio de la carrera. Se puede organizar como competencia individual, o entre grupos de dos a cuatro participantes. Se informa a los participantes acerca de la manera cómo los puntos de control están marcados (por ejemplo "cintas de color amarillo"). La carrera comienza con que cada participante o equipo recibe su tarjeta de control, un lápiz o bolígrafo, y una copia del mapa con los puntos de control marcados, o con sus coordenadas. (Adicionalmente se pueden usar brújulas, si ya hicieron las prácticas de la *Unidad 68*.) La tarea consiste en ubicar todos los puntos de control, marcar la tarjeta de control con sus símbolos respectivos, y volver al punto de inicio. Los puntos de control se pueden visitar en cualquier orden. Gana la persona o el equipo que completa el recorrido en el tiempo más corto.

Un recorrido total de 1 a 2 kilómetros es bueno para la primera vez. Si les gusta a los alumnos y sus capacidades de orientación mejoran, se pueden después hacer recorridos más largos. – Para impedir que todos se sigan unos a otros, se puede hacer que los participantes o equipos inicien la carrera en intervalos de 5 a 10 minutos. En este caso se deben anotar por separado el tiempo de partida y de regreso de cada participante o equipo.

Variación: En la carrera de "score" (puntaje) se prepara un número mayor de puntos de control, pero no es obligatorio visitarlos todos. El tiempo de la carrera es limitado (por ejemplo una hora), y cada punto de control tiene un puntaje asignado. Los controles más lejanos o más difíciles de ubicar valen más puntos que los fáciles. Cada participante o equipo decide cuáles controles quiere buscar; pero tienen que volver dentro del límite del tiempo, de otro modo se les descontarán puntos de acuerdo a su tiempo de exceso. Gana quien obtiene el mayor puntaje.
Con esta modalidad se evita el problema de que un participante o equipo no podría terminar la carrera porque no logra ubicar un punto de control obligatorio; pero se requiere más capacidad de decisión y dominio propio para elegir bien los controles que uno quiere buscar, y poder volver dentro del límite de tiempo.

Nota: Se organizan carreras de orientación "oficiales" en muchos países. Si les interesa, averigüe si existe una asociación de este deporte en el lugar donde vive. También unos grupos de scouts lo practican, y podrán ayudarle con técnicas de orientación.
En la versión oficial, los puntos de control se marcan con prismas triangulares de color blanco y naranja, y la verificación se hace mediante unas pinzas con clavos que perforan la tarjeta de control con un patrón determinado.

Distancias grandes en el mapa

Los mapas de territorios mayores, como provincias o países enteros, tienen escalas menores, por ejemplo de 1:500'000, o de 1 a varios millones. (Se llaman "escalas menores" porque de esta manera el territorio aparece "menor", más pequeño, en el mapa.) Tales mapas son útiles para planear viajes, o para averiguar las distancias hacia lugares distantes.

Consigan unos mapas de diferentes escalas, o un atlas. Calculen para algunos mapas: ¿A cuánto equivale un kilómetro en este mapa?

Midan diversas distancias en los mapas y calculen cuánto miden en realidad. Por ejemplo desde el lugar donde viven hasta la capital de la provincia o del país; o hasta algún lugar en la frontera; o hasta algún lugar lejano donde vive un pariente suyo; o hasta algún lugar turístico conocido. (Puede que necesiten los "números astronómicos" de la *Unidad 91* para algunos de estos cálculos.) Anoten las distancias que miden en los mapas, la escala del mapa, y las distancias reales.

Si van de viaje, lleven un mapa para ubicar los lugares por donde pasan. Calculen con la ayuda del mapa las distancias que están recorriendo. Midan los tiempos, y calculen a qué velocidad están viajando.

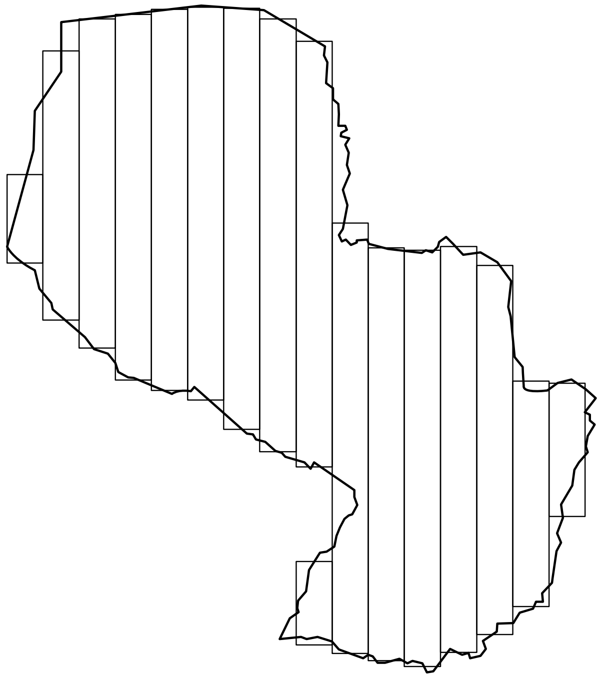
Medir y calcular áreas en el mapa

¿Cómo podemos calcular las áreas de zonas geográficas como lagunas, provincias, países, etc? Estas son figuras irregulares que no podemos calcular como un rectángulo. Pero podemos por lo menos *aproximar* sus áreas, con el siguiente método:

En el mapa dividimos el área en "tiras" horizontales o verticales paralelas de un ancho determinado. (Usen una *copia* del mapa para que no tengan que dibujar sobre el original.) Ahora podemos aproximar cada una de estas tiras a un rectángulo. Medimos las longitudes de todos estos rectángulos aproximados. El área total es la suma de todos estos rectángulos. Podemos sumar todas sus longitudes y convertir esta suma en la medida real, calculando con la escala del mapa. Lo multiplicamos por el ancho real de los rectángulos, y obtenemos el área.

Cuanto más delgadas hacemos las tiras, más exacta será la aproximación ... pero también más trabajosa. – Después de hacer las mediciones y cálculos, averigüen el área real en un libro de geografía, un atlas, o en internet. ¿Cuán buena fue tu aproximación?

La siguiente imagen muestra un mapa de Paraguay, dividido en “tiras” de 50 km de ancho:



¿A dónde vamos desde aquí?

La siguiente Unidad *(68)* continúa con el tema de la orientación en el campo. Aquellos alumnos que están realmente interesados en adquirir estas destrezas de orientación, deberán trabajar las dos Unidades seguidas para poder practicar con todas las herramientas de orientación disponibles.

Noticia insólita

“46 alumnos de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos y un profesor corrieron grave peligro al extraviarse la tarde del viernes cuando realizaban una excursión, (...) caminando sin rumbo en el cerro Canmanca, a 4200 metros sobre el nivel del mar. (...) Tenían previsto explorar las ruinas arqueológicas de Rúpac, como parte de un trabajo especial para el curso de Cartografía.”
(Diario “La República”, Lima, 4 de noviembre de 2013)

Comentario: ¿De qué trata un curso de Cartografía? – Pues, de lo mismo como esta Unidad: la elaboración e interpretación de mapas. Parece que el profesor y sus estudiantes no sabían aplicar sus conocimientos de cartografía en la práctica...

Unidad 68 - Uso de la brújula

Prerrequisitos:
- Medición y construcción de ángulos *(Unidad 59)*.
- Orientación con el mapa *(Unidad 67)*.

Materiales necesarios:
- Brújula; transportador.
- Mapas de los lugares donde realizan las prácticas de orientación.

Para los educadores

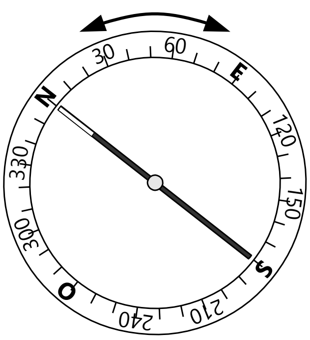
Como la Unidad anterior, ésta es "opcional" desde el punto de vista de los currículos oficiales, pero tiene mucha utilidad práctica. Además provee oportunidades para experimentar y profundizar el concepto de los ángulos, mediante experiencias que unen la matemática con la geografía y el deporte.

TALLER

Conociendo la brújula

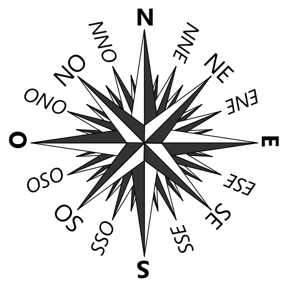
La brújula funciona por medio de una aguja imantada que señala siempre hacia el norte, bajo la influencia del campo magnético de la Tierra.

En realidad, el polo norte magnético no es exactamente idéntico al polo norte geográfico. Por eso existe una pequeña diferencia entre la dirección que señala la brújula, y el norte geográfico. Pero para nuestros propósitos no es necesario tomar en cuenta esta pequeña diferencia, porque es menor que la precisión que los niños podrán alcanzar en sus mediciones con la brújula.



La aguja imantada se encuentra encerrada en una cápsula cilíndrica, la cual está rodeada por un anillo o "*limbo*" que se puede girar. El limbo contiene indicado los puntos cardinales (N=Norte, E=Este, S=Sur, O=Oeste). *(El oeste a veces se abrevia con W, desde la palabra inglesa "West".)* Para que la brújula indique las direcciones correctas, el limbo debe girarse hasta que su norte coincida con la dirección en que apunta la aguja.

En la mayoría de las brújulas, el limbo contiene además una escala de 360 grados, como la que aparece en un transportador. Para algunas actividades de esta Unidad es necesario que la brújula tenga esta división en grados.



Rosa de los vientos

Otros modelos muestran en su lugar una "rosa de los vientos" que indica los puntos intermedios entre los puntos cardinales; o una división en 6400 "milésimos". – En algunos modelos, esta división (en cualquiera de sus formas mencionadas) no se encuentra en el limbo, sino en un disco giratorio que está adherido a la aguja y gira junto con ella. En estos casos, el limbo contiene solamente una marca de orientación que debe girarse hasta que coincida con el norte (resp. el punto de 0º) en el disco giratorio.

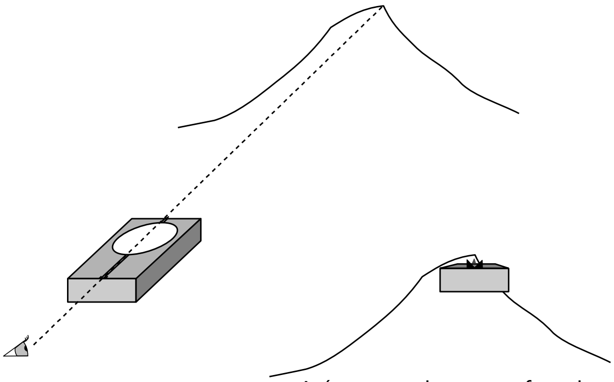
Hagan una primera prueba con la brújula. Manténganla en posición horizontal. Debe estar alejada de cualquier objeto de hierro u otro material magnético, porque eso desviaría la aguja. – Esperen hasta que la aguja deje de oscilar. Ahora debe apuntar hacia el norte. Giren el limbo hasta que el norte del limbo coincida con la dirección de la aguja. Eso es lo que tendremos que hacer en todas las actividades de orientación que siguen.

Otras partes que se pueden encontrar en una buena brújula, se mencionarán en el transcurso de las actividades.

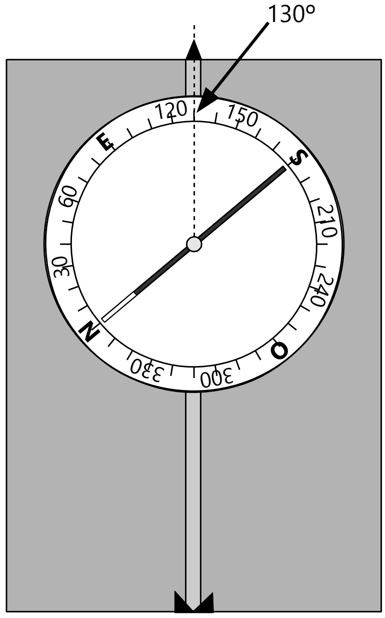
Determinar la dirección de un objeto visible

Eso se puede hacer en cualquier lugar que permita ver algunas partes del paisaje alrededor, o unos edificios importantes no muy cercanos; aun desde la casa, si presenta estas condiciones.

Escoge algún lugar para determinar su dirección: una cumbre de un cerro; un árbol; una casa lejana; una torre; etc. Enfoca este lugar con la brújula. Las brújulas buenas tienen algún dispositivo para enfocar exactamente un objeto a la distancia; por ejemplo una línea de dirección grabada en la caja que contiene la brújula, o dos puntos de visión en los dos extremos de la caja. Si la brújula está en una caja rectangular, se puede usar también uno de los lados de la caja para enfocar el objeto.



Así vemos el cerro enfocado con los puntos de visión.



Sin cambiar la orientación de la brújula, gira el limbo hasta que su norte coincida con la aguja. Siempre sin cambiar la orientación de la brújula, lee ahora el número de grados que corresponde a la línea de dirección que apunta hacia el objeto. Esta es la dirección del objeto desde el lugar donde te encuentras.

Una vez que el limbo está en su posición, ya no es ningún problema si accidentalmente cambiamos la orientación de la brújula: Podemos restaurarla si giramos *toda la brújula* (¡no solamente el limbo!), hasta que la aguja coincida nuevamente con el norte del limbo. Entonces tenemos otra vez la dirección del objeto que hemos enfocado.

Determinen las direcciones de varios objetos visibles desde el lugar donde se encuentran, y anótenlas.

Localizar un objeto visible en el mapa

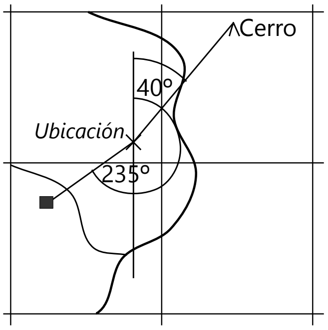
Si tienen un mapa de los alrededores, pueden ahora usar las direcciones de los objetos para localizarlos en el mapa.

La mayoría de los mapas están orientados de manera que el norte se encuentra arriba. (Observando la rosa de los vientos, vemos que entonces el este está a la derecha, el oeste a la izquierda, y el sur abajo.) La cuadrícula de coordenadas permite determinar el norte desde cualquier punto al interior del mapa.
Unos cuantos mapas, especialmente planos de ciudades, pueden estar orientados en otra dirección. En este caso deben contener en alguna parte una flecha con una letra N, que indica la dirección del norte.
A continuación vamos a suponer que tenemos un mapa orientado normalmente, o sea con el norte arriba.

Primero necesitamos conocer nuestra propia ubicación en el mapa. (Eso ya lo hicimos en las actividades de la Unidad anterior.) Ahora, si queremos ubicar exactamente los objetos que hemos observado, tendremos que hacer unas construcciones geométricas sobre el mapa. Para eso es aconsejable sacar fotocopias del mapa, para no tener que dibujar sobre el mapa original. O alternativamente podemos plastificar el mapa y dibujar encima con un plumón delgado para transparencias, que puede borrarse después.

Dibujamos una recta vertical que pasa por nuestra ubicación, paralela a las líneas de coordenadas, para que su dirección sea exactamente de norte a sur. Después usamos el transportador para construir ángulos de acuerdo a las direcciones que hemos medido. Comenzamos en el norte como 0º. Notamos que los grados de la brújula se cuentan en el sentido de las agujas del reloj; entonces 90º es hacia la derecha (el este). Entonces tenemos que construir nuestros ángulos en el mapa en este mismo sentido.
(Nota: Más tarde cuando nos ocupemos de la trigonometría y temas afines, tendremos que acostumbrarnos de otra manera, porque allí los ángulos se miden en sentido contrario a las agujas del reloj.)

Para pensar: ¿Cómo construimos un ángulo mayor a 180º? Por ejemplo, si un objeto se encuentra a una dirección de 235º, ¿cómo construimos un ángulo en la dirección correcta? Observen la graduación de la brújula para encontrar una respuesta.



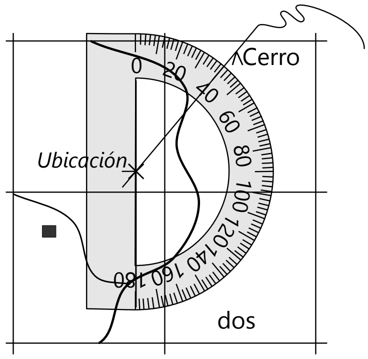
Ahora, para encontrar los objetos observados, solamente tenemos que buscar en el mapa a lo largo de las rectas que hemos dibujado. Quizás se encuentran un poco a la derecha o a la izquierda de la recta, debido a las inexactitudes de la medición.

Podemos adicionalmente estimar las distancias de los objetos. Calculamos a cuánto equivalen estas distancias en el mapa, y medimos a lo largo de las rectas. Así debemos llegar aproximadamente al objeto, si hemos estimado bien.

O vice versa: Si hemos encontrado un objeto en el mapa, podemos medir su distancia hasta el punto donde nos encontramos, y calcular cuánto mide esta distancia en realidad. Después podemos comparar la distancia real con nuestra estimación.

– Una vez que tenemos más práctica, ya no necesitaremos construir rectas sobre el mapa: Simplemente colocamos el transportador con su centro en nuestra ubicación, y con la recta 0º-180º en dirección norte-sur (0º = norte). Después seguimos la dirección indicada con la vista, o tendemos un hilo desde nuestra ubicación hacia el número correspondiente de grados.

Pero para el inicio es mejor hacer las construcciones. Así el asunto se vuelve más exacto y más transparente: los niños entenderán mejor la conexión entre los grados de la brújula y los gra- de los ángulos sobre el papel.



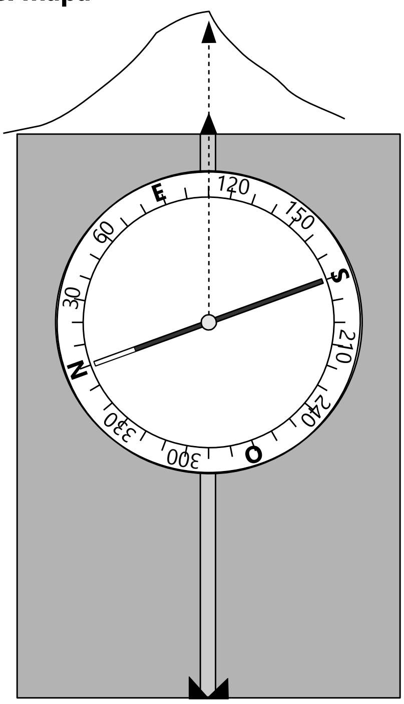
Determinar la dirección de un objeto identificado en el mapa

Ahora hacemos el mismo proceso al revés: Escogemos algún lugar u objeto en el mapa, y averiguamos en qué dirección se encuentra en realidad. Para comenzar, es preferible escoger un objeto que sea (probablemente) visible desde el lugar donde nos encontramos.

Comenzamos entonces con la construcción en el mapa: Dibujamos la recta norte-sur que pasa por nuestra ubicación (si no la tenemos todavía desde la actividad anterior). Después unimos con una recta nuestra ubicación con el objeto escogido. Con el transportador medimos el ángulo de esta recta respecto al norte.
Recordemos nuevamente que estos ángulos se miden en la dirección de las agujas del reloj; o sea desde el norte girando primero hacia la derecha.
Para pensar: ¿Qué hacemos si un ángulo se encuentra a la *izquierda* de la recta norte-sur? Por ejemplo, si un objeto se encuentra en una dirección de 56º *hacia la izquierda*, ¿a cuántos grados equivale esto en la brújula?

(Esta pregunta está muy relacionada con la pregunta de la actividad anterior, acerca de los ángulos mayores a 180º. Si entienden la respuesta a una de estas preguntas, entenderán también la otra.)

Ahora ajustamos la brújula a la dirección que hemos medido. O sea, si la dirección es de 110º, giramos el limbo hasta que su marca de 110º coincide con la línea de dirección de la brújula. Al hacer eso, todavía no necesitamos tomar en cuenta la orientación de la aguja. Recién en un segundo paso giramos la brújula entera, hasta que la aguja coincide con el norte del limbo. Ahora, la línea de dirección de la brújula señala hacia nuestro objeto real.



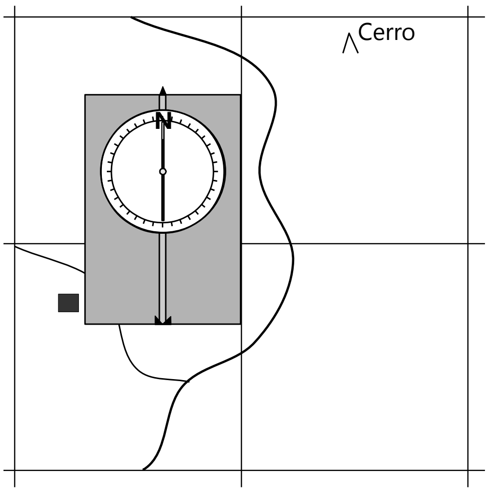
Si la división de grados se encuentra en un disco giratorio en vez del limbo, el procedimiento es un poco diferente: Suponiendo que la dirección es de 110º, tenemos que girar primero la brújula entera hasta que su marca de 110º (¡no el norte!) coincide con su línea de dirección.
Manteniendo esta posición, giramos el limbo hasta que su marca de orientación coincide con el norte de la aguja. Ahora, como en el procedimiento anterior, la línea de dirección señala hacia el objeto real, y la marca del limbo nos ayuda a mantener el norte.

Ahora, sin cambiar la orientación de la brújula, miramos por su línea de dirección, como lo hicimos en una actividad anterior para enfocar un objeto visible. Si el objeto es visible desde nuestra ubicación, debemos verlo ahora en esta dirección. La marca de orientación del limbo nos ayuda a mantener la brújula en la orientación correcta hasta que hayamos encontrado el objeto.

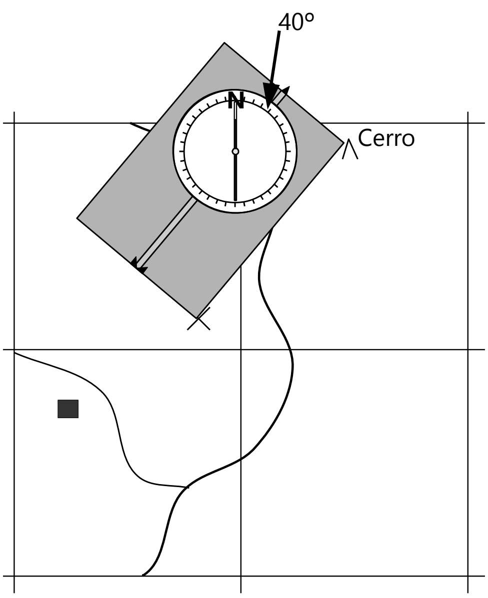
Orientar el mapa según la realidad

A menudo es ventajoso mantener el mapa horizontalmente, en la misma orientación como el paisaje real; o sea que el norte del mapa señale hacia el norte real. Eso simplifica los procedimientos arriba descritos.

Para orientar el mapa, colocamos la brújula sobre el mapa, de manera que su línea de dirección coincide con las líneas norte-sur del mapa. Si la brújula está en una caja rectangular, hacemos coincidir un lado lateral de la caja con una de las líneas norte-sur.
Giramos *el mapa junto con la brújula*, hasta que la aguja de la brújula señala hacia su línea de dirección. Ahora el norte del mapa coincide con el norte real.



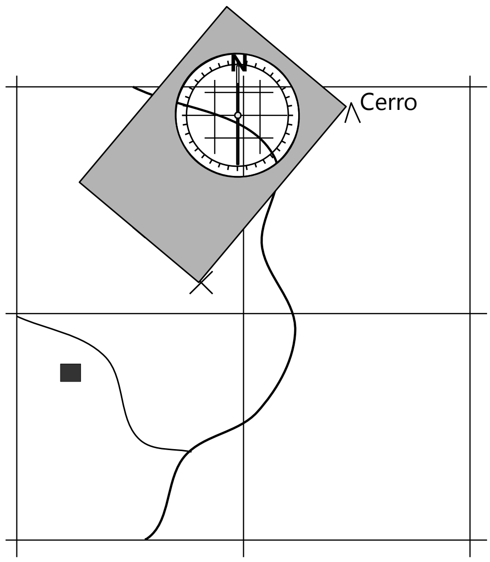
Con el mapa orientado en esta posición, podemos determinar aproximadamente la dirección de un objeto, sin necesidad de enfocarlo con la brújula, porque la dirección real del objeto es la misma como su dirección en el mapa. Eso no es tan exacto como el método anterior, pero es suficiente para muchos propósitos prácticos.



Además, con el mapa orientado correctamente, ya no tenemos necesidad de un transportador, porque la misma brújula sustituye el transportador.
Por ejemplo, hemos enfocado un objeto real como en la primera actividad, y encontramos que se encuentra en la dirección de 40°. Colocamos la brújula sobre el mapa, de manera que el norte de la brújula coincide con el norte de la mapa y también con el norte del limbo. Ahora, la línea de dirección de la brújula señala hacia el objeto en el mapa. Si la brújula está en una caja rectangular, solamente tenemos que hacer coincidir uno de sus lados laterales con nuestra ubicación en el mapa, y el lado de la caja señala hacia el objeto en el mapa. *(Imagen anterior.)*

Para el procedimiento inverso, orientamos el mapa, y entonces colocamos la brújula sobre el mapa, de manera como si el lado de su caja fuera una regla que queremos usar para unir con una recta nuestra ubicación y el objeto elegido en el mapa. Giramos el limbo, hasta que el norte del limbo coincide con el norte de la brújula. Ahora podemos leer en la línea de dirección el número de grados donde se encuentra el objeto; y podemos usar la brújula para enfocar el objeto real.

En algunas brújulas, la cápsula donde se encuentra la aguja es transparente, y contiene unas líneas guías en dirección norte-sur y este-oeste. Estas líneas guías facilitan la orientación del mapa, porque permiten ver el mapa a través de la cápsula, y así se pueden ajustar las líneas guía para que sean paralelas a las líneas norte-sur y este-oeste del mapa.



Estos procedimientos son un poco más eficaces que aquellos con el transportador. Sin embargo, se recomienda practicar primero las construcciones con el transportador, para que los niños lleguen a entender cómo se relacionan las construcciones de ángulos en el mapa con los ángulos que mide la brújula.

Caminar hacia una meta invisible

Esta es la aplicación más importante de la orientación con brújula: Queremos llegar a cierto lugar que no es visible desde nuestra ubicación actual, y no hay suficientes marcas de orientación para garantizar una orientación segura con el mapa solo. Para practicar eso, se necesita una zona de poca visibilidad (por ejemplo un bosque), y donde se puede caminar libremente por el campo en línea recta sin que haya obstáculos como ríos, cercos, campos cultivados, casas, o propiedades privadas. *(En "Ampliaciones" veremos un método cómo rodear un obstáculo relativamente pequeño sin perder el rumbo.)*

Primero necesitamos localizar en el mapa nuestra ubicación actual, y la meta adonde queremos llegar. Con el transportador (o con la brújula sobre el mapa orientado) medimos la dirección de la meta en grados, como lo hicimos en las actividades anteriores. Giramos el limbo de la brújula, hasta que la línea de dirección coincide con la dirección medida. Así la brújula está lista para enfocar la dirección correcta.

Enfocamos esta dirección con la brújula, fijándonos que la aguja coincida con el norte del limbo. Nos fijamos en algún objeto bien identificable que vemos en esta dirección, y caminamos hacia aquel objeto. Seguimos enfocando la dirección y caminando, hasta que lleguemos a la meta.

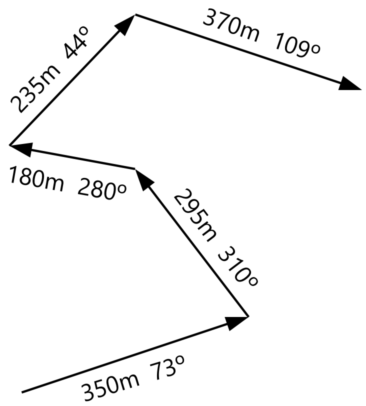
Para una orientación más segura, podemos adicionalmente medir en el mapa la distancia hacia la meta, y calcular la distancia real. Después, mientras caminamos, mantenemos la cuenta de la distancia transcurrida (por ejemplo contando pasos). Así sabemos con más precisión cuando debemos estar cerca de la meta.

Practiquen eso en el campo con algunas metas no muy lejanas, quizás de 200 a 500 metros de distancia. Cuando hayan adquirido más práctica y estén más valientes, pueden probarlo con metas a una distancia de un kilómetro o más.

Carrera con brújula

Esta es una forma de carrera de orientación donde los puntos de control deben encontrarse no según su ubicación en un mapa, sino según su dirección y distancia desde el punto de inicio. (Se puede adicionalmente dar un mapa; pero si queremos exclusivamente practicar la orientación con brújula, hay que hacerlo sin mapa.)

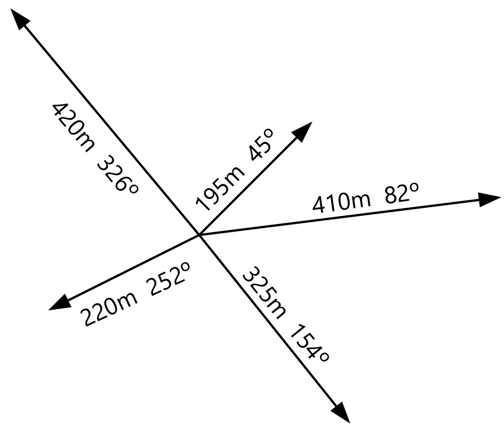
Se pueden dar desde el inicio las ubicaciones sucesivas de todos los puntos de control, como en este esquema:



O se puede dar solamente la ubicación del primer control, y en el mismo punto de control dejar una tarjeta con los datos del siguiente control, y así sucesivamente hasta el último.

Ya que en este tipo de carrera el orden de los puntos de control es fijo, se recomienda mucho enviar a los participantes o equipos en intervalos de 5 a 10 minutos, para que no puedan seguirse unos a otros.

Alternativamente, podemos indicar las ubicaciones de todos los controles respecto al mismo punto de inicio, como en este esquema:



Entonces cada participante puede visitar los controles en el orden que desea, como en la carrera de orientación normal.

Matemática divina

“Mantener el norte”

La aguja de la brújula señala siempre hacia una dirección fija. El norte no depende de nuestra propia orientación o preferencia. Solamente así es posible determinar todas las otras direcciones. Orientarnos en el campo es posible solamente si podemos comparar nuestra dirección con una dirección fija que no cambia.

Así es también la orientación en la vida. Podemos decidir tomar diversos rumbos y direcciones. Pero es necesario comparar estas direcciones con el “norte” que Dios nos da, sus principios eternos de lo que es bueno o malo. Eso es algo que no podemos decidir o definir nosotros como queremos. Dios nos dio a conocer su voluntad en la Biblia, y nadie tiene derecho de cambiarlo, ni siquiera las iglesias y organizaciones religiosas.

“¡Ay de los que a lo malo dicen bueno, y a lo bueno malo; que hacen de la luz tinieblas, y de las tinieblas luz; que ponen lo amargo por dulce, y lo dulce por amargo!” (Isaías 5:20)

Lo mismo sucede en toda la matemática: Aun los mismos matemáticos no pueden cambiar ninguna ley matemática. Tienen que reconocer que la matemática es como es, y tienen que comparar sus resultados con los principios eternos de la matemática, para saber si son correctos o equivocados. Así, la brújula y la matemática nos enseñan que hay direcciones fijas que nos permiten orientarnos.

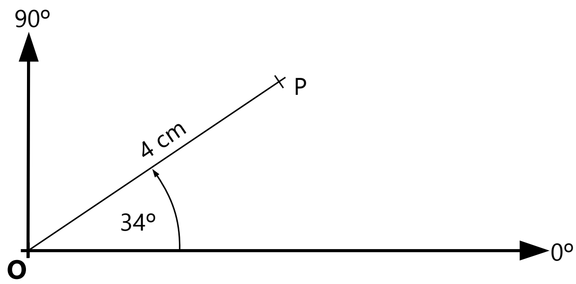
Principios matemáticos

El uso de la brújula provee muchas aplicaciones concretas del concepto de un *ángulo*. A diferencia de las tareas usuales de medición y construcción, aquí los ángulos se definen respecto a una dirección fija, el norte. Esta es la idea de las...

Coordenadas polares

En un sistema de coordenadas polares, la ubicación de un punto se indica mediante su *distancia* desde el origen, y el *ángulo* de esta línea de distancia respecto a una dirección fija. Normalmente la dirección de 0º se define hacia la derecha, y los ángulos se miden en sentido contrario a las agujas del reloj.

En el siguiente ejemplo, las coordenadas polares del punto P son 4 cm (distancia) y 34º (ángulo).



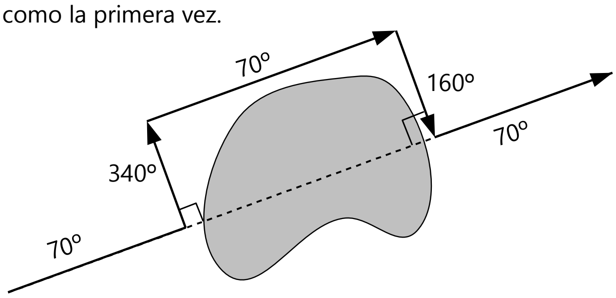
No es necesario que los niños de primaria aprendan este concepto. Pero cuando hacemos carreras con brújula como antes descritas, estamos efectivamente indicando las ubicaciones de los puntos de control mediante coordenadas polares.

Ampliaciones

Rodear un obstáculo con la ayuda de la brújula

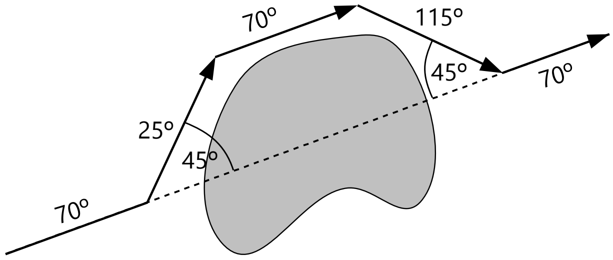
Supongamos que estamos caminando hacia una meta que no podemos ver, pero conocemos su dirección. Caminamos en línea recta; pero en el camino se nos presenta un obstáculo, por ejemplo un pantano, una granja, una zona con espinos que no se puede cruzar, etc. ¿Cómo podemos caminar alrededor del obstáculo sin perder nuestro rumbo?

La manera más fácil consiste en describir un rectángulo: Cambiamos la dirección de la brújula a una dirección perpendicular a la actual, sea hacia la izquierda o hacia la derecha. Caminamos en esta dirección, contando pasos, hasta que vemos que el camino en la dirección original está libre.
Regresamos la brújula a la dirección original y seguimos caminando hasta pasar el obstáculo. Después cambiamos nuevamente a una dirección perpendicular, pero opuesta a la anterior: si antes caminamos hacia la izquierda, ahora caminamos hacia la derecha, y vice versa. Caminamos en esta dirección perpendicular *el mismo número de pasos* como la primera vez.



Ahora nos encontramos nuevamente en el rumbo correcto, como si hubiéramos atravesado el obstáculo en línea recta. Volvemos la brújula a la dirección original, y seguimos caminando hacia la meta.

Este método es relativamente fácil y seguro, pero nos hace caminar más de lo necesario. Podemos ahorrar un poco de camino si nos desviamos de la dirección original por un ángulo menor, por ejemplo en 45°. Solamente que este método requiere un poco más de imaginación geométrica. La figura que "construimos" esta vez es un trapecio isósceles:



Entonces, nos desviamos de la dirección original solamente por 45°; hacia la izquierda, en este caso. Eso tenemos que hacer un poco antes de llegar al obstáculo, para que tengamos el camino libre en esta dirección. Como en el método anterior, caminamos contando pasos hasta que tengamos el camino libre para volver a la dirección original. Caminamos en la dirección original hasta que podamos volver hacia la derecha. Ahora nos desviamos de la dirección original por 45° hacia la derecha, y caminamos el mismo número de pasos como hemos contado antes. Ahora estamos otra vez en el rumbo correcto, y podemos seguir adelante en la dirección original.

Para pensar:
- ¿Puedes dar una razón geométrica por qué este método nos lleva de regreso al rumbo original?
- ¿Por qué este método nos permite caminar una distancia más corta que el método del rectángulo?
- Construye ambos caminos en un papel, el del rectángulo y el del trapecio. Compara las distancias que se camina en cada uno de ellos.

Si hacemos esta actividad con los alumnos, se recomienda hacerles dibujar primero la construcción geométrica en un papel. Sólo después salimos al campo a practicarlo. Así los niños entenderán lo que estamos haciendo cuando estamos en el campo.

Identificar una ubicación desconocida

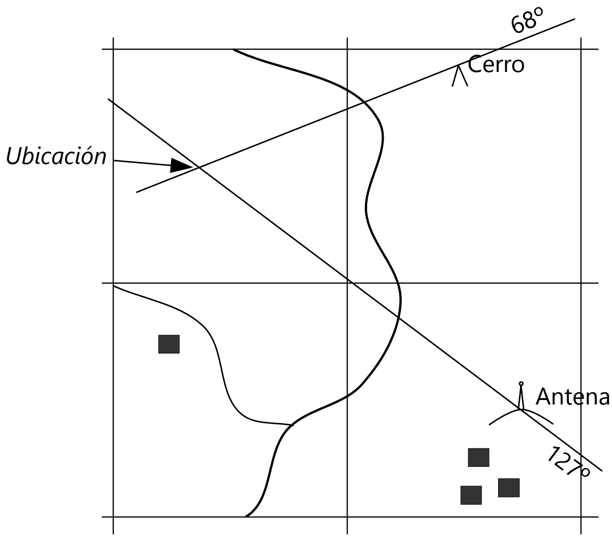
Supongamos que nos hemos extraviado en una zona desconocida, pero tenemos un mapa y una brújula. Entonces podemos identificar nuestra ubicación con el siguiente método:

Para aplicar este método es necesario que desde nuestra ubicación podamos ver por lo menos un punto conocido que podemos identificar en el mapa: una cumbre de un cerro; una torre; un punto identificable en la orilla de un río; etc. Aun mejor es si podemos ver *dos* puntos conocidos. No importa cuán lejos estén esos puntos, con tal que estén dentro del mapa.

Con la brújula enfocamos el punto conocido y medimos su dirección en grados. Después construimos en el mapa una recta desde ese punto, en la dirección medida. (Use una copia del mapa para no tener que dibujar sobre el original.) Prolongamos esta recta *hacia atrás*. Si estamos viendo el punto en esta dirección, nuestra ubicación debe estar en esta recta prolongada hacia atrás. Comparamos las características del terreno alrededor de nosotros con lo que encontramos en el mapa a lo largo de esta recta. Así debemos ser capaces de identificar nuestra ubicación.

Podemos adicionalmente estimar la *distancia* hasta el punto conocido. Calculamos cuánto mide esta distancia estimada en el mapa, y la medimos desde el punto conocido "retrocediendo" en la recta. Así podemos decir dónde aproximadamente debe estar nuestra ubicación en el mapa.

Si podemos ver *dos* puntos conocidos, el método se vuelve más fácil y más exacto: Con la brújula medimos la dirección del segundo punto y construimos desde allí una recta igual como para el primer punto. Sabemos que nuestra ubicación debe estar en ambas rectas. Por tanto, debe encontrarse en la *intersección* de las dos rectas. O por lo menos cerca; tomando en cuenta que nuestras mediciones no son completamente exactas. Esto funciona, siempre y cuando las dos rectas no sean paralelas o casi paralelas.



No es necesario extraviarnos para practicar este método. Podemos practicarlo también desde una ubicación conocida; incluso desde la casa, si podemos ver dos puntos que podemos identificar en el mapa. Hagan las mediciones y construcciones antes descritas; después comprueben cuán cerca o lejos del lugar correcto se encuentra la intersección de las rectas en el mapa.

Después de practicarlo una o dos veces desde una ubicación conocida, vayan a una zona poco conocida y practiquen allí; de preferencia en un lugar donde hay pocos puntos de orientación cerca, para que no sea demasiado fácil. (Pero sí se deben ver desde allí uno o dos puntos que se pueden identificar en el mapa.) Que los alumnos no reciban los mapas hasta que hayan llegado al lugar. Si desean, se puede practicar como competencia individual o grupal: ¿Quién identifica primero correctamente nuestra ubicación en el mapa?

Unidad 69 - Transformaciones de figuras en el sistema de coordenadas

Prerrequisitos:
- Construcciones geométricas *(Unidades 56, 57, 59).*
- Simetría *(Unidad 60).*

Materiales necesarios:
- Papel, tijera, espejo.
- Regla, escuadra, compás, transportador.
- Clavo o alfiler; cartón grueso o madera; cinta adhesiva.

Para los educadores

Esta Unidad introduce la traslación, reflexión y rotación de figuras, como construcción geométrica y como operación con coordenadas. Cada una de estas transformaciones se introduce primero mediante una pequeña demostración con una figura cortada de papel sobre la mesa. Al nivel de Primaria es esencial que los alumnos puedan presenciar estas demostraciones, y en lo posible realizarlas ellos mismos. Así adquieren una base experimental para los razonamientos abstractos que siguen después.

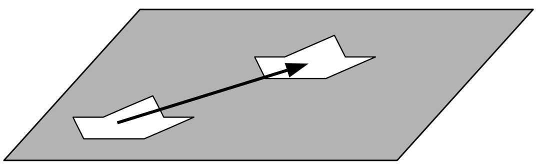
A continuación, para cada transformación se presenta un ejemplo en un sistema de coordenadas, y se pide observarlo y reflexionar acerca de los efectos de la transformación, tomando en cuenta el aspecto geométrico y también el aspecto numérico (operaciones con coordenadas). Para tener éxito en estas pequeñas investigaciones, es necesario que los alumnos puedan edificar sobre sus experiencias pasadas al efectuar construcciones de paralelas, ángulos rectos, figuras congruentes, figuras simétricas, etc. Estamos ahora llevando estas experiencias a un nivel un poco más abstracto y más sistemático, acercándonos ya a las exigencias del nivel de Secundaria. Por tanto, se recomienda estudiar esta Unidad hacia el *fin* del período, cuando los alumnos tengan la madurez suficiente para razonamientos un poco más avanzados.

Tomen suficiente tiempo para estos desafíos de observación e investigación. Es mediante la investigación propia que se llega a un entendimiento más profundo y más duradero. Solamente si se han ocupado con un problema por varios días sin encontrar solución, consulten las explicaciones en el *Anexo A*.

TALLER

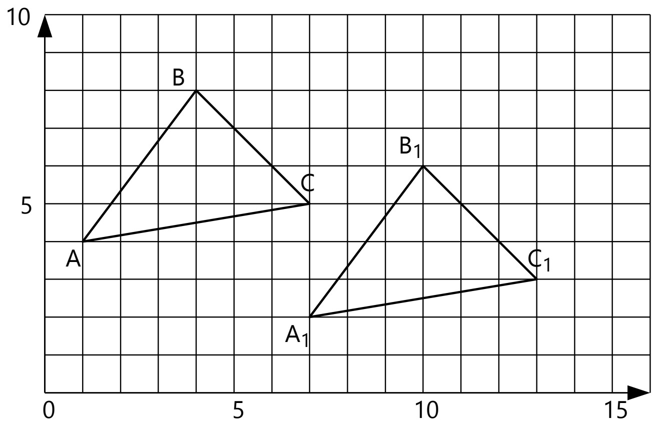
Traslación

Una traslación "traslada" una figura a otro lugar, sin cambiar su orientación. Podemos mostrarlo primero con una figura cortada de papel que movemos sobre la mesa: La trasladamos a otro lugar, pero *sin girarla*.



Al trasladarla, no hemos cambiado nada en la forma de la figura. Una figura trasladada es *congruente* a la figura original.

Ahora observamos este mismo proceso en un sistema de coordenadas:



Las preguntas de la investigación siguiente se pueden responder, observando este gráfico.

Investigación

Observa y describe:

- ¿Qué puedes decir acerca de los *lados* del triángulo trasladado, respecto al original (longitudes, direcciones)?

- ¿Qué puedes decir acerca de las *coordenadas de los vértices* del triángulo trasladado, respecto al original?

Para pensar:

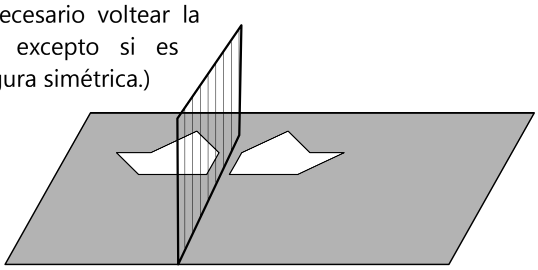
- ¿Cómo puedes calcular la ubicación de una figura trasladada, usando un sistema de coordenadas?

- ¿Cómo puedes construir geométricamente una figura trasladada, sin usar coordenadas? *(Hay por lo menos dos posibilidades.)*

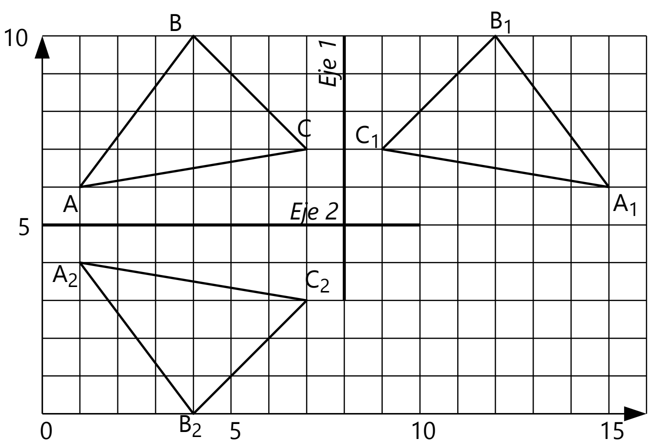
Hoja de trabajo 69.1: En esta hoja practicamos la traslación de dos maneras: En un sistema de coordenadas, donde se pueden contar cuadrículas y calcular. Y como construcción geométrica, donde hay que aplicar los resultados de la investigación anterior.

Reflexión

La reflexión transforma una figura de la misma manera como se reflejaría en un espejo. La figura reflejada es *congruente* a la primera, aunque en sentido invertido. *(Vea Unidad 60 acerca de la simetría axial.)* Lo podemos mostrar con una figura cortada de papel sobre la mesa y un espejo: Ponemos el espejo al lado de la figura. Intenten ahora poner la figura en el lugar y en la orientación como aparece en el espejo. (Notarán que será necesario voltear la figura, excepto si es una figura simétrica.)



Ahora observamos este mismo proceso en un sistema de coordenadas. Observamos dos casos: cuando el eje de simetría es vertical, y cuando es horizontal.



Investigación

Observa y describe:

- ¿Qué puedes decir acerca de los *lados* del triángulo reflejado, respecto al original (longitudes, direcciones)?

- ¿Qué puedes decir acerca del *orden de los vértices*, comparando el triángulo original con el reflejado? (Si en el triángulo original los vértices A, B, C se siguen en el sentido de las agujas del reloj, ¿cómo es en el triángulo reflejado? ¿Siempre será así?)

- ¿Qué puedes decir acerca de las *coordenadas de los vértices* del triángulo reflejado, respecto al original?

- ¿Qué diferencia hace en este respecto, si el eje de simetría es horizontal o vertical?

Para pensar:

- ¿Cómo puedes calcular la ubicación de una figura reflejada, usando un sistema de coordenadas?

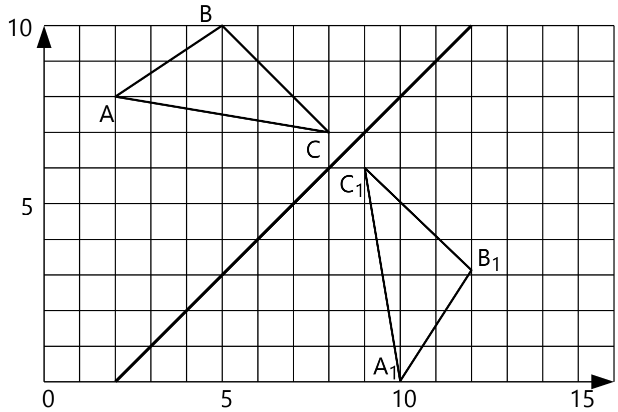
- ¿Cómo puedes construir geométricamente una figura reflejada, sin usar coordenadas? *(Recuerda la Unidad 60. Pero existen también otros métodos que no se mencionaron allí.)*

Hoja de trabajo 69.2: Practicamos la reflexión de figuras de dos maneras, como en la hoja anterior: Como operación con coordenadas, y como construcción geométrica.

Se necesita aplicar los resultados de la investigación.

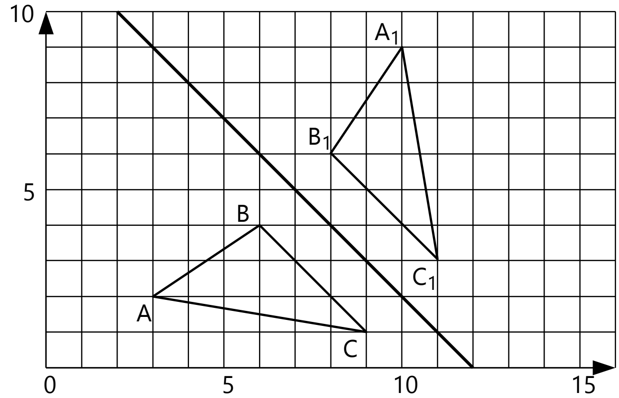
**** Reflexión en un eje de simetría inclinado en 45º***

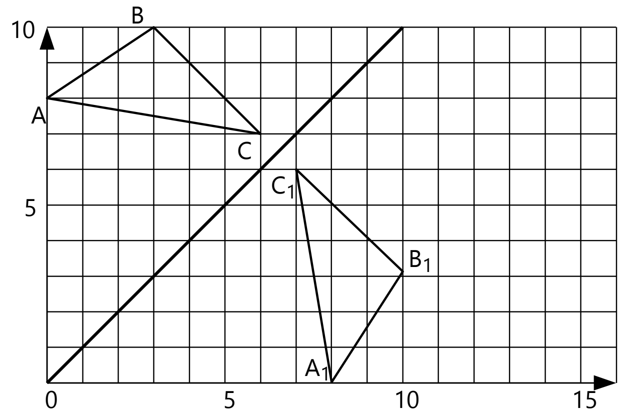
La siguiente situación es un poco más difícil. Pero todavía es posible analizarla, porque estos ejes de simetría corresponden exactamente a las diagonales de la cuadrícula. Veremos que de esta manera los reflejos de puntos "enteros" son nuevamente puntos "enteros". Alumnos con bastante talento y/o interés pueden analizar estas situaciones de la misma manera como las anteriores:



Un caso especial fácil de analizar, es cuando el eje de simetría es la diagonal que pasa por el origen de las coordenadas *(derecha, abajo)*:

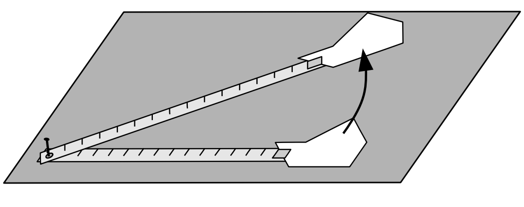
¿Qué pasa en este caso con las coordenadas?





Rotación

Rotar una figura significa *girarla* por un ángulo determinado, alrededor de un punto definido, el *centro* de la rotación.
Para mostrar una rotación con una figura cortada de papel, podemos usar una regla que tiene un agujero redondo cerca de uno de sus extremos, como lo tienen muchas reglas. Ponemos la regla sobre un cartón grueso o una madera, y clavamos un clavo o un alfiler por el agujero. Este será el centro de rotación.
Con un poco de cinta adhesiva pegamos nuestra figura de papel sobre la regla. Ahora podemos girar la regla alrededor del clavo. El movimiento que describe la figura de papel, es una rotación.



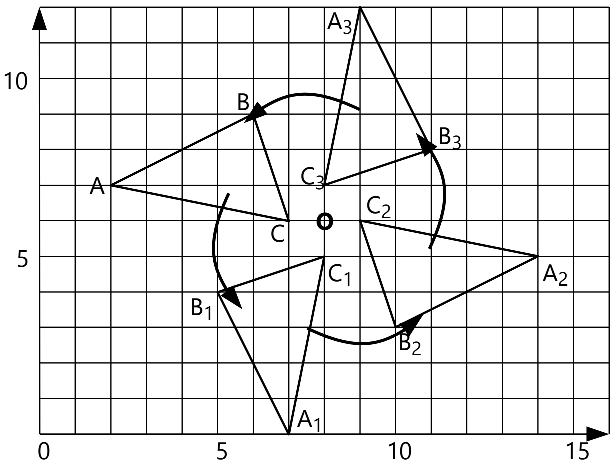
Vemos entonces las siguientes propiedades de la rotación:

- Figuras rotadas son *congruentes* (ya que no cambiamos nada en la forma de la figura).

- Cada punto rotado tiene *la misma distancia del centro* como el punto original correspondiente. (En nuestro ejemplo, la regla asegura que estas distancias se mantengan constantes.)

Podemos también rotarnos a nosotros mismos: En el piso dibujamos con tiza un círculo de aproximadamente 1m de diámetro. En su circunferencia ponemos unas marcas que indican grados (por lo menos hay que marcar 0º, 90º, 180º y 270º, en sentido antihorario). Una persona se para en el centro del círculo y mira hacia la marca de 0º. Después gira poco a poco y observa en cuántos grados ha cambiado su orientación.

Ahora observamos este mismo proceso en un sistema de coordenadas. Nos limitaremos a rotaciones por múltiplos de un ángulo recto (90º, 180º y 270º), porque éstos son los únicos ángulos que hacen "encajar" la figura rotada en las cuadrículas de las coordenadas. (Para analizar las coordenadas en rotaciones con otros ángulos, necesitaríamos conocimientos de trigonometría.)
Note que los ángulos de rotación se miden *en sentido antihorario*, o sea contrario a las agujas del reloj.



Investigación

Observa y describe:

- ¿Qué puedes decir acerca de los *lados* del triángulo rotado, respecto al original (longitudes, direcciones)?

- ¿Qué puedes decir acerca del *orden de los vértices*, comparando el triángulo original con el rotado? (Si en el triángulo original los vértices A, B, C se siguen en el sentido de las agujas del reloj, ¿cómo es en el triángulo rotado? ¿Siempre será así?)

- *¿Qué puedes decir acerca de las *coordenadas de los vértices* del triángulo rotado, respecto al original? (Analiza aparte los casos de la rotación por 90º, por 180º y por 270º.)

Para pensar:

- ¿Cómo puedes construir geométricamente una figura rotada, sin usar coordenadas? ¿Puedes hacer eso también para ángulos arbitrarios de rotación (52º, 117º, ...)?

- *¿Cómo puedes calcular la ubicación de una figura rotada, usando un sistema de coordenadas? *(Solamente para ángulos de 90º, 180º, 270º.)*

Hoja de trabajo 69.3: Como las hojas anteriores. Los resultados de la investigación se necesitarán para efectuar estas construcciones.

Principios matemáticos

¿Qué es la geometría analítica?

Hemos estudiado cada transformación bajo dos aspectos:

1) como una transformación de coordenadas, que se puede expresar y calcular con números;

y 2) como una construcción geométrica que se puede construir con regla, compás, etc.

Para el aspecto (1) hemos hecho uso de las coordenadas cartesianas *(Unidad 66)*. Eso fue exactamente el cambio revolucionario que el invento de las coordenadas introdujo en la matemática: Podemos ahora expresar construcciones geométricas mediante operaciones numéricas, y vice versa. O sea, la geometría y la aritmética ya no son campos estrictamente separados. Se unen (junto con el álgebra) en esta rama de la matemática que se originó con Descartes y se llama *geometría analítica*.

Al nivel de Primaria podemos solamente curiosear un poco acerca de las posibilidades de la geometría analítica. En el nivel de Secundaria comenzaremos a estudiarla más seriamente.

Para los educadores

La siguiente sección de *"Ampliaciones"* (opcional) introduce unas transformaciones más complicadas. Lo hacemos como proyecto de arte, todavía sin examinar los aspectos matemáticos de estas transformaciones; porque eso nos llevaría a temas demasiado avanzados para el nivel de Primaria.

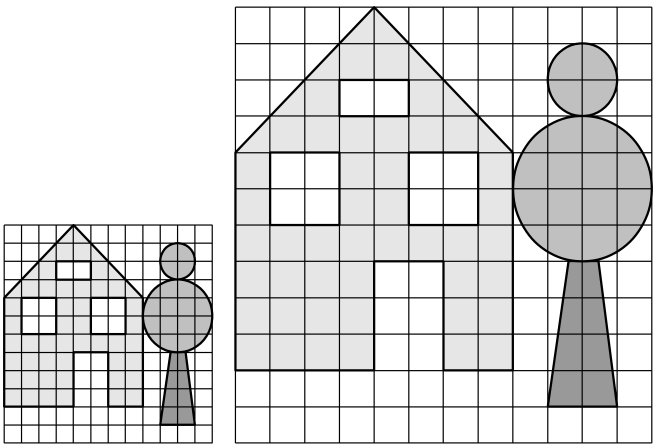
Ampliaciones

Transformar la geometría del sistema de coordenadas

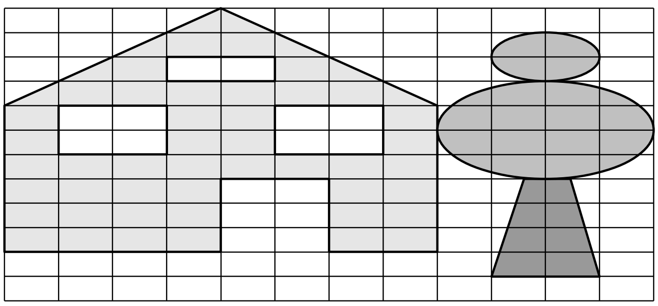
En vez de transformar *figuras*, podemos también transformar *el entero sistema de coordenadas*. Por ejemplo podemos rotarlo, estirarlo, o distorsionarlo. Esto puede producir unos efectos interesantes. Algunas de estas transformaciones serán interesantes a un nivel más avanzado para analizar y calcularlas matemáticamente. Pero por ahora queremos solamente experimentar un poco, como un proyecto de arte matemático.

Ampliar figuras

El sistema de coordenadas puede ayudarnos para ampliar un dibujo. Para este experimento podemos usar cualquier dibujo (pero que no sea demasiado complicado). Construimos una cuadrícula sobre el dibujo, por ejemplo en espacios de 3 mm. Después construimos en una hoja en blanco el mismo número de cuadrados, pero a un tamaño mayor, por ejemplo con espacios de 6 mm. Copiamos cuidadosamente el contenido de cada cuadradito del dibujo original al cuadradito correspondiente de la cuadrícula ampliada. Así obtenemos el dibujo entero en forma ampliada.

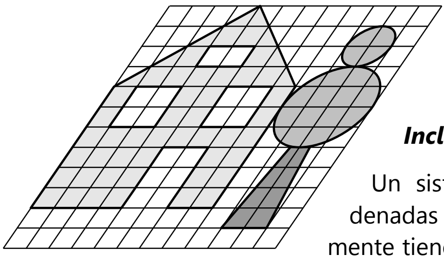


Si deseamos, podemos estirar el dibujo en una dimensión más que en otra. Por ejemplo, la nueva cuadrícula podría tener un espaciado de 4 mm en lo vertical y de 8 mm en lo horizontal. Así la figura se estira horizontalmente:



Experimenten con diversas ampliaciones.

(En la Unidad siguiente examinaremos la ampliación de figuras desde el punto de vista matemático.)

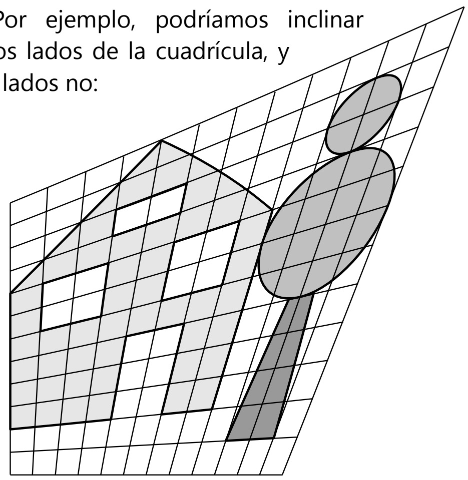


Inclinar figuras

Un sistema de coordenadas no necesariamente tiene que tener ángulos rectos. Podemos inclinarlo por un ángulo definido, y así obtenemos una copia inclinada de la figura original.

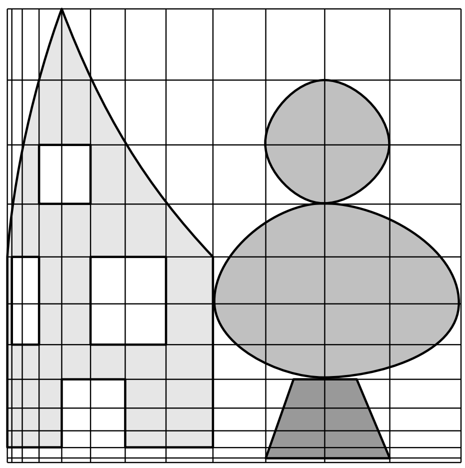
Distorsiones

Podemos inventar diversas maneras de distorsionar la cuadrícula. Por ejemplo, podríamos inclinar solamente dos lados de la cuadrícula, y los otros dos lados no:



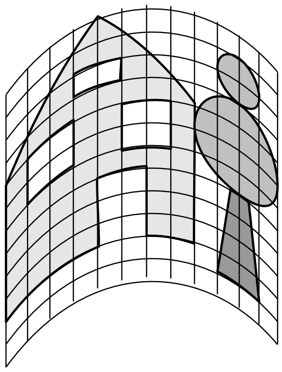
Para que esto resulte bien, tenemos que dividir los lados inclinados en tantos segmentos como tenemos cuadrados. Por ejemplo si tenemos 12 cuadrados en lo horizontal, tenemos que dividir los lados horizontales en 12 partes iguales.

Pero podemos también usar una escala variable. En el siguiente ejemplo no hemos inclinado los ejes, pero estamos variando la escala, desde muy pequeña en el origen hasta muy grande en el extremo opuesto:

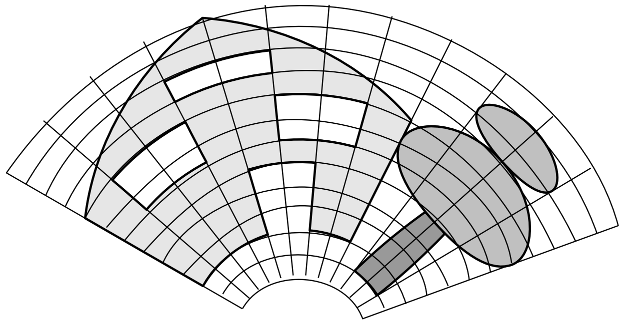


Distorsiones curvadas

Podemos experimentar también con líneas curvadas, por ejemplo arcos de círculo. En el ejemplo a la derecha, la cuadrícula se construye a base de arcos circulares paralelos:



Podemos también usar arcos concéntricos, o sea, que tienen todos el mismo centro:



¡Inventen sus propias cuadrículas distorsionadas!

Si están usando un programa de computadora de diseño gráfico, quizás este programa les permite experimentar con algunas de las transformaciones que hemos visto aquí.

Unidad 70 - Proporciones en la geometría

Prerrequisitos:

- Transformaciones de figuras en el sistema de coordenadas *(Unidad 69)*.
- Proporciones *(Unidad 20)*.
- (para la tarea de investigación): Unidades de medida de áreas *(Unidad 32)*.

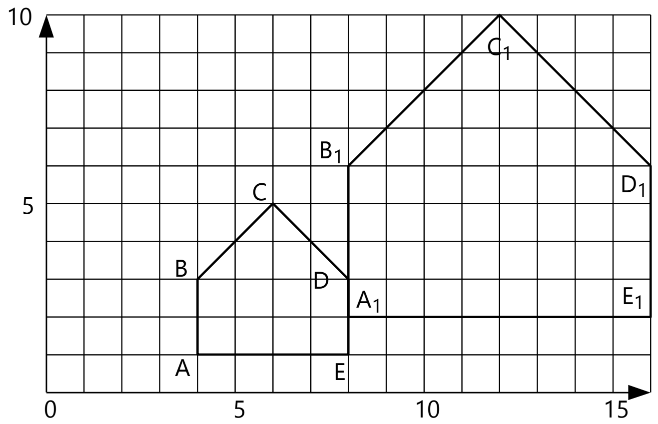
Materiales necesarios:

- Regla, escuadra, compás, transportador.
- *(Para el pantógrafo):* Madera contrachapada (triplay) u otra madera delgada; sierrita, martillo, clavos, alambre, cinta adhesiva, cuenta de madera o plástico, etc.

TALLER

Ampliación de figuras geométricas

En la Unidad anterior hemos ampliado figuras, usando una cuadrícula de tamaño mayor. Ahora investigaremos qué sucede con las coordenadas, si dibujamos la figura ampliada en el mismo sistema de coordenadas como la original. En el siguiente ejemplo, la figura se amplía al doble en ambas dimensiones (horizontal y vertical):



Observa y describe:

- ¿Qué puedes decir acerca de los *lados* del polígono ampliado, respecto al original (longitudes, direcciones)?
- ¿Qué puedes decir acerca de los *ángulos* del polígono ampliado, respecto al original?
- ¿Qué puedes decir acerca de las *coordenadas de los vértices* del polígono ampliado, respecto al original?
- ¿Qué otras propiedades interesantes puedes encontrar?

Para pensar:

- ¿Cómo puedes calcular las coordenadas una figura ampliada, usando un sistema de coordenadas?
- * ¿Encuentras una manera fácil de construir geométricamente una figura ampliada, sin usar coordenadas?

La ***Hoja de trabajo 70.1*** permite practicar el cálculo de coordenadas y la construcción geométrica, de la misma manera como las hojas de trabajo de la *Unidad 69*.

Semejanza geométrica

Cuando una figura es la ampliación exacta de otra, se dice que las dos figuras son *semejantes*. Hemos observado en la actividad anterior que los ángulos de figuras semejantes son iguales. Además, al ampliar una figura, las longitudes de sus lados se multiplican por el mismo factor. Esto significa que los lados de figuras semejantes son *proporcionales*. (Recordemos las "máquinas paralelas" en las proporciones directas, *Unidad 20*: Proporcionalidad directa significa multiplicar por el mismo factor.)

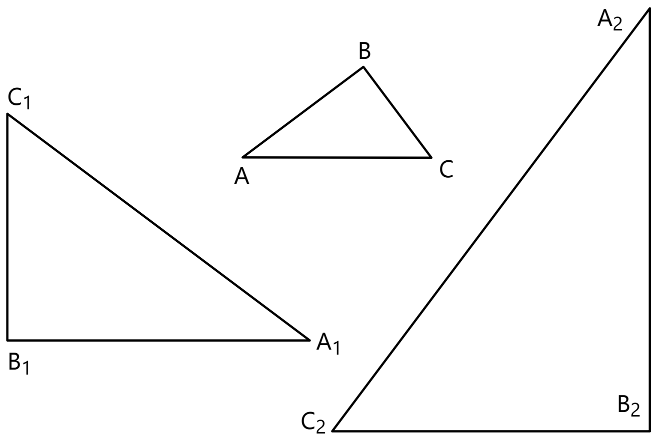
Resumimos:

> Dos figuras son semejantes si y sólo si ...
>
> - sus ángulos son iguales,
>
> - y sus lados son directamente proporcionales entre sí.

En esta definición no importa la ubicación y orientación de las figuras: La figura ampliada se puede trasladar, reflejar, rotar ... (cualquier transformación que preserva la congruencia), y sigue semejante a la primera.

Triángulos semejantes

Este es el caso más sencillo. Observa los siguientes triángulos y mide sus lados:



Podemos escribir sus proporciones de diferentes maneras. Por ejemplo, podemos establecer una proporción entre cada lado del triángulo $A_1B_1C_1$ y el lado correspondiente del triángulo ABC:

$$\frac{3}{1.5} = \frac{4}{2} = \frac{5}{2.5} = 2$$

Y lo mismo entre el triángulo $A_2B_2C_2$ y el triángulo $A_1B_1C_1$:

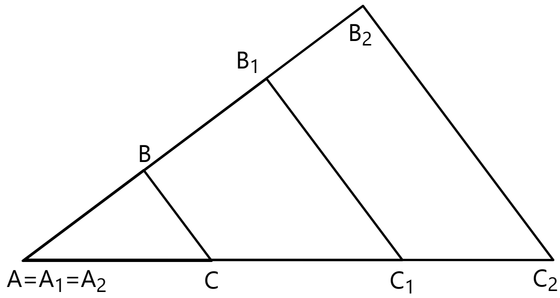
$$\frac{4.2}{3} = \frac{5.6}{4} = \frac{7}{5} = 1.4$$

(Escribe tú mismo las proporciones entre el triángulo $A_2B_2C_2$ y el triángulo ABC.)

O podemos establecer las proporciones entre los lados de un mismo triángulo. Escribimos primero la proporción entre los lados de ABC, después de $A_1B_1C_1$, después de $A_2B_2C_2$. Así tenemos:

$$1.5 : 2 : 2.5 \;=\; 3 : 4 : 5 \;=\; 4.2 : 5.6 : 7$$

Ahora podemos dibujar estos triángulos también en otra posición. Podemos rotar y trasladarlos, de manera que coinciden en un vértice y en su orientación. Ya que tienen los mismos ángulos, los lados que proceden de este vértice se sobreponen:



Además observamos que los lados opuestos a A son paralelos:

$BC \parallel B_1C_1 \parallel B_2C_2$ (El símbolo $\parallel$ significa "paralelo a").

En esta posición aplican las mismas proporcionalidades como antes.

Hoja de trabajo 70.2: Figuras semejantes

Arriba: Identifica los triángulos semejantes entre sí, y únelos con una línea. (No hay que asumir que siempre son pares de dos en dos; hay también grupos de tres triángulos semejantes.)
Quizás la semejanza se puede ver a simple vista. Si queremos ser más exactos, tenemos que medir los lados, los ángulos, o ambos, y verificar si se cumplen las condiciones de semejanza.

Abajo: Aquí hay que construir geométricamente las figuras ampliadas. Donde los lados son paralelos, se puede usar la misma construcción como en la Hoja 70.1. Donde no son paralelos, hay que pensar un poco más... *(Pautas en el Anexo A.)*

Para pensar: ¿Por qué funciona la "construcción fácil" de una figura ampliada?

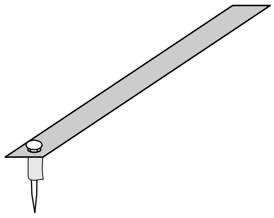
En la primera actividad del Taller se pidió encontrar una manera fácil de construir geométricamente una figura ampliada. ¿La encontraste? – ¿Puedes ahora usar triángulos semejantes para explicar *por qué* funciona esa construcción?

El pantógrafo, una herramienta para ampliar figuras

Esta herramienta usa el principio de las figuras semejantes para ampliar dibujos en el papel. Con un poco de perseverancia podemos fabricarlo nosotros mismos.

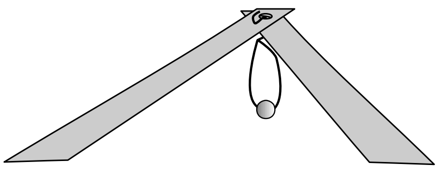
Fabricación del pantógrafo:

Corta cuatro tiras de madera delgada, según el molde de la ***Hoja de Trabajo 70.3***. Perfora los agujeros pequeños según el molde, y el agujero grande en el extremo de la Tira 4.

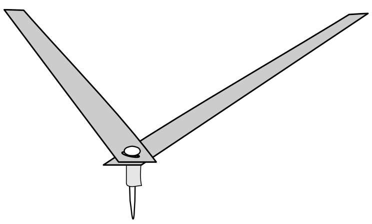


Pasa un clavo de tamaño mediano por el agujero A de la Tira 1. Dale unas vueltas de cinta adhesiva por debajo, para que se quede fijo en su posición; pero debe poder girar ligeramente en su agujero.

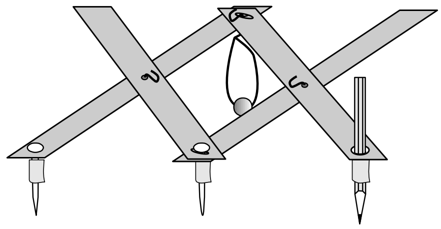
Une la Tira 1 con la Tira 4 con un alambre por los agujeros B. En la unión, las tiras deben poder girar, pero no separarse. Un extremo del alambre debe sobresalir por debajo, doblado en U, la misma longitud como los clavos. Esta parte debe poder deslizarse sobre el papel, por eso no debe terminar en punta. Para que se deslice más suavemente, puedes poner una cuenta de madera o plástico en el alambre.



Une la Tira 2 con la Tira 3 con un clavo por los agujeros C. Chanca la punta de este clavo con un martillo para que se vuelva un poco obtusa. Esta es la punta que usaremos para seguir las líneas del dibujo original. Dale unas vueltas al clavo con cinta adhesiva como en el primer clavo, para que se mantenga en su posición.

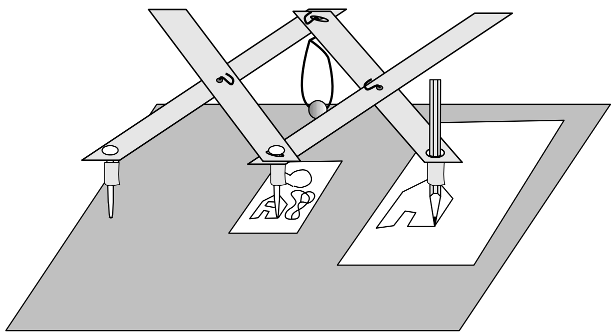


Une la Tira 2 con la Tira 1 con un alambre por los agujeros marcados con el número 2. Une de la misma manera la Tira 3 con la Tira 4. Pasa un lápiz, bolígrafo, o plumón delgado por el agujero grande en el extremo de la Tira 4, y dale por debajo unas vueltas con cinta adhesiva como hiciste con los clavos. Ahora el pantógrafo está listo para ampliar un dibujo con un factor de ampliación de 2.



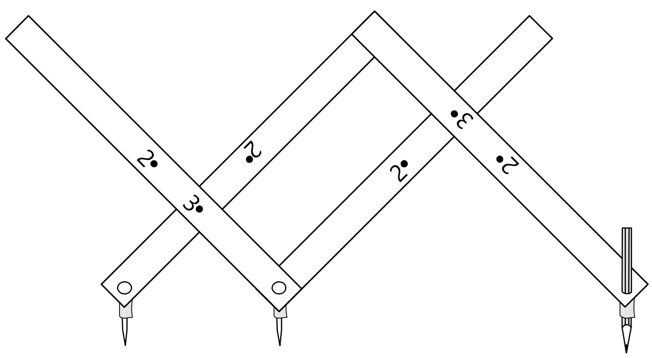
Uso del pantógrafo:

Trabaja de preferencia sobre una tabla grande de madera. Fija el dibujo original con un poco de cinta adhesiva en el medio de la madera. A su lado, fija de la misma manera un papel en blanco para el dibujo ampliado. Al otro lado, clava ligeramente el clavo de la Tira 1. Este clavo debe permanecer fijo en su lugar durante el proceso entero. Su posición debe ser tal que el clavo de las Tiras 2 y 3 pueda desplazarse sobre el entero dibujo original, mientras el lápiz se desplaza sobre la hoja en blanco.



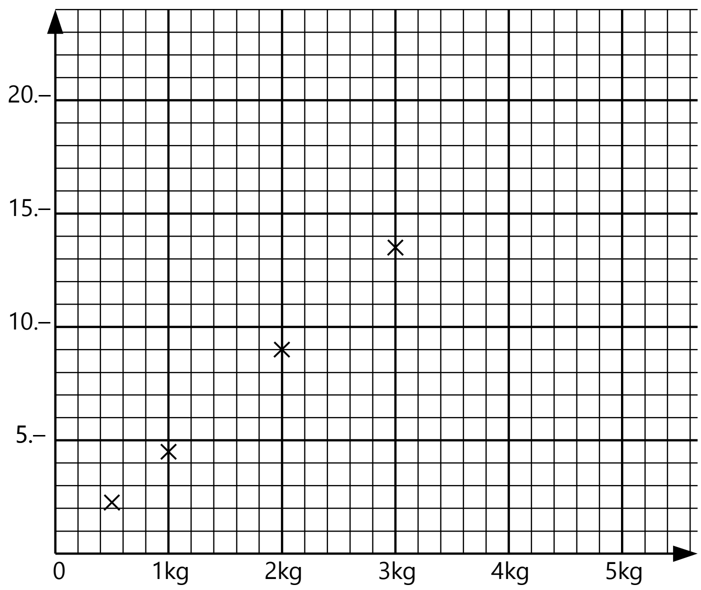
Ahora, si trazamos con el clavo del medio las líneas del dibujo original, el lápiz en el extremo dibuja el dibujo ampliado. Puede ser necesario ejercer con la otra mano un poco de presión sobre el lápiz para que el dibujo se note bien.

Para cambiar el factor de ampliación, quitamos el alambre que une las Tiras 1 y 2, y el que une las Tiras 3 y 4, y los pasamos por otros agujeros según los números indicados. Siempre debemos usar los agujeros correspondientes (los que tienen el mismo número), de manera que las cuatro tiras forman un paralelogramo. De otra manera se introducirán distorsiones en el dibujo ampliado. (Si desean, pueden probar eso también, e investigar los efectos que se producen...) – Por ejemplo para ampliar un dibujo al triple, hay que usar los agujeros con el número 3.

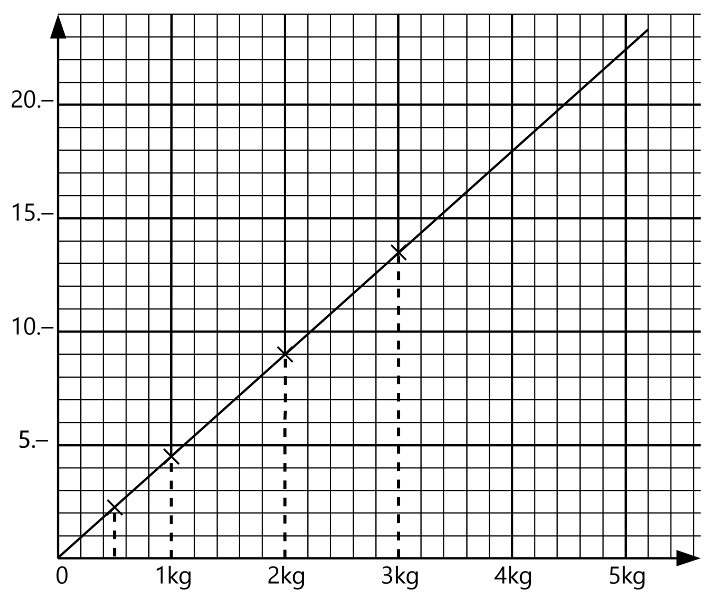


Graficar proporcionalidades en un sistema de coordenadas

Un sistema de coordenadas nos puede ayudar a resolver problemas con proporciones gráficamente. Tomemos un ejemplo sencillo: En una tienda, 1 kg de arroz cuesta 4.50. ¿Cuánto cuestan 2 kg? ¿3 kg? ¿Medio kilo? – Graficamos estas cantidades y sus precios correspondientes en un sistema de coordenadas:



Observando, notamos que los puntos marcados se encuentran todos en una recta que pasa por el origen. ¿Por qué es eso así? – Añadimos rectas verticales desde cada punto, y tenemos una serie de triángulos semejantes. Eso tiene que ser así, porque hemos graficado una *proporcionalidad* directa, y sabemos que los triángulos son semejantes cuando sus lados son directamente proporcionales. Pero los triángulos semejantes tienen también ángulos iguales. Por eso, si todos tienen un vértice en el origen, sus lados se sobreponen como en el último dibujo acerca de los triángulos semejantes.



Ahora podemos "leer" en este gráfico el precio de cualquier otra cantidad de arroz, mientras se encuentra dentro del diagrama. Por ejemplo, para saber cuánto cuestan 5 kg de arroz, buscamos 5 kg en el eje horizontal, y pasamos desde allí verticalmente hacia arriba. Nos encontramos con la recta del gráfico a una altura que corresponde a 22.50; eso es el precio de 5 kg de arroz. – Busca de la misma manera los precios de otras cantidades de arroz.

Para practicar:

Dibuja gráficos de las siguientes proporcionalidades, y usa el gráfico para encontrar las respuestas. Elige las escalas de los ejes de manera sensata. Toma en cuenta que algunos resultados no saldrán exactos; en ese caso tendrás que estimar valores intermedios:

1) Un carro gasta 7.8 litros de gasolina por 100 km. ¿Cuánto de gasolina necesita para avanzar 35 km? ¿para 80 km? – ¿Qué distancia puede avanzar con 10 litros de gasolina?

2) 12 kg de papas cuestan 33.–. ¿Cuánto cuestan 10 kg? ¿5.2 kg? ¿14 kg? – ¿Cuántos kilos de papas se pueden comprar con 20. – ?

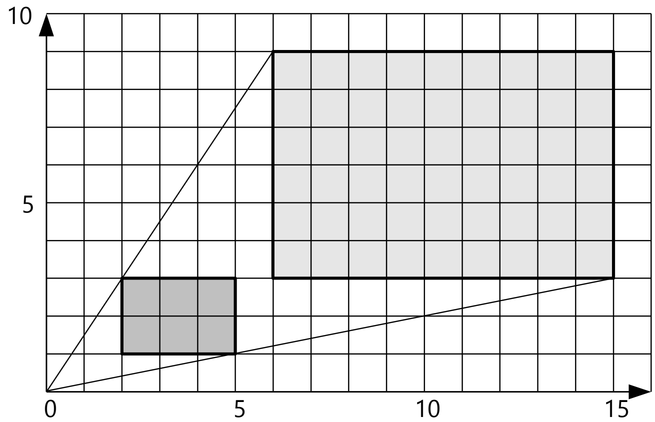
3) Un ciclista avanza 510 metros en un minuto. ¿Cuántos metros avanza en 10 segundos? ¿en 40 segundos? ¿en 100 segundos? – ¿Cuánto demora para avanzar 200 metros? ¿para un kilómetro?

4) Averigua el precio de algún producto en la tienda. Elabora un gráfico según el precio de ese producto, y deduce los precios de diversas cantidades.

Investigación

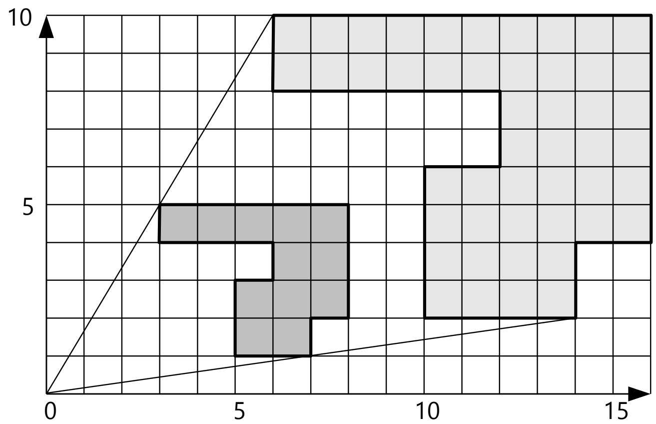
El efecto de la ampliación sobre las áreas de las figuras

1) Aquí hay un rectángulo de 3 por 2 cuadraditos. Lo ampliamos por un factor de 3. Calcula el área del rectángulo original, y el área del rectángulo ampliado.



¿Cuál es la proporción entre el área ampliada y el área original? ¿Qué concluyes?

2) Observa este otro ejemplo. La figura se amplía por un factor de 2. Compara aquí también el área original con el área de la figura ampliada:



3) Dibuja, mide y calcula otros ejemplos similares. Por ejemplo:
- Un rectángulo de 4 por 5 se amplía por un factor de 6. ¿Por cuál factor se multiplica su área?
- Una figura compuesta de 11 cuadraditos se amplía por un factor de 4. ¿Cuántos cuadraditos contiene la figura ampliada? ¿Por cuál factor se multiplicó el área original?

4) ¿Puedes sacar una conclusión general? Si ampliamos una figura por un factor determinado, ¿por cuánto se multiplica su área?

5) Aplica la ley que encontraste: Una figura con un área de 30 cm^2 se amplía por un factor de 5. ¿Cuál será el área de la figura ampliada? Calcula primero. Si no estás seguro de tu resultado, dibújalo después.

6) Verifica esta ley de otra manera: Dibuja un triángulo cualquiera. Amplíalo por un factor de 3. Ahora divide el triángulo ampliado en triángulos congruentes al original, construyendo paralelas a sus lados. ¿Cuántos de esos triángulos resultan?

7) ¿Qué relación existe entre esta ley, y la conversión de las unidades de medida de áreas (mm^2, cm^2, dm^2, m^2, etc.)?

Principios matemáticos

Otras proporcionalidades, y matemática contraintuitiva

En la actividad de "Investigación" nos encontramos con una nueva clase de proporcionalidad. Hasta ahora hemos conocido la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa. Pero cuando comparamos áreas, encontramos que allí aplica una tercera clase de proporcionalidad: la *proporcionalidad cuadrática*.

Tenemos aquí también una de esas ocasiones donde los resultados matemáticos van en contra de nuestra intuición: Muchos niños (y aun adultos) esperarían que las áreas aumenten por el mismo factor como los lados: doble lado, doble área. Las actividades de la investigación demuestran que eso no es así. Por eso es importante llevar a cabo tales investigaciones: Algo que nos parece "obvio", puede resultar falso si lo verificamos con exactitud. No aceptemos así no más lo que "nos parece", o lo que nos dice otra persona (por más que sea un profesor). Investiguemos primero si las cosas realmente son así.

La proporcionalidad cuadrática se volverá importante más adelante en el estudio de la física; y más aun la proporcionalidad cuadrática inversa. Intensidades y fuerzas que se "dispersan" por el espacio, disminuyen por un factor inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de su fuente: por ejemplo la intensidad de la luz y del sonido, la fuerza de la gravedad, y la fuerza de atracción o repulsión entre cargas eléctricas.

Matemática divina

Diseños, planos y maquetas

La ampliación (y reducción) de figuras geométricas es la idea que nos permite dibujar mapas, diseñar edificios o máquinas sobre el papel, e incluso fabricar maquetas a escala de tales objetos. Un mapa es una imagen reducida del terreno. Un edificio es una imagen ampliada de sus planos o maquetas.

Dios también usa a veces planos o maquetas. Por ejemplo dijo al profeta Ezequiel:

"Y tú, hijo del hombre, tómate un adobe, y ponlo delante de ti, y diseña sobre él la ciudad de Jerusalén. Y pondrás contra ella cerco, y edificarás contra ella fortaleza, y sacarás contra ella baluarte, y asentarás delante de ella campo, y pondrás contra ella arietes alrededor. Tómate también una plancha de hierro, y ponla en lugar de muro de hierro entre ti y la ciudad: afirmarás luego tu rostro contra ella, y será en lugar de cerco, y la sitiarás. Es señal a la casa de Israel." (Ezequiel 4:1-3)

Cuando Moisés tuvo que construir el tabernáculo en el desierto, Dios le mostró un modelo de la construcción, para que Moisés hiciera todo conforme al modelo (Éxodo 25:40).

Pero los "modelos" de Dios no son simples reducciones geométricas. Tienen una dimensión espiritual. La maqueta de Jerusalén que construyó Ezequiel, mostró a la vez el diseño de Dios para el futuro de la ciudad. El "modelo" del tabernáculo representaba a la vez una realidad espiritual futura: el pueblo espiritual de Dios en el Nuevo Pacto por Jesús, que ya no se manifiesta en edificios visibles, sino en la unión directa de cada miembro con Jesús. (Vea Hebreos 8:1-12.) Así que los "modelos" que crea Dios, se amplían no sólo geométricamente, sino también en una dimensión espiritual.

Unidad 71 - Orientación en tres dimensiones, y medidas de volúmenes

Prerrequisitos:

- *(para las medidas de volúmenes):* Números hasta un millón; operaciones con decimales.
- *(opcional, pero útil):* Construcción de modelos recortables *(Unidades 55, 58, 63)*.

Materiales necesarios:

- Cartulina, tijeras, goma.
- *(opcional)* Cubitos de madera, goma, lija.
- Regla, cinta métrica.
- Regletas Cuisenaire.
- Unas cajas de diferentes tamaños.
- Litrera.

Para los educadores

Algunas actividades de esta Unidad requieren unos conocimientos un poco avanzados (por ejemplo números decimales), y/o una "inteligencia espacial" bastante desarrollada para la comprensión y representación de cuerpos tridimensionales. Por eso se recomienda hacerla hacia el *fin* del período de Primaria II.

En cuanto a la "inteligencia espacial", será una ayuda si los alumnos hicieron anteriormente unas actividades de construir recortables *(Unidades 55, 58 y 63)*.

Los laberintos y rompecabezas tridimensionales pueden ser interesantes de resolver ya para alumnos a partir de los 9 años. Pero su fabricación puede ser un poco difícil técnicamente. Por tanto, se recomienda que los alumnos mayores fabriquen estos rompecabezas; pero una vez hechos, podrán prestarlos a los alumnos menores interesados para que los resuelvan.

TALLER

Laberintos planos para canicas (Hojas de trabajo 71.1 y 71.2)

Arma estos laberintos según las instrucciones generales para recortables *(Unidad 55)*. Los círculos grises se cortan y se desechan. Las gruesas líneas grises en la cara exterior (el reverso de las hojas de trabajo) *no se cortan;* son solamente una ayuda para ubicarse en el laberinto, una vez que esté terminado.

Pega primero las paredes interiores (partes pequeñas) sobre el fondo de la caja; después arma las paredes de la caja, y finalmente su tapa superior.

Los laberintos de canicas tienen que trabajarse con mucha exactitud; de otro modo la canica podrá atascarse en una parte demasiado delgada.

Antes de pegar la tapa superior, pon las lengüetas de las paredes en una posición ligeramente inclinada hacia arriba, para que puedan adherirse a la tapa; porque ya no será posible apretarlas. Con cartulina funcionará mejor que con papel.

Para usar el laberinto, introduce una canica por el hueco de arriba. Moviendo la caja, haz avanzar la canica hasta que salga por el hueco de abajo. Para probar el camino al revés, voltea la caja.

Como ayuda, una de las caras exteriores de la caja (el reverso de las hojas de trabajo) tiene marcado el diseño del laberinto con unas líneas grises. Si te parece demasiado fácil resolver el laberinto con esta ayuda, puedes forrar la caja con un papel de color, dejando abiertos los huecos de entrada y salida.

Laberinto 3D para canicas (Hoja de trabajo 71.3 y 71.4)

Si lograste armar y resolver los laberintos planos, puedes ahora atreverte a hacer un laberinto tridimensional. El modo de armarlo es similar a los laberintos planos. Las dos hojas darán juntas un solo laberinto. Las gruesas líneas grises en las caras exteriores de la caja (el reverso de la Hoja 71.3) *no se cortan*.

Después de rayar, cortar y doblar las piezas, arma primero el mecanismo de cierre según las instrucciones en la Hoja 71.4. Se puede reforzar adicionalmente con dos tiras delgadas atravesando por encima de la tapa. Esas tiras tienen que ser posicionadas de tal manera que no tapen los huecos de entrada y salida.

Después pega las paredes interiores (las cuatro piezas pequeñas) entre sí. Guíate con los números de las lengüetas para su orientación.

Pega la parte interior del laberinto sobre el fondo de la caja (lengüetas 16, 17, 21). Después pega las paredes laterales (lengüetas 3, 12, 18 y 2, 4, 13, 25). Después las otras paredes (lengüetas 14, 15, 22 y 1, 11), y finalmente la tapa. Las lengüetas de la tapa (E, F, G) tendrán que pegarse al exterior de la caja, porque ya no podemos apretarlas desde el interior.

Para usar el laberinto, introduce una canica por el hueco abierto. Desliza el mecanismo de cierre para que el hueco con la canica esté cerrado, y el otro hueco abierto. Así evitamos que la canica caiga accidentalmente por el mismo hueco por donde entró. Ahora intenta hacer pasar la canica por el laberinto entero, hasta que salga por el hueco abierto.

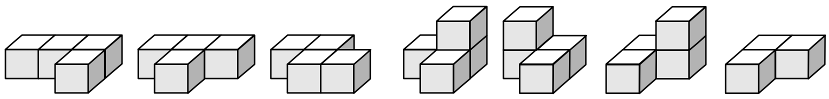
Como ayuda, las caras exteriores de la caja (el reverso de la Hoja 71.3) tienen marcado el diseño del laberinto con unas líneas grises. Si quieres que el juego sea más difícil, puedes forrar la caja (excepto la cara superior) con un papel de color; así ya no se verán las líneas de ayuda.

Si deseas armar una versión más fácil, copia el modelo sobre una lámina o un plástico transparente, y pega las partes con pegamento de silicona. Así obtendrás un laberinto transparente que permite observar los movimientos de la canica.

Rompecabezas tridimensionales

El cubo Soma

Este rompecabezas consiste en todos los cuerpos geométricos que se pueden formar uniendo 3 ó 4 cubos, y que no sean simples prismas rectangulares ("ladrillos"). O sea, los siguientes cuerpos:



Notarás que entre éstos hay dos "iguales", pero uno es el reflejo simétrico del otro. ¿Lo puedes voltear para que se vea igual al otro? – Con figuras planas se puede hacer eso, pero descubrirás que con cuerpos tridimensionales no se puede hacer. En el espacio tridimensional, un cuerpo reflejado no es congruente al original. (Tendríamos que voltearlo en una "cuarta dimensión", pero en nuestro mundo eso no es posible.)

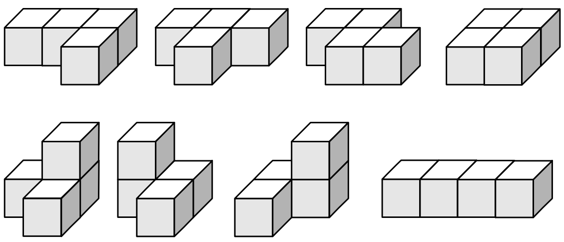
De estas piezas se puede armar un cubo de 3 x 3 x 3. ¡Inténtenlo!

Si pueden obtener unos cubitos de madera trabajados con exactitud, pueden fabricar estas piezas, pegando los cubitos juntos con una goma buena. Después hay que limarlas lo suficiente para que encajen bien.

Alternativamente, pueden usar el modelo de las hojas de trabajo.

Tetris tridimensionales

Añadimos a las piezas del cubo Soma aquellos "tetris" que son prismas rectangulares; y quitamos la pieza de sólo 3 cubitos. Así tenemos las siguientes partes:



De estas partes se puede armar un único "ladrillo" (prisma rectangular) de 2 x 4 x 4; o también uno de 2 x 2 x 8.

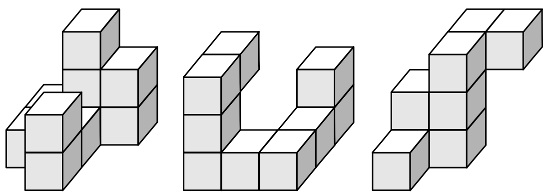
Para armar las piezas del cubo Soma y los tetris tridimensionales (Hojas de trabajo 71.5 a 71.7):

Si deseas que el modelo resulte más fuerte, puedes pegar o copiar el diseño sobre cartulina.
Arma las piezas según las instrucciones generales para recortables. Después de doblar una pieza, se recomienda armar la figura todavía sin pegar. Analízala para ver dónde es más conveniente empezar con pegar. Hacia el fin, algunas lengüetas no podrán apretarse bien para pegarlas. Algunas podrán apretarse, introduciendo un clavo o una aguja de tejer delgada por una de las esquinas ya cerradas. (Quedará un pequeño hueco, pero eso no hace daño.) Algunas lengüetas que no se pueden pegar en el interior, quizás se pueden pegar al exterior del modelo. Si con todo eso el modelo siempre no se deja cerrar, como último recurso puedes pegar las aristas abiertas con cinta adhesiva por afuera.

Otros rompecabezas de cubos

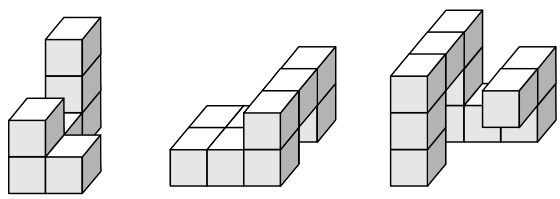
Los siguientes rompecabezas permiten armar cubos de 3 x 3 x 3. Consisten en menos piezas que el cubo Soma; ¡pero no es que por eso fueran más fáciles!

A.



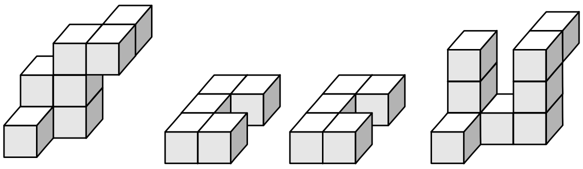
(*Hoja de trabajo 71.8*)

B.



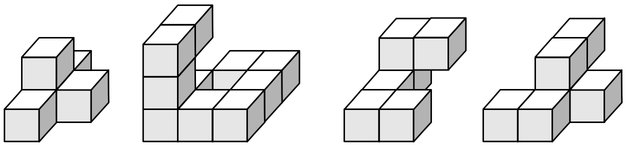
(*Hoja de trabajo 71.9*)

C.



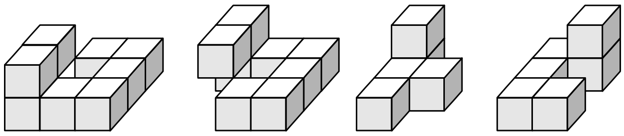
(Hoja de trabajo 71.10)

D.



(Hoja de trabajo 71.11)

E.



(Hoja de trabajo 71.12)

Pueden fabricarlos de cubitos de madera, o usando los modelos en las hojas de trabajo.

Para armar las piezas de los rompecabezas 3D

Estas piezas son un poco más complejas que las del cubo Soma, pero se pueden armar de la misma manera. Comienza con pegar por un extremo donde se pueden apretar bien las lengüetas; después cierra el modelo poco a poco.

Se recomienda pintar las caras exteriores de cada rompecabezas con un color distinto, para evitar que se mezclen las piezas de diferentes cubos. A no ser que quieras resolver un desafío aun más difícil: ¡mezclar todas las piezas y después descubrir cuáles de ellas forman juntas un cubo!

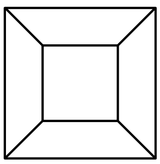
Al resolver los rompecabezas, no se deben forzar o torcer las piezas. A veces, dos piezas encajan juntas solamente después de unas pequeñas maniobras.

Cambio de perspectiva: Relacionar dibujos de objetos tridimensionales - *Hoja de trabajo 71.13*

Arriba: Relaciona cada casa con su vista aérea.

La fila del medio muestra 7 vistas aéreas, o sea, como se verían las casas desde arriba, vistas desde un avión o un satélite. Desde cada dibujo de casa debe dibujarse una línea hacia su vista aérea correspondiente.

Se necesita algo de imaginación para completar mentalmente las partes invisibles de las casas. Para eso pueden existir varias posibilidades. Por ejemplo, en la segunda casa arriba podríamos imaginarnos que la casa tiene una base cuadrada; entonces su techo en vista aérea se vería así:



Pero esta posibilidad no aparece entre las opciones disponibles. Entonces, ¿qué otra forma podría tener la parte posterior de la casa, para que coincida con una de las opciones dadas?

Abajo: Relaciona las vistas correspondientes.

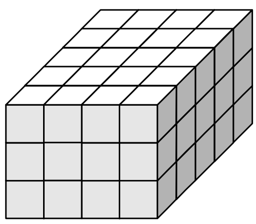
Imagínate que estás mirando los cuerpos dibujados desde diferentes direcciones, como indican las flechas. ¿Qué ves? La vista debe corresponder a uno de los dibujos enumerados de 1 a 9. En cada cuadrado que acompaña las flechas, escribe el número correspondiente.

Para algunos alumnos puede ser mejor que observen y dibujen primero ellos mismos unos objetos tridimensionales *(vea abajo en "Ampliaciones")*, antes de hacer esta actividad.

Para resolver la parte de abajo de la Hoja de trabajo, los cuerpos pueden construirse con regletas Cuisenaire. Pero los alumnos que desean un verdadero desafío a su imaginación espacial, deberían intentar resolverlo en su mente.

Medidas y cálculos de volúmenes

Anteriormente ya hemos construido prismas rectangulares ("ladrillos") de cubitos y de regletas Cuisenaire. Podemos retomar ahora esta actividad y construir algunos de estos cuerpos. Por ejemplo, construyan un prisma rectangular con lados de 3, 4 y 5 unidades. ¿Cuántas maneras diferentes encuentran de construir este prisma con regletas Cuisenaire?



La pregunta que más nos interesa ahora, es: ¿Cuántos cubitos de unidad contiene este prisma? Eso es lo que llamamos su *volumen*. Si los alumnos hicieron anteriormente las actividades de construir prismas rectangulares, seguramente se recordarán que estos cuerpos representan una multiplicación de tres factores: 3 x 4 x 5 = 60 cubitos de unidad.

Lo mismo aplica si queremos saber, por ejemplo, el volumen de una caja rectangular. Busquen algunas cajas de diferentes tamaños, midan sus lados y calculen sus volúmenes.

Para expresar los volúmenes correctamente, tenemos que saber en qué unidades se miden. Si medimos los lados en centímetros, entonces el volumen resultará en ***centímetros cúbicos*** (cm^3). Un centímetro cúbico es el volumen de un cubo que tiene 1 cm de lado, como los cubitos de unidad de las regletas Cuisenaire.

Para entender claramente lo que significa el pequeño número "3", tendríamos que entender potencias *(vea Unidad 89)*. Por ahora podemos explicar a los niños que un volumen se refiere al "contenido" de un cuerpo en *tres* dimensiones (largo, ancho y altura). Por eso también tenemos que multiplicar *tres* factores para calcular un volumen.
De manera similar, en las medidas de áreas se escribe un pequeño número "2" (centímetro cuadrado = cm^2), porque allí tenemos *dos* dimensiones (largo y ancho), y multiplicamos *dos* factores para calcular áreas.

Entonces, una caja de 8 cm de ancho, 15 cm de largo y 6 cm de altura tiene un volumen de 8 x 15 x 6 = 720 cm^3.
– Hagan lo mismo con algunas otras cajas que tienen.

Unidades de medida de volúmenes

Cada unidad de medida lineal tiene su medida correspondiente de volumen:

Un cubo con lados de un milímetro tiene un volumen de un ***milímetro cúbico (mm^3)***.

Un cubo con lados de un centímetro tiene un volumen de un ***centímetro cúbico (cm^3)***.

Un cubo con lados de un decímetro tiene un volumen de un ***decímetro cúbico (dm^3)***.

Un cubo con lados de un metro tiene un volumen de un ***metro cúbico (m^3)***.

Algunas de estas medidas ya las conocemos con otros nombres:

Un decímetro cúbico (dm^3) equivale a un litro.
Entonces el cubo de millar del material Base 10, con lados de 10cm, tiene un volumen de un litro.

Un centímetro cúbico (cm^3) equivale a un mililitro.

- Si desean, pueden verificarlo: Quizás tienen algún recipiente de plástico o metal en forma de un prisma rectangular. Midan sus medidas interiores en centímetros, y calculen su volumen en cm^3. Después llénenlo con agua, usando una litrera, y midan en litros y mililitros la cantidad de agua que cabe en el recipiente. Comparen ambas mediciones; deben coincidir aproximadamente.
Si no tienen un recipiente adecuado, pueden usar una caja de cartón. Pongan una bolsa de plástico dentro, antes de llenarla con agua. Solamente asegúrense antes de que la bolsa no tenga hueco.

Otras actividades de medir y calcular volúmenes

- Busquen unos objetos que pueden medir en dm para calcular su volumen en dm^3: una caja grande; una bañera o pecera rectangular; ... Si el objeto puede contener agua, entonces aquí también pueden verificar con la litrera, si el volumen calculado corresponde al contenido en litros.

- Midan una habitación rectangular, o la casa entera, en metros, y calculen su volumen en m^3.

– Estimen cuántos m^3 de agua contiene la piscina de su localidad. Después encuentren una manera de medir y calcularlo con más exactitud.

Conversión de unidades de medida de volúmenes

¿Cuántos cubitos de 1 cm^3 caben en un cubo de 1 dm^3? (Piensen en el material Base 10, entonces la respuesta será fácil.)

¿Cuántos cubitos de 1 mm^3 caben en un cubo de 1 cm^3?
¿Y cuántos cubos de 1 dm^3 caben en un cubo de 1 m^3?

Podemos entonces diseñar un tablero posicional para la conversión de las unidades de volúmenes, como lo hicimos con otras medidas en las *Unidades 31 y 47*:

m^3	100 dm^3	10 dm^3	**dm^3 (*l*)**	100 cm^3	10 cm^3	**cm^3 (*ml*)**	100 mm^3	10 mm^3	**mm^3**

Ahora podemos medir y calcular unos volúmenes más exactamente, y convertir las medidas. Por ejemplo:

- Midan otra vez los lados interiores de algunas cajas rectangulares. Pero ahora los medimos con mayor precisión: en milímetros. Calculen sus volúmenes en mm^3. Después conviertan los resultados en cm^3.

- Midan y calculen el volumen de una habitación en dm^3 (o si tienen más perseverancia, en cm^3). Después conviértanlo en metros cúbicos.

- Examinen la última factura de agua *(vea Unidad 53)*: ¿Cuántos m^3 consumieron en el mes pasado? ¿A cuántos litros equivale eso? Calculen el consumo promedio diario en litros.

Nota: Al medir y calcular volúmenes, los errores de redondeo pueden ser considerables. Examina el siguiente ejemplo:

Jorge midió una cajita en centímetros: 4 x 5 x 7 cm. ¿Cuál es entonces su volumen en cm^3?
Después, Marta midió la misma caja más exactamente y obtuvo 35 x 47 x 66 mm. Calculando con estas medidas, ¿cuál es el volumen de la caja en cm^3? – Compara este resultado con el resultado de Jorge.

Problemas con volúmenes

1) Un manantial provee 5 litros de agua por minuto. ¿A cuántos m^3 al día equivale eso?

2) Los 216'000 habitantes de una ciudad gastan cada uno 4 m^3 de agua al mes. ¿Cuántos litros por segundo tiene que proveer un conducto de agua para abastecer la ciudad?

3) ¿Cuántos litros de agua caben en un lavatorio de 85 cm de largo, 50 cm de ancho, y 28 cm de profundidad?

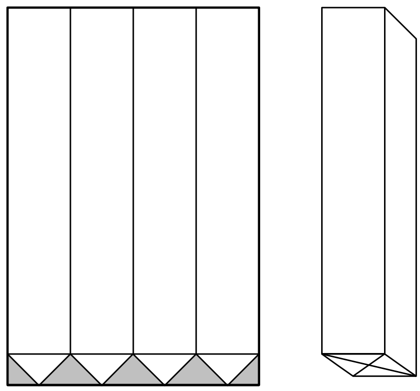
4) En la casa de Sandro se había roto un tubo de agua. Se escaparon 7 litros de agua por minuto y se acumularon en el primer piso, que tiene 9.40 metros de largo y 7.80 metros de ancho. Sandro recién llegó a casa cuatro horas después. ¿Hasta qué altura se había inundado su piso en ese tiempo?

5) 1 cm^3 de una determinada madera pesa 0.76 gramos. ¿Cuánto pesa un cubo de esta madera con 5 cm de arista?

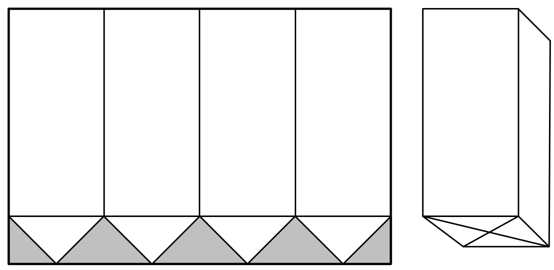
6) 1 cm^3 de hierro pesa 7.86 gramos. ¿Cuánto pesa una plancha de hierro de 44 cm de ancho, 75 cm de largo, y 2 mm de grosor?

7) 1 dm^3 de cierto tipo de arena pesa 2.75 kg. Se cargan 15 toneladas de esta arena en un volquete de 1.80m de ancho y 4.80m de largo. ¿Hasta qué altura se llena el volquete?

*8) Susana y Sabina hacen cada una una bolsa rectangular para llenarla con palomitas de maíz. Ambas tienen una hoja de papel de 20 por 30 cm. Susana hace su bolsa de la siguiente manera:



Sabina hace su bolsa de otra manera:



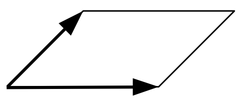
Estima antes de calcular: ¿Cuál bolsa puede contener la mayor cantidad de palomitas? ¿O son ambos volúmenes iguales?

Después calcula los volúmenes respectivos, y evalúa tu estimación.

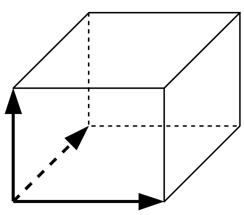
Principios matemáticos

Dimensiones del espacio y potencias

Al calcular áreas *(Unidades 32, 65)* hemos visto que un área es el producto de multiplicar dos longitudes. Por eso, las medidas de áreas se expresan como segundas potencias, o sea una medida de longitud "al cuadrado". Metros por metros dan metros cuadrados; centímetros por centímetros dan centímetros cuadrados, etc. Una superficie o área tiene *dos dimensiones* (largo y ancho); por eso su medida corresponde a una *segunda potencia*.



Los volúmenes expresan el "contenido" de cuerpos con *tres dimensiones* (largo, ancho y altura). Por eso, para calcular un volumen tenemos que multiplicar *tres* longitudes; y sus medidas se expresan en *terceras potencias:* Metros por metros por metros dan metros cúbicos.



Si entendemos cómo se relacionan las dimensiones del espacio con las potencias, cometeremos menos errores en el cálculo de los perímetros (una sola dimensión), áreas (dos dimensiones), y volúmenes (tres dimensiones). En el nivel de Secundaria trabajaremos con fórmulas algebraicas para longitudes, áreas y volúmenes. Allí será importante entender que una fórmula para un área siempre debe ser equivalente a una multiplicación de dos longitudes, y una fórmula para un volumen debe ser equivalente a una multiplicación de tres longitudes; de otro modo la fórmula es equivocada.

Una aplicación aun más generalizada de este principio es el *análisis dimensional* en la física.

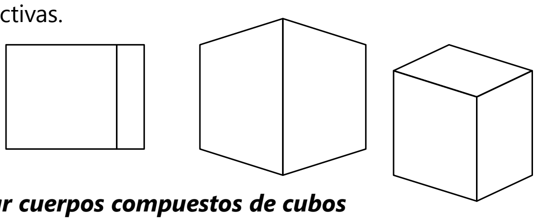
Ampliaciones

Dibujar objetos tridimensionales

Alumnos con talento artístico pueden practicar el dibujo de objetos tridimensionales:

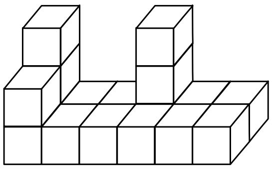
Dibujar un cubo

Una práctica fácil consiste en colocar un cubo de madera sobre la mesa y dibujarlo como se ve desde diferentes perspectivas.

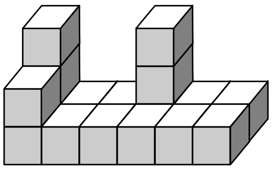


Dibujar cuerpos compuestos de cubos

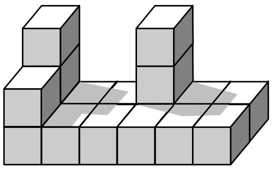
Después pueden armar diversos cuerpos de cubos pequeños (por ejemplo los cubitos de unidad de las regletas Cuisenaire), y dibujarlos. En un primer paso, podemos dibujar simplemente sus contornos:



En un segundo paso podemos sombrear sus lados según la iluminación. Si la iluminación es la misma por todas partes, todas las caras que tienen la misma orientación (p.ej. hacia la derecha) tendrán la misma intensidad de luz.



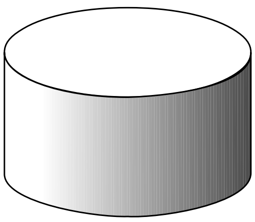
Si queremos hacer el dibujo aun más realista, podemos además representar las sombras que algunas partes del cuerpo echan sobre otras partes:



Dibujar otros objetos

Después de estos ejercicios preliminares, podemos dibujar otros objetos tridimensionales como muebles, casas, máquinas, etc. Podemos también hacer dibujos en perspectiva de algunos de los modelos recortables que hemos fabricado anteriormente.

Todavía no es necesario que estos dibujos sean geométricamente exactos. (En el nivel de Secundaria I entraremos más en eso.) Por ahora es suficiente que los alumnos tengan una idea de cómo se puede representar la orientación de las caras y aristas en un dibujo.



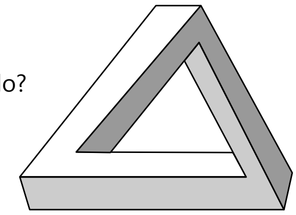
Iluminación en cuerpos redondos

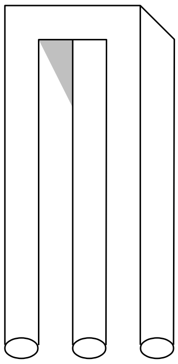
En los cuerpos redondos observamos que la iluminación cambia poco a poco a lo largo de una superficie curvada. En un cilindro por ejemplo vemos una transición suave de claro a oscuro (o vice versa) de un lado a otro.

Observar dibujos "imposibles"

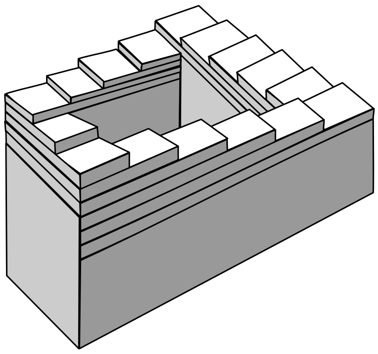
Con algunos "trucos" se pueden dibujar objetos que en la realidad no pueden existir. Observen los siguientes dibujos, e intenten descubrir dónde está el "error" o el "truco".

(Derecha)
¿Podrías fabricar este triángulo?

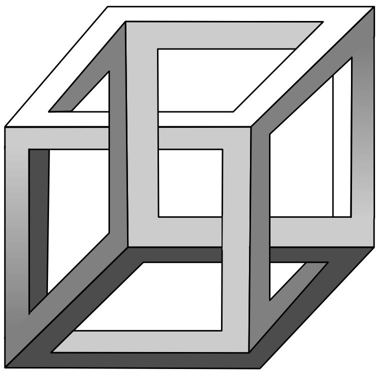




(Izquierda)
¿Sobre cuántas patas se apoya este "puente", sobre dos o sobre tres?



(Derecha)
Caminando en el sentido de las agujas del reloj, siempre subimos y nunca bajamos. En el sentido opuesto siempre bajamos y nunca subimos. ¿Cómo es posible eso?



(Izquierda)
En este cubo, ¿cuáles de sus caras están adelante, y cuáles están atrás?

El artista holandés Maurits Cornelis Escher ganó fama con "construcciones imposibles" similares. Pueden ver sus obras en:

http://www.mcescher.com/gallery/mathematical/
http://www.mcescher.com/gallery/impossible-constructions/

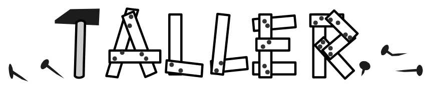
Unidad 72 - Cuerpos geométricos

Prerrequisitos:

- Conceptos geométricos básicos: Figuras geométricas; ángulos; etc.

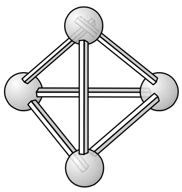
Materiales necesarios:

- Fósforos o mondadientes y plastilina o arcilla.
- o: Sorbetes, hilo, aguja, tijera, cinta adhesiva.
- o: Cartulina, goma, tijera, herramientas de construcción geométrica.
- o: Juego de construcción de poliedros.



Fabricamos poliedros

Poliedros son cuerpos geométricos con caras planas y aristas rectas. Existe una gran variedad de poliedros, y diversos de ellos tienen nombres especiales. Podemos fabricar poliedros con uno de los siguientes métodos:

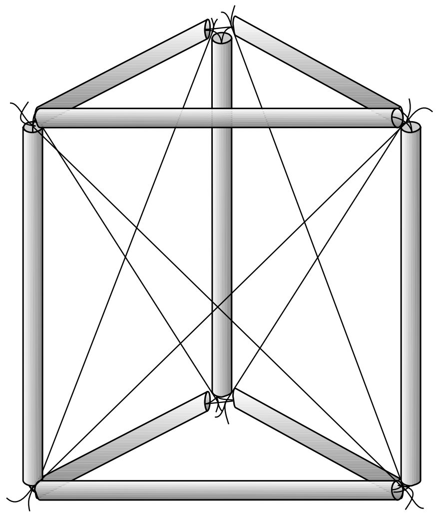


Con palitos y arcilla:

Formamos pequeñas bolas de arcilla o plastilina, de un tamaño de 1 a 2 cm. Estas son los vértices de los poliedros. Los unimos con palitos de fósforos o con mondadientes, que forman las aristas.

Con sorbetes e hilos:

Usamos sorbetes como aristas y los cortamos al tamaño que deseamos. Con la ayuda de una aguja pasamos un hilo por los sorbetes para amarrarlos. En las caras que tienen más de tres aristas (cuadriláteros, pentágonos, etc.) será necesario unir los vértices también diagonalmente con hilos, para que la construcción sea estable.



Con un juego de construcción de poliedros:

En algunos lugares se pueden comprar juegos de construcción que consisten en unos fierros que se pueden unir mediante articulaciones para formar poliedros. Pueden usar uno de estos si tienen la posibilidad de conseguirlo.

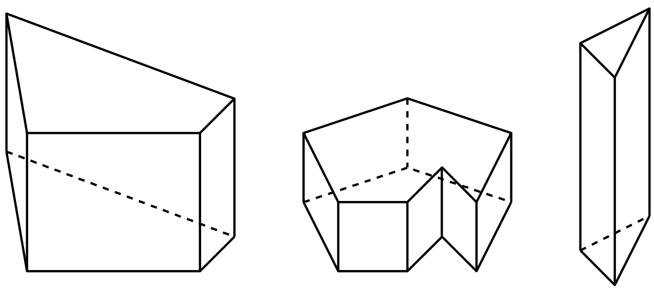
Como recortables:

También podemos construir poliedros de cartulina como modelos recortables *(vea Unidades 58, 63)*. Eso es relativamente fácil para poliedros sencillos, pero se vuelve más complicado con poliedros irregulares.

Construyan algunos poliedros con el medio que eligieron. Pueden reproducir unos ejemplos de los que siguen a continuación, o pueden inventar los suyos propios.

Algunos tipos de poliedros

Prismas rectos

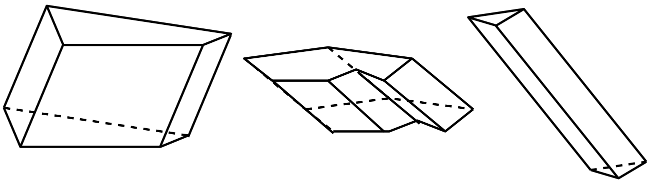


Un prisma tiene un polígono como base. Sus vértices se unen mediante aristas paralelas con los vértices correspondientes de la cara superior que es congruente a la base. Los planos de la base y de la cara superior son paralelos. (De otro modo no sería posible que las aristas laterales sean todas paralelas.)

Si las aristas laterales forman *ángulos rectos* con la base, el prisma se llama *recto*.

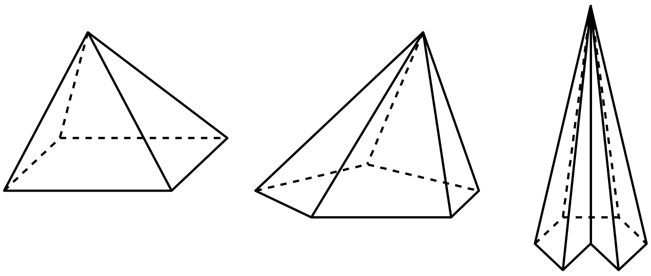
Un caso especial es el *prisma rectangular* (o "ladrillo"): un prisma donde todas sus caras son rectángulos. Y un caso especial de un prisma rectangular es el *cubo*: todas sus aristas son iguales, o sea, todas sus caras son cuadrados.

Prismas inclinados



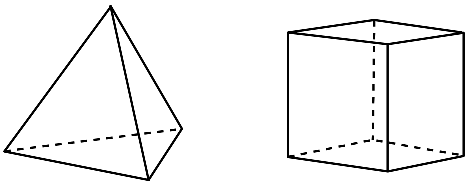
En un prisma inclinado, sus aristas laterales no forman ángulos rectos con la base; o sea, son inclinadas. Por lo demás tienen las mismas formas como los prismas rectos.

Pirámides



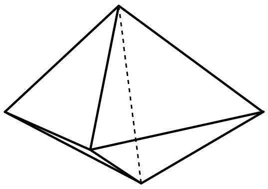
Una pirámide tiene un polígono como base. Sus vértices se unen todos mediante aristas con una única punta.

Poliedros regulares



Un poliedro regular consiste en polígonos regulares congruentes. Además, todos sus vértices son equivalentes, o sea, en cada vértice se une el mismo número de caras. Por ejemplo el *tetraedro* (imagen a la izquierda) es un poliedro regular: Todas sus caras son triángulos equiláteros; y en cada vértice se unen tres triángulos. – El cubo es también un poliedro regular.
Un poliedro regular tiene múltiples simetrías rotacionales: Podemos girarlo de manera que cualquiera de sus vértices coincida con algún otro vértice (y las aristas desde ese vértice también), y entonces todos los otros vértices también coincidirán con los vértices de la posición original.

El siguiente poliedro, en cambio, no es regular:



Todas las caras de este poliedro son triángulos equiláteros. Pero en algunos vértices se unen tres triángulos, en otros vértices cuatro. O sea, no todos sus vértices son equivalentes; por eso no es un poliedro regular.

Vocabulario matemático

Poliedro: Cuerpo geométrico con caras planas y aristas rectas.

Cara *(de un poliedro):* Uno de los polígonos que conforman un poliedro.

Arista: Segmento recto que es común a dos caras de un poliedro.

Vértice (de un poliedro): "Punta", donde se unen varias aristas.

Prisma: Poliedro que consiste en una base y una cara superior congruentes, unidas por aristas paralelas.

Prisma recto: Prisma cuyas aristas laterales forman ángulos rectos con la base.

Prisma rectangular: Prisma compuesto de rectángulos; la forma de un ladrillo o una caja.

Prisma inclinado: Prisma cuyas aristas laterales no son perpendiculares a la base.

Pirámide: Poliedro que termina en una punta, donde se unen todas las aristas procedentes de los vértices de la base.

Un poco de historia

El problema de encontrar los poliedros regulares era muy importante para los antiguos griegos, especialmente para Pitágoras en el siglo 6 antes de Cristo, y sus sucesores. Pitágoras encontró cuatro de los cinco poliedros regulares. En el siguiente siglo, Hipaso descubrió el último que faltaba, el dodecaedro.

Investigación

Haremos algunas investigaciones con los poliedros que hemos construido:

1) ¿Cuántas diagonales tiene un cubo?

- ¡Cuidado con esta pregunta! Primero tendremos que definir claramente qué es lo que entendemos con una "diagonal" cuando se trata de un cuerpo tridimensional. Hagan sugerencias y conversen hasta llegar a una conclusión clara.

*Si han respondido la pregunta para el cubo, podrán hacer la misma pregunta acerca de otros poliedros. Por ejemplo: ¿Cuántas diagonales tiene un prisma hexagonal? (Eso ya es un poco más complicado...)

2. a) ¿Cuántos poliedros regulares existen, y cómo se ven? (Si desean, pueden construirlos todos con los materiales que tienen.)

b) ¿Puedes demostrar que esos son los únicos poliedros regulares que existen? O sea, ¿puedes dar una explicación lógica por qué no pueden existir más poliedros regulares, aparte de los que encontraste?

***3)** Investiga el número de caras, aristas y vértices de los poliedros que construiste. Anótalos en una tabla, por ejemplo así:

Cuerpo:	Caras	Aristas	Vértices
Tetraedro	4	6	4
Prisma rectangular	6	12	8
Pirámide hexagonal	7	12	7
. . .			

Anoten también los poliedros "sin nombre" que ustedes mismos inventaron. Pueden inventar sus propios nombres para ellos, o pueden hacer un pequeño dibujo para identificarlos.

Ahora la gran pregunta: ¿Cuál es la relación matemática entre el número de caras, aristas y vértices, que se cumple en *todo* poliedro? – Existe una manera específica como estos tres números se relacionan entre sí. ¿Lo encuentran?

Cuanto más poliedros diferentes tengan en la lista, más fácil será descubrirlo. Si tienen solamente cuatro o cinco poliedros, tal vez tendrán que construir algunos otros con características diferentes de los que ya tienen.

Bloque VII: Temas diversos (Unidades 73 a 88)

Este bloque agrupa diversos temas "sueltos" que no encajan bien en los otros bloques, pero que no son tan grandes como para dedicarles un bloque propio:

Razonamiento estratégico y numérico (Unidades 73 a 79),

Unos temas para la investigación propia (Unidades 81, 82, y algunas de las anteriores),

Estadística, probabilidades, combinatoria (Unidades 82 a 84),

Teoría de conjuntos (Unidades 86, 87),

y otros.

Los prerrequisitos varían de una unidad a otra, y se indican en su lugar apropiado. Algunas de estas Unidades pueden usarse desde el inicio del período: Unidades 73 y 74 (Juegos de estrategia), Unidades 86 y 87 (Teoría de conjuntos). Otras requieren ciertos avances en el cálculo numérico, en el entendimiento de las proporciones, o en otros temas.

Puede ser apropiado aquí, hacer unos comentarios respecto al concepto de ***"Razonamiento"***:

Algunos libros enseñan reglas y fórmulas de cómo resolver ciertos tipos de "problemas modelo", tales como conteo de figuras, problemas con edades, problemas con proporciones, y similares. Pero eso no es enseñar a razonar. Si me enseñan una fórmula o una regla que puedo aplicar mecánicamente para resolver un problema, entonces ya no necesito razonar. Al contrario: Enseñar fórmulas y recetas, es guiar al alumno por un camino que *evita* el razonamiento.

El razonamiento se entrena cuando el alumno se enfrenta con un problema novedoso, y tiene que descubrir *por sí mismo* cómo se puede resolver. De esta clase son por ejemplo los desafíos de investigación *(Unidades 77, 78, 79, 81, 82)*, los problemas de razonamiento en las *Unidades 76 y 88*, y algunas de las actividades de las *Unidades 75 y 85*.

Un buen problema de razonamiento, aunque no sea explícitamente caracterizado como "de investigación", nos puede enviar a un verdadero viaje de exploración, donde descubriremos no solamente la solución del problema, sino diversos principios y propiedades matemáticos adicionales.

El matemático Paul Lockhart describe el asunto de la siguiente manera:

> "El problema más grande en la matemática escolar es que ya no existen *problemas* en ella. – Sí, yo sé que los profesores llaman "problemas" a estos "ejercicios" insípidos: "Este es un ejemplo de un problema. Aquí dice como se resuelve. Sí, esto viene en el examen. Resuelvan los ejercicios 1 a 35 en casa." – Qué manera más triste de aprender matemática: como un chimpancé domesticado.
>
> Pero un problema verdadero, una honesta pregunta auténtica, natural y humana – eso es otra cosa. ¿Cuánto mide la diagonal de un cubo? ¿Nunca terminan los números primos? ¿Es "infinito" un número? ¿De cuántas maneras puedo cubrir un área simétricamente con baldosas? – La historia de la matemática es la historia de la ocupación humana con preguntas como estas. No con la repetición ciega de fórmulas y algoritmos.

> Un buen problema se caracteriza por que *no sabes* como se puede solucionar. Por eso es una buena oportunidad; puede servir como un trampolín para alcanzar *otras* preguntas interesantes: Un triángulo ocupa la mitad de una caja. ¿Y qué de una pirámide en una caja tridimensional? ¿Podemos resolver este problema de una manera parecida?
>
> Yo entiendo el concepto de hacer que los alumnos practiquen ciertas técnicas. Yo también hago eso. Pero no como un fin en sí mismo. Como en cada arte, las técnicas deben aprenderse dentro de su contexto: los grandes problemas, su historia, el proceso creativo. Dé a sus alumnos un buen problema, y déjelos luchar con él y frustrarse. Mire qué ideas producen ellos. Espere hasta que ellos clamen desesperadamente por una idea, *y entonces* deles una técnica. Pero no más de lo necesario."
>
> *(Paul Lockhart, "Lamento de un matemático")*

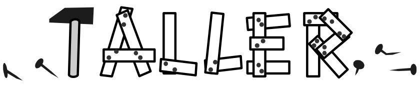
El *Anexo A* contiene pautas, y a veces también "fórmulas y recetas", para muchos de los problemas de razonamiento. Pero estas pautas no son para enseñar anticipadamente "cómo se hace". Al contrario, deben servir solamente como último recurso, en el caso de que los alumnos intentaron por mucho tiempo resolver un problema y se les acabaron todas las ideas, y usted como adulto(a) también lo intentó en vano por bastante tiempo. – Y aun en este caso, no tome las pautas del Anexo como "la única opinión autoritativa". Es bien posible que alguien encuentre un razonamiento diferente, quizás incluso uno más sencillo, que lleve a la misma solución.

Lea también las pautas generales acerca de la investigación matemática, en *"¿Cómo usar las Unidades de aprendizaje de este libro?"*, p.24-25 de la Parte A.

Unidad 73 - Juegos de razonamiento estratégico

Materiales necesarios:

- Papel y lápiz.
- Figuras de juego.
- Fichas de damas.
- Bloques lógicos *(para "Quarto").*
- Cartulina o cartón, y otros materiales necesarios para fabricar tableros de juego.
- Piedritas, semillas, u otros objetos contables *(para "Nim en dos dimensiones").*
- Fichas pequeñas con números de 1 a 100; platillos *(para "No hagas una suma").*



Retoños

Se juega entre dos jugadores con papel y lápiz. Se comienza con cierto número de puntos. Cada jugador, en su turno, une dos puntos con una línea, y marca un punto adicional en el medio de la línea que dibujó. Se debe cumplir con las siguientes reglas:

- Ninguna línea puede cruzar otra línea.

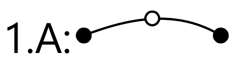
- De un punto pueden proceder un máximo de tres líneas. Cuando se marca un punto nuevo en una línea nueva, de este punto ya proceden dos líneas (los dos segmentos de la línea nueva); entonces se puede dibujar a lo máximo una línea adicional que procede desde ese punto.

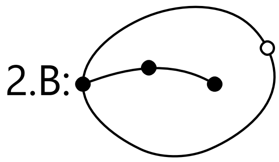
Es permitido unir un punto consigo mismo mediante una línea, mientras que se cumplen las reglas mencionadas.

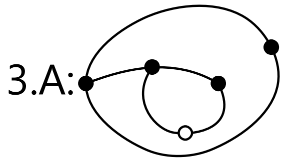
El juego termina cuando ya no se puede dibujar ninguna línea de acuerdo a las reglas. Gana el jugador que pudo dibujar la última línea.

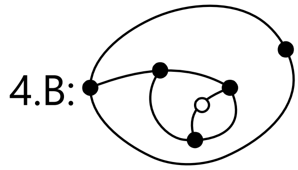
Ejemplo:

En este ejemplo se comienza con dos puntos. En cada jugada, el nuevo punto añadido está marcado con un círculo blanco.



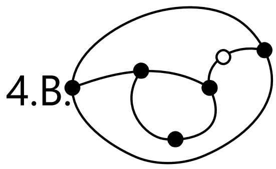


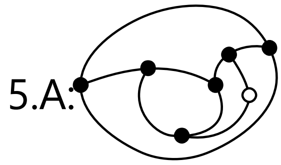




B ganó porque pudo dibujar la última línea. Todavía quedan dos puntos que tienen solamente dos líneas; pero no pueden unirse, porque la línea de unión cruzaría una de las otras líneas.

Si B hubiera hecho su última jugada de otra manera, hubiera dejado la victoria para A:





Juéguenlo unas veces e intenten descubrir qué tienen que hacer para ganar. Empezando con tres o cuatro puntos resultan juegos sencillos, pero interesantes. A partir de cinco puntos ya se vuelve bastante complejo.

Investiguen también las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el número máximo de jugadas posibles en un juego que comienza con 2, 3, 4, ... puntos?

- ¿Qué puede hacer un jugador para disminuir el número de jugadas que durará el juego?

Konane, o ajedrez hawaiano

Se juega entre dos jugadores en un tablero de ajedrez de 18 x 18 cuadrados. (Para comenzar, pueden usar también un tablero normal de 8 x 8.)

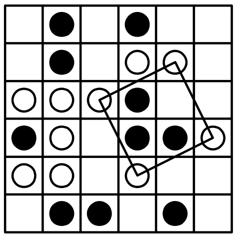
Antes de comenzar el juego, el tablero se llena de fichas o piedras, de manera que sobre los cuadros blancos se ponen fichas blancas, y sobre los cuadros negros fichas negras. Solamente en el centro del tablero se dejan dos cuadros adyacentes libres.

Por turnos, cada jugador salta con una de sus fichas sobre una ficha adyacente (que es del oponente), y la quita del tablero. Se puede saltar solamente en horizontal o vertical (no diagonal), y solamente si el cuadro inmediatamente detrás de la ficha saltada está desocupado.
Se pueden hacer saltos seguidos, pero siempre sobre una única ficha a la vez, y solamente si la entera serie de saltos se encuentra en una única línea recta.
Los saltos son los únicos movimientos permitidos; no se puede "dar pasos" con las fichas.

El que ya no puede dar ningún salto, pierde.

No hagas un cuadrado

Este juego para dos jugadores se puede jugar con lápiz y papel, o también en un tablero cuadrado con fichas de damas. El tablero puede tener cualquier tamaño, pero que sea por lo menos 4 x 4. Si juegan con fichas, necesitan suficientes fichas para que con ambos colores juntos puedan cubrir el tablero entero.



Pierde el que tiene primero cuatro de sus fichas en los vértices de un cuadrado. Cuentan no solamente los cuadrados "rectos", sino también los "inclinados"; pero solamente si es un cuadrado verdadero, o sea con sus cuatro lados iguales y con ángulos rectos.

En el ejemplo dibujado, Blanco perdió.

Se comienza con el tablero vacío. Por turnos, cada jugador coloca una ficha de su color en uno de los cuadros vacíos del tablero. Si se juega con lápiz y papel, un jugador marca círculos (O) y el otro cruces (X).

Desafío de investigación:

¿Puede haber un empate en un tablero de 5 x 5? ¿Cómo se vería la posición final en este caso? – Investiga la misma pregunta para un tablero de 6 x 6, y para un tablero de 7 x 7.

Cram

El nombre de este juego para dos jugadores significa "atestar". Se trata de colocar fichas de dominó sobre un tablero hasta que el tablero esté atestado, o sea que no se puede colocar ninguna ficha adicional.

El tablero es compuesto de cuadraditos y puede tener cualquier forma; pero normalmente se usa uno cuadrado o rectangular.
Por turnos, cada jugador coloca una ficha de dominó, de tal manera que ocupa dos cuadrados adyacentes. Las fichas se pueden colocar solamente sobre cuadros vacíos. Gana el que puede colocar la última ficha.

En vez de jugar con un tablero y fichas, se puede también jugar con papel cuadriculado y lápiz, marcando los "dominóes" sobre el papel.

Desafío de investigación: En tableros rectangulares donde por lo menos uno de los lados tiene un número *par* de cuadrados, existe una estrategia segura de ganar para uno de los jugadores. ¿Encuentras cómo? – Por tanto, una vez que se conoce esta estrategia, los únicos juegos realmente interesantes son los que se juegan en un tablero donde ambos lados son impares (p.ej. 5x5 ó 7x9), o en un tablero de forma irregular.

Variaciones:

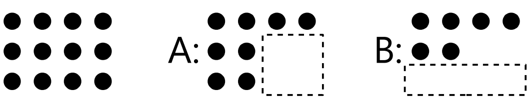
Cram de 3: En vez de usar fichas que ocupan 2 cuadrados, se pueden usar fichas que ocupan 3 cuadrados en línea recta. Por ejemplo, pueden dibujar un tablero con cuadrados de 1 cm de lado, y jugarlo con regletas Cuisenaire de 3.

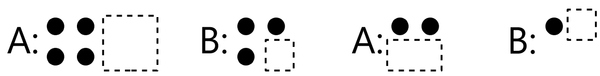
Cram cruzado: Uno de los jugadores puede poner sus dominóes solamente en orientación horizontal, el otro solamente en vertical. Antes de comenzar se debe decidir quién comienza, Horizontal o Vertical. – Con esta variación es mucho más difícil encontrar una estrategia de cómo ganar.

Nim en dos dimensiones

Este juego para dos jugadores tiene similitud con Nim *(vea en el libro de Primaria I)*, pero es más complejo. Se comienza con un rectángulo de piedritas (u otros objetos). Cada jugador, en su turno, quita una de las piedritas, y todas las piedritas que se encuentran en el rectángulo a la derecha y debajo de la piedra quitada. Quien quita la última piedra, *pierde.*

En consecuencia de la regla, la última piedra es siempre la de la esquina superior izquierda; porque el que quita esta piedra, tiene que quitar todas las demás.





En este ejemplo, B ganó, porque a A le queda la última piedrita.

Para este juego no se conoce ninguna estrategia generalizada para ganar. Sin embargo, se demostró matemáticamente que el que comienza el juego, siempre puede ganar si no comete ningún error.

El juego se conoce también con su nombre inglés "Chomp". Originalmente se sugirió que se juegue con cuadraditos de chocolate, que al quitarse de la mesa se comen. Los jugadores se imaginan que el cuadradito superior izquierdo está envenenado: ése no se puede tocar.

Cuarteto

Se juega con cartas que están organizadas en grupos de cuatro. En algunas tiendas se pueden comprar cuartetos para niños. Por ejemplo un cuarteto de animales puede contener cuatro mamíferos, cuatro insectos, cuatro reptiles, etc. Normalmente, las cuatro cartas que pertenecen a un "cuarteto" están enumeradas del 1 al 4.
Si no pueden conseguir un juego así, lo pueden jugar también con naipes comunes. En este caso, las cartas del mismo valor forman un cuarteto, p.ej. el 7 de espadas, el 7 de tréboles, el 7 de diamantes y el 7 de corazones.

Tienen que participar por lo menos tres personas. Las cartas se barajan y se reparten todas. Cada jugador puede mirar sus propias cartas, pero no las de los demás.

La meta consiste en completar cuartetos, o sea, juntar todas las cuatro cartas que forman un grupo de cuatro. Para este fin, los jugadores se piden unos a otros las cartas que les faltan, según las siguientes reglas:

La persona que empieza, pregunta a cualquiera de los otros jugadores por una de las cartas que le falta para completar un cuarteto. Por ejemplo: "Dámaris, ¿tienes el 3 de reptiles?" – Si Dámaris lo tiene, debe entregarlo a la persona que lo pidió, y esta persona sigue pidiendo otra carta a cualquiera de los jugadores. Si Dámaris no tiene la carta pedida, entonces es ella quien puede continuar pidiendo cartas a los demás. O sea, el jugador de turno puede seguir pidiendo cartas mientras recibe lo que pide; pero si alguien no tiene la carta pedida, entonces le toca a esa persona pedir.

Por supuesto que se debe jugar honestamente. Los que hacen trampa (negándose a entregar una carta que tienen), serán pronto descubiertos por los jugadores atentos.

Quien logra completar un cuarteto, pone las cuatro cartas abiertamente delante de sí en la mesa; después sigue pidiendo.

Se pueden pedir solamente las cartas necesarias para completar un cuarteto del que uno tiene por lo menos una carta. O sea, no puedo pedir reptiles si no tengo ningún reptil en la mano.

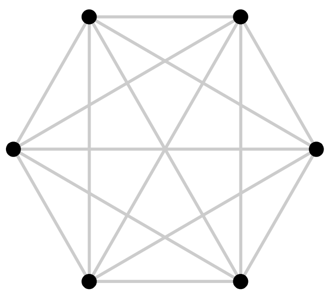
Si alguien ya no tiene cartas en la mano, deja de jugar. (Sea porque le pidieron la última; o sea porque puso un cuarteto completo sobre la mesa y no le quedan más cartas.) Si fue su turno pidiendo cartas, entonces continúa la persona a quien preguntó último.

Gana quien tiene al final el mayor número de cuartetos.

En este juego hay que estar atento y combinar bien, para descubrir cuáles cartas tiene cada uno. Por ejemplo: Supongamos que estoy jugando con Adriana, Brenda y César. Adriana pregunta a César: "¿Tienes el 2 de las aves?" – César responde que no. Yo tampoco tengo el 2 de las aves; entonces sé que Brenda lo tiene. Si yo tengo el 4 de las aves, entonces sé además que Adriana debe tener el 1 o el 3 de las aves (o ambos).

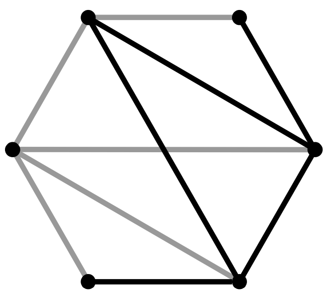
No hagas un triángulo

Se juega entre dos jugadores con papel y dos colores. Al inicio se marcan 6 puntos, de manera que forman los vértices de un hexágono. Adicionalmente se pueden dibujar suavemente con lápiz todas las líneas rectas que unen dos de los vértices:

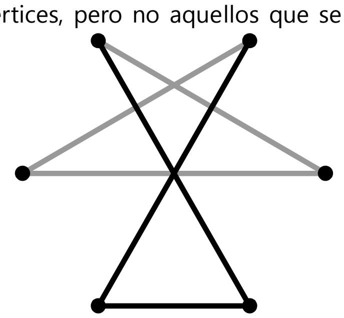


Cada jugador usa su propio color. Por turnos, cada jugador traza con su color una de las rectas que unen dos puntos. Si dos puntos ya están unidos por una recta de color, no se pueden volver a unir los mismos puntos por segunda vez.

Pierde el primero en tener tres puntos unidos en forma de triángulo con rectas de su propio color. En el ejemplo a la derecha, el jugador de las rectas negras perdió:



Se cuentan solamente aquellos triángulos que tienen los puntos iniciales como vértices, pero no aquellos que se forman por intersecciones de las líneas. En el dibujo a la derecha también hay triángulos, pero no son "perdedores", porque no todos sus vértices son puntos iniciales:

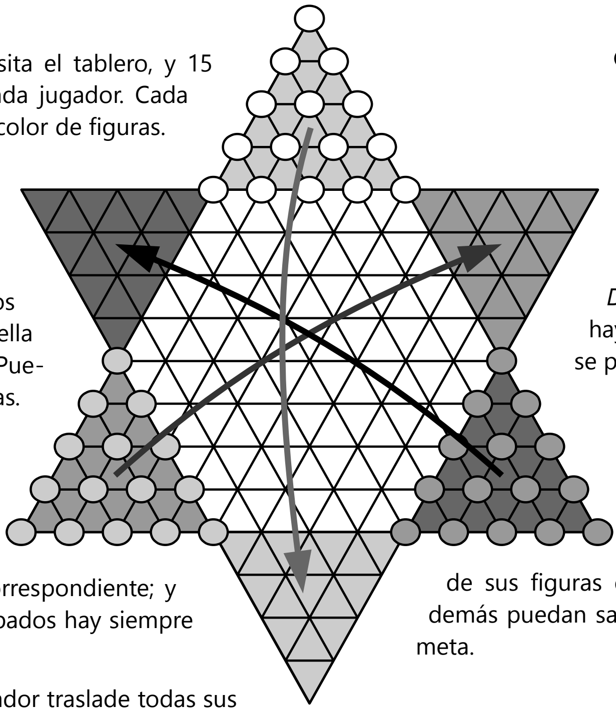


Si desean, pueden intentarlo también comenzando con 7 u 8 puntos iniciales. Eso ya es más complicado.

Para pensar: ¿Puede este juego terminar en empate? ¿Cómo se vería una posición final de empate?

Damas chinas

Para este juego se necesita el tablero, y 15 figuras de juego para cada jugador. Cada jugador debe tener otro color de figuras.
Si no encuentran donde comprar un tablero, pueden fabricar uno propio según el diseño:



Siempre dos triángulos opuestos de la estrella tienen el mismo color. Pueden jugar 2 ó 3 personas.
Al inicio, las figuras se colocan como en el dibujo: Las figuras de cada jugador ocupan un triángulo completo de su color correspondiente; y entre dos triángulos ocupados hay siempre un triángulo vacío.

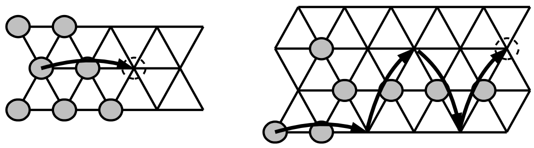
La meta es que cada jugador traslade todas sus figuras al triángulo opuesto, según las reglas que siguen. Gana quien lo logra primero.

Se juega por turnos. En cada turno, el jugador puede mover *una* de sus figuras de una de las siguientes maneras:

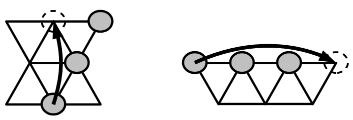
1. Dar un paso. La figura se mueve a una de las intersecciones inmediatamente adyacentes que esté libre.

2. Saltar. La figura salta *en línea recta* sobre una figura que se encuentra en una intersección adyacente, y se para en la intersección inmediatamente detrás de esa figura (que debe estar libre). Se puede saltar tanto sobre figuras propias como ajenas, pero solamente si la figura se encuentra en una intersección adyacente, y si la intersección inmediatamente detrás de la figura, en línea recta, está libre.
En un mismo turno, una misma figura puede seguir saltando tantas veces seguidas como sea posible sin tener que dar un paso entre los saltos.

Ejemplos:

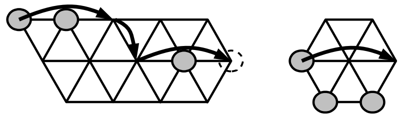


Los siguientes movimientos, en cambio, no son permitidos:



Izquierda: Este salto no es en línea recta; no es correcto.

Derecha: Un salto sobre más que una figura tampoco es correcto.

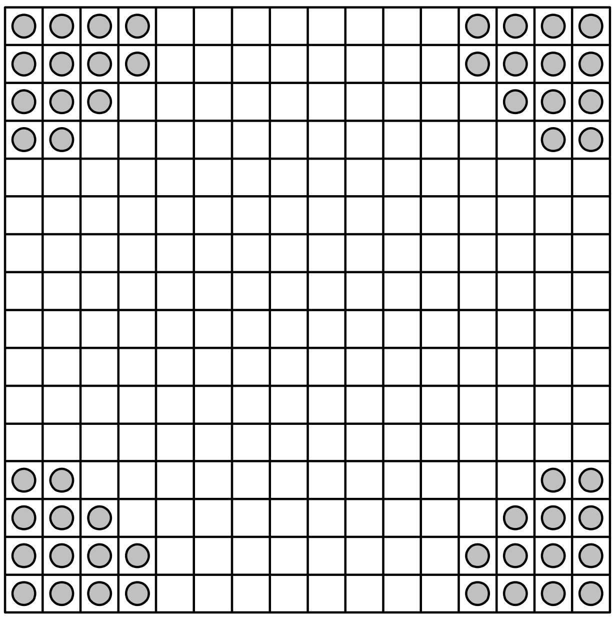


Izquierda: Entre este salto y el siguiente hay un paso. La figura puede dar solamente el primer salto.

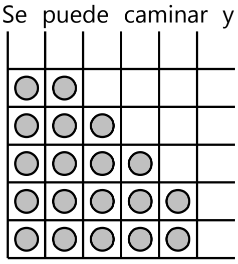
Derecha: No se puede saltar donde no hay ninguna figura; este movimiento no se puede realizar.

Para ganar, se debe procurar poder saltar tantas veces como sea posible. Para lograr eso, cada jugador intentará ubicar algunas de sus figuras estratégicamente, de manera que las demás puedan saltar seguidamente sobre ellas hacia la meta.

Existe también una variación para hasta 4 jugadores, que se juega en un tablero cuadrado de 16 x 16 ó 17 x 17:



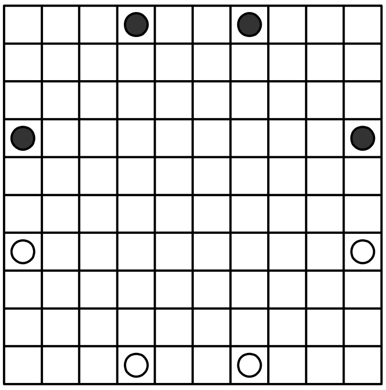
Cada jugador tiene que llegar con sus figuras a la esquina diagonalmente opuesta. Se puede caminar y saltar en horizontal, vertical y diagonal, según las mismas reglas como en la versión de estrella. Con 4 jugadores, cada uno comienza con 13 figuras como en el dibujo arriba. Si son sólo 2 jugadores, juegan con 19 figuras:



Amazonas

Se juega en un tablero de 10 x 10 cuadrados entre dos jugadores, Blanco y Negro. Cada jugador tiene cuatro fichas de su color, que representan "amazonas". Además de esas, se necesita una gran cantidad de fichas de un tercer color que representan "flechas".

El juego comienza con las amazonas en sus posiciones iniciales:

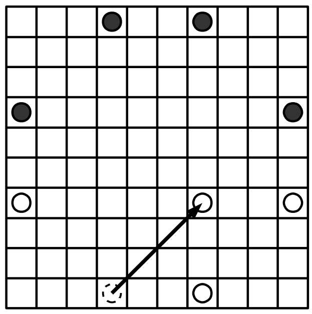


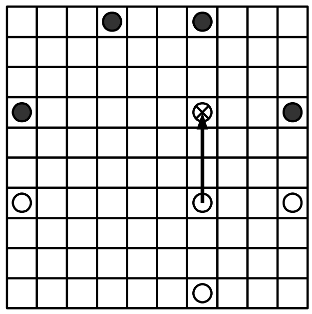
Por turnos, cada jugador mueve una de sus amazonas, e inmediatamente tira una flecha con la amazona movida. Las amazonas se mueven como las damas en el ajedrez: en horizontal, vertical o diagonal, y no pueden saltar sobre otras figuras. Pero a diferencia del ajedrez, no se capturan fichas.
Las flechas se mueven de la misma manera, y proceden del cuadro de la amazona que las tira. Estas flechas se quedan en su lugar hasta el final del juego, y son obstáculos: ninguna amazona y ninguna nueva flecha puede pasar sobre una flecha que está en el tablero.

De esta manera, el tablero se llena poco a poco con flechas, y las amazonas están cada vez más limitadas en su libertad de moverse. Pierde el jugador que ya no puede mover a ninguna de sus amazonas.

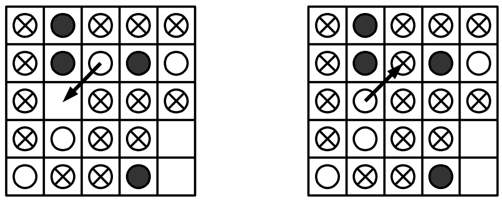
Ejemplo:

Blanco mueve una amazona y tira una flecha (la ficha con una X):



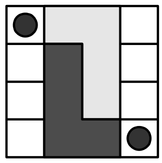


Situación final (en un tablero reducido): Las fichas con una X representan flechas. Es el turno de Blanco. Le queda un único cuadro adonde desplazarse. Desde allí puede tirar su flecha únicamente al cuadro de donde vino. Después queda encerrado: Blanco perdió.



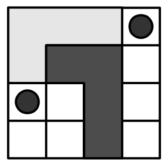
El juego de la L

Alista un tablero de 4 x 4 cuadrados. (O se puede jugar en una parte de un tablero de ajedrez.) Corta dos fichas en forma de L de cartón, de colores diferentes, que cubren 4 cuadrados cada una. Colócalas sobre el tablero según el dibujo, junto con dos fichas de damas en los cuadrados indicados:



Se juega entre dos jugadores. A cada uno le pertenece una de las L's. Las fichas de damas son neutrales, o sea que pueden ser movidas por cualquiera de los jugadores. Por turnos, cada jugador pone su L en una posición diferente. Se puede girar o voltear para eso. Después, como parte del mismo turno, puede opcionalmente mover una de las fichas de damas a alguno de los cuadros vacíos.

Pierde el que no tiene ninguna posibilidad de colocar su L en una posición diferente. En el dibujo siguiente, el jugador de la L blanca ha perdido:



La L debe siempre cubrir exactamente 4 cuadrados enteros del tablero. O sea, no se puede colocar de manera que cubra algún cuadrado solo parcialmente, ni que una parte sobresalga fuera del tablero.

El juego es bastante sencillo; pero ganarlo no es tan sencillo. ¿Descubres cómo tienes que jugar para ganar? ¿O descubres por lo menos lo que no debes hacer, para no perder?

No hagas una suma

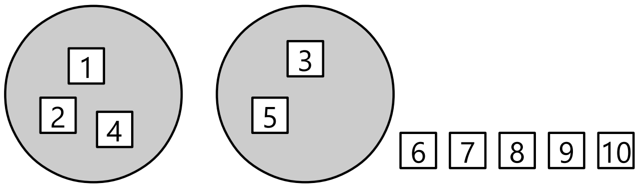
Fabriquen unas fichas pequeñas con los números de 1 a 100. Se juega entre dos o más personas. Las fichas se colocan sobre la mesa, con los números hacia arriba y en orden. Además se colocan unos platillos, pueden ser 2, 3, 4, o más. No se pueden aumentar o quitar platillos durante el juego; entonces hay que definir al inicio con cuántos platillos quieren jugar.
Cuanto mayor es el número de platillos, más difícil es el juego, y más fichas necesitarán. Con pocos platillos (2 ó 3) no necesitarán muchas fichas, porque el juego terminará antes de llegar al 30.

Por turnos, cada jugador toma la primera ficha de las que están sobre la mesa, y la coloca en uno de los platillos. O sea, las fichas tienen que colocarse en orden: primero el 1, después el 2, después el 3, etc.

Pierde el que coloca en un platillo un número que es la suma de dos números que ya se encuentran en el mismo platillo. Por ejemplo, si un platillo contiene los números 2, 4 y 5, y alguien añade el 7, pierde, porque 2 + 5 = 7. O si un platillo contiene el 3, el 5, el 6 y el 7, y se coloca el 9 allí, pierde, porque 3 + 6 = 9. Entonces cada jugador tiene que escoger de manera inteligente, en cuál platillo va a poner su ficha. En algún momento se llegará a un número que ya no se puede colocar en ningún platillo sin perder; entonces allí el juego necesariamente termina.

Variaciones:

- *Jugamos juntos contra los números:* Los jugadores juegan juntos como un solo equipo: Se ponen la meta de colocar juntos la mayor cantidad posible de fichas, antes que uno de ellos pierda. Por ejemplo, si se juega con dos platillos y uno de los platillos contiene el 2 y el 3, y el otro contiene el 1 y el 4, el juego ya está perdido, porque el 5 no se puede colocar en ningún platillo sin formar una suma. En este caso, los jugadores juntos hubieran alcanzado solamente un puntaje de 4. En cambio, si un platillo contiene el 1, el 2 y el 4, mientras el otro contiene el 3 y el 5, se puede seguir jugando (¿hasta dónde?).
Esta variación se puede jugar también a solas, colocando números hasta que ya no se puede.



- *Sumas con más sumandos:* En esta variación se pierde también si se forma una suma con más que dos sumandos. Por ejemplo, si un platillo contiene los números 2, 3, 4, y 8, el que pone allí el 9 pierde, porque 2 + 3 + 4 = 9.

Investiga: ¿Cuál es el máximo de números que se pueden colocar en dos platillos? *¿en tres platillos?

Nota: Según la variante original (sumas de 2 sumandos), la generalización de esta investigación es un problema matemático sin resolver: Hasta la fecha no se encontró ninguna relación matemática exacta entre el número de platillos y la cantidad máxima de números que se puede colocar; y tampoco se conoce una estrategia eficaz para encontrar esta "configuración máxima". Si se quiere probar sistemáticamente todas las posibilidades, con 4 platillos ya se necesita una computadora, y con 6 o más platillos ya se exceden aun las capacidades de una computadora.
Con la segunda variación (sumas con más sumandos) parece que se llega siempre al máximo cuando los platillos se colocan en orden, y cada ficha se pone al primer platillo donde puede entrar sin formar una suma. Pero en la variante original, esta estrategia no produce el máximo de números.

Quarto

Este juego para dos jugadores se puede jugar con bloques lógicos sobre un tablero de 4 x 4 cuadrados. Se eligen los bloques de sólo dos colores (p.ej. rojo y amarillo), y de sólo dos formas (p.ej. círculos y cuadrados), de manera que se tienen en total 16 bloques (entre grandes y pequeños, gruesos y delgados).

Se comienza con el tablero vacío. Los 16 bloques se colocan sobre la mesa. Por turnos, cada jugador elige uno de los bloques para que *el otro jugador* lo coloque sobre el tablero. Los bloques se pueden colocar solamente en cuadros desocupados.

Gana el que logra primero con el bloque que coloca, completar una fila de 4 bloques que tienen uno de los atributos en común: por ejemplo 4 rojos, 4 cuadrados, 4 pequeños, 4 gruesos ... La fila de 4 bloques puede ser horizontal, vertical o diagonal.

La idea del juego es sencilla; pero uno fácilmente pasa por alto uno de los atributos comunes, de manera que se deja al oponente una oportunidad para ganar.

Para pensar: ¿Puede este juego terminar en empate? O sea, ¿que el tablero se llene sin que uno de los jugadores alcance la meta? ¿Cómo se vería una posición final de empate?

Fútbol filosófico

Se juega con fichas o piedras en un tablero compuesto de cuadrados. Para un juego estándar se usa un tablero de 15 cuadrados de ancho y 19 de largo; pero para comenzar podemos usar también un tablero más pequeño.

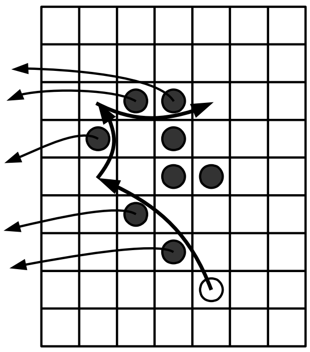
Se usa una ficha blanca que representa la pelota, y un gran número de fichas negras que representan futbolistas. Se juega entre dos jugadores. Por ambos lados del tablero, la última fila corta (la de 15 cuadrados) representa el arco. Cada jugador intenta hacer pasar la pelota dentro o más allá del arco del oponente.

Al inicio se coloca la pelota en el cuadro del medio del tablero. Aparte de la pelota, el tablero está vacío.

Por turnos, cada jugador hace uno de los siguientes movimientos:

a) Coloca a un futbolista adicional en uno de los cuadros vacíos. (Los futbolistas no se distinguen por equipos. Todos tienen el mismo color.)

b) Mueve la pelota. La pelota avanza únicamente saltando en línea recta sobre uno o varios futbolistas, para detenerse en el primer cuadro vacío después del último futbolista saltado. La pelota puede hacer varios saltos seguidos si es posible; pero cada salto seguido tiene que comenzar en el mismo cuadro donde terminó el anterior. Después de cada salto, se quitan del tablero los futbolistas sobre los cuales saltó la pelota.



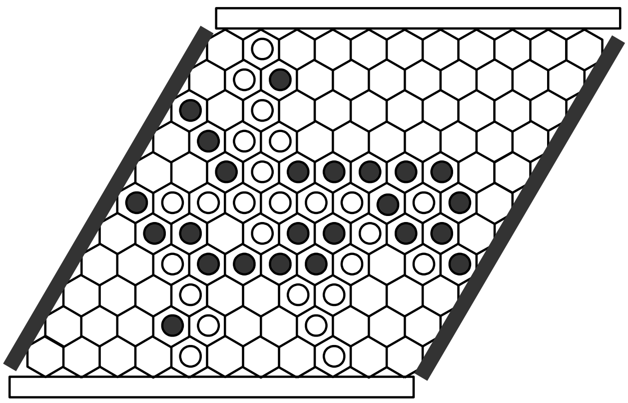
El dibujo muestra un ejemplo de saltos seguidos:

Un jugador gana si logra mover la pelota de esta manera dentro de la fila de arco del oponente, o fuera del tablero más allá de esa fila.

Si un jugador hace saltar la pelota dentro de su propio arco, pero puede enseguida (en el mismo turno) hacerla salir de allí, continuando la serie de saltos, entonces no es ningún autogol: el juego continúa.

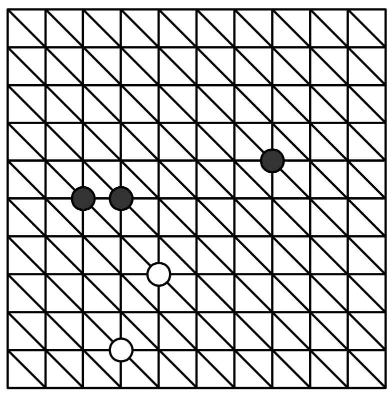
Hex

Este juego para dos jugadores se juega con fichas de damas en un tablero compuesto de hexágonos, normalmente en forma de un rombo de 11 x 11, como en el dibujo:



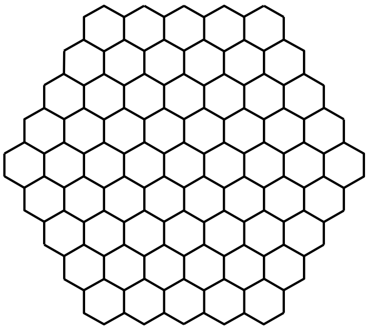
Las blancas tienen la meta de conectar los dos lados blancos del rombo con una línea ininterrumpida de fichas blancas. Las negras intentan hacer lo mismo con los lados negros. Gana quien lo logra primero. (En el ejemplo arriba, las blancas ganaron.)
Se juega por turnos: Cada jugador, en su turno, coloca una de sus fichas en uno de los hexágonos desocupados. Todas las fichas colocadas se quedan en su posición hasta el final del juego.

En vez de un tablero con hexágonos, se puede jugar también en papel cuadriculado con una red de líneas según el siguiente patrón:



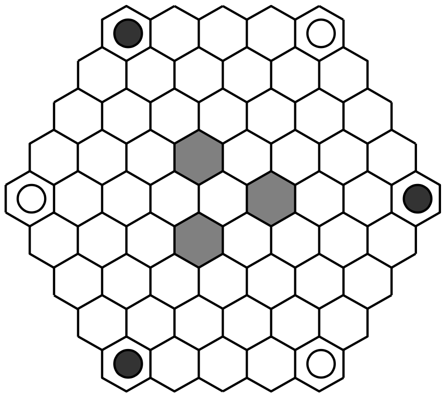
Las fichas se colocan en las intersecciones de las líneas. En vez de colocar fichas, se pueden también dibujar círculos del color correspondiente. Una conexión es válida solamente si sus fichas están todas unidas por líneas.
(*Para pensar:* ¿Puedes ver que este patrón es equivalente al patrón hexagonal en el primer dibujo? ¿Por qué es equivalente?)

Hex de "conquista"



Se juega entre dos jugadores en un tablero hexagonal como muestra el dibujo, con fichas que son blancas por un lado y negras por el otro lado. Ustedes mismos pueden fabricar tales fichas, pegando siempre un círculo de cartón negro y uno de cartón blanco juntos. (Se puede también jugar con fichas normales; pero en este caso habrá que cambiar constantemente las de un color por las del otro color.)

Para que sea un poco más interesante, como variante se pueden "anular" tres cuadros cerca del centro del tablero:



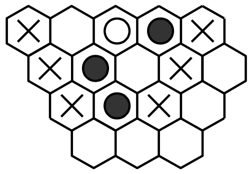
Si desean, pueden usar un tablero de cualquier otra forma.

Al inicio, cada jugador tiene tres de sus fichas en las posiciones indicadas del tablero. La meta consiste en "conquistar" la mayor parte posible del tablero para su propio color.

Por turnos, cada jugador hace uno de los siguientes movimientos:

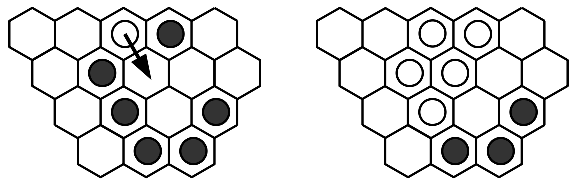
a) "Duplica" una de sus fichas. O sea, coloca una ficha adicional de su color en un hexágono libre adyacente a una de sus fichas.

o *b) Salta.* O sea, remueve una de sus fichas de su lugar y salta con ella la distancia de 2 hexágonos en cualquier dirección. Se puede saltar sobre un hexágono vacío o sobre una ficha de cualquier color; pero el hexágono de destino debe estar desocupado.
En el ejemplo abajo, la ficha blanca puede saltar a todo hexágono marcado con una X:

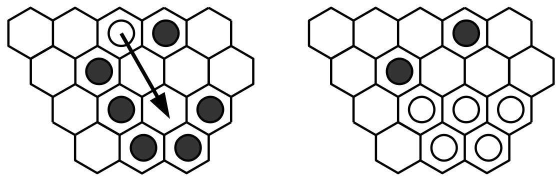


Después de cualquiera de estos movimientos, todas las fichas adyacentes a la ficha que realizó el movimiento, se convierten al color de esa ficha. O sea, si son del color opuesto, se voltean para que tengan el color de la ficha movida.

En la siguiente situación, Blanco duplica su ficha al hexágono señalado:



En esta misma situación, Blanco podría "conquistar" una ficha negra más, si salta a este hexágono:



Se juega hasta que el jugador de turno no puede realizar ningún movimiento – sea porque está encerrado, o porque ya no hay fichas de su color, o porque el tablero entero está ocupado. Gana quien en este momento tiene el mayor número de fichas de su color en el tablero.

El juego de las tuberías

Fabricación del juego

Este juego para dos jugadores consiste en el siguiente material: 36 tarjetas de tubos ***(Hojas de trabajo 73.1-2)***, un tablero de 6x6 ***(Hojas de trabajo 73.2-3)***, y un tablero de 4x4 ***(Hoja de trabajo 73.4)***.

Se recomienda plastificar las tarjetas por ambos lados antes de cortarlas. Si desean, pueden pintarlas antes de plastificar.

El tablero de 6x6 consiste en dos partes. La parte izquierda ***(Hoja de trabajo 73.2, lado derecho)*** se debe cortar y pegar junto a la parte derecha ***(Hoja de trabajo 73.3)***.

Los tableros se pueden plastificar, y/o pegar sobre un cartón.

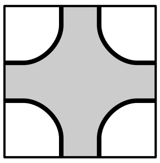
Se puede jugar con cualquiera de los dos tableros. Se recomienda que los niños que recién están aprendiendo el juego, usen el tablero de 4x4.

Reglas del juego

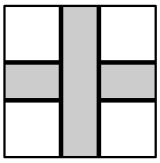
Cada jugador es propietario de dos tuberías, una de entrada y una de salida. La meta consiste en conectar las dos tuberías entre sí, colocando las tarjetas sobre el tablero. Antes de comenzar el juego, los jugadores tienen que ponerse de acuerdo quién es A y quién es B. A tiene que conectar la tubería a la izquierda con la derecha; B tiene que conectar la tubería superior con la inferior. A comienza.

Las tarjetas se barajan y se apilan sobre la mesa, con las caras abajo. Por turnos, cada jugador levanta la primera tarjeta de la pila y la coloca en cualquiera de los cuadrados libres del tablero. Gana el primero en formar una conexión ininterrumpida entre sus dos tuberías.

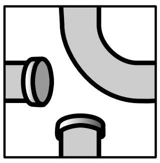
Una vez colocada sobre el tablero, la tarjeta ya no tiene "dueño". O sea, A puede para su conexión usar también las tarjetas que colocó B, y vice versa.



El agua puede fluir libremente por todas las vías que están conectadas con tubos. Esta tarjeta conecta todos los tubos entrantes entre sí.

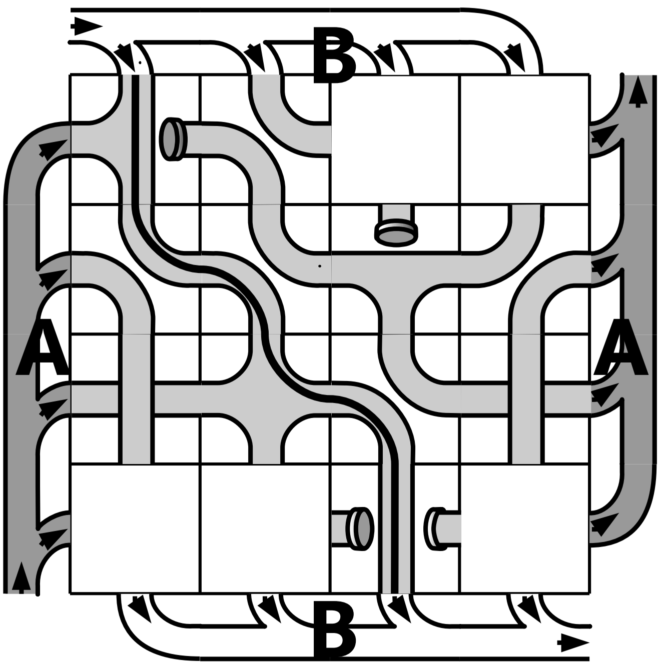


Esta tarjeta, en cambio, conecta los tubos solamente en línea recta: el izquierdo con el derecho, y el superior con el inferior; pero el agua no puede fluir p.ej. desde la izquierda hacia arriba.



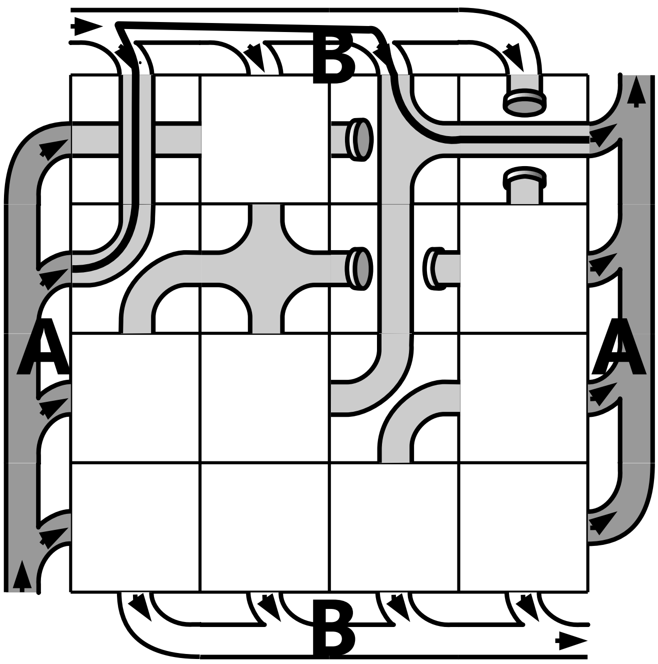
Esta tarjeta, puesta en esta posición, conecta solamente el tubo derecho con el superior; las otras entradas quedan interrumpidas aquí.

En la siguiente situación, B ganó, porque sus tuberías están conectadas por la vía trazada.



Si todos los cuadrados del tablero están ocupados y ningún jugador logró una conexión, el juego termina en empate.

OJO: Si una tubería de un jugador queda conectada con una tubería del otro jugador, entonces ¡esas tuberías pueden también formar parte de una conexión! En el siguiente ejemplo, A ganó, porque sus tuberías están conectadas, usando una parte de la tubería de entrada de B.



Variación: En vez de sacar las tarjetas de la pila, una por una, las tarjetas se pueden barajar y repartir antes de comenzar el juego. Si se usa el tablero de 4x4, cada jugador recibe 8 tarjetas; con el tablero de 6x6, cada uno recibe 18 tarjetas. Cada jugador puede mirar sus tarjetas propias, pero no las del adversario. En cada turno puede elegir libremente cuál de sus tarjetas colocar.

Con esta variación puede ser más fácil lograr una conexión, porque se pueden elegir las tarjetas que convienen. Por el otro lado, requiere una mayor habilidad de pensamiento estratégico, porque se presentan también mayores posibilidades para obstruir la conexión del adversario.

Ampliaciones

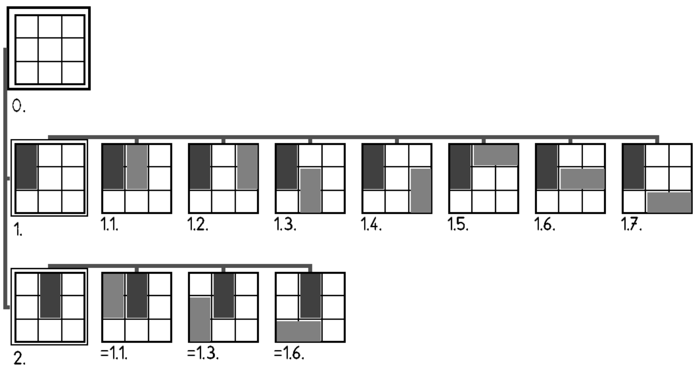
Analizar un juego sistemáticamente

Para ganar un juego de estrategia y razonamiento, hay que "calcular" las jugadas con anticipación: ¿Cuáles son las jugadas posibles que yo puedo hacer? ¿Cómo puede reaccionar el oponente a cada una de estas jugadas? ¿Y qué puedo yo hacer después? ¿Cuál es entonces la jugada más ventajosa? – Etc.

Las jugadas posibles se pueden representar sistemáticamente, por ejemplo en un diagrama de árbol. En unos juegos muy pequeños (con pocas jugadas posibles), se puede incluso diagramar el árbol completo, o sea todos los partidos posibles. Analizando este árbol, se puede encontrar la mejor estrategia para cada uno de los jugadores. Si el árbol está completo, se puede incluso predecir quién ganará si cada uno sigue la mejor estrategia. O se pueden encontrar ciertas regularidades en las jugadas, que permiten establecer principios generales acerca de las jugadas ventajosas.

"Cram" en un tablero mínimo

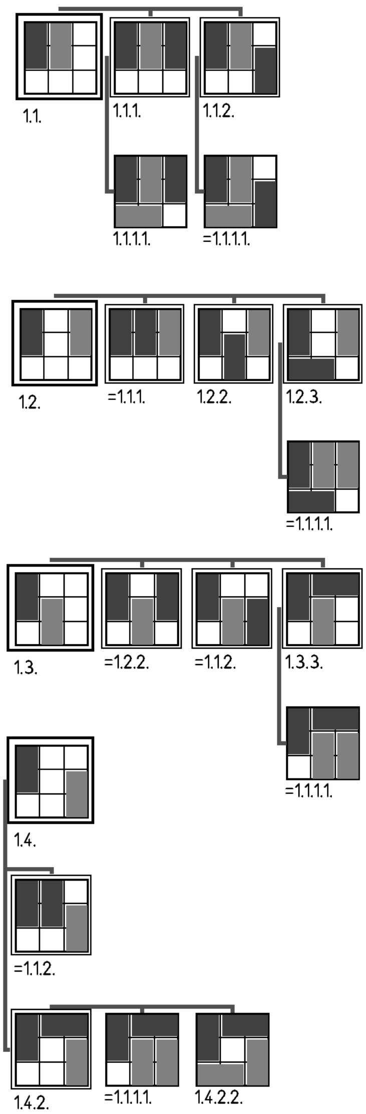
Tomaremos como ejemplo el juego "Cram" *(vea en el Taller)*. Lo jugaremos en un tablero muy pequeño: solamente 3x3 cuadraditos. El siguiente diagrama muestra las posibilidades que existen para las primeras dos jugadas. Comenzamos con la posición inicial (Posición 0), que es el tablero vacío. Con la jugada del primer jugador se llega a una de las posiciones 1 ó 2. Desde allí, con la jugada del segundo jugador se llega a una de las siguientes posiciones dibujadas:

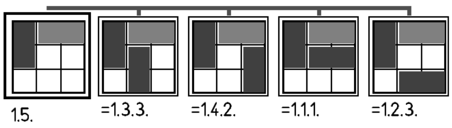


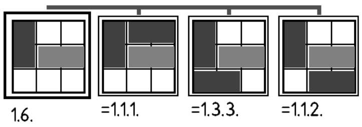
Por supuesto que existen más posibilidades de colocar los dominóes, pero esas no las necesitamos dibujar, porque son equivalentes a las que están dibujadas: Por ejemplo, si el primer jugador coloca su dominó en la esquina inferior derecha, el tablero se puede rotar (y quizás reflejar en espejo), y entonces se ve igual como la posición 1 en el diagrama. Por eso, todas las posibilidades de colocar el primer dominó en una esquina, "funcionan" igual como la posición 1. Igualmente, todas las posibilidades de colocar el primer dominó de manera que ocupa el cuadrado central, son equivalentes a la posición 2. Por eso necesitamos analizar solamente estas dos posiciones dibujadas, y estas incluyen todas las demás.

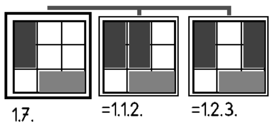
El segundo jugador tiene un total de 7 posibilidades esencialmente diferentes. Esas son las posiciones enumeradas de 1.1. a 1.7. Cualquier otra forma de colocar el segundo dominó, otra vez es equivalente a una de las posiciones dibujadas, rotando y/o reflejando el tablero.
Si el primer jugador coloca su dominó en el medio (posición 2), el segundo puede jugar de tres maneras diferentes. Pero todas estas son equivalentes a una de las posiciones anteriores. Por eso, la primera de estas jugadas no está enumerada con 2.1, sino con =1.1, porque es equivalente a la posición 1.1.

Analizamos ahora cómo puede continuar el juego. Para cada una de las posiciones 1.1. a 1.7, dibujamos nuevamente las posibilidades que tiene el primer jugador, y cómo puede responder el segundo jugador a cada una de esas. Con eso hemos llegado al fin del juego, porque con 9 cuadraditos en total no puede haber más que 4 jugadas. Hemos diagramado entonces todos los partidos posibles de "Cram" en un tablero de 3x3:







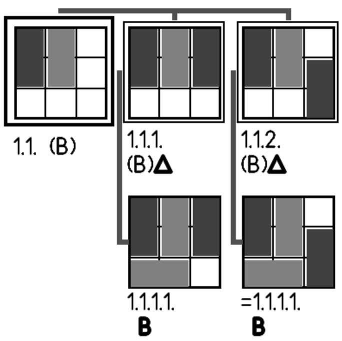


Vemos que nuevamente aparecen muchas posiciones equivalentes. De esas ya no necesitamos dibujar su continuación, porque podemos verla en la ocurrencia anterior de la misma posición. (Rotando y/o reflejando el tablero si es necesario.)

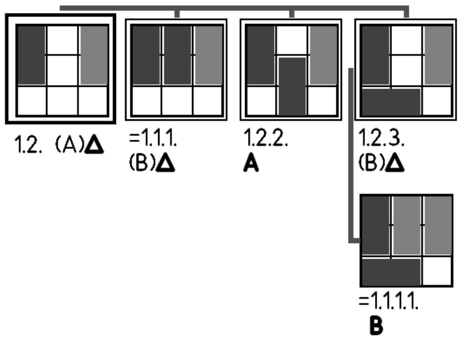
En este juego, para que dos posiciones sean equivalentes, la orientación de los dominóes tampoco importa. Por ejemplo, la primera posición después de 1.6. es equivalente a 1.1.1. aunque los dominóes están puestos en otra orientación; pero ocupan los mismos cuadros, entonces la continuación del juego es la misma.

- Ahora podemos analizar quién gana. Llamaremos A al primer jugador y B al segundo. Algunos partidos terminan después de 3 jugadas, o sea con 3 dominóes sobre el tablero, y ya no se puede colocar ningún otro: allí ganó A. Otros partidos terminan después de 4 jugadas; allí ganó B.

Veamos otra vez las posibles continuaciones de la posición 1.1. Vemos que en ambas "ramas" del árbol, al final B gana. Marcamos estos finales con B. Entonces A en su jugada anterior no puede evitar que B gane: Sólo puede elegir entre las posiciones 1.1.1. y 1.1.2, pero ambas hacen que B gane. Marcamos estas posiciones con una (B) entre paréntesis, porque el juego todavía no terminó, pero ya sabemos que B va a ganar. Los triángulos significan: "Advertencia: ¡No hagas eso!", porque es el turno de A, y A no va a querer que B gane. Solamente que en este caso no tiene otra opción. Si llegamos a la posición 1.1, ya sabemos que B ganará. Marcamos entonces esta posición también con (B).



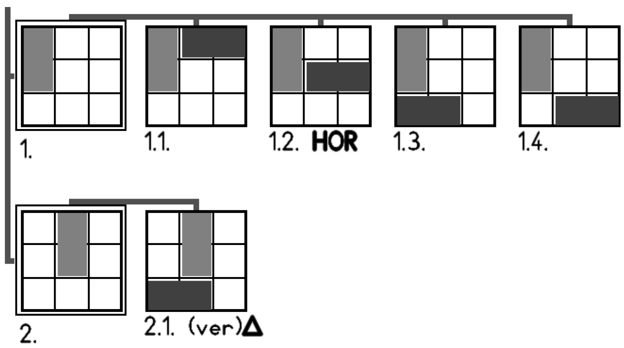
Analizamos de la misma manera la posición 1.2: La primera posibilidad para A es equivalente a 1.1.1, y ya sabemos que en este caso B gana. En la posición 1.2.2. ya no se puede colocar otro dominó: el juego termina y A ganó. En la posición 1.2.3. vemos que otra vez B gana. Entonces, si A es inteligente, la posición 1.2. es una victoria para él: Aunque existen jugadas donde B puede ganar, A no va a elegir esas; va a elegir la posición 1.2.2. y entonces gana. Ponemos una advertencia en la posición 1.2. porque es el resultado del turno de B: "¡No hagas eso, porque A va a ganar!"



Puedes seguir analizando de esta manera las otras posiciones. Después, con estos resultados, podemos regresar a la segunda y a la primera jugada: ¿Cuál de los dos jugadores tiene la posibilidad de asegurarse la victoria?

"Cram cruzado" en un tablero mínimo

Podemos analizar de la misma manera la variación de "Cram cruzado" en un tablero de 3x3. Supongamos que el jugador "Vertical" comienza. Entonces tenemos las siguientes posibilidades para las primeras dos jugadas:



Aquí, en la posición 1.2. el juego ya termina: No se puede colocar ningún otro dominó en posición vertical; entonces "Horizontal" ya ha ganado.

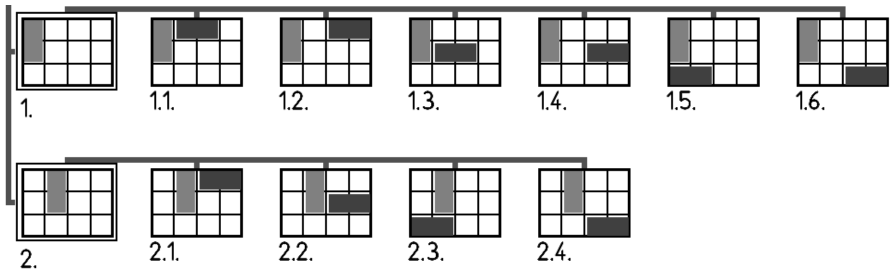
En la posición 2.1 ya no se puede colocar ningún dominó horizontalmente, entonces aquí gana "Vertical". Aunque el juego todavía no termina aquí, porque ahora va a ser el turno de "Vertical", y "Vertical" puede todavía colocar un dominó; pero entonces gana.

Termina de analizar las otras posiciones. ¿Quién puede asegurarse la victoria en este juego, "Horizontal" o "Vertical"?

¿Y cómo cambian la cosas si "Horizontal" comienza el juego?

Un último ejemplo

Como último, veremos el "Cram cruzado" en un tablero de 4x3. El árbol para las primeras dos jugadas se ve así, si "Vertical" comienza:



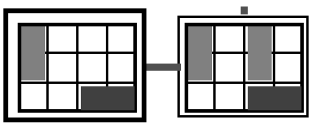
Pregunta 1: ¿Puedes de esta manera terminar de analizar este juego?

Pregunta 2: ¿Y puedes generalizar una estrategia de cómo ganar en este tablero?

Pregunta 3: ¿Y cómo cambian las cosas si "Horizontal" comienza?

Si suponemos que cada jugador "calcula" la siguiente jugada con anticipación, entonces podemos "abreviar" el árbol. Por ejemplo, la posición 1.3. podemos clasificar directamente como victoria para "Horizontal", aunque el partido todavía no terminó. Pero vemos que "Vertical" puede todavía colocar un único dominó y después ya no le quedan posibilidades, mientras sí quedan todavía espacios libres horizontales.

Si asumimos que los jugadores son capaces de razonar aun con *dos* jugadas de anticipación, entonces podemos decir que en la posición 1.6. gana "Vertical". Es que "Vertical" va a jugar de la siguiente manera para bloquear casi todos los espacios horizontales que quedan:



Nota: Por supuesto que solamente los juegos muy pequeños pueden analizarse de esta manera "completa". Para juegos más grandes se podría hacer con una computadora. Pero existen juegos con tantas jugadas y posiciones posibles (por ejemplo el ajedrez), que un análisis completo sobrepasaría las capacidades de todas las computadoras existentes hasta ahora. Allí se pueden analizar solamente unas cuantas jugadas con anticipación.

Por el otro lado, hacer estos análisis es un buen entrenamiento para el razonamiento en general. Lo practicaremos más en las *Unidades 77 a 79*.

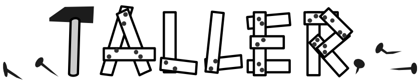
Unidad 74 - Ajedrez

Materiales necesarios:
- Tablero y figuras de ajedrez.

Para los educadores

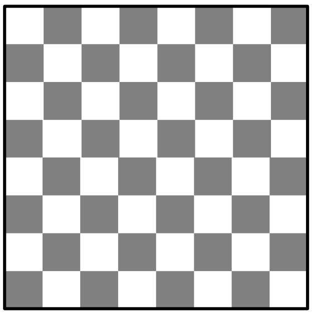
El ajedrez es un juego tan ampliamente difundido, y con una variedad tan inmensa de jugadas, que merece su propia Unidad de aprendizaje. Obviamente no es un tema "obligatorio", pero presenta un excelente desafío a las capacidades de razonamiento.

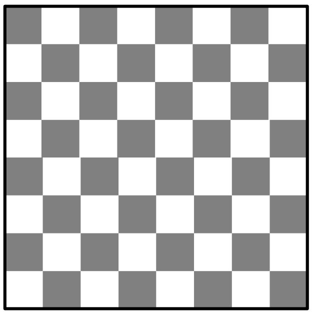
Esta Unidad introduce las reglas del juego, sugiere unas prácticas para principiantes, presenta unas estrategias básicas, y unos problemas para resolver. Alumnos interesados encontrarán más información en libros o sitios de internet especializados en ajedrez, o en un club de ajedrez local.



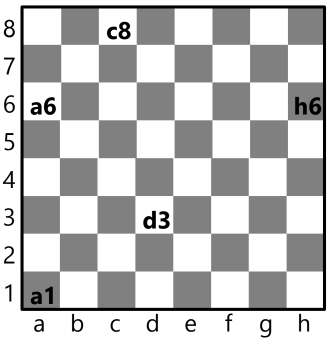
Vista general del juego

El ajedrez se juega en un tablero de 8 x 8 cuadrados. Se coloca de tal manera que cada jugador tenga en la primera fila delante de sí un cuadrado *blanco* en la esquina *derecha*.


Correcto


Equivocado

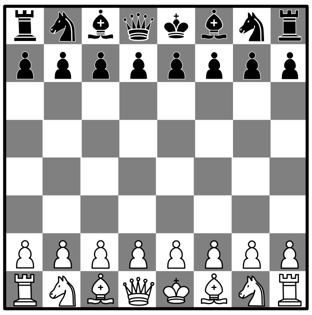
Para poder indicar la ubicación de cada pieza, las columnas se indican con letras y las filas con números. Así, cada cuadrado tiene su "dirección" única. (Matemáticamente, este es un sistema de coordenadas.) La siguiente imagen indica las "direcciones" de algunos cuadros:



Cada jugador tiene 16 piezas; el uno tiene las blancas y el otro las negras. Las piezas son las siguientes, indicadas con sus símbolos usuales:

♔ 1 rey,	♘ 2 caballos,
♕ 1 dama (reina),	♖ 2 torres,
♗ 2 alfiles,	♙ 8 peones.

Antes de comenzar el juego, las piezas se ubican de la siguiente manera sobre el tablero:



Nota particularmente la posición del rey y de la dama: Cada dama se encuentra en un cuadro de su propio color; la dama negra en un cuadro negro, y la dama blanca en un cuadro blanco. Así, las dos damas se encuentran frente a frente, y los dos reyes se encuentran frente a frente.

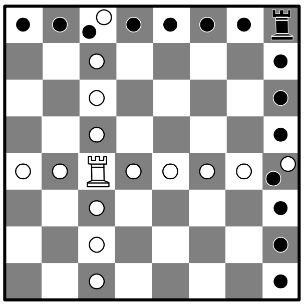
Comenzando con las piezas blancas, por turnos cada jugador mueve una de sus piezas según las reglas establecidas. Cada pieza tiene su propia forma de moverse, como explicaremos a continuación. La meta del juego consiste en vencer al rey del oponente. Si el rey está vencido, el partido está perdido, sin importar las otras piezas que uno tenga todavía.

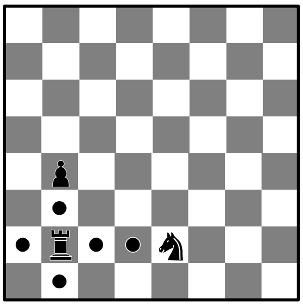
Para aprender a jugar ajedrez, lo mejor es practicar primero los movimientos de cada pieza aparte. Solamente después nos atreveremos a jugar con todas las piezas juntas.

Movimiento de las torres

Las torres se mueven en línea recta, horizontal o vertical. Pueden en un movimiento avanzar tantos cuadros como quieren, mientras que el camino está libre.

Las torres en los dibujos pueden llegar con un movimiento a todos los cuadros marcados con un círculo:



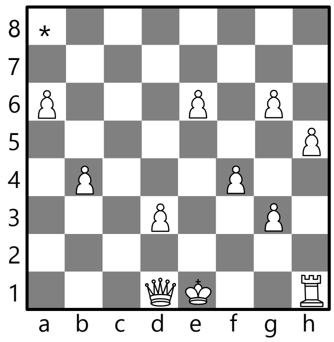


Ninguna pieza puede detenerse en un cuadro que ya está ocupado por otra pieza de su mismo color. Por eso, la torre negra en el dibujo a la derecha está limitada en su movimiento por las otras piezas negras.

Laberinto para torres

Arma la siguiente posición en tu tablero de ajedrez. La torre blanca en h1 quiere llegar a la esquina opuesta a8 (marcada con una estrella). ¿Por dónde tiene que ir para llegar en un número mínimo de movimientos?

Problema 1

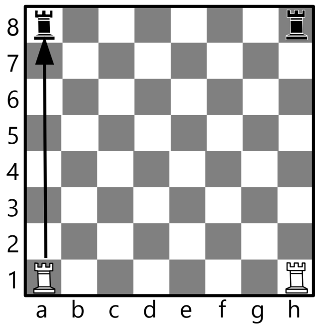


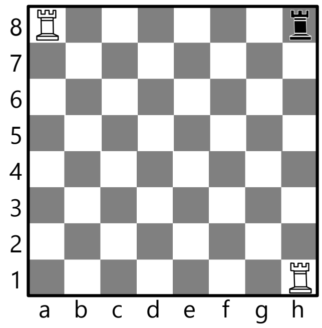
Entre dos personas, armen otros "laberintos de torres" similares, usando solamente piezas de un mismo color. Una persona arma el laberinto, la otra intenta llegar a la meta con la torre, usando un mínimo de movimientos.

Capturar una pieza

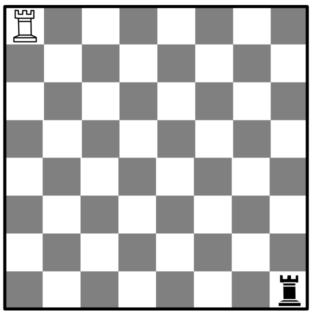
Cuando una pieza llega a un cuadro ocupado por una pieza del *otro* color, la captura. O sea, la pieza capturada se quita del tablero y ya no juega, y la figura atacante se coloca en su lugar.

Si comenzamos únicamente con las torres, todas en su posición inicial, cada torre podría inmediatamente capturar la torre que tiene al frente. Ya que las blancas comienzan, por ejemplo la torre blanca en a1 puede en su primer movimiento capturar la torre negra en a8:





Ahora que es el turno de las negras, la torre en h8 puede igualmente capturar la torre en h1, y la situación queda así:

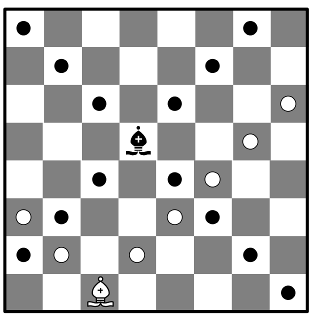


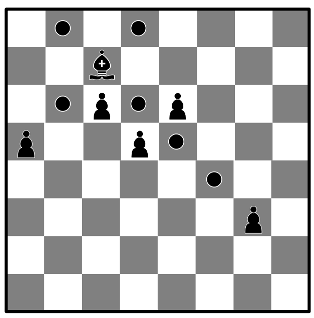
Si deseas, puedes con un(a) amigo(a) seguir jugando a partir de esta posición. ¿Logrará alguien de ustedes capturar la última torre oponente? (Si nadie comete un error, nunca se logrará. Pero entre principiantes es posible que alguien, por imprudencia, coloque su torre en la línea de ataque de la torre enemiga.)

Movimiento de los alfiles

Los alfiles se mueven en diagonal. Pueden en un movimiento avanzar tantos cuadros como quieren, mientras el camino está libre.

Los alfiles en los dibujos pueden llegar con un movimiento a todos los cuadros marcados con un





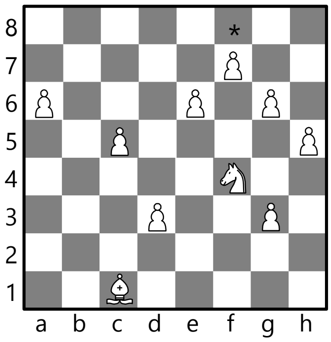
Observando, notarás que con un movimiento diagonal llegamos siempre a cuadros del mismo color. O sea, un alfil que comienza en un cuadro negro, puede moverse solamente a cuadros negros; y un alfil que comienza en un cuadro blanco, puede moverse solamente a cuadros blancos.

Nota: Originalmente, en los inicios del ajedrez, los alfiles representaban elefantes. La palabra "alfil" viene de la palabra árabe para "elefante".

Laberinto para alfiles

Arma la siguiente posición en tu tablero de ajedrez. El alfil blanco en c1 quiere llegar al cuadro f8 (marcado con una estrella). ¿Por dónde tiene que ir para llegar en un número mínimo de movimientos?

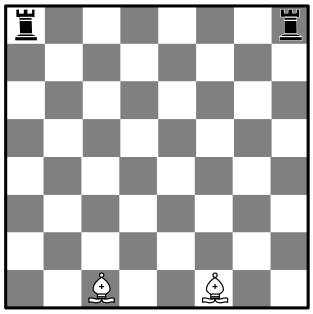
Problema 2



Entre dos personas, armen otros "laberintos de alfiles" similares, usando solamente piezas de un mismo color. Una persona arma el laberinto, la otra intenta llegar a la meta con el alfil, usando un mínimo de movimientos.

Alfiles contra torres

Hagan una "guerra" de alfiles contra torres: Una persona comienza con sus dos alfiles, la otra con sus dos torres, todos en la posición inicial correcta del juego. O sea, si Blanco tiene los alfiles y Negro tiene las torres, se comienza así:

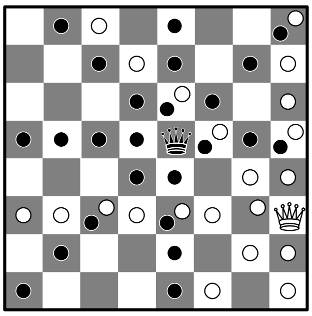


Jueguen por turnos e intenten capturar las piezas oponentes. Observen lo que sucede. ¿Cómo tienes que jugar para poder capturar una pieza?

Para pensar (Problema 3): ¿Cuál figura es más "fuerte", la torre o el alfil? O sea, ¿cuál de ellas tiene mayores posibilidades para vencer a la otra?

Las damas poderosas

La dama (reina) es la pieza más poderosa del ajedrez. Ella combina los movimientos de la torre y del alfil. O sea, puede moverse en horizontal, vertical, y diagonal. Las damas en el dibujo pueden alcanzar en un único movimiento todos los cuadros marcados:



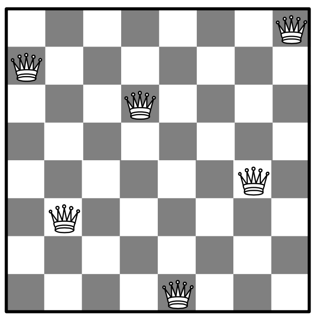
Pelea de reinas

Con un(a) amigo(a), jueguen una pelea entre las dos reinas. Ambas comienzan en su posición inicial del juego. Ahora tenemos que ponernos de acuerdo en que en el primer movimiento todavía no hacemos ninguna captura, porque la dama blanca capturaría inmediatamente a la dama negra, y el juego terminaría. Entonces, que la dama blanca comience con un movimiento "pacífico", y después comience la pelea. ¿Quién puede capturar a la dama del oponente?

(Como en el caso de las torres, eso se logrará solamente si uno de los jugadores comete una imprudencia. Pero con las muchas posibilidades de movimientos que tienen las damas, aquí es más difícil evitar los errores.)

Problema 4: Un problema de damas

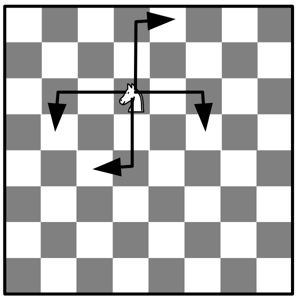
En este problema hacemos algo que no puede suceder en un verdadero juego de ajedrez. Pero nos ayudará a analizar los movimientos de las damas: Ponemos *ocho damas a la vez* en el tablero. (Tal vez no tienes ocho damas de ajedrez. Puedes usar ocho peones, y te imaginas que fueran damas.) Pero todas están enemistadas entre sí. Entonces, si una de ellas puede capturar a otra, se desatará una guerra. Queremos evitar eso. ¿Puedes colocar las ocho damas de tal manera que ninguna de ellas puede capturar a alguna otra?

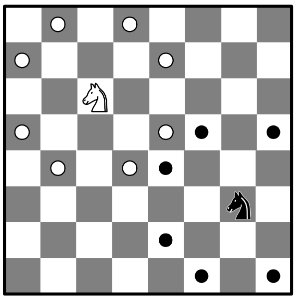


El dibujo muestra una posición posible para seis damas. Ninguna de ellas puede capturar a alguna otra. ¿Logras lo mismo con ocho?

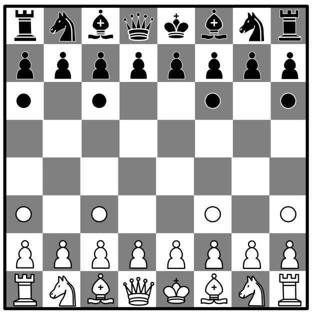
Los caballos caprichosos

Los caballos hacen un movimiento muy especial. Lo hacen siempre de la misma forma. El salto del caballo se puede describir como la forma de una L: Dos cuadros en línea recta, y uno al costado. La imagen a la izquierda muestra algunas formas de cómo el caballo puede describir esta L. En la imagen a la derecha están marcados los cuadros que los caballos pueden alcanzar desde sus posiciones respectivas.

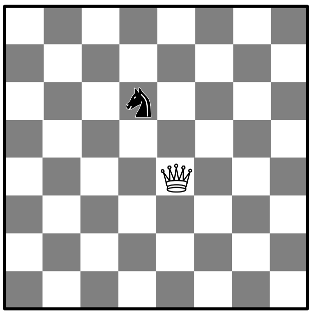




Vemos entonces que los caballos están limitados en la distancia que pueden avanzar. Pero tienen otra ventaja: Los caballos son las únicas piezas que pueden saltar encima de otras figuras. Por eso, desde su posición original, los caballos pueden saltar encima de la fila de peones.



Los caballos tienen otra ventaja que a veces se vuelve importante en el juego: Son las únicas piezas que pueden atacar a la dama enemiga, sin exponerse ellos mismos al ataque de la dama:

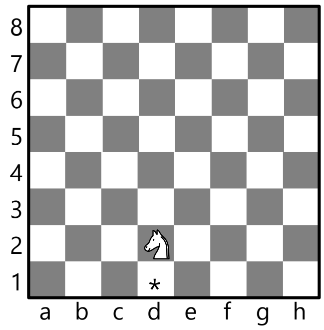


Desde su posición, el caballo negro puede capturar a la dama blanca en el siguiente turno, mientras la dama no puede llegar al cuadro donde está el caballo. (Notarás cierta similitud de esta situación con el problema de las ocho damas.)

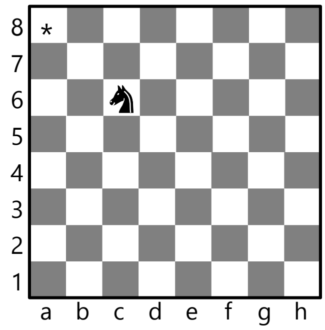
Problemas de caballos

Para los caballos, a veces un lugar cercano es difícil de alcanzar. En las siguientes situaciones, el caballo quiere llegar al cuadro marcado con una estrella. ¿Cuántos movimientos necesitas para llegar?

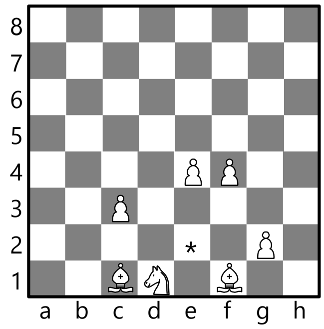
Problema 5



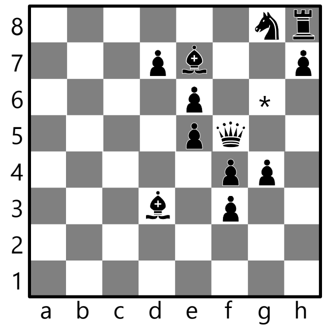
Problema 6



Problema 7



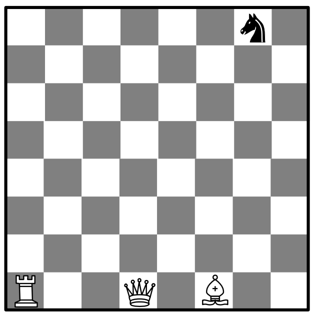
Problema 8



Entre ustedes pueden inventar sus propios laberintos de caballos.

¡Atrapa el caballito!

Este juego lo pueden jugar entre dos personas para practicar el salto del caballo. Una persona juega con un caballo, la otra (con piezas del otro color) tiene una torre, un alfil y una dama. Con estas figuras intenta capturar al caballo. Pero cuidado: el caballo puede también capturar figuras enemigas. Jueguen por turnos como en un partido normal.

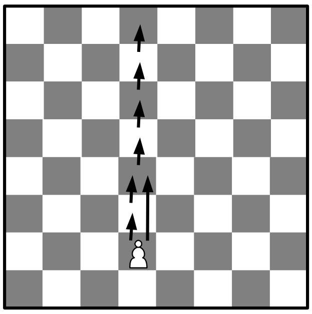


Si desean, pueden también jugar a la "pelea de caballos": los dos caballos negros contra los dos blancos.

Movimiento de los peones

Con los peones hay que practicar bastante, porque tienen las reglas de movimiento más complicadas. Los peones tienen dos movimientos diferentes: uno para caminar, y otro para capturar.

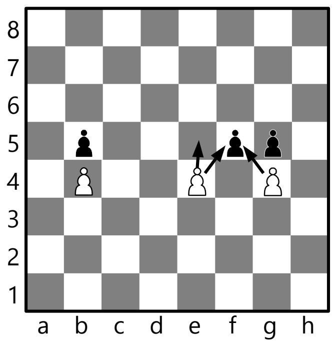
Un peón puede caminar solamente en línea recta hacia adelante, un solo cuadro a la vez. No puede desviarse de su camino, ni retroceder. Solamente desde su cuadro de inicio, un peón puede excepcionalmente avanzar dos cuadros a la vez (o sea, si es la primera vez que camina). Entonces, al caminar, un peón tiene los siguientes movimientos:



Cada flecha indica un movimiento separado. O sea, el peón necesita un total de 5 resp. 6 movimientos para llegar al otro lado del tablero.

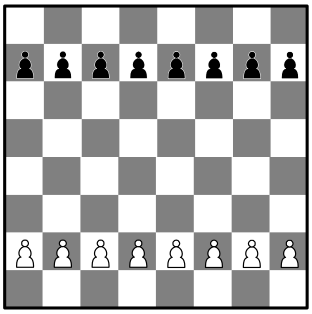
Ahora, si un peón quiere *capturar* a otra pieza, no puede hacerlo caminando de frente como en el dibujo arriba. Para capturar, el peón se mueve *en diagonal*; pero también solamente hacia adelante, y un único cuadro a la vez.

Entonces, en el siguiente dibujo, los peones en b4 y b5 no pueden moverse: No pueden caminar hacia adelante, porque el cuadro adelante está ocupado; y tampoco pueden capturarse uno al otro, porque no pueden capturar en línea recta hacia adelante. En cambio, los peones en e4 y f5 pueden capturarse uno al otro, y también pueden caminar hacia adelante. El peón blanco en g4 puede sólo capturar (a f5), pero no puede caminar de frente.



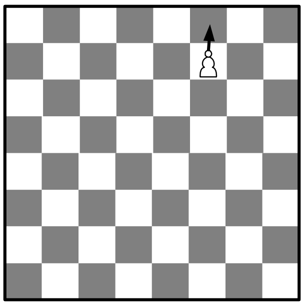
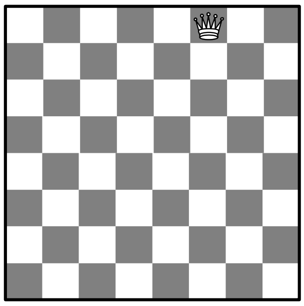
Guerra de peones

Pongan todos los peones en sus posiciones iniciales en el tablero. Jueguen con ellos según las reglas que hemos explicado hasta ahora. ¿Quién logra llevar el mayor número de sus peones hasta el lado opuesto del tablero?



La coronación del peón

¿Qué sucede cuando un peón llega al final de su camino? Ya no puede seguir caminando, porque los peones nunca retroceden. Entonces sucede una transformación milagrosa: el peón se convierte en otra pieza. Cuando el peón da su último paso, el jugador lo saca del tablero y lo sustituye por una torre, un caballo, un alfil, o una dama. (No puede sustituirlo por un rey, porque no puede haber dos reyes del mismo color en el juego.) La nueva pieza se coloca en el mismo cuadro donde estaba el peón. Este movimiento se llama la "coronación" o la "promoción" del peón.

Normalmente, la nueva pieza se saca de entre las piezas capturadas. Pero a veces la pieza deseada no está disponible. Por ejemplo, un jugador quiere convertir a su peón en dama, pero tiene su dama todavía en el tablero. Eso es permitido; un jugador puede tener dos o aun más damas, si logra coronar sus peones. Entonces, si tienen un segundo juego de piezas disponible, pueden sacar la segunda dama de allí. Si no, entonces hay que distinguir al peón coronado de alguna manera, para recordar que desde ahora es una dama. Por ejemplo, si hay una torre capturada del mismo jugador, entonces puede colocar el peón coronado encima de la torre y declarar que es una dama.
(Normalmente se decidirá promover el peón a dama, porque la dama es la pieza más fuerte. Pero en algunas situaciones puede ser ventajoso elegir otra pieza.)

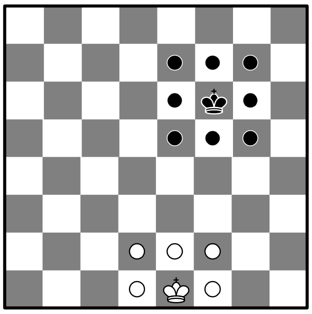
Jueguen otra vez una "guerra de peones", pero ahora con la regla de la coronación. En este caso es muy probable que gane el que logra primero coronar un peón, porque entonces podrá capturar todos los peones del oponente, uno por uno.

(Una regla adicional acerca de los peones se explica en la sección "Ampliaciones".)

Su Majestad, el rey

Introducimos ahora la pieza más importante. El destino del rey decide quién gana el partido de ajedrez.

El rey puede moverse en todas las direcciones, pero *un solo cuadro a la vez*. La siguiente imagen muestra los cuadros adonde pueden desplazarse los reyes:

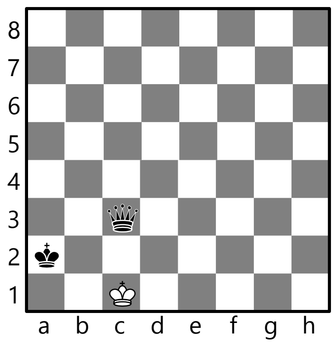


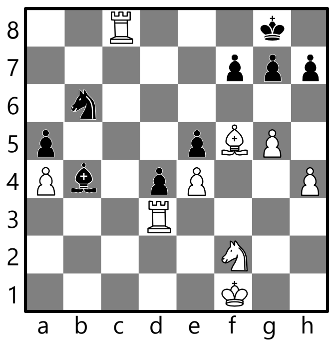
El rey en jaque

Cuando el rey está amenazado por una pieza enemiga, de manera que en el siguiente turno podría ser capturado, se dice que el rey está "*en jaque*". En este caso es *obligatorio* sacar al rey del jaque. Cualquier movimiento que deja al rey en jaque, es ilegal. Si un jugador hace un movimiento que deja a su rey en jaque, su adversario no puede jugar su turno. Tiene que advertirle: "Estás en jaque." Entonces el jugador que está en jaque tiene que corregir su jugada.

Nota: Unos principiantes, cuando están en esta situación, capturan al rey que está en jaque y dicen: "He ganado." ¡Esto es prohibido! *Nunca se captura al rey*. Mas bien, se debe acorralar al rey de tal manera que *ya no puede retirarse del jaque*. Eso se llama "jaque mate", y de eso hablaremos más abajo.

Veamos las siguientes situaciones:





Izquierda: El rey blanco está en jaque. No puede ir a uno de los cuadros b2, c2 ó d2, porque allí estaría igualmente en jaque: la dama podría capturarlo allí también. Tampoco puede ir a b1, porque allí estaría en jaque por el rey negro. Sí, los reyes también capturan otras piezas; por eso un rey nunca puede acercarse directamente al otro rey. El único movimiento que le queda al rey blanco es ir a d1. Allí no está en jaque.

Derecha: El rey negro está en jaque. Solamente podría moverse a f8 o a h8, pero en ambos lugares seguiría en jaque. Sin embargo, puede librarse del jaque:
- Puede capturar la torre con el caballo en b6. Entonces ya no hay pieza que lo amenace.
- Puede mover su alfil a f8. Así la torre blanca ya no puede llegar directamente al lugar donde está el rey, porque el alfil le impide el camino.

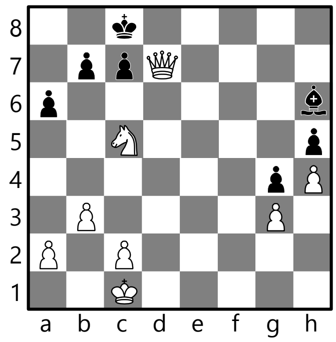
Entonces, hay tres maneras como se puede librar al rey del jaque:

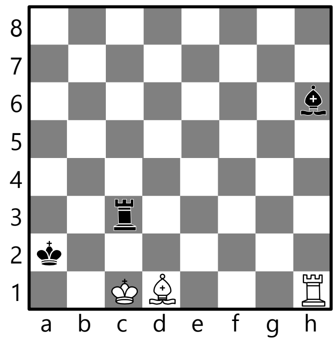
1. El rey puede moverse a un cuadro donde no está en jaque.

2. Se puede capturar la pieza que amenaza al rey.

3. Se puede interponer una pieza como "escudo", de manera que el rey ya no está amenazado.

Pero la situación no es siempre tan fácil. Veamos las siguientes situaciones:

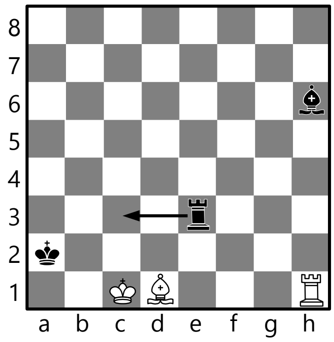




Izquierda: El rey negro está en jaque. Parece que podría capturar a la dama que lo está amenazando. Si la dama estuviera sola, podría hacerlo. Pero la dama está protegida por el caballo: Si el rey se moviera a d7, seguiría en jaque, porque allí lo amenaza el caballo. Por eso no puede capturar a la dama. Su única salida consiste en escapar a b8.

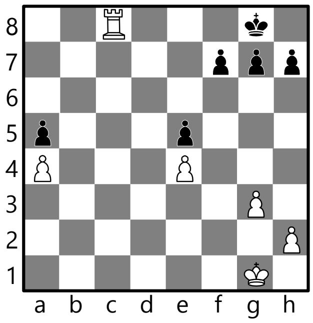
Derecha: El rey blanco está en jaque. Parece que el alfil blanco podría interponerse entre el rey blanco y la torre negra. Pero eso no saca al rey del jaque, porque está amenazado también por el alfil en h6. – Igualmente, la torre blanca podría capturar a ese alfil; pero en este caso el rey sigue amenazado por la torre negra. En esta situación, el rey no tiene cómo escapar. Esto es ***jaque mate:*** los blancos perdieron el partido.

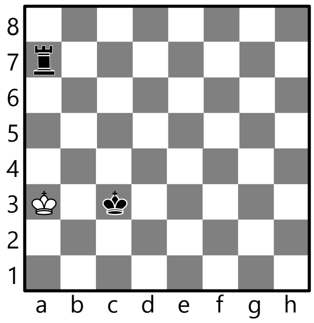
Nota: Podríamos preguntarnos cómo se pudo producir una situación como esta, donde un rey está amenazado por dos piezas a la vez. Si antes de eso, el rey blanco no estuvo en jaque, ¿no debe haber movido Negro dos piezas a la vez para ponerlo en jaque con ambas?
El dibujo en la siguiente página nos muestra la respuesta: En el turno anterior, la torre negra interrumpía la línea de ataque del alfil contra el rey blanco. Al moverse la torre para dar jaque, libró a la vez el camino para que el alfil también diera jaque. Una jugada como esta es muy eficaz.



Jaque mate

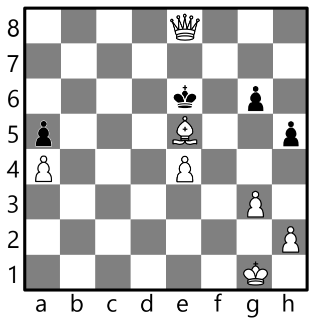
Hablamos de "jaque mate" cuando el rey está en jaque y no puede librarse de él. En este caso, su partido está perdido. En la última situación arriba ya hemos visto un ejemplo de jaque mate. Veamos algunas otras situaciones:

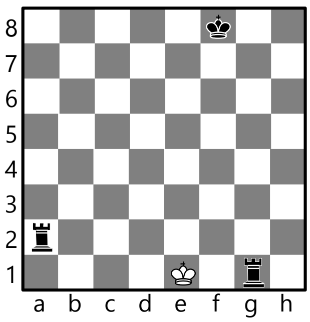




Izquierda: Blanco no necesita nada más que su torre para lograr el jaque mate. El rey negro está encerrado por sus propios peones, de manera que no puede escapar.

Derecha: A menudo el rey mismo tiene que ayudar para "encerrar" a su adversario. En esta situación, la torre da el jaque; y el rey negro controla los posibles cuadros de escape. Así, Blanco está en jaque mate.





Izquierda: Aquí colaboran tres piezas para el jaque mate. El alfil controla dos de los cuadros de escape que la dama no puede alcanzar (d6 y f6), y el peón controla los dos restantes (d5 y f5).

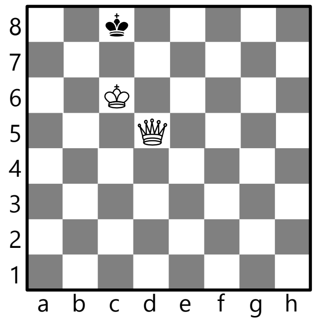
Derecha: Dos torres pueden fácilmente lograr el jaque mate, una vez que obligaron al rey a retirarse a uno de los bordes del tablero.

Nota: La expresión "jaque mate" viene de unas palabras árabes que significan "El jeque (caudillo) está muerto."

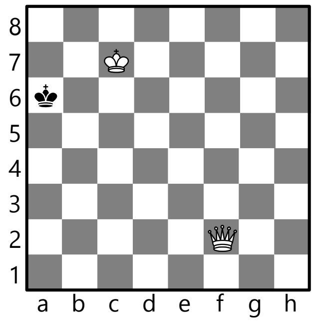
Problemas de lograr jaque mate

Arma las siguientes situaciones en tu tablero de ajedrez. Tú eres Blanco. ¿Cómo puedes poner al rey negro en jaque mate, *con un solo movimiento*? Recuerda que no es suficiente que el rey esté en jaque. Tiene que estar en jaque y sin ninguna posibilidad de salir del jaque.

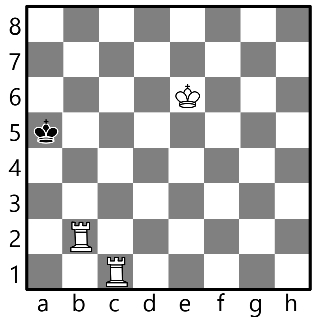
Problema 9



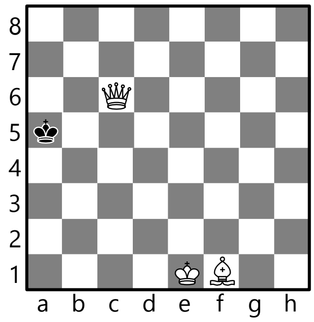
Problema 10



Problema 11

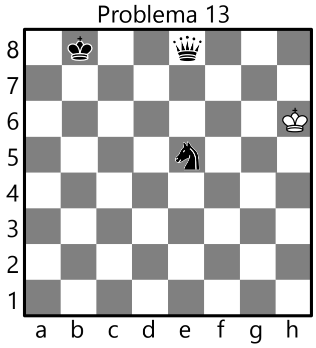


Problema 12

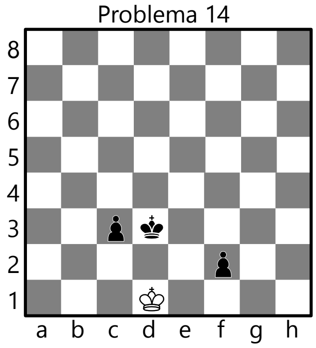


En las siguientes situaciones, tú eres Negro. ¿Cómo puedes poner al rey blanco en jaque mate, con un solo movimiento?

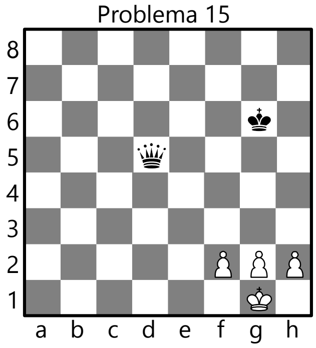
Problema 13



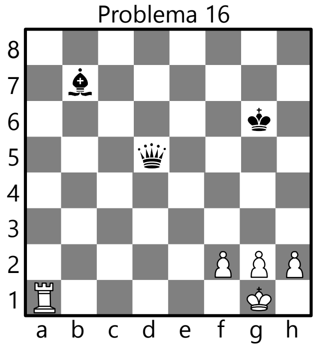
Problema 14



Problema 15

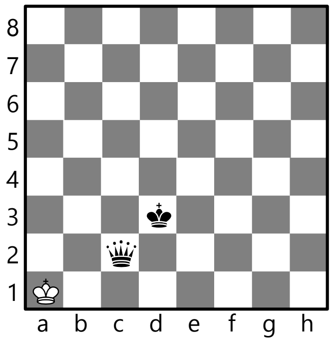


Problema 16



El rey ahogado (Empate)

En la siguiente situación, la dama negra intentó encerrar al rey blanco. El rey se retiró a la esquina a1, y la dama se acercó tanto como pudo sin ser capturada. Ahora es el turno de los blancos. El rey no puede moverse, porque con cualquier movimiento se pondría en jaque. Tampoco queda otra figura blanca que podría moverse. O sea, los blancos ya no pueden hacer ningún movimiento válido, y el partido terminó. Pero *¡el rey no está en jaque!* Por eso, esta situación no es ningún jaque mate. Es un empate. El juego es tablas: nadie ganó y nadie perdió. Se dice también que "el rey está ahogado".



Entonces, si estás al punto de ganar porque el rey oponente está puesto en estrecho, ¡juega con prudencia para que no lo ahogues!

Tablas por insuficiencia de piezas

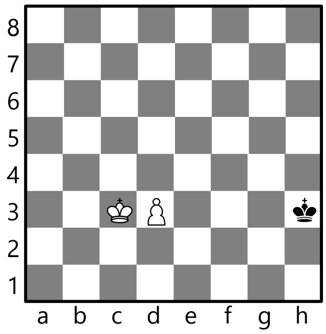
Un partido es tablas también cuando ninguno de los dos jugadores tiene la posibilidad de lograr un jaque mate. Eso es obviamente el caso cuando quedan solamente los dos reyes. Pero también un rey y un caballo, o un rey y un alfil, no son suficientes para un jaque mate.
En cambio, un rey y un peón sí tienen la posibilidad de ganar contra un rey solo. En este caso hay que seguir jugando hasta que el peón o logre coronarse, o sea capturado.

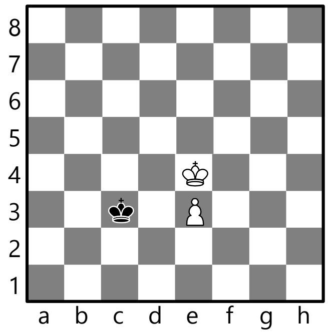
Practicamos el jaque mate

Con un(a) amigo(a), practica diversas situaciones de hacer jaque mate. Por ejemplo, un jugador tiene el rey solo; el otro tiene su rey y dos torres, e intenta poner en jaque mate al primero. Eso es bastante fácil; pero aun así tienes que cuidarte: Si el rey es atrevido, podría capturar una de las torres, o incluso ambas.

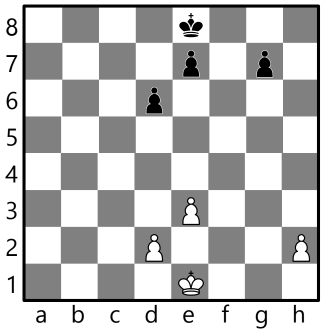
Practiquen con otras situaciones:
Rey y dama contra rey solo;
Rey, torre y caballo contra rey solo;
Rey y torre contra rey solo;
Rey y dos alfiles contra rey solo;
Rey, alfil y caballo contra rey solo.
(¡Las tres últimas son difíciles!)

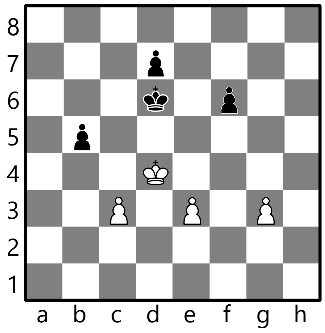
Practiquen también con peones. Si en el final de un partido los reyes se quedan solamente con unos peones, obviamente gana quien logra primero coronar un peón. Comiencen con diversas situaciones de un rey y peón contra un rey solo, como abajo. ¿Logra el rey solitario capturar al peón?





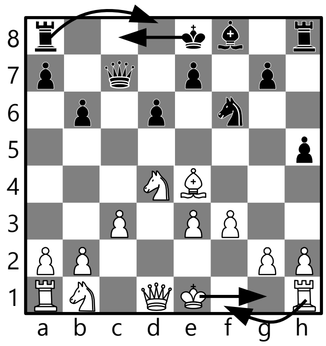
Practiquen también situaciones donde ambos jugadores tienen la posibilidad de ganar. Por ejemplo, que ambos comiencen con un rey y tres peones, como abajo:

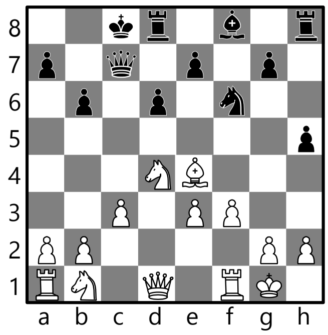




El enroque

El rey tiene un movimiento especial que puede hacer una sola vez durante un partido. Este es el único movimiento donde se mueven dos piezas a la vez: el rey y una de las torres. Se llama "enroque".





En esta situación, si es el turno de los blancos, pueden enrocar hacia la derecha: El rey da *dos pasos* hacia la derecha, y la torre viene al otro lado del rey. Esto cuenta como un único movimiento y se llama "enroque corto".

Si es el turno de los negros, no pueden hacer lo mismo, porque hay un alfil en el camino. Pero los negros pueden enrocar hacia el otro lado: El rey da dos pasos hacia la izquierda, y la torre viene al otro lado del rey. Esto se llama "enroque largo", porque aquí la torre tiene un camino más largo que en el enroque corto.

Para poder enrocar, se tienen que cumplir tres condiciones:

1. El rey no debe haberse movido nunca durante este partido, y la torre que enroca tampoco. Aun si una de estas piezas se ha movido una vez y después regresó a su posición inicial, ya no puede enrocar.

2. No debe haber ninguna pieza en el camino entre el rey y la torre.

3. El rey no puede estar en jaque ni donde está, ni en el cuadro sobre el cual pasa, ni en el cuadro donde se queda al final. Así que el enroque no puede usarse para salvar al rey si está en jaque.

La utilidad del enroque consiste en que es más fácil hacer entrar la torre al juego cuando se encuentra en el medio, que desde la esquina. Y el rey está mejor protegido contra ataques cuando se encuentra un poco más al costado.

Juguemos el primer partido completo

Ahora debes estar listo para jugar un partido completo. Pongan todas las piezas en su posición inicial, según el dibujo al inicio del Taller, y jueguen unos partidos. En la sección "Ampliaciones" veremos unos detalles adicionales para mejorar la estrategia del juego.

Ahora lo escribimos

Notación de los movimientos

Para comunicar y analizar las jugadas, se usa un "código" para anotar los movimientos. En su forma completa, se anota:

- La primera letra del nombre de la pieza: R = Rey, D = Dama, A = Alfil, C = Caballo, T = Torre. Los movimientos de peones se anotan sin esta letra.

- El cuadro de inicio y el cuadro final del movimiento.

Por ejemplo:
Dd1-g4 significa que la dama se mueve de d1 a g4.
d6-d5 = Un peón se mueve de d6 a d5.

Las jugadas se enumeran con números sucesivos, donde se anota detrás de cada número primero el movimiento de las blancas, después el movimiento de las negras. Así podría comenzar un partido:

1. e2-e4 e7-e6
2. d2-d4 d7-d5
3. Cb1-c3 Cg8-f6 (etc.)

La coronación de un peón se indica con la letra inicial de la nueva pieza, después del cuadro de destino:
f2-f1T = el peón llega a f1 y se convierte en torre.

El enroque corto se indica con **0-0**, el enroque largo con **0-0-0** (sin indicar nombres o posiciones de piezas, porque hay una sola forma de efectuar estos movimientos).

Además se pueden usar los siguientes signos:

Una **x** indica la captura de una pieza:
Ad3xCf5 = el alfil en d3 captura el caballo que estaba en f5.

El signo **+** indica jaque: **Db5-f5+** = la dama se mueve de b5 a f5 y pone al rey oponente en jaque.

El fin del partido se indica con uno de los siguientes signos detrás del último movimiento:
++ ó **#** para jaque mate;
= para empate.

Además, al analizar un partido, los autores de libros de ajedrez suelen "calificar" ciertos movimientos con los siguientes signos detrás del movimiento:
! = un movimiento bueno
? = un movimiento malo o cuestionable.

Notación abreviada

Más usual es la notación abreviada donde se omite el cuadro de inicio, y se anota solamente el cuadro de destino. La apertura anotada arriba, en notación abreviada se escribe así:

1. e4 e6
2. d4 d5
3. Cc3 Cf6 (etc.)

Pero con este sistema pueden ocurrir ambigüedades cuando hay dos piezas que podrían alcanzar el mismo cuadro de destino. En este caso se añade antes del cuadro destino la letra de la columna del cuadro de origen. O si las dos piezas se encuentran en la misma columna, el número de la fila de origen. Como en el siguiente ejemplo:

1. e4 d5
2. c4 b6
3. cxd5 (El peón de la columna c realiza la captura, no el de la columna e.)

Si deseas practicar la notación de los movimientos, juega un partido y anota los movimientos. O reproduce en el tablero los movimientos anotados en los ejemplos de la sección "Ampliaciones" abajo.

Ampliaciones

Si aspiras a jugar bien el ajedrez, los siguientes ejemplos y pautas te pueden ayudar.

Las fases de un partido de ajedrez

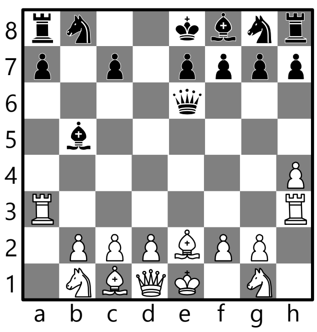
Normalmente, en un partido de ajedrez se pueden distinguir las siguientes fases:

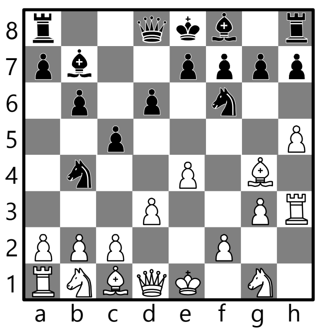
La apertura

Esta es la fase inicial. La meta principal en esta fase es desarrollar bien todas las piezas, para que se encuentren en posiciones favorables en el tablero, mutuamente protegidas, y con las mayores posibilidades de actuar. No tiene mucho sentido en esta fase, dar largos "paseos" con una única figura, ni lanzar grandes ataques en medio del campamento del oponente. Eso solamente impide que las otras figuras se ubiquen en posiciones ventajosas. Si un jugador después de diez movimientos tiene todavía sus caballos y alfiles mayormente en la posición inicial, tendrá una marcada desventaja en la continuación del partido.
Es recomendable que las piezas avancen más o menos en este orden: Primero los peones del medio (columnas d y e, y quizás c y f); después o paralelamente con ellos los caballos y alfiles; después la dama, y algunos otros peones; y finalmente las torres (preferiblemente mediante un enroque).
También es recomendable procurar controlar primero el centro (los cuatro cuadros del medio), porque una pieza en el centro tiene la mayor libertad de movimiento.

En casos excepcionales, un jugador puede sufrir un jaque mate ya durante la apertura, por haber cometido una gran imprudencia. Pero definitivamente no es recomendable intentar atacar al rey durante esta fase; eso solamente impide que se desarrollen las otras piezas.

Los siguientes dos ejemplos muestran como ***no*** se debe hacer. Ambas posiciones se dieron después de 8 movimientos por cada jugador, en partidos entre principiantes:

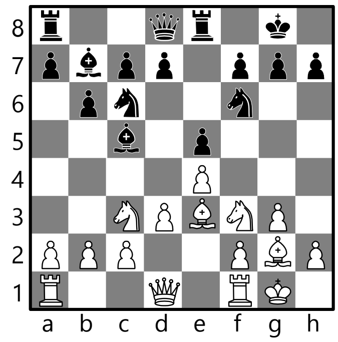




Izquierda: Las blancas obviamente intentaron primero movilizar ambas torres, sin enrocar. Vemos que esto es muy ineficaz: Pasaron 8 movimientos, y las torres todavía no pueden contribuir mucho desde las posiciones donde se encuentran. Las otras piezas siguen encerradas en sus posiciones iniciales, con excepción del alfil en e2 que está severamente atacado. Este alfil ni siquiera puede moverse, porque si saliera de su lugar, su rey estaría en jaque por la dama negra. Se dice que el alfil está "clavado". La entera situación es muy desfavorable para las blancas.
La situación de las negras no es mucho mejor. Ellas se encuentran en medio de un intento prematuro de poner al rey blanco en jaque mate con Dxe2. Este intento tiene que fracasar, porque el cuadro e2 está controlado por el rey, la dama y el caballo. Las blancas tienen varias posibilidades de contraatacar; por ejemplo Cc3, o Te3. Las piezas negras están demasiado lejos para poder apoyar a su alfil y dama. En vez de atacar prematuramente, las negras debían haber desarrollado sus otras piezas primero.

Derecha: Aquí, las negras están mejor. Están controlando la mayor parte del tablero, y sus caballos se encuentran en posiciones ventajosas. (¡Cuenta cuántas piezas blancas están amenazadas por un caballo negro!). Por el otro lado, les falta todavía liberar al Af8 de su encierro, y desarrollar sus torres.
Las blancas, en cambio, tienen una única pieza (Ag4) en una posición más o menos útil (aparte de unos peones). No invirtieron su tiempo en desarrollar sus otras piezas.

Compara esas situaciones con la siguiente, que también se produjo después de 8 movimientos por ambos jugadores:



Aquí, los caballos y alfiles tienen mucha libertad de movimiento desde las posiciones donde se encuentran. (Con excepción de los alfiles en b7 y g2, que tienen la función de proteger a sus caballos.) Ambos jugadores ya han enrocado. Eso les permitirá pronto entrar también con las torres al medio de la batalla. Las piezas de ambos se encuentran todavía en su propia mitad del tablero, pero tienen numerosas posibilidades de lanzar ataques hacia más adelante.

El juego medio

Esta es la fase más complicada del partido, donde sucede la mayor parte de la "acción". En el caso ideal, las piezas están ubicadas en lugares estratégicos para efectuar toda clase de ataques, defensas, y contraataques.

En esta fase es importante mantener el tablero entero en la vista, y evaluar todas las posibilidades de lo que podría hacer el oponente. Si te concentras demasiado en un único lado del tablero, o en un único plan de ataque que tienes, podrás ser sorprendido por alguna maniobra del oponente en una parte del "campo de batalla" que no tomaste en cuenta.

En esta fase ya es más frecuente que se logre un jaque mate, mediante alguna combinación ingeniosa de ataques imprevistos por el oponente.

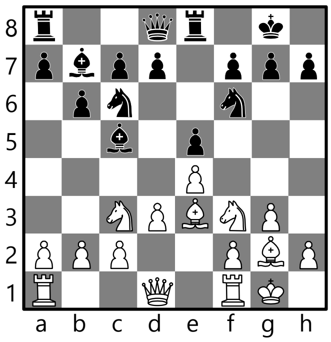
El final

Si se capturan la mayoría de las piezas sin que alguien logre un jaque mate, el partido entra en su etapa final. Quedan solamente pocas piezas en el tablero. Si uno de los jugadores tiene una clara ventaja, entonces se trata únicamente de encontrar la mejor manera de lograr un jaque mate (y sin ahogar al rey enemigo). Por eso es bueno practicar el jaque mate con diferentes combinaciones de piezas, como lo hicimos en el Taller.

Si el juego es más o menos equilibrado, hay que planear los movimientos con mucha prudencia y exactitud, porque aun una ventaja o desventaja muy pequeña puede decidir el resultado del partido.

Protección mutua

Es preferible que cada pieza esté protegida por alguna otra pieza. Entonces, si una pieza es capturada, su "atacante" será capturado también. Una pieza protegida está en una posición mucho más fuerte que una pieza desprotegida. Analizaremos bajo este aspecto la situación que vimos anteriormente:



Si el Ac5 captura al Ae3, será a su vez capturado por el peón f2. Igualmente, si el Ae3 captura al Ac5, será capturado por el peón b6. Así que estos dos alfiles se amenazan uno al otro, pero cada uno de ellos sabe que si captura al otro, él mismo también desaparecerá. – Cada caballo está protegido por un peón o por un alfil; el Cc6 incluso por ambos. – Como resultado del enroque, la dama y las dos torres se protegen mutuamente. Eso lo hace casi imposible que en esta etapa del partido alguna pieza enemiga logre penetrar hasta la fila del rey (la fila 1 resp. 8). – Aun los peones están todos protegidos, con excepción de b2. (Analiza: ¿Puedes decir de cada peón quién lo protege?) Aunque f7 y g7 están protegidos solamente por el rey. Eso es una protección débil, porque el rey no podrá exponerse así no más para vengar a un peón capturado. – Solamente el Ab7 está desprotegido. Por ahora, eso no es tan grave, porque se encuentra en una posición donde difícilmente puede ser atacado. Pero con el tiempo, las negras tendrán que proveer una protección para él también; por ejemplo con Tb8.

Una pieza puede ser protegida múltiples veces. Entonces, si esa pieza es capturada, se desata una verdadera batalla. Supongamos que en la situación arriba, las negras deciden provocar al peón blanco e4, avanzando su peón de d7 a d5. ¿Qué sucede? Las blancas tienen dos opciones: capturar al atrevido peón, o mejorar su posición y dejar que el peón negro ataque primero.

Veamos ambas posibilidades. (¡Reproduce las jugadas en tu tablero de ajedrez!) Si las blancas capturan al peón:

1. d5x Cxd5
2. Cxd5 Dxd5

Ambos perdieron un peón y un caballo, entonces en cuanto a piezas, la situación sigue equilibrada. En cuanto a la posición de las piezas, las negras tienen posiblemente una ventaja: Su dama se encuentra ahora en el centro (¡aunque desprotegida!), y el peón e5 tiene el camino libre para avanzar a e4.

Pero las blancas podrían capturar al peón también con el caballo en c3. Analiza tú mismo las consecuencias que pueden resultar de esta jugada.

¿Y si las blancas dejan que las negras ataquen primero? Veamos primero lo que sucedería si las blancas no hicieran nada; o sea si las negras continuaran inmediatamente con su siguiente movimiento:

1. ... e4x
2. e4x

Las negras podrían continuar: 2. ... Ce4x, pero entonces perderían su caballo, porque las blancas jugarían: 3. Ce4x, y no hay ninguna pieza negra que podría a su vez capturar el caballo blanco. Entonces las negras no harán eso. Pero el intercambio de peones dejó el camino libre para un suceso mucho más grave: ¡la captura de ambas damas!

2. ... Dxd1
3. Txd1

¿Por qué las negras harían eso? En cuanto a piezas, no ganarían nada. Pero Negro podría razonar que este intercambio le proporciona una ligera ventaja de posición: Si Blanco usa la torre f1, esa torre tiene que abandonar su posición como "escudo del rey". Y si usa la torre a1, los peones ya debilitados en a2, b2 y c2 se quedarían prácticamente desprotegidos, ofreciendo un blanco fácil para un futuro ataque.
Pero esta ventaja posicional no es tan grande, porque una torre blanca en d1 gana a su vez la ventaja de tener una columna abierta para avanzar hasta la octava fila en un único movimiento. Siempre es una ventaja poder posicionar una torre en una columna abierta. Por tanto, Negro podría también renunciar al intercambio de damas, opinando que no obtiene de ello ninguna ventaja real.

(Para pensar: Blanco podría también jugar 3. Cxd1. Pero eso no es aconsejable; ¿por qué no?)

Ahora, toda esta secuencia se basó en el caso hipotético de que Blanco no efectuara ningún movimiento. Pero después de la jugada d5 de las negras, ¡es el turno de Blanco! Entonces, sabiendo ahora lo que puede suceder, ¿puede Blanco con anticipación mejorar su posición, por ejemplo para impedir la captura de su dama? ¿O puede incluso preparar un contraataque que al final de cuentas le proveerá una ventaja? Piénsalo... existen muchas posibilidades. Quizás querrás armar esta situación en tu tablero de ajedrez, y jugar varias alternativas con un(a) amigo(a).

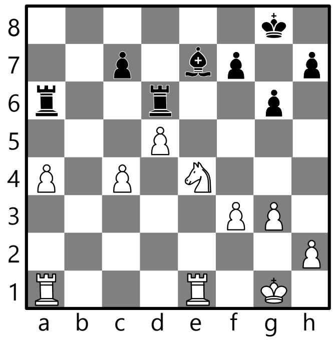
Estos razonamientos muestran cuán importante es la protección mutua de las piezas. Y te dan a la vez un ejemplo de cómo se puede razonar al decidir acerca del siguiente movimiento.

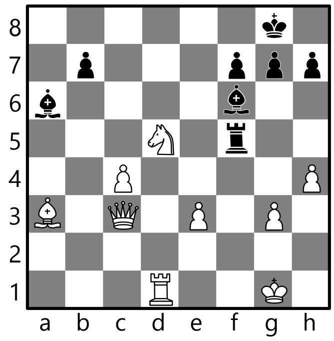
¿Cuál pieza vale más?

En los ejemplos anteriores de capturas, casi siempre se capturaban piezas iguales por ambos jugadores: peón por peón, caballo por caballo, dama por dama. En estos casos se mantiene el equilibrio en cuanto a las piezas que tiene cada jugador.
Pero ¿cómo es el caso cuando se capturan piezas distintas? Por ejemplo, mi alfil podría capturar una torre, pero perderé el alfil. ¿Eso es ventajoso o no? – O podré capturar un caballo, pero tendré que sacrificar dos peones para lograrlo. ¿Debo hacerlo o

Como regla aproximada, se dice que un caballo vale igual como un alfil; cada uno de ellos vale como tres peones. Hemos visto al inicio que una torre vale más que un alfil, porque el alfil está limitado a los cuadros de un único color. La dama, obviamente, es la pieza más valiosa; vale como un alfil y una torre juntos. Entonces, normalmente vale la pena sacrificar un caballo o un alfil para poder capturar una torre; y casi siempre es ventajoso capturar la dama al precio de alguna otra pieza.

Sin embargo, estas reglas no aplican siempre. El valor efectivo de una pieza depende mucho de su posición. Un caballo o alfil en una posición "fuerte" puede valer más que una torre aislada en un rincón. Un peón vale tanto más, cuanto más avanzado está en su camino; y más aun si se trata de un "peón libre" (que no puede ser impedido en su camino por ningún peón enemigo).





Izquierda: ¿Debe Blanco capturar la Td6? – Sí, porque la torre es una pieza más fuerte que el caballo. – ***Problema 17:*** ¿Y con cuál pieza debe Negro capturar el caballo blanco, para minimizar sus pérdidas? Piensa...

Derecha: Es el turno de Negro. Puede capturar el caballo (Txd5) o la dama (Axc3). ¿Cuál debe hacer? – Normalmente es ventajoso capturar la dama. Pero en este caso, si el alfil abandona su puesto, causa la derrota completa de su equipo:

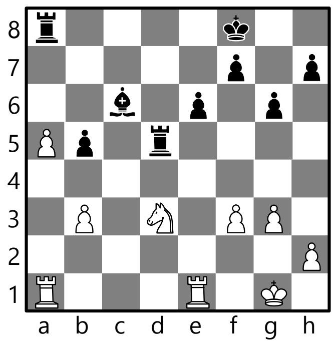
1. ... Axc3
2. Ce7+! Rf8 (o Rh8)
3. Td8++ ... y Negro perdió el partido.

Capturar el caballo tampoco es ventajoso, porque se pierde una torre (pieza fuerte) por ganar un caballo (pieza menos fuerte). Además, si Blanco juega Txd5, esa torre sigue amenazando con el jaque mate, tan pronto como el alfil se mueve de su sitio. (Blanco no debe jugar c4xd5, porque eso obstruye el camino de la torre, y entonces perderá su dama.)

Problema 18: Hay alguna otra posibilidad para Negro, de impedir el jaque mate inminente?

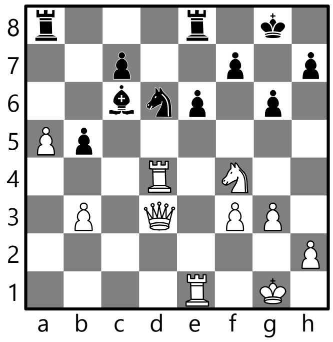
Los ataques dobles

Un ataque doble consiste en atacar simultáneamente dos piezas enemigas con un mismo movimiento. Sólo una de ellas podrá retirarse del ataque; la otra será capturada.



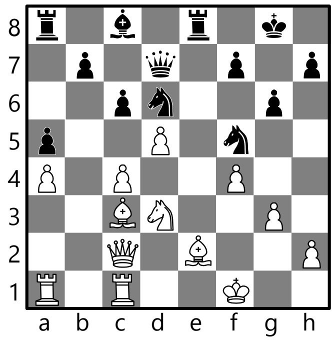
La Td5 amenaza al caballo blanco. Pero las blancas juegan Cb4!, y el atacante se convierte en atacado. El caballo amenaza ahora a la torre y al alfil a la vez. Uno de los dos será capturado. – Probablemente Negro optará por retirar al alfil, porque está desprotegido. Pero aun así, perderá una torre y ganará solamente un caballo.

Incluso un peón puede atacar a dos piezas a la vez. En este caso, aun si se pierde el peón atacante, la pérdida no es grande en comparación con lo que se gana:



(Arriba) Negro juega e5!. El peón amenaza a la torre y al caballo. Uno de los dos será capturado. – Los blancos podrían capturar al peón con su otra torre, pero así perderían también una torre, porque el peón está protegido desde atrás por la torre negra.

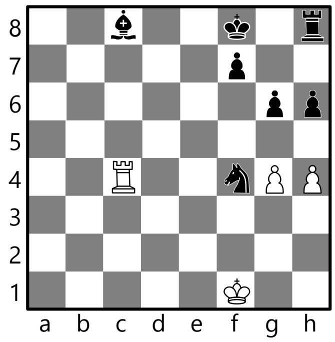
Un ataque doble es particularmente eficaz si una de las piezas atacadas es el rey. En este caso, el rey está obligado a salvarse del jaque, y eso permite capturar la otra pieza atacada.



Con Ce3+, Negro logra capturar a la dama blanca. Ella no puede escapar, porque el rey tiene que librarse del jaque.

La clavada

Esta es una maniobra eficaz que impide el movimiento de una pieza enemiga.

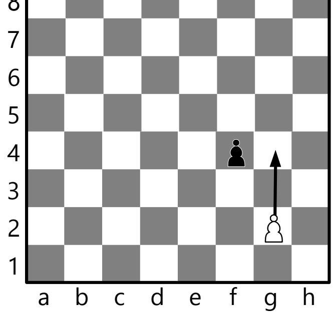


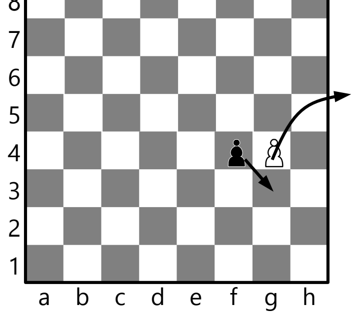
La torre blanca amenaza tanto al alfil como al caballo (un típico ataque doble). Pero en esta situación, ambos pueden salvarse e incluso capturar la torre, porque Negro juega Aa6!. Con eso, la torre está clavada: si se mueve, su propio rey estará en jaque. Por tanto, cualquier movimiento de la torre es ilegal. No importa lo que haga Blanco, el alfil capturará la torre en el siguiente movimiento.

Reglas adicionales

Existen algunas reglas adicionales del ajedrez que no necesitamos aplicar mientras jugamos solamente por diversión; pero que sí se toman en cuenta por los ajedrecistas serios:

Capturar "al paso"





Esta es una regla poco conocida acerca del movimiento de los peones. En la siguiente situación, es el turno de los blancos. El jugador se dice: "Si avanzo un paso con mi peón, de g2 a g3, el peón negro lo va a capturar. Mejor avanzo dos pasos." Y mueve su peón a g4.

Pero en este caso, los negros tienen el derecho de capturar al peón blanco, igual como si hubiera avanzado un solo paso: El peón de f4 avanza en diagonal a g3, y se quita del tablero al peón blanco en g4. Esto se llama "*capturar al paso*".

Pero esto se puede hacer solamente en el movimiento *inmediatamente después* del avance del peón. Si los negros hacen alguna otra jugada, y en el siguiente turno desean capturar ese peón en g4, ya no tienen derecho de hacerlo.

Si desean, pueden jugar otra "guerra de peones", ahora tomando en cuenta la regla del "capturar al paso".

"Pieza tocada, pieza movida"

Los partidos "serios" se juegan según la regla "Pieza tocada, pieza movida":

Si el jugador de turno toca una pieza suya, tiene que mover esa pieza; excepto si la pieza no puede realizar ningún movimiento legal.
Si el jugador de turno toca una pieza del oponente, tiene que capturar esa pieza; excepto si no puede capturarla con ningún movimiento legal.
Si el jugador de turno ha tocado varias piezas, tiene que mover o capturar la primera de ellas que permite hacerlo con un movimiento legal.

Si el jugador de turno ha movido una pieza y la ha soltado, no puede volver a cogerla para corregir el movimiento; excepto si ha efectuado un movimiento ilegal.

(Estas reglas te obligan a disciplinarte y a pensar bien, antes de realizar cualquier movimiento.)

Si un jugador quiere solamente ajustar la posición de algunas de sus piezas, sin realizar un movimiento, tiene que anunciar esta intención antes de tocar las piezas, diciendo por ejemplo: "Estoy ajustando".

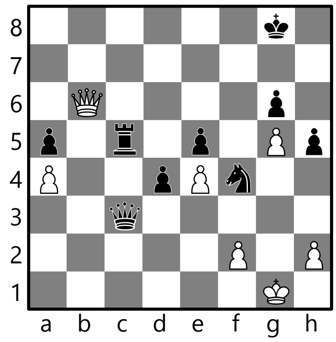
Un jugador no puede tocar ninguna pieza mientras no es su turno.

Triple repetición

Si en un partido ocurre por tercera vez la misma posición, y es el turno del mismo jugador, entonces un jugador puede reclamar tablas, o sea que el partido termine con empate. (Obviamente, reclamar eso es ventajoso solamente para el que está en peligro de perder el partido.)

Una aplicación frecuente de esta regla es cuando un jugador está en peligro de perder, pero tiene la posibilidad de poner al rey oponente en "jaque perpetuo":

Los negros están al punto de ganar. Amenazan con Dc1++, y parece que los blancos no pueden hacer nada para evitarlo.



Aun si lograran capturar la dama negra, le seguirá la torre, y se producirá el jaque mate igualmente:

1. Db1? Dc1+
2. Dxc1 Txc1++

Sin embargo, los blancos pueden lograr por lo menos un empate con Dd8+!. La dama blanca puede alternar eternamente entre los cuadros d8 y d7, y el rey negro estará continuamente en jaque. Los negros no pueden capturar a la dama blanca, ni interponer una pieza entre ella y el rey. El rey negro está confinado a los seis cuadros f8, g8, h8 y f7, g7, h7, así que necesariamente se producirá la triple repetición de una posición. Este es un empate por jaque perpetuo.

La regla de los 50 movimientos

Un jugador puede también reclamar tablas, si ambos jugadores hicieron 50 movimientos seguidos, sin que una pieza haya sido capturada, y sin que un peón se haya movido.
Entonces, si en el final de un partido llegas a jugar con un rey y una torre contra un rey solo, y no sabes cómo lograr un jaque mate, ¡no puedes probarlo eternamente! Después de 50 movimientos, tu oponente exigirá que el juego termine en empate.

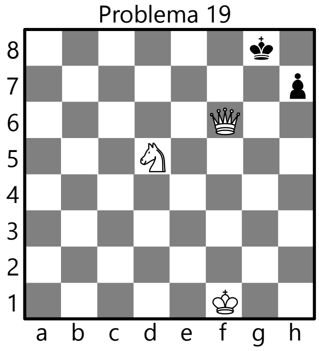
Nota: En las "Leyes del ajedrez" de la Federación Internacional de Ajedrez (FIDE), actualizadas al 2017, se añadieron las siguientes dos reglas:

El partido es tablas, aun sin que lo reclame un jugador:
- si la misma posición, con el mismo jugador de turno, ocurrió por *quinta* vez;
- o si se han efectuado por lo menos *75* movimientos seguidos por ambos jugadores sin movimientos de peón, ni capturas.

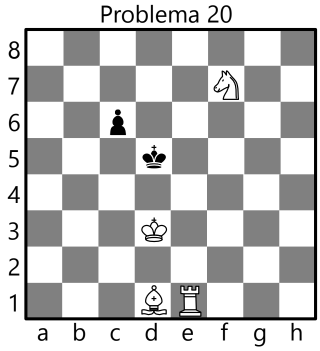
Unos problemas adicionales

En las siguientes cuatro situaciones, es el turno de las blancas. Pon al rey negro en jaque mate con un único movimiento.

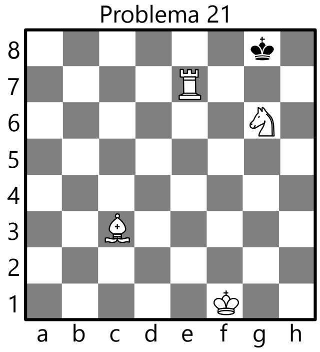
Problema 19



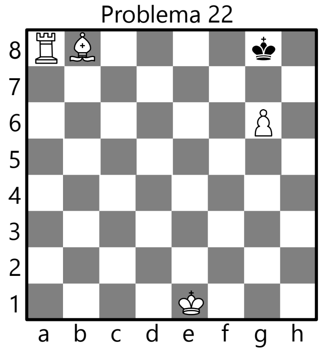
Problema 20



Problema 21

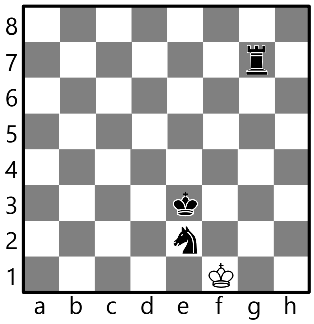


Problema 22

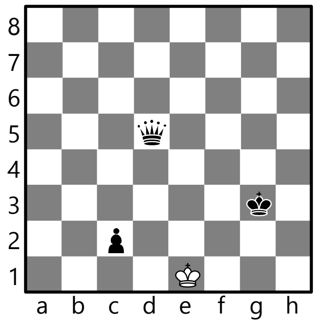


En las siguientes situaciones es el turno de Negro. Pon al rey blanco en jaque mate con un único movimiento.

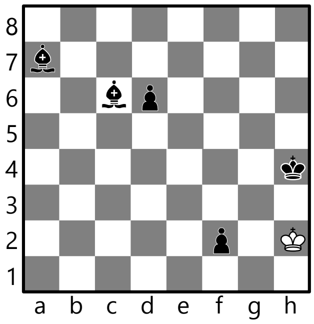
Problema 23



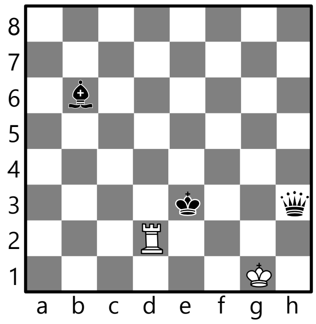
Problema 24



Problema 25



Problema 26



Problemas de jaque mate en 2 jugadas

En estos problemas, el jugador de turno logrará el jaque mate recién en su segunda jugada. ¿Cómo tiene que jugar para lograr eso con seguridad?

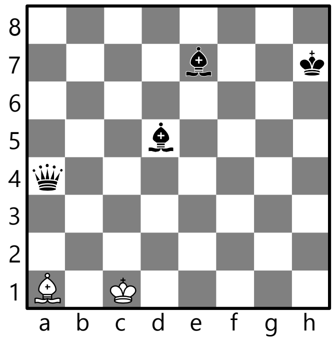
No es permitido asumir que el oponente responda con una determinada jugada, cuando tiene otra alternativa. El jaque mate debe asegurarse para *cualquier* respuesta posible del oponente.

Problema 27: Es el turno de Negro. Se podría proponer la siguiente solución:

1. ... Aa3+
2. Rb1 Db3++

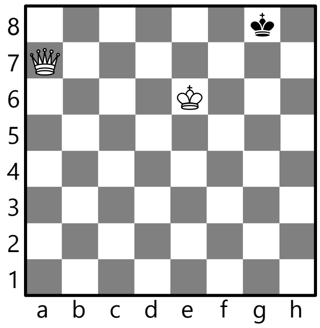
Pero esta solución no es válida, porque Blanco tiene otras alternativas:
2. Rd2, o 2. Ab2. En estos dos casos no se puede lograr el jaque mate en la segunda jugada. Entonces, la primera jugada de Negro tiene que ser otra. ¿La encuentras?

Problema 27

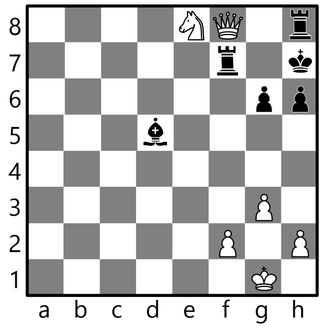


Siguen algunos otros problemas de este tipo. En el Problema 30 es el turno de las negras; en los otros problemas juegan las blancas. Se debe lograr el jaque mate en 2 jugadas:

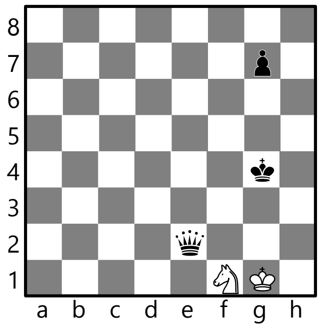
Problema 28



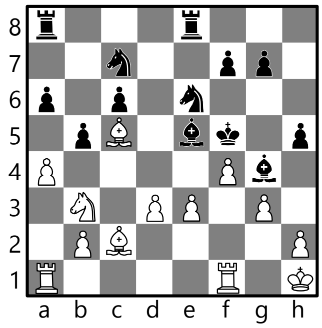
Problema 29



Problema 30



Problema 31



Matemática divina

Con ingenio se hace la guerra

El juego de ajedrez se origina en los razonamientos estratégicos que los generales de los ejércitos tenían que hacer en los tiempos antiguos. Así dice también el sabio rey Salomón: "Porque con ingenio harás la guerra; y la salvación está en la multitud de consejeros." (Proverbios 24:6)

El juego de ajedrez nos puede ayudar para entrenar el ingenio – pero como seguidores de Jesús, ya no para hacer la guerra, sino para lograr metas buenas para el bien de los demás. Y en eso, igual como en el ajedrez, es también bueno dejarse aconsejar por personas experimentadas.

Unidad 75 - Actividades de razonamiento numérico

Prerrequisitos:

- Operaciones básicas.

Materiales necesarios:

- *(para los rompecabezas de sumas y de productos):* Cartón o cartulina, tijeras o cúter, goma.

Para los educadores

Esta Unidad no contiene "temas de enseñanza" sistemáticos. Presenta diversas actividades con números que se pueden resolver razonando con perseverancia. La mayoría de estas actividades se plantean en las Hojas de trabajo; el "Taller" contiene solamente las instrucciones o "reglas" correspondientes.

La idea no es que se resuelvan todos estos problemas seguidos. Los niños pueden resolverlos como tareas "sueltas", en cualquier momento que estén dispuestos a un desafío a su razonamiento. Por tanto, se recomienda tener estas hojas de trabajo listas durante el período entero, para aquellos alumnos que desean resolverlas como pasatiempo durante un período libre, o para intercalar entre dos otros temas de aprendizaje. Para la mayoría de estas actividades se requiere sólo un mínimo de conocimientos previos, por lo cual se pueden realizar en cualquier momento del período.

Diversas de estas actividades tienen sus soluciones o pautas correspondientes en el *Anexo A*.

TALLER

Sudoku

Hoja de trabajo 75.1-2 - Sudoku:

Este pasatiempo japonés consiste en completar el cuadrado con números, de manera que no haya dos números iguales en ninguna fila, columna, o subdivisión del cuadrado grande. (Las subdivisiones son las que se marcan con líneas más gruesas. Normalmente son rectangulares o cuadrados; pero como vemos en las hojas de trabajo, pueden también tener otras formas.)

En un sudoku de 6 x 6 se usan los números de 1 a 6, en uno de 7 x 7 los números de 1 a 7, en uno de 9 x 9 los números de 1 a 9.

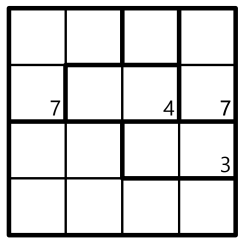
Hoja de trabajo 75.3 - Sudokus irregulares:

Estos son sudokus donde las subdivisiones no son rectangulares, sino que tienen cualquier forma irregular. La regla es la misma: No debe haber números repetidos en ninguna fila, columna, o subdivisión.

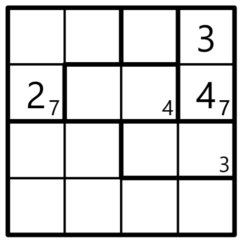
Hoja de trabajo 75.4 - Sudoku de sumas:

En esta variación, la suma de los números contenidos en cada subdivisión tiene que ser igual al número indicado. Por el otro lado, una subdivisión puede contener números iguales, con tal que no se encuentren en la misma fila o columna. Por lo demás, aplica la regla general del sudoku: No pueden repetirse números en ninguna fila y en ninguna columna.

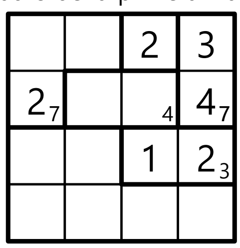
Ejemplo:



Podemos comenzar con la sección a la derecha que suma 7: Los números tienen que ser 3 y 4, no hay otra posibilidad. En la segunda fila, en el medio, hay dos cuadros que suman 4. Aquí, la única posibilidad es 1+3. (No puede ser 2+2, porque tendríamos dos números repetidos.) Entonces, en la sección con la suma 7, el 3 debe estar arriba y el 4 abajo, porque el 3 no puede repetirse en la segunda fila. Con eso sabemos también que el primer número en la segunda fila tiene que ser 2.

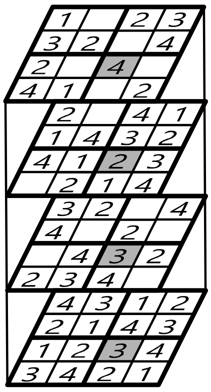


Ahora fijémonos en los tres cuadros arriba a la izquierda, que suman 7. Uno de ellos acabamos de llenar. Los restantes tienen que sumar 5. Eso tiene que ser 1+4. (No puede ser 2+3, porque se repetiría el 3 en la primera fila.) Con eso sabemos que el tercer cuadro de la primera fila debe contener el 2. Y con eso podemos distribuir los números 1 y 2 correctamente en los cuadros que suman 3, porque la tercera columna no puede tener otro 2:

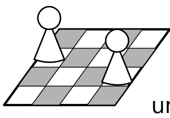


Pero ahora podemos también ubicar los números 1 y 3 correctamente en la segunda fila. Los números restantes ya no necesitan más pautas: se pueden completar siguiendo las reglas normales del sudoku.

Hoja de trabajo 75.5-6 - Sudoku tridimensional:



El sudoku tridimensional consiste en 4 resp. 6 sudokus individuales, que deben imaginarse puestos uno encima del otro como los pisos de un edificio. Dentro de cada sudoku individual deben cumplirse las reglas normales del sudoku. Además, tampoco deben ocurrir números repetidos en las columnas verticales a través de todos los pisos. Por ejemplo, la situación dibujada al lado contiene un error, porque la "columna" marcada contiene dos veces el número 3.



Sudoku por turnos

El sudoku se puede también jugar como un juego de estrategia entre dos jugadores:

En una hoja de papel cuadriculado, diseñen un esquema de sudoku vacío. (Para un juego fácil pueden usar uno de 6 x 6; para un juego más difícil uno de 9 x 9.)

Por turnos, cada jugador llena uno de los cuadraditos con un número de 1 a 9 (resp. de 1 a 6, si usan un sudoku de 6 x 6). Se deben cumplir las reglas del sudoku: Dentro de una fila, columna, o subdivisión no puede haber dos números iguales.

Pierde el jugador que en su turno ya no puede colocar ningún número según las reglas.

Por ejemplo en la situación a la derecha, el jugador de turno pierde, porque aquí ya no es posible añadir un número de manera que cumpla las reglas del sudoku.

3	4	2			5
	2	5		1	6
6	5	1	4	3	
4			1	5	2
5	6		3	4	
2	3	4	6		1

Kakuro

Hojas de trabajo 75.7-9 - Kakuro:

Los cuadraditos deben llenarse como un crucigrama, pero en vez de letras usamos los números de 1 a 9. Los números de cada "palabra" resp. sección horizontal o vertical del crucigrama deben dar juntos la suma indicada a la izquierda resp. arriba de la sección. Además, dentro de una sección no se debe repetir ningún número.

Ejemplo:

	10	6
4	3	1
12	7	5

4 es la suma de 1 + 3. (No podemos usar 2 + 2, porque tendríamos el 2 repetido.) Pero si ponemos el 3 en la segunda columna, tendríamos en esa columna 3 + 3 para que la suma sea 6. O sea, otra vez un número repetido, eso no es permitido. Entonces, el 3 va en la primera columna y el 1 en la segunda. Con eso podemos completar lo que falta.

Hoja de trabajo 75.10-11 - MultipliKakuro:

En el "MultipliKakuro", los números dados no indican la suma, sino el *producto* de los números en la sección correspondiente. Las otras reglas son iguales como en el kakuro normal: Se usan los números de 1 a 9, y dentro de una sección no se deben repetir números iguales.

Ejemplo:

	18	6
9	9	1
12	2	6

9 se puede obtener multiplicando 3 x 3 ó 1 x 9. Pero no se pueden repetir números, entonces solamente 1 x 9 es permitido. – 9 no es ningún divisor de 6, entonces en la segunda columna tenemos que escribir el 1 y en la primera el 9. Con eso se puede completar lo que falta.

Rompecabezas de sumas (*Hoja de trabajo 75.12)*

Corta cada uno de los 4 cuadrados grandes, y pégalo con goma sobre un cuadrado de cartulina o cartón, dejando un margen por la derecha y abajo. Corta los 9 cuadrados blancos pequeños. Pega el marco que queda sobre otro cuadrado del mismo tamaño como fondo.
El desafío consiste en colocar los 9 cuadraditos en el marco, de manera que la suma de cada fila y de cada columna sea la indicada en el margen.

Rompecabezas de productos (*Hoja de trabajo 75.13)*

Igual como la hoja anterior. Solamente que aquí, los números en los márgenes indican no las sumas, sino los *productos* que deben resultar, al multiplicar los números de la fila resp. columna correspondiente.

0 – 1 – 2, 0 – 3 – 4, etc. *(Hojas de trabajo 75.14-15)*

Estos cuadrados deben llenarse con números, de manera que la suma de cada fila y de cada columna sea el número indicado. Además, dentro de una subdivisión o "pieza de rompecabezas", todos los números tienen que ser iguales. En los problemas marcados con "0 – 1 – 2", se pueden usar solamente los números 0, 1 y 2. En los "0 – 3 – 4" se usan los números 0, 3 y 4; etc.

Ejemplo:
La columna izquierda tiene que sumar 3. Ya que es una sola "pieza de rompecabezas", todos sus números tienen que ser iguales, entonces debe contener 3 veces el 1. Desde allí se pueden fácilmente llenar las otras piezas.

	3	4	6
5	1	2	2
3	1	0	2
5	1	2	2

Los problemas en las hojas de trabajo requieren razonamientos un poco más complicados.

Los problemas de la ***Hoja de trabajo 75.14*** son fáciles. La ***Hoja 75.15*** es más difícil.

En la última fila de problemas de la ***Hoja 75.15*** ya no se da ninguna pauta acerca de los números que se deben usar; pero deben ser números enteros positivos, o el cero. Y sigue aplicándose la regla de que dentro de una "pieza de rompecabezas", todos los números tienen que ser iguales.

Operaciones cruzadas *(Hojas de trabajo 75.16-17)*

Cada cuadradito debe llenarse con una cifra, de manera que todas las operaciones sean correctas, tanto las que son escritas horizontalmente como las escritas verticalmente. Cada cuadradito debe contener exactamente una cifra, y no se pueden aumentar cifras afuera de los cuadraditos. Ningún número comienza con cero; excepto si fuera el número cero de una única cifra.

El problema **a)** tiene suficientes datos para poder resolverlo directamente. Los problemas **b), c), d)** requieren unos razonamientos adicionales, y a veces hay que probar con diferentes alternativas hasta encontrar la correcta. Los problemas desde **e)** en adelante requieren capacidades de razonamiento un poco más avanzadas, y bastante perseverancia. Se necesita experimentar con diferentes alternativas, pero a la vez hay que darse cuenta cuáles alternativas se pueden descartar desde el inicio porque son imposibles.

Operaciones incompletas *(Hojas de trabajo 75.18-20)*

En estas operaciones hay que descubrir las cifras que faltan, para que las operaciones sean correctas. Cada posición donde falta una cifra, está marcada con un punto. No se pueden añadir cifras en un lugar donde no hay ningún punto.

Como regla adicional, ***ningún número comienza con cero,*** excepto en el cálculo de las divisiones, donde un residuo parcial podría ser cero, antes de bajar la siguiente cifra.

Para completar estas operaciones, a menudo será necesario razonar con la ayuda de la operación inversa. Esta clase de problemas son útiles para profundizar el entendimiento de lo que pasa con los números en estos procedimientos escritos.

En algunos de los problemas un poco más difíciles, podría parecer que los datos son insuficientes. Pero en estos casos se pueden sacar conclusiones adicionales desde la *cantidad de cifras* que tiene cada número. Cada problema tiene una única solución correcta; con una excepción que se indica en el *Anexo A*.

Crucinúmeros (*Hojas de trabajo 75.21-22)*

Los "crucinúmeros" funcionan igual como los crucigramas: Se deben llenar sus campos, tanto en dirección horizontal como vertical, según las descripciones dadas. Solamente que los llenamos con números en vez de palabras, una cifra en cada cuadradito.

En todos los crucinúmeros de estas hojas, los números A, B, C se leen desde arriba hacia abajo, y D, E, F se leen desde la izquierda hacia la derecha.

Como regla adicional, ***ningún número comienza con cero.***

Los crucinúmeros "fáciles y medianos" ***(Hoja 75.21)*** no requieren mucho razonamiento; generalmente es suficiente con descubrir en qué orden se deben calcular los números para encontrar todos. Solamente el no.6. es un poco más exigente.

Los crucinúmeros "difíciles" requieren razonamientos un poco más avanzados.

Criptogramas de cifras - *Hoja de trabajo 75.23*

Criptogramas son operaciones matemáticas "cifradas", donde cada cifra se representa por una letra o un símbolo particular. Las reglas son:

Dentro de un criptograma – que puede contener más que una operación –, letras (o símbolos) iguales significan cifras iguales; letras (o símbolos) distintos significan cifras distintas. El desafío consiste en descubrir de cada letra o símbolo, cuál cifra significa, y así "descifrar" las operaciones.

De un criptograma a otro, el significado de las letras o símbolos puede cambiar. Por ejemplo, si el criptograma ***a)*** contiene una letra D, y el criptograma ***b)*** contiene también una letra D, allí no necesariamente tiene que significar la misma cifra como en el criptograma ***a)***. O sea, cada criptograma es un problema independiente.

Pero si un único criptograma contiene varias operaciones, entonces los símbolos tienen el mismo significado en cada una de estas operaciones.

¡Los criptogramas no son álgebra! O sea, "AB" no significa "A multiplicado por B". Significa un número de dos cifras, A y B.

Ningún número comienza con cero. Pero en el interior de un número, o al final, sí pueden ocurrir ceros. O sea, en "ABC", la letra A no puede significar cero; pero B o C sí podría ser cero.

Un ejemplo muy sencillo:

A + A = B   A x A = B

Las únicas cifras que cumplen ambas condiciones son 2 y 4. Entonces A = 2 y B = 4. Las operaciones "descifradas" son:

2 + 2 = 4   2 x 2 = 4

Otro ejemplo:

M + M + M = NM

La única cifra M que cumple con esta operación es 5. Entonces N es 1, y la operación "descifrada" es:

5 + 5 + 5 = 15

Los criptogramas 1 a 11 tienen espacios para escribir las soluciones directamente en la hoja. A partir del no.12 habrá que escribirlas en una hoja aparte o en el cuaderno.

Unidad 76 - Rompecabezas y problemas diversos de razonamiento

Prerrequisitos:

- Operaciones básicas.
- *(Para los problemas con fósforos):* Figuras geométricas.

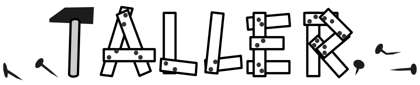
Materiales necesarios:

- *(Para fabricar los rompecabezas):* Cartón o cartulina, tijeras, goma, regletas Cuisenaire, billas o semillas del tamaño apropiado.
- Fósforos.

Para los educadores

Como hemos señalado en la introducción al Bloque VII, el razonamiento se incentiva solamente si no damos ninguna "receta" de cómo resolver un determinado tipo de problemas. El razonamiento consiste en que uno busque y descubra la "receta" por sí mismo.

Sin embargo, para quienes lo intentaron por mucho tiempo y se rindieron, el *Anexo A* contiene algunas pautas generales acerca del conteo de figuras, y unas pautas o soluciones específicos acerca de los problemas con fósforos, la investigación "Tetris y pentominóes", y los "Problemas para razonar". Los otros problemas deben poder resolverse sin pautas, con suficiente perseverancia.



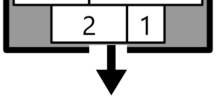
Laberintos – *Hojas de trabajo 76.1-5*

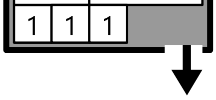
Cada laberinto en las Hojas de trabajo indica con flechas el inicio y el fin adónde hay que llegar. Quizás encuentran una manera sistemática de recorrer un laberinto y encontrar su salida.

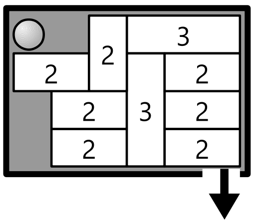
Maniobras con regletas Cuisenaire

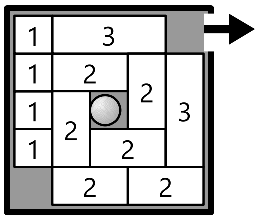
Esta clase de rompecabezas se conoce también como el "rompecabezas del estacionamiento", donde varios carros de diferentes tamaños están estacionados en un espacio reducido, y se trata de liberar el camino para un carro específico. Podemos fabricar esta clase de rompecabezas con unas cajitas de cartón, regletas Cuisenaire, y unas billas o semillas redondas del tamaño apropiado.

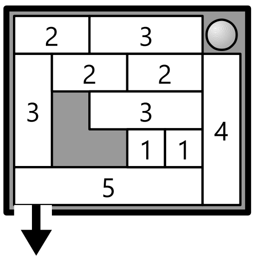
El libro de *Primaria I (Unidad 61)* contiene algunos rompecabezas fáciles y "medianos" de esta clase. Ahora haremos unos más difíciles:











Fabriquen para cada rompecabezas una cajita del tamaño correspondiente, un poquito más grande que las regletas juntas, de manera que pueden moverse fácilmente, pero que no pueden girarse o ponerse diagonalmente. En el lugar donde una flecha indica la salida, la pared lateral de la caja debe tener una apertura, por donde pueda salir la billa o pepa. Coloquen las regletas y la billa o pepa en la posición inicial, como indica el dibujo.

La meta consiste en liberar la billa, para que pueda salir de la caja por la apertura señalada. Eso debe lograrse, moviendo las regletas de manera horizontal o vertical por donde haya un espacio libre. No se permite girar las regletas o cambiar su orientación; tampoco se permite sacarlas fuera de la caja, ni siquiera parcialmente. ¿En cuántos movimientos lo logran?

Colorea el mapa *(Hoja de trabajo 76.6)*

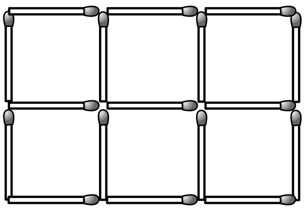
Cada campo de los mapas debe colorearse con uno de los colores rojo, azul, amarillo, o verde; de manera que no haya dos campos adyacentes del mismo color. Para hacerlo un poco más difícil, algunos campos ya tienen sus colores asignados.

Nota: Este tipo de problemas está relacionado con el famoso "Teorema de los cuatro colores". Este teorema dice que para todo mapa plano, cuatro colores son suficientes para colorear los campos de tal manera que no haya campos adyacentes del mismo color. Ese fue el primer teorema de la historia donde un análisis computarizado jugó un papel importante en su demostración. Fue necesario analizar tantos casos particulares que hubiera sido imposible hacerlo "a mano".

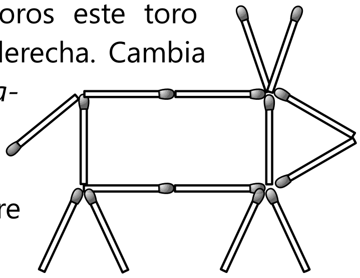
Problemas con fósforos

En todos los problemas siguientes no se permite romper, doblar, cortar, o de alguna otra manera maltratar los fósforos; tienen que permanecer intactos.

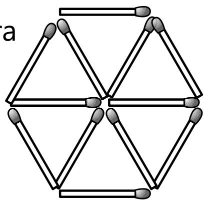
1) Forma con fósforos la figura dibujada. Quita 5 fósforos, de manera que sobren 3 cuadrados (y nada más).



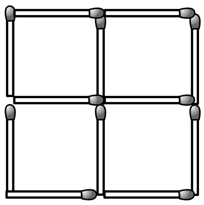
2) Forma con fósforos este toro que mira hacia la derecha. Cambia la posición de *solamente dos* fósforos, de manera que el toro mire hacia la izquierda.



3) Forma con fósforos la figura dibujada. Cambia la posición de 3 fósforos, de manera que la figura contenga 3 rombos y 6 paralelogramos.

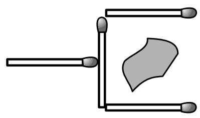


4) Forma con fósforos la figura dibujada. Quita 2 fósforos, de manera que sobren 2 cuadrados (y nada más).



5) Coloca tres fósforos sobre la mesa, de manera que ninguna de sus cabezas toca la mesa. Deben mantenerse en esta posición sin ningún otro apoyo.

6) Forma con fósforos este recogedor, y pon algún objeto pequeño como "basura". Se debe cambiar la posición de *solamente dos* fósforos, de manera que la basura se encuentre afuera del recogedor. (La basura no se puede mover de su sitio.)

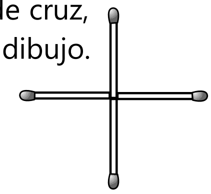


7) Forma un rectángulo, 10 fósforos de largo y 1 fósforo de ancho. Ahora forma con los mismos fósforos un rectángulo cuya área es el triple del primero.

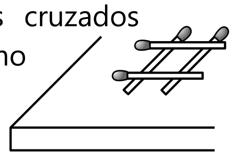
8) Con 6 fósforos forma 5 cuadrados.

*9) Con 7 fósforos forma 5 rombos y 6 triángulos equiláteros.

*10) Pon 4 fósforos en forma de cruz, exactamente como muestra el dibujo. Se debe formar un cuadrado, moviendo *un único fósforo*.



*11) Pon sobre la mesa dos fósforos lado a lado, y dos otros fósforos cruzados encima de los primeros, como muestra el dibujo. El desafío consiste en colocar los dos fósforos superiores *por debajo* de los dos primeros; pero tocando solamente los fósforos superiores, y sin usar alguna otra herramienta u objeto.

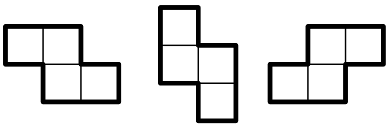


Investigación

Tetris y pentominóes

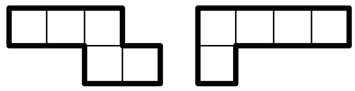
Quizás conoces los "tetris" como juego de computadora. El nombre completo de esas figuras es "tetrominóes". Eso significa: "figuras que se pueden formar con juntar cuatro cuadrados". Investigaremos unas preguntas relacionadas:

a) ¿Cuántos "tetris" diferentes existen? – Dibújalos en papel cuadriculado.
Las figuras que son reflejos o rotaciones de otras, no cuentan como diferentes. Por ejemplo, las figuras siguientes representan todas el mismo tetri:



b) Fabrica un juego de tetris (uno de cada uno) de cartón o madera. Intenta formar un rectángulo con todos los tetris juntos. ¿Encuentras una solución? (Pero tiene que ser un rectángulo "sólido", no uno con huecos.)

c) Investiguemos ahora los "pentominóes". Esas son figuras compuestas de *cinco* cuadraditos.



¿Cuántos pentominóes diferentes puedes encontrar?

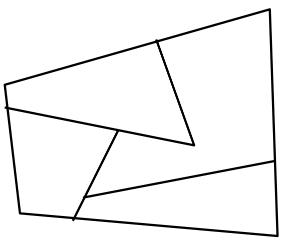
d) Fabrica un juego de pentominóes (uno de cada uno) de cartón o madera. Intenta formar rectángulos, usando tantos pentominóes como quieres. ¿Qué clases de rectángulos puedes formar?

***e)** Intenta ahora formar un rectángulo, usando *todos* los pentominóes. ¿Qué clases de rectángulos puedes formar así?

***f)** Si añades un cuadrado de 2 x 2 cuadraditos, con todos los pentominóes y ese cuadrado juntos se puede formar un cuadrado grande. ¿Descubres cómo?

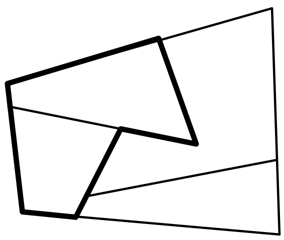
g) Plantea y resuelve problemas similares para figuras de 6 cuadraditos ("hexominóes"), de 7 cuadraditos; o figuras similares compuestas de triángulos equiláteros, o de hexágonos regulares ...

Nota: Un problema relacionado es el de los "tetris tridimensionales" en la *Unidad 71*.



Conteo de figuras

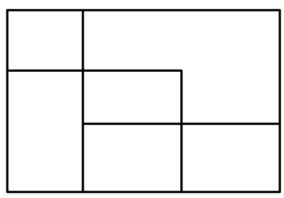
¿Cuántos polígonos contiene este dibujo? – Vemos que está compuesto de cuatro polígonos. Pero las composiciones de dos o más de esos polígonos son también polígonos, como por ejemplo el que está marcado con líneas gruesas en el dibujo a la derecha:



Tomando en cuenta todas estas combinaciones, ¿cuántos polígonos hay?

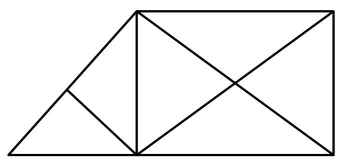
Trata de descubrir una manera sistemática de encontrar y enumerar todos los polígonos.

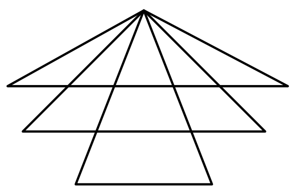
Después haz lo mismo con los siguientes problemas:



2) ¿Cuántos rectángulos hay en este dibujo?

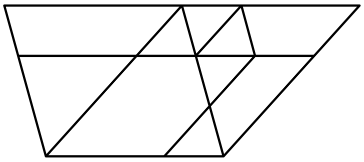
3) ¿Cuántos triángulos hay en este dibujo? ¿y cuántos cuadriláteros?



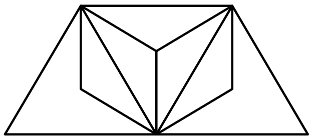


4) ¿Cuántos triángulos se pueden encontrar en este dibujo?

5) ¿Cuántos paralelogramos encuentras en este dibujo?



6) ¿Cuántos cuadriláteros contiene este dibujo?



Problemas de números para razonar:

Nota: En el nivel de Secundaria resolveremos la mayoría de los problemas de esta clase con la ayuda del álgebra. Pero el álgebra requiere la capacidad del razonamiento abstracto, lo cual todavía no está desarrollado en la mayoría de los alumnos de primaria. Por eso preferimos en este nivel buscar soluciones mediante dibujos, manipulación de materiales concretos, y operaciones sencillas con números, lo cual es más accesible a los alumnos de primaria.

Billete falso

El cliente al vendedor: "Usted mismo admite que nunca en su vida ha visto un billete de 35.–, entonces ¿cómo puede afirmar que el mío es falso?"

1) Marta hace compras en la tienda y quiere pagar con un billete de 20.–, porque no tiene sencillo. El vendedor dice: "Lo siento, pero no puedo darle cambio. Si usted tuviera un billete de 50.–, podría darle cambio de ese." ¿Es posible esto? ¿Qué billetes tiene el vendedor en su caja? ¿Y qué podemos decir acerca del valor de las compras de Marta?

2) Cambia un billete de 10.– en monedas de 10 y de 20 centavos, de manera que en total sean 84 monedas.
(Si la moneda de su país no usa centavos: Cambia un billete de 1000.– en billetes resp. monedas de 10.– y de 20.– .)

3) Pedro almuerza en el restaurante y paga 14.40 por un menú y un postre. Si el menú cuesta el triple del postre, ¿cuánto vale el menú?

4) ¿Cuántas maneras diferentes existen para cambiar una moneda de 2.– en monedas menores? *(Suponiendo que existen monedas de 1.–, –.50, –.20 y –.10. Si la moneda de su país no usa centavos, adapte el problema con monedas o billetes mayores.)* – ¿Y para cambiar una moneda de 5.–?

5) En un estacionamiento hay carros y bicicletas; juntos tienen 60 ruedas. Son tres bicicletas más que carros. ¿Cuántos carros y cuántas bicicletas son?

6) De una canasta con huevos sacamos la mitad de los huevos que hay, más medio huevo. Todavía quedan 15 huevos en la canasta. ¿Cuántos huevos había al inicio? (Nota: No hemos roto ningún huevo.)

7) La señora Prudente compra en la tienda: un kilo de pan a 6.–, seis kilos de papas, un cuarto kilo de mantequilla a 4.80, y tres paquetes de fideos. La vendedora dice: "Son 38.50". – La señora Prudente no sabía cuánto costaban las papas y los fideos; sin embargo respondió: "Ud. debe haberse equivocado al sumar." La vendedora revisó la cuenta, y de hecho había sumado mal. ¿Cómo lo pudo saber la señora Prudente?

8) En el mercado cuestan 3 kg de peras igual que 4 kg de plátanos, 2 kg de manzanas igual que 5 kg de zanahorias, y 5 kg de plátanos igual que 3 kg de manzanas. Si las zanahorias cuestan 2.60 el kilo, ¿cuánto cuesta un kilo de peras?

9) Jorge tiene tantos hermanos como hermanas, pero su hermana Juana tiene el doble de hermanos que hermanas. ¿Cuántos niños y cuántas niñas hay en la familia de ellos?

10) En un establo hay conejos y gallinas. Los animales tienen juntos 35 cabezas y 94 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas son?

11) Mamá reparte fresas a los niños: "Si les diera 8 fresas a cada niño, un niño no recibiría nada. Si les doy 7 fresas a cada uno, va a sobrar una para mí." ¿Cuántos niños y cuántas fresas son?

12) Un edificio tiene tres pisos. 42 de sus habitantes tienen que subir gradas para llegar a su piso. Si los ocupantes del tercer piso salen, quedan 48 personas en el edificio. En el segundo piso viven tantas personas como en el primer piso y en el tercer piso juntos. ¿Cuántas personas viven en el edificio?

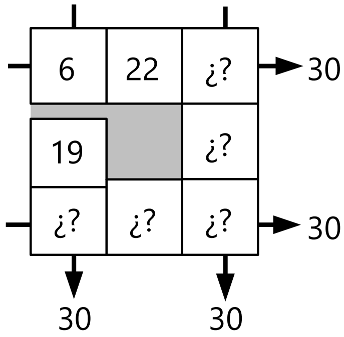
13) Un día, mamá se fue al mercado. En el camino vino a su encuentro una familia: papá, mamá y tres hijos, y cada uno de los hijos tenía su perro; además caminaban seis ovejas con ellos. ¿Cuántos pies iban al mercado?

14) La familia Martínez tiene cinco hijos. Débora es menor que Juan, pero mayor que Érica. Érica es menor que Martín. Nadia es mayor que Martín.
a) ¿Quién es menor de todos ?
b) Si sabemos adicionalmente que Juan tiene dos hermanos(as) menores, ¿quién es mayor de todos?

*15) La familia Pintor también tiene cinco hijos. Marcos tiene dos hermanas mayores, y ningún hermano mayor. Pablo tiene un único hermano menor, que se llama Pedro, y ningún hermano mayor. Eva es mayor que Fabiana. ¿Puedes ordenar los cinco hermanos según sus edades?

16) El señor Zweistein cría conejos en ocho jaulas grandes, que están ubicadas como muestra el dibujo abajo. Tenía 99 conejos. Para controlar si estaban completos, usaba un sistema particular: Contaba los conejos en cada una de las cuatro filas de tres jaulas adyacentes. Si en cada fila había 30 conejos, el señor Zweistein estaba satisfecho.

a) El dibuja indica el número de conejos en tres de las jaulas. ¿Puedes completar los números que corresponden a las otras jaulas?



b) Una noche, un ladrón entró al establo y robó un conejo. Pero el ladrón conocía el método de conteo del señor Zweistein. Por eso hizo un cambio de jaula con otros conejos, de manera que todas las filas sumaban nuevamente 30 conejos. Efectivamente, el señor Zweistein no se dio cuenta de que faltaba un conejo.
El ladrón, animado por su éxito, seguía robando conejos, pero logró siempre completar cada una de las cuatro filas con 30 conejos. ¿Cómo lo hizo? (No nacieron crías nuevas durante ese tiempo.)

c) Con todo, el ladrón cometió la imprudencia de robar los conejos siempre de la misma jaula. Después de robar 19 conejos, esa jaula quedó completamente vacía. Entonces el señor Zweistein se dio cuenta de los robos y comenzó a investigar, aunque las filas de 30 seguían completas. Si el ladrón hizo un mínimo de cambios, ¿cómo se distribuyeron los conejos en las jaulas después de ese último robo?

d) Finalmente el ladrón se arrepintió, restituyó el valor de los conejos robados, y de aquí en adelante utilizó su inteligencia para ayudar a los hijos del señor Zweistein con sus tareas de matemática. Pero todavía queremos saber cuántos conejos más podría haber robado, dejando intactas las filas de 30.

Unidad 77 - Análisis de juego: El gato

Materiales necesarios:
- Papel, lápiz.

Para los educadores

Análisis de juegos y razonamiento matemático

Un análisis de un juego es un asunto más profundo y más sistemático que simplemente jugarlo. Se intenta descubrir una estrategia que permite ganar el juego; se intenta sistematizar las jugadas posibles; se analiza cuál de los jugadores tiene las mejores posibilidades de ganar, y cómo terminará el juego si ambos usan la mejor estrategia posible; y se intenta *demostrar* (fundamentar lógicamente) que eso es efectivamente así.

Este proceso es un excelente entrenamiento del pensamiento matemático. El análisis de un juego requiere la misma clase de razonamientos como la elaboración de una demostración matemática: Distinguir casos; seguir diferentes hilos de pensamiento hasta su última consecuencia; evaluar argumentos y contra-argumentos; etc. Incluso existe un buen número de matemáticos profesionales que pasan mucho tiempo analizando juegos. Varios de los juegos de estrategia en la *Unidad 73* fueron inventados por matemáticos profesionales.

En el nivel de Primaria investigamos solamente juegos de información completa; o sea, donde cada jugador tiene pleno conocimiento de los movimientos de los otros jugadores. Y todavía no investigamos juegos que tienen elementos de azar como dados, cartas barajadas, etc; porque eso requeriría dominar el cálculo con probabilidades, lo cual no podemos exigir a este nivel.

Investigación

Este juego es muy conocido bajo diferentes nombres: "El gato", "Michi" (la palabra quechua para "gato"), "Triqui", y otros más. En un papel se dibuja un "tablero" de 3 x 3 cuadraditos. Por turnos, cada jugador llena una casilla libre con su símbolo: uno usa un círculo y el otro una X. Gana el que tiene primero tres de sus símbolos en línea recta; puede ser horizontal, vertical o diagonal.

Pregunta 1: Una pregunta fácil para comenzar: ¿En este juego puede haber empate? – Trata de dibujar una situación donde el juego ha terminado, y ninguno de los dos jugadores ha ganado.

Ahora vamos a investigar **estrategias ganadoras**. ¿Cómo tengo que jugar para tener más probabilidad de ganar? – Esta pregunta resume la investigación entera. Si deseas, puedes ahora mismo comenzar a investigar. Considera todas las posibilidades. Anota, describe y fundamenta tus resultados.

Si esto te parece poco concreto, entonces sigue leyendo y déjate guiar por las explicaciones y preguntas más específicas que siguen.

Si has jugado "el gato" varias veces, seguramente te darás cuenta cuando tienes la posibilidad de ganar enseguida. Por ejemplo en esta situación:

	O	O
X	X	

	O	O
X	X	X

Yo soy la X y es mi turno *(izquierda)*. Con esta jugada *(derecha)* gano el juego. – Dibuja otras situaciones donde puedes ganar enseguida, y dibuja la jugada que te hace ganar.

También hay situaciones donde no puedes ganar, pero puedes ver que tu oponente está al punto de ganar; pero es tu turno y todavía puedes impedirlo. En este ejemplo *(izquierda)*, yo soy X y es mi turno. No puedo ganar ahora; pero sé cómo tengo que jugar para que mi oponente no gane *(derecha)*. – Inventa también unas situaciones de este tipo, y dibuja la jugada que impide que el oponente gane.

	X	O
O	O	X

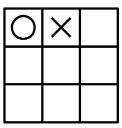
	X	O
O	O	X
X		

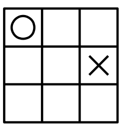
Pregunta 2: Un jugador más experimentado va a preparar su victoria con un turno de anticipación: ¿Puedes crear una situación como en el ejemplo anterior, pero de una manera que tu oponente *no puede impedir* que tú ganes? O sea, que él puede ver que estás al punto de ganar, pero no puede hacer nada para impedirlo? – Piensa bien cómo tendría que verse una tal situación.

Pregunta 3: Después de resolver la pregunta anterior, podemos adelantarnos aun más con nuestro pensamiento: ¿Qué tienes que hacer para no dar a tu oponente la oportunidad de crear una situación como en la Pregunta 2? – ¿Y cómo puedes preparar el terreno para que tú mismo puedas más adelante crear una tal situación ganadora? – O sea, tratamos de adelantarnos por aun más turnos en nuestro pensamiento.

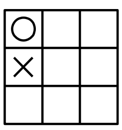
**** Pregunta 4:*** Con bastante paciencia podríamos incluso hacer un *análisis completo* del juego. O sea, elaborar una tabla que contenga *todos los partidos posibles* del "Gato", y de allí ver todas las consecuencias posibles de una jugada específica. Es posible hacer eso porque el "Gato" es un juego muy sencillo; pero es todavía bastante trabajo. Decide tú si quieres hacer eso o no.

Al comenzar, el primer jugador tiene 9 jugadas posibles, porque hay 9 casillas vacías. Pero muchas de estas jugadas son equivalentes, porque podemos rotar el tablero o reflejarlo en espejo. Por tanto, en realidad hay solamente tres jugadas distintas para comenzar el juego: una esquina, el medio de un borde, o la casilla del centro.





Para el segundo jugador, ahora ya hay más posibilidades. Por ejemplo, estas dos situaciones *(izquierda)* no son equivalentes. En cambio, la situación a la derecha sí es equivalente a la primera, porque podemos reflejarla a lo largo de la diagonal, y sale lo mismo.



Pregunta 5: ¿Cuál es la mejor jugada para comenzar el juego?
O sea, si yo soy el primer jugador, ¿dónde tengo que poner mi marca para tener mayores probabilidades de ganar? – Fundamenta **por qué** esta jugada es la mejor. En esto asumimos que el oponente es también un buen jugador, que no va a dejarte ganar así no más.

Pregunta 6: Si el primer jugador comienza con esta jugada mejor, ¿cuál es la mejor respuesta para el segundo jugador?
O sea, ¿dónde tiene que marcar el segundo jugador para que pueda todavía ganar, o por lo menos impedir que el primer jugador gane? – Y fundamenta **por qué**.

Pregunta 7: Responde a la pregunta anterior para *todas* las jugadas posibles del primer jugador: ¿Cuál es la mejor respuesta del segundo jugador si el primer jugador juega esquina, cuál si juega borde, y cuál si juega la casilla del centro?

Pregunta 8: ¿Cómo terminará un juego del "Gato", si ambos jugadores juegan según la mejor estrategia posible?
O sea, si cada uno es capaz de predecir todas las consecuencias posibles de una jugada, y siempre escoge la que promete las mayores posibilidades de ganar? ¿Quién ganará este juego, el que comienza o el segundo jugador? ¿O terminará en empate? ¿Y cuál será la situación final del juego?

Unidad 78 - Análisis de juego: ¿Quién llega a 100?

Materiales necesarios:
- Regletas Cuisenaire.
- Recta numérica hasta 100, o cinta métrica.
- *(Alternativamente):* Ábaco.

Investigación

Hemos presentado este juego para dos jugadores en el libro de *Primaria I (Unidad 33)*. Ahora que estamos más avanzados, investigaremos de manera sistemática cómo se puede ganar este juego.

El juego se juega con regletas Cuisenaire en una recta numérica o cinta métrica hasta 100, pegada en la mesa. Los jugadores, por turnos, construyen un "tren" largo con regletas, desde el cero hasta el 100. Cada uno en su turno aumenta *una* regleta. Puede escoger cualquiera, desde el 1 hasta el 10. El que llega exactamente al 100, gana.
No puedes renunciar a tu turno. O sea, cuando te toca, tienes que poner por lo menos un 1. No es permitido poner nada.

Se puede jugar también con un ábaco de 100 cuentas. Se comienza en cero, y cada jugador en su turno aumenta unas cuentas, como mínimo 1 y como máximo 10. Gana el que "llena" completamente el ábaco en su turno.

Juéguenlo algunas veces y observen lo que sucede. Después traten de descubrir qué tienen que hacer para ganar. Encuentren respuestas a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la mejor estrategia para ganar?

2. ¿Existe una estrategia "segura"? o sea, una que te permite ganar *siempre*?

3. ¿Cuál es la mejor manera de *comenzar* el juego?

4. ¿Es mejor ser el primer o el segundo jugador? ¿Por qué?

Después verifiquen sus respuestas: Jueguen según sus estrategias, y observen si de verdad ganan así.

Daré ahora mismo unas pautas. La meta es que yo llegue al 100. O sea, es el *fin* del juego que nos interesa. Entonces podemos razonar en la dirección opuesta, desde el fin hacia el inicio. En el último turno, yo llego a 100. Entonces, ¿qué debe haber hecho mi oponente en *su* último turno? En otras palabras, ¿desde cuáles números puedo yo haber llegado al 100?
Mi oponente, en su último turno, debe haber llegado a uno de esos números. Entonces, ¿qué podría yo haber hecho en mi penúltimo turno? ¿Hay algo que yo puedo hacer para *obligar* a mi oponente a que llegue a uno de estos números, de donde yo puedo después llegar a 100?
Así podemos quizás encontrar una condición que yo debo lograr en mi *penúltimo* turno, para que yo pueda ganar en mi *último* turno. Y así podemos seguir razonando, retrocediendo, hasta que lleguemos al inicio del juego, y entonces podemos quizás decir cuál es la mejor manera de *comenzar* el juego.

Si han logrado analizar este juego completamente, quizás van a querer analizar unas variaciones. Por ejemplo:

Pregunta 5: Podríamos quitar del juego todas las regletas de 10. O sea, jugamos solamente con los números de 1 a 9. ¿Cómo tendríamos que cambiar nuestra estrategia en este caso? ¿Quién tiene las mejores posibilidades de ganar?

Pregunta 6: Lo mismo, si jugamos solamente con los números de 4 a 10.

Pregunta 7: Lo mismo, si jugamos solamente con los números impares.

Pregunta 8: Inventa tus propias variaciones e investígalas.

Unidad 79 - Análisis de juego: Golf matemático

Materiales necesarios:

- Regletas Cuisenaire.
- Recta numérica hasta 100, o cinta métrica.

Investigación

Este juego, como el de la Unidad anterior, ya hemos presentado en el libro de *Primaria I (Unidad 42)*. Pero ahora no solamente lo vamos a jugar; vamos a investigar algunas de sus propiedades matemáticas.

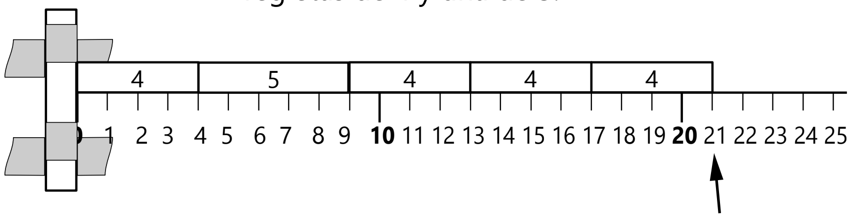
En el "Golf matemático" se trata de llegar de un número inicial a un número final, pero en el camino se pueden aplicar solamente unas cuantas operaciones específicas. Nos imaginamos una "pelota" en el número inicial, y las operaciones son como "palas de golf" que aplicamos a la "pelota" para que avance a otro número.

Existen muchas variaciones de este juego, pero vamos a usar una forma muy sencilla. Comenzamos siempre en cero, y como operaciones podemos escoger solamente entre dos números que sumamos. Por ejemplo, podemos sumar 4 ó 5, y la meta es 21.

De esta forma podemos jugarlo con regletas Cuisenaire como el juego ¿Quién llega a 100?: Pegamos una recta numérica o cinta métrica sobre la mesa, y formamos un "tren" que llegue desde el cero hasta el 21, usando solamente regletas de 4 y de 5.

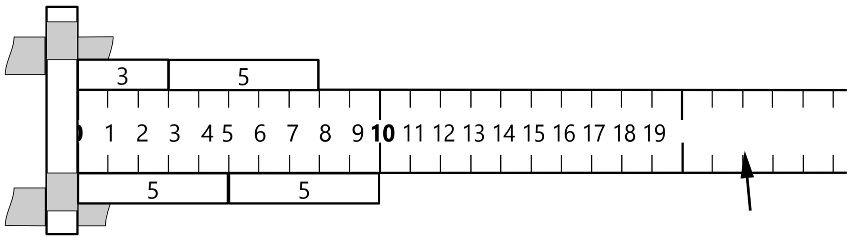
El "Golf matemático" se puede jugar a solas, o entre dos. Si juego yo solo, simplemente intento alcanzar 21, usando solamente regletas de 4 o de 5. Pero tengo que llegar *exactamente*. Si llego al 22 o al 23, he perdido. Entonces no me sirve poner puros cincos, porque voy a llegar a 20 y no tengo ninguna posibilidad de alcanzar 21.

Probando, resulta que hay una única manera que funciona (excepto que podemos intercambiar el orden las regletas): con cuatro regletas de 4 y una de 5.



Intenta diferentes combinaciones. Por ejemplo, llega al 27 con regletas de 4 y de 7. O llega al 61 con regletas de 7 y de 10. Haz unos experimentos propios.

Si quieren jugarlo entre dos, entonces cada jugador construye su propio tren por su lado, y colocan las regletas por turnos. En el siguiente ejemplo queremos alcanzar 22 con regletas de 3 y de 5. Cuando te toca tu turno, puedes hacer una de dos cosas: Puedes colocar una regleta al final; o puedes quitar la última regleta que pusiste, por si te das cuenta de que te has equivocado. El que llega primero a la meta, gana. Si alguien sobrepasa la meta, pierde.



Para que sea justo, introducimos una regla adicional: Si el primer jugador llega a la meta, y el segundo jugador puede enseguida también llegar a la meta, entonces tenemos un empate, porque ambos llegaron con el mismo número de turnos.

Cuando ya saben jugar, añadimos una regla más: No se puede colocar una regleta sólo para probar, y después poner otra. Una vez puesta, la regleta se queda aquí hasta el siguiente turno. Así aprenden a pensar antes de actuar.

¿Ya lo jugaron con varias metas y números distintos? Entonces comencemos a investigarlo más seriamente.

Pregunta 1: ¿Es posible calcular el juego entero desde el inicio? ¿Y cómo se haría eso?

Por ejemplo, si tenemos regletas de 3 y de 5, y la meta es 22, ¿puedo calcular con anticipación cuántas regletas de 3 tengo que poner, y cuántas regletas de 5? – Haz varios ejemplos con distintos números, e intenta encontrar un principio general.

Pregunta 2: Si escogiste ya varias combinaciones para investigar la Pregunta 1, te habrás dado cuenta de que algunas son imposibles. Por ejemplo, intenta llegar al 19 con regletas de 5 y de 6. Encontrarás que no se puede. O intenta llegar al 50 con regletas de 3 y de 9.
Investiga entonces los *juegos imposibles*. ¿Cuáles propiedades hacen que un juego sea imposible? – Si tenemos una combinación de regletas permitidas (por ejemplo 5 y 6), ¿cuáles son las metas que no se pueden alcanzar con estas regletas? – Para eso quizás te ayuda si inventas una manera sistemática de anotar todos los números que sí se pueden alcanzar.

Haz lo mismo con otras combinaciones de regletas. Trata de descubrir unas propiedades generales que te permitan predecir las "metas imposibles".

Pregunta 3: Si tienes una combinación de dos regletas dadas, y averiguas sus "metas imposibles", ¿estas metas imposibles terminan alguna vez? ¿o hay infinitas de ellas?
Por ejemplo, si las regletas permitidas son 7 y 9, ¿hay un "último número" que es imposible alcanzar con ellas? ¿O existen números arbitrariamente grandes que no se pueden alcanzar con las regletas de 7 y de 9?
¿y si las regletas permitidas son 6 y 9? ¿Es esta situación similar a la anterior, o no?

¿Para *cuáles* combinaciones de regletas hay un último número imposible? ¿Y para cuáles nunca terminan? ¿Por qué?

* ***Pregunta 4:*** Si jugamos entre dos, al segundo jugador se le podría ocurrir simplemente copiar las jugadas del primero. Para que eso no suceda, podríamos dar al segundo jugador una combinación *distinta* de regletas. Digamos, la meta es 21, pero el primer jugador juega con regletas de 4 y de 5, mientras el segundo juega con regletas de 3 y de 5. Este juego es equitativo, porque el primer jugador puede llegar con cinco regletas, y la solución más corta para el segundo jugador también requiere cinco regletas.
Ahora, el desafío consiste en descubrir tales juegos equitativos. O sea, juegos donde ambos jugadores tienen que alcanzar la misma meta, pero con distintas combinaciones de regletas; y sin embargo la solución más corta para ambos jugadores requiere la misma cantidad de regletas.
Así pueden involucrarse tres personas en el juego: El mayor, o el que es mejor en matemática, inventa juegos equitativos; y los otros dos los juegan.

¿Descubres otros "juegos equitativos"? ¿Puedes incluso descubrir un método sistemático para crear tales "juegos equitativos"?

Unidad 80 - Números romanos (y otros)

TALLER

Buscamos números romanos

Busquen objetos, libros, letreros, etc, que contienen números romanos. Hoy en día ya no son tan usuales. Pero todavía los encontramos en algunos lugares. Por ejemplo, algunos relojes antiguos tienen los números de 1 a 12 en números romanos. En algunos libros, el año de impresión se indica en números romanos. En libros de historia podemos encontrar que los siglos se indican en números romanos (el siglo XVI, el siglo XIX ...), y también en los nombres de reyes y otros gobernantes (el emperador Carlos V, el rey Enrique VI, el papa Juan XXIII ...). Algunos edificios antiguos pueden tener un letrero que dice por ejemplo: "Construido en el año MDCCCXLIII". También algunas instituciones usan todavía números romanos en anuncios como: "Invitación a nuestro LXXV aniversario".

Investiguen estos números. Quizás descubren por ustedes mismos el sistema según el cual se construyen. Tomen tiempo para investigarlo, antes de continuar a la siguiente sección. ¿Logras escribir los números de 1 a 100 en números romanos?

Ahora lo escribimos

Clave para la construcción de los números romanos

Los signos básicos son los siguientes:

I = 1	V = 5
X = 10	L = 50
C = 100	D = 500
M = 1000	

Se dice que la letra V se escogió porque se parece a una mano con sus 5 dedos extendidos; y la X porque es la combinación de dos V's (una parada y la otra volteada de cabeza), o sea dos manos.
La C y la M obviamente son abreviaciones de "cien" y "mil", respectivamente.

Para números mayores a mil existían diferentes sistemas en diferentes épocas o lugares; no trataremos esos aquí, porque es muy inusual escribir números tan grandes con números romanos.

Los signos I, X, C, M se pueden repetir hasta 3 veces:

III = 3, XX = 20, CCC = 300, MM = 2000.

Los signos que significan números con "5", o sea V, L, D, se pueden usar una única vez en un número, y se combinan con los otros:

VII = 7, LXXX = 80, DC = 600, DV = 505.

Al combinar varios signos, se escriben primero los que significan números mayores, y después los menores:

MCXI = 1111, MDCV = 1605,
DCCCLXXXVIII = 888.

Practica:

Lee los siguientes números romanos:

VIII, XXXVI, LXII, MVI, DLXXX, MMMCCVII.

Escribe en números romanos:

17, 66, 727, 2832, 3008, 1055.

Ahora la regla que causa más dificultad a los principiantes: ¿Cómo se escriben los números 4, 9, 40, 90, etc? No se permite repetir un signo cuatro veces. Lo que hacían los antiguos romanos en estos casos, fue escribir el signo menor *antes* del mayor, para indicar que se debe *restar* del mayor:

IV = 5 – 1 = 4
IX = 10 – 1 = 9
XL = 50 – 10 = 40
XC = 100 – 10 = 90
CD = 500 – 100 = 400
CM = 1000 – 100 = 900

Sin embargo, no se puede combinar un signo "muy pequeño" con uno "muy grande" de esta manera. Por ejemplo, no se permite escribir ID = 500 – 1 = 499. En este caso habría que escribir:

499 = 400 + 90 + 9 = CDXCIX.

Practica esta regla:

Lee los siguientes números romanos:

CMVIII, DLIV, DCCXCVI, MMCMLXXIX, CCCXCIV, MCDLXIV.

Escribe en números romanos:

89, 497, 646, 464, 1919, 2094, 1999.

Investiga: De los números de 1 a 4000, ¿cuál es el que requiere la mayor cantidad de signos cuando se escribe en números romanos?

Hacemos de escribas romanos

Hagan alguna actividad que requiere escribir números. Por ejemplo, jueguen a la tienda y anoten los precios, los ingresos y egresos. Pero esta vez escriban todo en números romanos. O hagan una actividad de estimar cantidades o medidas, y escriban sus estimaciones en números romanos.

Si desean hacerlo de manera más realista, escriban con pluma y tinta, o con un palito en una tablita de arcilla, como se hacía en los tiempos antiguos.

Después de estas actividades, ¡estarán agradecidos por nuestro sistema decimal!

Ampliaciones

Presentaremos algunos otros sistemas antiguos de numeración. Estos ya no están en uso; pero quizás a algunos niños les interesa cómo otras civilizaciones escribían los números.

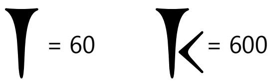
Números babilónicos

Los antiguos sumerios y babilonios usaban la escritura cuneiforme: Usaban varillas ("cuñas") de diferentes formas que presionaban contra una tabla de arcilla para grabar los signos (letras y números). Este sistema estaba en uso aproximadamente desde 3000 A.C. hasta 500 A.C. Abraham, quien nació y creció dentro de la cultura babilónica, debe haber usado la escritura cuneiforme. También los jóvenes que Nabucodonosor llevó a su corte, deben haber aprendido a escribir de esta manera.

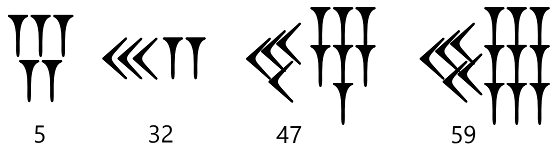
Explicaré su manera de escribir números; entonces tú decide si quieres practicarlo:

Prácticamente todos los números, inclusive fracciones, se escribían a base de solamente dos símbolos, uno para el 1 y otro para el 10:

Aunque existían también símbolos para 60 y para 600, pero se podían escribir todos los números sin ellos:

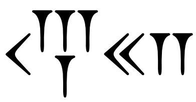


Los símbolos para 1 y para 10 se agrupaban tantas veces como era necesario, para formar todos los números de 1 a 59. Unos ejemplos:



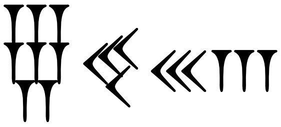
5 32 47 59

El 60 y sus múltiplos se escribían igual como el 1, el 2, etc. Entonces, cuando se escribían dos números seguidos, se sabía que el primero era un múltiplo de 60, y el segundo significaba unidades:



14, 22 = 14 x 60 + 22 = 862.

Ellos tenían entonces un sistema de valor posicional similar al nuestro; pero su base no era el 10, era el 60. En la tercera posición, el valor posicional de un número era de 60 x 60 = 3600. Así por ejemplo:



8, 40, 33

= 8 x 3600 + 40 x 60 + 33

= 31233.

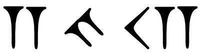
Los babilonios antiguos no conocían el cero. Cuando no había nada en una posición intermedia, simplemente dejaban un espacio:

2, (0), 12

= 2 x 3600 + 12 = 7212.

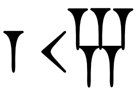
Más tarde inventaron un símbolo adicional para indicar la posición vacía: 

Entonces el número de arriba se escribiría así:



Pero ellos no usaban este símbolo de la misma manera como nosotros el cero. Lo usaban solamente en el interior de un número, pero nunca al inicio o al final. Entonces ellos seguían escribiendo un número como 1080 (18 x 60) igual como el 18; no se podía distinguir entre los dos.

Para escribir fracciones, usaban también el número 60 como base. Por ejemplo 1 $^{1}/_{4}$ se escribía de la siguiente manera:



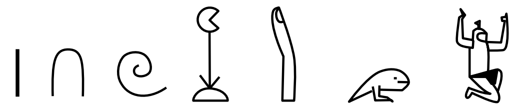
1, 15 = 1 + $^{15}/_{60}$ = 1 $^{1}/_{4}$.

Ya que no usaban punto decimal, este número podría significar también 75 (= 1 x 60 + 15).

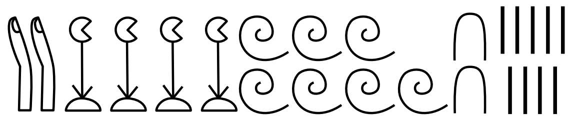
Para pensar: ¿Cómo escribían los babilonios $^{13}/_{200}$?

Números egipcios

Los antiguos egipcios usaban un sistema decimal sin valor posicional, como los romanos. O sea, ellos necesitaban símbolos diferentes para 1, para 10, para 100, etc. No tenían símbolos para 5, 50, etc. Por eso tenían que repetir sus símbolos hasta 9 veces.



1 10 100 1000 10'000 100'000 1'000'000



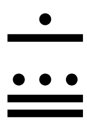
24'729

Números mayas

Los mayas tenían varias maneras de escribir números, una con símbolos muy sencillos, y otra con dibujos elaborados. Aquí presentamos solamente los símbolos sencillos:

0 1 5 9 17

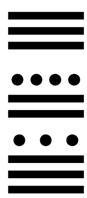
Para números mayores a 20 usaron un sistema de valor posicional con una base de 20. Las posiciones se escribían verticalmente una encima de otra. O sea, un número escrito encima de las unidades valía "veintenas", y uno escrito encima de ese valía 20 x 20 = 400 veces su valor.



6 x 20 = 120

13

= 133



15 x 400 = 6000

14 x 20 = 280

18

= 6298

Unidad 81 - Los números figurativos de los pitagoreos

Viaje de exploración matemática

Prerrequisitos:

- Operaciones básicas.

Temas que se elaboran en el transcurso de este "viaje":

- Números primos y compuestos (Repaso de la *Unidad 14*).
- Cuadrados perfectos.
- Números triangulares.
- Unas aplicaciones de los números cuadrados perfectos y triangulares.
- Cubos perfectos (terceras potencias).

Materiales necesarios:

- Material contable (Piedritas, granos de maíz, habas, cubitos de unidad, etc.)

Un poco de historia

Pitágoras fue un filósofo y matemático que vivía en Grecia en el siglo 6 antes de Cristo. Con algunos de sus estudiantes y amigos fundó una sociedad que se dedicaba a explorar los secretos de la matemática. Los miembros de su sociedad tenían que comprometerse a no divulgar sus descubrimientos a nadie que no fuera miembro de ellos.

Unos siglos más tarde, la sociedad de los pitagoreos se disolvió. Entonces los miembros que habían quedado, comenzaron a publicar sus conocimientos. Eso fue un hecho afortunado para la matemática: Si se hubiera cumplido la voluntad de Pitágoras, hasta hoy no sabríamos nada de sus descubrimientos. Pero cuando fueron publicados, muchas otras personas pudieron usarlos y seguir investigando. Se asume que muchos teoremas que se encuentran en el famoso libro "Los elementos", por Euclides, fueron descubiertos por los pitagoreos.

Un pasatiempo de los pitagoreos consistía en formar figuras de piedritas e investigar sus propiedades, según su forma y según el número de piedritas que contenían. Más tarde, los romanos adaptaron esa costumbre de usar piedritas para calcular. De allí viene nuestra palabra "calcular"; porque en el idioma latín (el idioma de los romanos), "calculus" significa "piedrita".

Entonces, para las investigaciones que siguen necesitarás un número suficiente de piedritas. (Puedes también usar granos de maíz, habas, cubitos de unidad, o cualquier otro material adecuado.)

Encontrarás que con un poco de instrucción podrás descubrir por ti mismo varios de los "secretos" de los pitagoreos. Es que la matemática no es una ciencia secreta. Es simplemente el resultado del pensamiento lógico. Eso es algo que tú también puedes hacer.

Investigación

1. Rectángulos y números primos

(Esta tarea repite algunos de los temas de la Unidad 14.)

a) Toma una cantidad de piedritas. Intenta formar con ellas un rectángulo (relleno), o sea un rectángulo donde cada fila contiene el mismo número de piedras:

```
o o o o o
o o o o o
o o o o o
```

O sea, un marco como este no sería un rectángulo completo:

```
o o o o o
o       o
o o o o o
```

No permitimos una única fila larga de piedritas, aunque estrictamente hablando, eso sería también un rectángulo.

Si no encuentras ninguna solución, entonces aumenta una piedrita o quita una.

¿Puedes escribir una operación matemática que describe tu rectángulo y te da como resultado el número de piedritas que el rectángulo contiene?

b) Intenta lo mismo con otras cantidades de piedritas. Por ejemplo, hazlo con todos los números de 20 a 30. Escribe las operaciones que resultan.

Los antiguos griegos llamaban "números rectangulares" a aquellos números que permiten formar un rectángulo. Hoy los llamamos *números compuestos*.

Anota también cuáles son los números con los que no puedes formar ningún rectángulo. Estos números se llamaban "números primitivos" o "números originales". Hoy los llamamos *números primos*; eso significa lo mismo ("primitivo" u "original").

Si deseas, intenta lo mismo con unos números un poco más "difíciles", como por ejemplo los siguientes:
39, 43, 51, 57, 59, 67, 69, 73, 85, 87, 91.

c) ¿Para cuáles números encuentras *dos o más* maneras distintas de formar un rectángulo? Anota esos números y sus rectángulos correspondientes. ¿Qué propiedad tienen estos números en común?

Los rectángulos deben ser realmente diferentes. Por ejemplo un rectángulo con 3 piedritas de ancho y 5 piedritas de largo no es realmente diferente de un rectángulo con 5 piedritas de ancho y 3 piedritas de largo; porque puedo girarlo y será igual al primer rectángulo. En cambio, con 12 piedritas puedo formar un rectángulo de 3 por 4 piedritas, o también uno de 2 por 6; esos sí son rectángulos diferentes.

d) Si tienes un número dado (por ejemplo 48), ¿cómo puedes descubrir cuáles rectángulos se pueden formar con este número de piedritas, sin realmente formarlos? O sea, solamente calculando en el papel o en la cabeza. ¿Y cómo puedes descubrir de la misma manera si un número dado es un número primo?

***e)** ¿Cómo puedes descubrir *con un mínimo de intentos* si un número dado es un número primo? O sea, descubre un método sistemático que te permite decir con seguridad, después de un mínimo de operaciones, si un número dado es primo o no.

2. Cuadrados perfectos

Los pitagoreos se interesaban sobre todo por las figuras más *regulares*. La variedad más "regular" de un rectángulo es el cuadrado. (Si, los cuadrados pertenecen también a los rectángulos. Un rectángulo se define por tener cuatro ángulos rectos. Eso se cumple sin duda en un cuadrado. Más detalles acerca de la clasificación de los cuadriláteros encuentras en la *Unidad 54*, en la sección "Principios matemáticos".)

Investigaremos entonces los "números cuadrados" o "cuadrados perfectos".

a) Forma con piedritas unos cuadrados con lados de 1, 2, 3, 4, etc, hasta donde llegues.

```
o    o o    o o o    o o o o    o o o o o
     o o    o o o    o o o o    o o o o o
            o o o    o o o o    o o o o o
                     o o o o    o o o o o
etc.                            o o o o o
```

Anota en una tabla los lados de los cuadrados, y los números correspondientes de piedritas en cada cuadrado. Si sabes el lado, ¿cómo puedes desde allí calcular directamente el número total de piedritas que el cuadrado contiene?

Nota: Esta operación se llama también "*elevar al cuadrado*". Por ejemplo, el cuadrado con un lado de 5 piedritas contiene 25 piedritas, entonces se dice que "*5 al cuadrado es 25*".

b) Compara cada cuadrado con el cuadrado inmediatamente anterior. ¿Cuál es la figura que tienes que *añadir* a un cuadrado para obtener el siguiente? ¿Y cuántas piedritas contiene esta figura? ¿Encuentras una relación matemática entre este número (o sea, la *diferencia* entre un cuadrado y el siguiente), y el lado del cuadrado? Entonces, si conoces un "número cuadrado", ¿cómo puedes fácilmente calcular el siguiente? – Añade a tu tabla de cuadrados perfectos una columna adicional. Anota en esa columna las *diferencias* entre los cuadrados sucesivos.

c) Continúa tu tabla de cuadrados perfectos, por ejemplo hasta "30 al cuadrado". (Ahora que sabes cómo se calcula, ¡ya no necesitas armarlo con piedritas!) – Si encontraste la respuesta a la pregunta **b)**, entonces conoces ahora una manera fácil de calcular cuadrados sucesivos.

Investiga los *dígitos finales* de estos números cuadrados (o sea, las *cifras de las unidades*). ¿Qué propiedades observas? ¿Qué regla puedes formular? – A partir de tus observaciones, ¿puedes decir rápidamente si 79468 puede ser un cuadrado perfecto o no?

d) Investiga y anota otras propiedades de los cuadrados perfectos que te parecen interesantes. Por ejemplo:

- Las diferencias entre los cuadrados de números que se diferencian por 2 o por 3.

- La divisibilidad de los cuadrados perfectos.

- Propiedades de los *dos* últimos dígitos de los cuadrados perfectos.

- ¿Bajo qué condiciones es un múltiplo de un cuadrado perfecto a su vez un cuadrado perfecto?

- Etc...

3. Números triangulares

Otra figura regular que los pitagoreos investigaban, es el triángulo. Los números triangulares se forman de la siguiente manera:

```
o      o        o          o            o
      o o      o o        o o          o o
              o o o      o o o        o o o
                        o o o o      o o o o
                                    o o o o o
etc.
```

Forma tales triángulos con piedritas. Anota en una tabla sus lados (1, 2, 3, 4, ...), y los números de piedritas que contiene cada uno de estos triángulos.

¿Encuentras una manera de calcular estos números, sabiendo el lado de un triángulo?
(Si no lo descubres ahora, continúa con las siguientes preguntas. Te acercarán a la respuesta.)

b) Compara cada triángulo con el anterior. ¿Cuál es la forma que tienes que *añadir* a un triángulo para obtener el siguiente? – Entonces, si conoces un número triangular, ¿cómo puedes calcular el siguiente? – Añade a tu tabla de números triangulares una columna adicional. Anota allí las *diferencias* entre cada número triangular y el siguiente.

c) Continúa tu tabla de números triangulares, por ejemplo hasta un triángulo con un lado de 30, o más allá. Investiga las propiedades de estos números. Por ejemplo:

- ¿Cuáles son pares, cuáles son impares?

- ¿Cómo se comportan sus cifras finales?

- Cualquier otra propiedad que te parece interesante.

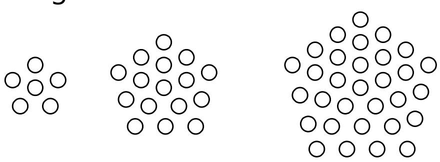
d) Calcula para cada número triangular su suma con el siguiente número triangular. (1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9, etc.) ¿Qué clase de sucesión forman estas sumas? – ¿Puedes formar con tus piedritas unas figuras que explican esta observación?

e) Comenzando con el tercer número triangular (6), intenta escribir los números triangulares en forma de multiplicaciones: 6 = 2 x 3, 10 = 2 x 5, etc. Continúa hasta que encuentres una regularidad en los factores de estas multiplicaciones.

***f)** ¿Encuentras una regla general que te permite calcular cualquier número triangular *directamente*? – O sea, si quieres saber por ejemplo cuántas piedritas contiene un triángulo con lados de 64 piedritas, ¿cómo podrías calcularlo sin tener que sumar todos los números anteriores? – ¿Puedes formar con tus piedritas unas figuras que explican *por qué* funciona esta regla?

4. Otros números figurativos

Ahora podemos inventar otras figuras. Por ejemplo podríamos formar "números pentagonales" de la siguiente manera:



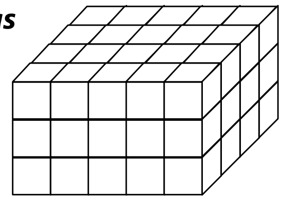
a) Investiga el número de piedritas en cada uno de estos pentágonos. ¿Cómo llegas de un pentágono al siguiente? ¿Cómo se podrían calcular estos "números pentagonales" directamente? ¿Encuentras una relación matemática entre estos números y los que investigamos antes (cuadrados perfectos resp. números triangulares)?

b) Inventa otras figuras que puedes investigar matemáticamente, y describe sus propiedades.

5. Números figurativos tridimensionales

Los pitagoreos investigaban no solamente figuras planas, sino también cuerpos tridimensionales. Estos serían difíciles de formar con piedritas; pero si tienes suficientes cubitos (p.ej. las unidades de las regletas Cuisenaire), puedes usarlos para construir los siguientes cuerpos:

a) *"Ladrillos" (prismas rectos):*



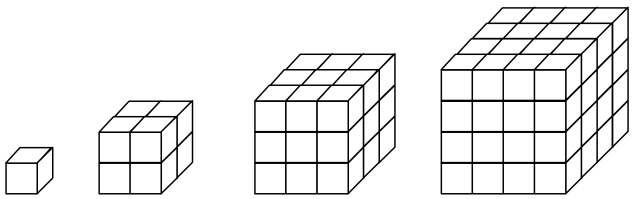
Un "ladrillo" tiene ángulos rectos, pero su ancho, largo y altura pueden ser diferentes. Si conoces estas tres medidas, ¿cómo puedes calcular el número de cubitos que el "ladrillo" contiene?

- ¿Con cuál clase de números que ya investigamos, están relacionados estos "ladrillos"?

- ¿Qué condiciones tiene que cumplir un número para que se pueda representar en forma de "ladrillo"?

- ¿Qué se puede decir acerca de los divisores de un "número ladrillo"?

b) *Cubos perfectos:*

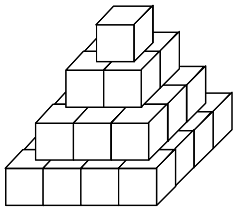


Estos tienen la misma forma como un dado para jugar. (La palabra "cubo" viene del griego "kybos" = "dado".) O sea, su largo, ancho y altura son iguales. Ahora, si conoces el lado de un cubo, ¿cómo puedes calcular cuántos cubitos pequeños contiene?

Nota: Esta operación se llama también "*elevar al cubo*". Por ejemplo, el cubo con lados de 3 cubitos contiene 27 cubitos, entonces se dice que "3 al cubo es 27". Volveremos a este tema cuando estudiemos las potencias *(Unidad 89)*.

- Investiga para los cubos perfectos algunas de las mismas propiedades como las que investigaste para los cuadrados perfectos (Tareas 2.b), c), d): Dígitos finales; divisibilidad; ... – Será un poco difícil descubrir las propiedades de las *diferencias* de un cubo perfecto al siguiente. Pero ¿quizás puedes resolver aun este misterio?

c) *Pirámides:*

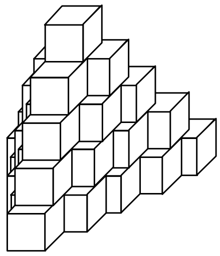


Estas resultan al apilar cuadrados en orden.

Investiga unas propiedades de estos "números pirámides". Formula tus propios desafíos. ¿Qué cosas descubres?

d) *Tetraedros:*

Un tetraedro es una pirámide con base triangular. Entonces un "número tetraedro" consiste en triángulos sucesivos apilados.



Investiga unas propiedades de los "números tetraedros". Como investigador(a) experimentado(a), seguramente sabrás hacer unas preguntas interesantes acerca de estos números. ¿Qué descubres?

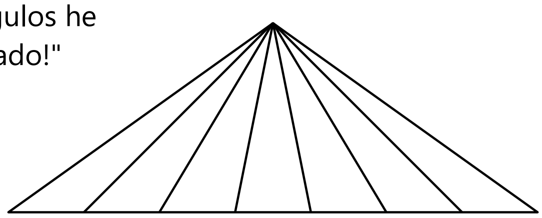
¿Quizás inventas también otros tipos de números figurativos tridimensionales?

Ampliaciones

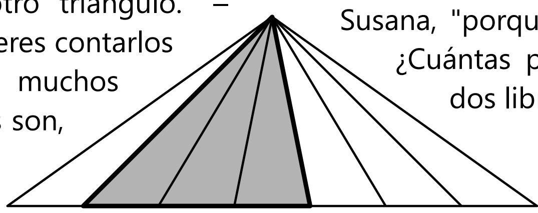
Problemas con números triangulares y cuadrados

En los siguientes problemas, analiza cada situación, haciendo un dibujo si es necesario, y calcula la solución. Encontrarás que en casi todas estas situaciones, el razonamiento te llevará a los números triangulares, o a los cuadrados perfectos (o a ambos). Decide para cada problema, con cuál de estas clases de números está relacionado.

1. Andrea llama a Elizabet: "¡Mira, cuántos triángulos he dibujado!"



Elizabet mira el dibujo y dice: "Veo siete triángulos." – "¡Pero son muchos más!", responde Andrea. "Mira, el dibujo entero es también un triángulo. Y si juntas unos triángulos, así, obtienes otro triángulo." – Elizabet dice: "Bueno, si quieres contarlos de esta manera, sí son muchos triángulos." – Pero ¿cuántos son, exactamente?



2. Sebastián llama a su hermano: "¡Mira lo que he descubierto con mis figuritas de juego! Puedo ordenarlas en un triángulo perfecto, así. Y también puedo ordenarlas en un cuadrado, así." – ¿Cuántas figuritas de juego tiene Sebastián?

3. ¿Cuántos números de dos cifras existen que no contienen el cero?

4. ¿Cuántos números de dos cifras existen donde la segunda cifra es menor que la primera?

5. Federico fabricó un modelo de su casa en una escala de 1:25. Lo pintó y gastó 56 m*l* de pintura. Ahora quiere pintar la casa. Suponiendo que necesita la misma cantidad de pintura por área como en el modelo, ¿cuánto de pintura tendrá que comprar?

6. En un concurso se ofrecen seis diferentes libros como premios. Ana, como ganadora, puede escogerse dos de los libros. "¡Qué decisión difícil!", dice. "Tengo seis alternativas para elegir." – "Aun más", dice su hermana Susana, "porque te toca elegir *dos* libros." – ¿Cuántas posibilidades existen de elegir dos libros de entre seis diferentes?

7. El gran pianista Sonato va a una gira de conciertos con sus cinco piezas musicales favoritas. Se puso como regla, nunca tocar las cinco piezas en exactamente el mismo orden como en un concierto anterior. ¿Cuántos conciertos puede dar Sonato, hasta acabar todas las posibilidades?

8. El doctor Marcos había comprado una nueva enciclopedia. "Esta enciclopedia está a la altura de los conocimientos más avanzados de la ciencia", dijo a su amigo Martín. – "¿Y cuánto costó?", pregunta Martín. – "Para decir la verdad, una obra como esta sí es costosa. Pagué con 500 dólares, y recibí solamente 16 dólares de cambio. Y mire, qué curiosidad: Cada tomo cuesta exactamente tantos dólares como hay tomos." – "¿Y cuántos tomos son?" – "Mi buen amigo, usted mismo va a poder calcular eso con los datos que le he dado."

9. En un campeonato de ajedrez, se decidió que cada participante debía jugar contra cada otro participante. En total se jugaron 120 partidos. ¿Cuántos participantes fueron?

¿A dónde vamos desde aquí?

Alumnos avanzados, después de estudiar los cubos perfectos (Pregunta 5b), pueden pasar a la *Unidad 89*.

Unidad 82 - Experimentos de probabilidad y combinatoria

Prerrequisitos:
- Proporciones y porcentajes *(Unidades 20, 43, 52)*.

Materiales necesarios:
- Tarjetas de cartulina.
- 2 dados.
- Servicios y cubiertos de mesa.

Investigación

Experimento 1:

a) Tiren un dado 30 veces, cuenten y anoten en una tabla cuántas veces cae el número 1, el 2, el 3, etc. Calculen para cada uno de los números del 1 al 6 el porcentaje de veces que cayó.

b) Sigan tirando el dado y anotando, hasta que lo hayan tirado 100 veces en total. Anoten el total de las nuevas frecuencias, y calculen nuevamente los porcentajes correspondientes al 1, al 2, al 3, etc. (Ahora es fácil calcular el porcentaje, ya que el total de los intentos es 100.)

c) Si tienen perseverancia, continúen hasta 200 intentos y calculen nuevamente los porcentajes.

d) Comparen los porcentajes que resultaron en a), b) y c).
¿Pueden observar algo interesante?
¿Pueden explicar *por qué* sucede lo que observaron?
¿Pueden predecir qué sucedería si continuáramos hasta un millón de veces?

Experimento 2:

Fabriquen tarjetitas con los números de 1 a 12. Para que los experimentos sean interesantes, necesitarán por lo menos 10 de cada número, o sea 120 tarjetas en total.

a) Pongan las tarjetas con los números de 1 a 6 sobre la mesa, de manera ordenada: las tarjetas del 1 en una pila aparte, las del 2 en una pila aparte, etc. Cada pila debe contener la misma cantidad de tarjetas.
Después, por turnos tiren el dado y quiten una tarjeta con el número que mostró el dado. Continúen hasta que una o dos pilas se acaben.
¿Cuál pila se acaba primero?
¿Hay pilas que disminuyen más rápidamente que otras, o disminuyen todas de una manera más o menos igual?
¿Existe una manera de predecir cuál pila tiene mayor probabilidad de acabarse primero?

Hagan el mismo experimento una segunda y una tercera vez, para comprobar su hipótesis.

b) Hagan lo mismo con dos dados, y con tarjetas de 1 a 12. Esta vez tiren los dos dados juntos, y quiten cada vez la tarjeta que corresponde a la *suma* de los dos dados.
Investiguen las mismas preguntas como en la variante a). ¿El resultado es similar o es diferente de la variante a)? ¿Pueden explicar matemáticamente sus observaciones?

Experimento 3:

Estás poniendo la mesa para comer, y tienes que colocar en cada sitio un plato, un cuchillo, un tenedor y una cuchara. ¿Cuántas posibilidades existen de colocar estos cuatro objetos en un orden distinto? – Por ejemplo, podrías poner a la izquierda del plato primero la cuchara, después el cuchillo, y finalmente el tenedor. O podrías intercambiar los lugares del cuchillo y de la cuchara; o podrías intercambiar la cuchara con el tenedor. O podrías poner solamente el cuchillo a la izquierda del plato, y el tenedor y la cuchara a la derecha. Etc...

a) ¿Cuántas posibilidades distintas existen de colocar estos cuatro objetos? – Anótalas de una manera sistemática y ordenada.

b) Si añadimos un quinto objeto – por ejemplo una cucharita para el postre –, ¿cuántas posibilidades existen entonces? *(Estas posibilidades de colocar objetos en orden distinto, se llaman "permutaciones".)*

c) ¿Encuentras una ley matemática general que te explica lo que sucede con el número de permutaciones, cada vez que añadimos un objeto más? ¿Puedes con la ayuda de esta ley calcular cuántas permutaciones existen para 10 objetos?

Principios matemáticos

La ley de los números grandes

Lo que investigamos en el Experimento 1, es conocido como la "ley de los números grandes" en el cálculo de probabilidades: Cuando se hace un gran número de intentos, se manifiestan más claramente las tendencias que son de esperar según la probabilidad matemática. En las pautas del *Anexo A* hay unas explicaciones adicionales al respecto.

Unidad 83 - Gráficos estadísticos

Prerrequisitos:
- Gráficos de barras *(Unidades 1, 52)*.
- Coordenadas cartesianas *(Unidad 66)*.
- Proporciones *(Unidad 20)*.
- Porcentajes *(Unidad 52)*.
- *(para gráficos de sectores circulares):* Medición de ángulos *(Unidad 59)*

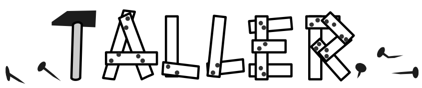
Materiales necesarios:
- Diarios, libros, y otros materiales que contengan gráficos estadísticos.

Para los educadores

Ejemplos de la vida real

En los tiempos actuales encontramos estadísticas por todas partes: en los diarios y noticieros, en internet, y hasta en las envolturas de algunos alimentos. Por tanto, esta Unidad no contiene muchos ejemplos: ustedes mismos pueden encontrar sus propios ejemplos y trabajar con ellos.

Si el tema les gusta a los niños, entonces ellos se animarán fácilmente a hacer sus propias encuestas o investigaciones, y a partir de allí elaborarán sus propios cuadros estadísticos. Entonces los ejemplos sacados de los diarios o de internet se complementarán con las estadísticas elaboradas por ustedes mismos.



Interpretamos gráficos estadísticos

Busquen gráficos estadísticos: Los diarios a menudo contienen infografías en forma de gráficos estadísticos acerca de temas de actualidad. Un atlas o libro de geografía puede contener gráficos acerca de temperaturas, precipitaciones, áreas, población, economía, etc. En internet pueden buscar específicamente artículos acerca de temas de su interés, que contengan gráficos estadísticos.

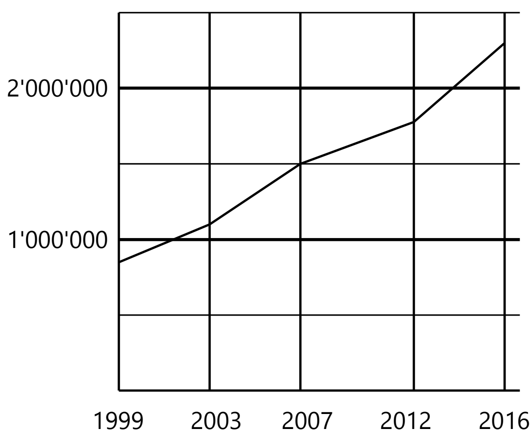
Observen los gráficos que encuentran, e intenten comprender las cantidades que representan. Si desean, pueden hacer su propia colección de gráficos en una hoja de papel o en un cuaderno: Corten gráficos de los diarios, copien los que encuentran en libros, impriman los que encontraron en internet, y péguenlos en la hoja o en el cuaderno. Pueden añadir unos comentarios acerca de los datos y cantidades representados en los gráficos.

Tipos frecuentes de gráficos estadísticos:

Ya conocemos los **gráficos de barras**. Cada dato se representa con una barra horizontal o vertical, proporcional a la cantidad que representa.

Cuando un dato varía continuamente a lo largo del tiempo, se puede representar con un **gráfico continuo** en un sistema de coordenadas cartesianas. De esta manera se pueden representar, por ejemplo:
- la variación de la temperatura a lo largo de un día,
- la variación de la temperatura promedia de cada día, a lo largo de un año,
- el crecimiento de una planta, graficando para cada día su altura,
- la variación de indicadores económicos a lo largo del tiempo: por ejemplo los ingresos promedios; el cambio del dólar; los precios de los alimentos; etc.
- el crecimiento de la población, graficando para cada año el número de habitantes;
- y otros.

Ejemplo: Crecimiento del número de alumnos educados en casa en los Estados Unidos, desde 1999 hasta 2016.

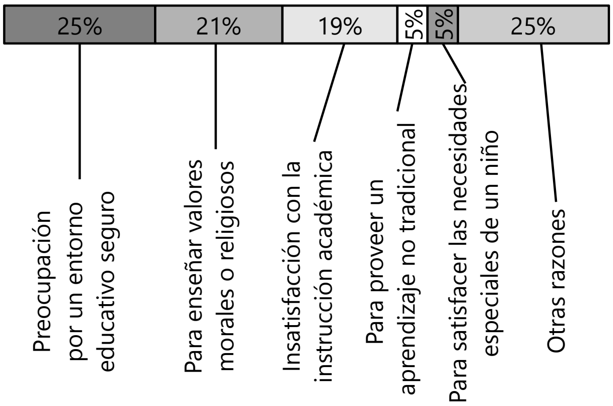


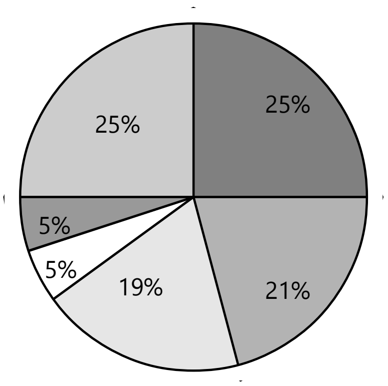
Fuentes de los datos del gráfico anterior: https://www.time4learning.com/homeschool/homeschoolstatistics.shtml, https://www.nheri.org/research-facts-on-homeschooling/

(Esta clase de gráficos corresponde al *gráfico de una función*; un tema que trataremos en el nivel de Secundaria.)

Cuando varias categorías forman juntas un entero, se pueden graficar en forma de **barras con varios segmentos**, o también como **gráfico de sectores circulares**. El siguiente ejemplo muestra ambas formas de gráficos, con los mismos datos:

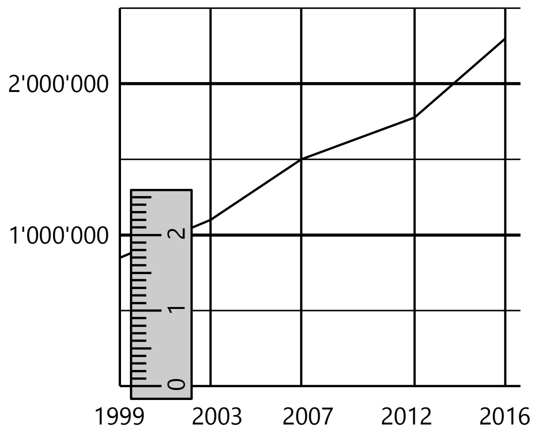
Las razones más frecuentes que indican los padres estadounidenses, por educar a sus hijos en casa:





Fuente de los datos: https://www.time4learning.com/homeschool/homeschoolstatistics.shtml

A veces, los gráficos estadísticos no indican los números exactos que representan. En este caso se pueden descubrir los números, por lo menos aproximados, al comparar las longitudes de las barras (o la ubicación del gráfico continuo) con la escala que usa. Eso se puede hacer como estimación, o se puede medir exactamente y calcular con la ayuda de la proporcionalidad.

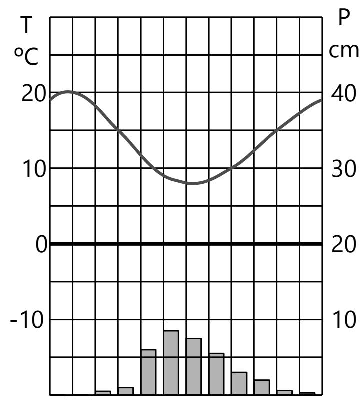


2 cm corresponden a **1'000'000**

$\times\frac{1.7}{2}$ $\times\frac{1.7}{2}$

1.7 cm corresponden a **850'000**

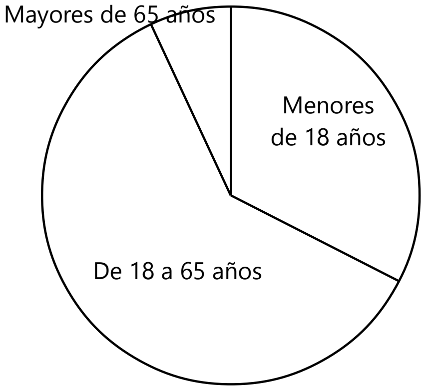
Solamente que es necesario interpretar correctamente las escalas. Por ejemplo, el siguiente gráfico representa las temperaturas promedias y las precipitaciones a lo largo del año, en Santiago de Chile:



Esta imagen combina dos gráficos en uno: Un gráfico continuo de la temperatura, que corresponde a la escala izquierda; y un gráfico de barras de las precipitaciones, que corresponde a la escala derecha. Así que tenemos que relacionar cada gráfico con la escala que le corresponde.

En un gráfico circular, las proporciones que corresponden a cada sector se pueden calcular, midiendo su *ángulo* en el centro del círculo. Recordamos que el círculo entero corresponde a 360°. Entonces, cada sector representa la fracción del entero que corresponde a la proporción entre su ángulo y 360°.

Ejemplo: En una ciudad con 262'800 habitantes se elaboró el siguiente diagrama acerca de la edad de la población:

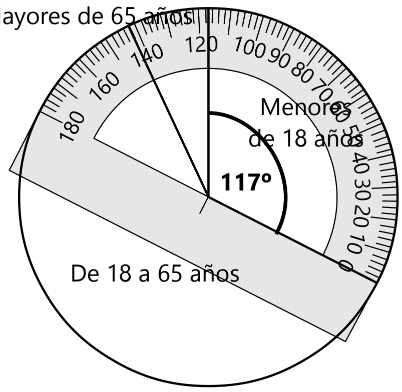


¿Cuántos habitantes son menores de 18 años? – Ya que el gráfico no indica números ni porcentajes, medimos el ángulo correspondiente: son 117º. Esto nos permite establecer la siguiente proporción:

360º corresponden a **262'800**

$\times \frac{117}{360}$ $\times \frac{117}{360}$

117º corresponden a **85'410**



Hagan algunos de estos "experimentos" con los gráficos estadísticos que encontraron.

Posiblemente encontrarán otros tipos de gráficos, aparte de los mencionados. Traten de descubrir por ustedes mismos cómo hay que interpretarlos.

Elaboramos gráficos propios

Ahora pueden elaborar sus gráficos estadísticos propios. Usen datos que encuentran en noticias, libros, etc, y elaboren gráficos a partir de esos datos. O hagan sus propios conteos, investigaciones, o encuestas, como en los proyectos correspondientes de la *Unidad 52* (Porcentajes). Si tienen un negocio propio, pueden graficar también unos datos de este negocio: Ventas, ingresos, egresos, etc.

Para elaborar estos gráficos, tenemos que calcular las mismas proporciones como al interpretar gráficos que no tienen números. Solamente que ahora comenzamos con los datos reales que conocemos, y desde allí calculamos las medidas en nuestro gráfico que corresponden a estos datos, según la escala del gráfico.

Proyecto científico: Observamos datos meteorológicos

Durante un mes (o más tiempo, si desean), observen diariamente los datos del tiempo: temperaturas, viento, lluvia, etc. Anoten estos datos en una tabla. Después, elaboren diversos gráficos con los datos que midieron. Por ejemplo:
- Temperatura máxima y mínima del día, en el transcurso del mes.
- Precipitaciones diarias.
- Nubes y vientos.
- Presión atmosférica.
- Humedad.

Quizás encuentran una manera de combinar todos los datos en un único gráfico grande. Eso les permitirá ver ciertas correlaciones entre los datos, y así podrán descubrir unas reglas que les permitirán predecir el tiempo.

Por ejemplo, existe una correlación específica entre la nubosidad, y las temperaturas máximas y mínimas del día. Esta "ley" es la misma en todos los lugares del mundo; deben descubrirla con facilidad.
Si tienen un barómetro, podrán verificar que un aumento de la presión atmosférica normalmente trae un tiempo más seco y soleado, mientras que el descenso de la presión a menudo precede a un tiempo de lluvias.
Otras correlaciones varían de un lugar a otro. Por ejemplo, ciertos vientos suelen traer lluvia; otros vientos suelen traer tiempo soleado. Pero eso depende de las circunstancias geográficas del lugar donde viven.

Pueden también calcular la temperatura promedia del mes; el total de las precipitaciones del mes; y otros datos.

Pautas para medir datos meteorológicos:

Temperatura: La temperatura ambiental se mide *en la sombra*. El termómetro debe encontrarse en un lugar protegido contra el sol. Lo más práctico es colocarlo afuera de la ventana, a una pequeña distancia, por un lado de la casa donde no cae el sol, de manera que se puede leer la temperatura desde adentro de la casa.
La *temperatura mínima* del día se da normalmente en la madrugada, justo antes de la salida del sol. La *temperatura máxima* tenemos normalmente entre la 1:00 y las 3:00 de la tarde, pero eso puede variar, dependiendo de las nubes y de la radiación del sol. Las temperaturas mínima y máxima son los valores más importantes del día. Si desean, pueden también medir valores intermedios.

Nubosidad: Una forma usual de expresar la nubosidad es en octavos: ¿cuántos octavos del cielo están cubiertos de nubes? Para eso, simplemente hay que mirar el cielo y hacer una buena estimación. Anoten la nubosidad en los momentos en que miden la temperatura mínima y máxima; y si desean, pueden hacerlo también en intervalos intermedios.

Precipitaciones (lluvia, granizo, nieve): Se mide la altura de la capa de agua que cae, en milímetros, cada día a una hora fija. La forma más sencilla consiste en dejar afuera un recipiente abierto y plano, medir cada día con una regla la altura del agua que contiene, y echar el agua después de cada medición.
Para medir más exactamente, podemos construir un pluviómetro: Usamos una botella transparente, recta, y colocamos un embudo ancho en su apertura. Ya que el embudo es más ancho que la botella, un milímetro de agua en el embudo resulta en una altura mayor de agua dentro de la botella, y así se puede medir con mayor exactitud. La proporción exacta es igual a la proporción entre el área del embudo y el área interior de la botella. Recordamos que esta es una proporcionalidad cuadrática, respecto a los diámetros. (Vea *Unidad 70.*) Podemos calcular esta proporción, y dibujar en la botella una escala según esta proporción.
Ejemplo: El embudo tiene un diámetro de 13.5 cm, y la botella un diámetro interior de 7.5 cm. Entonces la proporción de las áreas es:

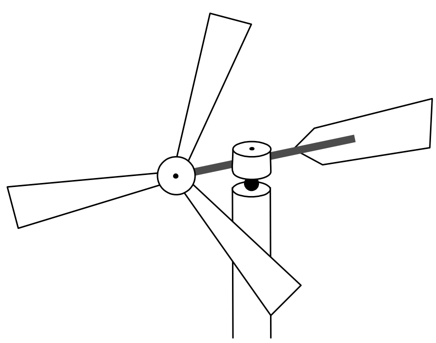
$\left(\frac{13.5}{7.5}\right)^2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2 = 1.8^2 = 3.24$. O sea, 3.24 milímetros de agua en la botella corresponden a un milímetro "real"; y los "milímetros" de la escala de la botella deben seguirse en espacios de 3.24 mm.

Viento: El viento tiene dos características: su *dirección*, y su *intensidad*.
La dirección se expresa según los puntos cardinales, o grados de la brújula (vea *Unidad 68*). La podemos descubrir con la ayuda de un objeto que se mueve con el viento, por ejemplo una bandera, y una brújula.
La intensidad no es otra cosa que la *velocidad* del viento. Podemos estimarla con la ayuda de la escala de Beaufort, que distingue 12 niveles de intensidad:

Nivel	*Velocidad (km/h)*	*Efectos observables*
1	2 a 5	El humo indica la dirección del viento.
2	6 a 11	Caen hojas de los árboles.
3	12 a 19	Se agitan las hojas; banderas ondulan.
4	20 a 28	Levanta polvo y papeles; se agitan las copas de los árboles.
5	29 a 38	Pequeños movimientos de los árboles.
6	39 a 49	Se mueven ramas grandes de los árboles; dificultad para mantener abierto el paraguas.
7	50 a 61	Se mueven árboles grandes; dificultad para caminar contra el viento.
8	62 a 74	Se quiebran copas y ramas de árboles; circulación de personas es muy difícil.
9	75 a 88	Daños en árboles; imposible caminar con normalidad. Se empiezan a dañar las construcciones.
10	89 a 102	Árboles arrancados; daños en las construcciones.
11	103 a 117	Destrucción en todas partes; muchos objetos vuelan.
12	> 117	Vuelan vehículos, árboles, techos, personas. Destrucciones graves.

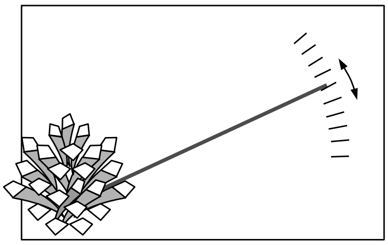
(Adaptado según Wikipedia.)

Otra alternativa, por si les gustan los trabajos manuales, consiste en fabricar un molinete, y colocarlo en un lugar alto expuesto al viento. El molinete debe poder girar alrededor de un eje vertical, para que se coloque automáticamente en la dirección del viento; y alrededor de un eje horizontal, para que dé vueltas de acuerdo a la intensidad de viento. Si las alas del molinete son pocas y largas, podemos contar cuántas vueltas da en un minuto, y así tenemos una medida un poco más exacta de la velocidad del viento. Al mismo tiempo, la cola del molinete indica su dirección.



Presión atmosférica: Se mide con el *barómetro*. Es difícil de medir con medios caseros; pero por si no tienen barómetro, quizás encuentran en algún lugar unas instrucciones para fabricar un barómetro casero más o menos funcional.
La presión atmosférica se puede medir dentro de la casa, ya que es la misma como afuera.

Humedad: La humedad se mide con el *higrómetro*, y se expresa en % de saturación del aire con vapor de agua. 100% de humedad significa que el agua está por condensar, de manera que se forma neblina o comienza a llover. La humedad se debe medir afuera, porque las condiciones dentro de la casa alteran la humedad del aire.
Si no tienen higrómetro, para una estimación muy cruda pueden usar un cono de pino o similar: En una de las puntas del cono, peguen con un buen pegamento el extremo de un palito largo y delgado, de manera que se mueve junto con la punta. Los conos de pino (y algunas otras partes de plantas) se encogen en el aire húmedo, y se abren en el aire seco. Si pegamos el cono en una posición fija, el palito "amplía" el movimiento de sus puntas, y así nos permite estimar la humedad.



Principios matemáticos

Modelos matemáticos de la realidad

En el proyecto de meteorología estamos dando un primer paso hacia una aplicación importante de la matemática: Describir el "comportamiento" del universo mediante fórmulas matemáticas. Estas fórmulas, si son lo suficientemente cercanas a la realidad, permiten entonces predecir ciertos eventos, por ejemplo si va a solear o si va a llover.

Al nivel de Primaria todavía no establecemos fórmulas. Pero el proyecto de meteorología permite observar ciertas regularidades o "leyes" que se pueden ver, aun sin expresarlas con fórmulas. Por ejemplo: "Cuando hay menos nubes, la temperatura máxima del día es mayor." O: "Cuando la humedad es alta y la temperatura desciende, es probable que va a llover." (Con conocimientos de álgebra podríamos establecer las fórmulas correspondientes.)

En este contexto hemos usado, de manera informal, el término "correlación". En la estadística, este término tiene una definición matemática exacta que se expresa en fórmulas y números. Es una tarea importante de la estadística matemática, descubrir correlaciones entre fenómenos distintos. Aunque todavía no usamos estas fórmulas, algunas correlaciones son tan claras que se pueden detectar sin usar estas herramientas matemáticas, simplemente observando los datos que hemos coleccionado.

Límites de los modelos matemáticos

Los modelos matemáticos son una herramienta poderosa para describir el comportamiento de los objetos inanimados. Isaac Newton fue el primero en edificar la ciencia de la física de manera sistemática y consecuente sobre modelos matemáticos; y así colocó el fundamento de la ciencia moderna. (Al hacer eso, pudo apoyarse en los trabajos de predecesores como Galilei, Kepler, y otros.) También la química se basa en gran medida sobre modelos matemáticos. Estos modelos matemáticos permiten predecir sucesos como eclipses solares, reacciones químicas, movimientos de objetos en la tierra, y muchos otros. Obviamente, el universo inanimado está "construido" casi enteramente según principios matemáticos.

Durante el siglo 20, se hizo de moda aplicar modelos matemáticos también en las "ciencias humanas": Psicología, sociología, pedagogía, economía, etc. A veces, eso permite predicciones más o menos exactas también en estos campos. Sin embargo, estas aplicaciones de la matemática son cuestionables. ¡Los seres humanos somos más que mera física y química! Tenemos emociones, voluntad, individualidad, creatividad, espiritualidad ... Por tanto, el comportamiento humano no puede ni debe sujetarse a parámetros matemáticos. Cuando se hace eso, a menudo comienza a perderse el respeto ante la dignidad humana. En el peor caso, tales aplicaciones de la matemática llevan a la "ingeniería social"; o sea la manipulación de la sociedad entera para producir ciertos "comportamientos deseados". Eso es lo que sucede en la propaganda comercial de las grandes empresas, y en muchas campañas políticas, sociales, y educativas. El resultado es la masificación y despersonalización de la gente. Felizmente, estas manipulaciones no siempre alcanzan sus metas, justamente porque la matemática no es suficiente para describir el comportamiento humano. Recordemos que las aplicaciones de la matemática tienen su límites, tanto prácticas como éticas.

¿A dónde vamos desde aquí?

Los resultados de algunas estadísticas y encuestas pueden consistir en *conjuntos con intersecciones*. En una encuesta que presenta varias alternativas, es posible que algunas personas marquen más que una sola alternativa, entonces pertenecen a varias categorías a la vez. (Si preguntamos a quiénes les gusta comer helado, y a quiénes les gusta comer pescado, habrá personas a quienes les gustan ambos.) Estas situaciones son el tema de la *Unidad 87*.

El tema de la Unidad siguiente (84) también tiene relación con la estadística.

Unidad 84 - El promedio

Prerrequisitos:
- Cálculo con fracciones y decimales.

Materiales necesarios:
- Datos estadísticos de diversos temas, por ejemplo de los proyectos de la *Unidad 83*.
- Un dado.

Para los educadores

El concepto del promedio se introdujo ya en el nivel de Primaria I. Pero en ese entonces calculamos solamente con números enteros. Ahora que sabemos calcular con fracciones y decimales, podemos calcular los promedios *exactos*. Volvamos entonces a hacer unas actividades similares a las de Primaria I, pero ahora calculando con los números exactos.

TALLER

Calcular promedios

Coleccionen unos datos estadísticos, y calculen promedios. Por ejemplo, si hicieron el proyecto de meteorología *(Unidad 83)*, calculen la temperatura promedia del mes, las precipitaciones diarias promedias del mes, etc. – Al calcular las temperaturas, puede ser interesante calcular por separado el promedio de las temperaturas *mínimas* de cada día, y el promedio de las temperaturas *máximas* de cada día.

Busquen otros promedios que pueden calcular: la edad o la estatura promedia de los miembros de la familia; la altura promedia de las flores en el jardín; el tiempo promedio que necesitan para ducharse; el número promedio de pisos que tienen las casas de su calle; el consumo promedio de electricidad o de agua por mes; etc.

Un desafío especial consiste en calcular la edad promedia de los miembros de la familia, no en años, pero en días, exactamente. O sea, primero tendrán que calcular cuántos días de edad tiene cada uno en la fecha actual.

Cómo se calcula el promedio – por si hubiera una duda acerca de este punto:

El promedio es la cantidad que se aplicaría a todos, si cada uno tuviera la misma cantidad. Por ejemplo, si Ernesto tiene 6 caramelos, Rosa tiene 8, y María tiene 5, el promedio es el número de caramelos que cada uno tendría, si se hubieran repartido por partes iguales. Entonces se calcula el total (sumando todo), y se divide entre el número de personas:

$$(6 + 8 + 5) \div 3 = 6\,{}^{1}/_{3} \text{ ó } 6.333...$$

Vemos en este ejemplo que los promedios normalmente no son números enteros. Aunque en realidad no podemos dar a nadie ${}^{1}/_{3}$ caramelo, el promedio sale con tercios, porque es el número que cada uno tuviera *si se pudieran* repartir así – aunque en realidad no se puede. O sea, el promedio se refiere a una situación hipotética, que no es real. Eso debemos tener en cuenta cuando leemos estadísticas que dicen por ejemplo, que en cierto lugar cada mujer tiene 3.7 hijos en promedio – por supuesto que ninguna mujer tiene “3.7 hijos”.

Problemas con promedios

1. Marta y María venden naranjas. En el mes de noviembre, Marta había vendido 8375 naranjas, y María 6766.
a) ¿Cuántas naranjas vendió cada una de ellas en promedio?
b) ¿Cuántas naranjas vendieron en promedio *por día*?

2. Ana dice a su hermana Mariana: "En promedio hemos comido 9 galletas." – "Sí", responde Mariana, "pero tú has comido 13."
¿Cuántas galletas comió Mariana?

3. Hernán estudia un curso de estadística en la universidad. Se toman cuatro exámenes, y para aprobar el curso, se requiere una nota promedia de 11 como mínimo. En los primeros tres exámenes, Hernán sacó las notas 8, 13, y 11. ¿Qué nota necesita sacar en el último examen, como mínimo, para aprobar el curso?

*4. En el caserío Trasdelmonte hay 10 hogares, que tienen en promedio 2.3 hijos. Si la familia Alva tiene 14 hijos, ¿cuántos hijos tiene cada una de las otras familias?

*5. Óscar y sus amigos fabrican tarjetas de cumpleaños. Al contar las tarjetas, Óscar dice: "En promedio, cada uno de nosotros ha hecho 7 tarjetas." Pero resulta que Víctor había hecho 17 tarjetas, mientras todos los demás habían hecho 5 tarjetas cada uno. ¿Cuántos amigos eran, y cuántas tarjetas hicieron en total?

Si intentaron resolver estos problemas y siguen con dudas acerca de algunos de ellos, consulten el *Anexo A*.

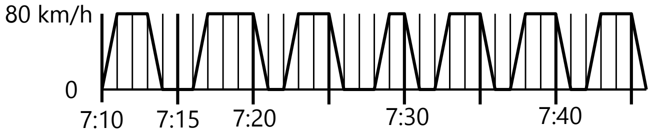
Ampliaciones

Velocidad promedia

Los problemas usuales con tiempos y velocidades asumen implícitamente que estamos hablando de la velocidad *promedia*. Por ejemplo, si un problema dice: "Un carro avanzó 150 km en 3 horas. ¿Cuál fue su velocidad?", nos resultan 50 km/h. Pero eso no significa que el carro haya arrancado inmediatamente con 50 km/h, y que haya mantenido esta misma velocidad durante el viaje entero. Hay tramos donde un carro puede avanzar muy rápidamente, y hay otros donde tiene que ir más despacio o incluso detenerse. Para que la velocidad promedia sea de 50 km/h, la velocidad "normal" de viaje tiene que ser mayor, para compensar los momentos de velocidad menor.

Al investigar por ejemplo la velocidad promedia de un bus, nos puede sorprender el hecho de que la velocidad promedia puede estar bastante por debajo de la velocidad normal de viaje. Observemos el siguiente diagrama, que muestra la velocidad de un bus a lo largo de un viaje por el campo, con varias paradas. La velocidad "normal" del bus es de 80 km/h.

Cuando el bus está parado, la velocidad es cero. Durante las etapas donde el bus frena para detenerse, o acelera después de arrancar, la velocidad promedia es la mitad de la velocidad normal, o sea 40 km/h.



Si queremos saber la velocidad promedia, necesitamos saber cuántos kilómetros avanzó el bus durante los 36 minutos de viaje. El diagrama muestra que durante 14 minutos, el bus avanzó con 80 km/h, y durante 14 minutos con una velocidad promedia de 40 km/h. ¿Cuántos kilómetros avanzó entonces el bus? ¿y cuál fue su velocidad promedia?

Por supuesto que dentro de la ciudad, la velocidad promedia es aun mucho menor, porque las paradas se siguen en intervalos más cortos, y el bus tiene que detenerse también en cruces, semáforos, etc.

¿Quizás querrás elaborar un gráfico como el de arriba, la próxima vez que viajas en bus?

"En promedio estoy bien"

Unos estudiantes fueron a la casa de su profesor de estadística. Lo encontraron con una bolsa de hielo sobre la cabeza, y los pies metidos en un horno. Le preguntaron: "¿Cómo puede aguantar así?" – El profesor respondió: "¿Por qué? En promedio estoy bien."

Investigación

Otro experimento con dados

Tira un dado 10 veces. Anota los puntajes y calcula el promedio.

Tira el dado otras 10 veces. Anota los puntajes, y calcula el promedio de todos los 20 números juntos.

¿Qué piensas, a qué número se acercará el promedio, si sigues tirando el dado? – Comprueba tu hipótesis, tirando el dado otras 20 veces. Calcula el promedio de todos los 40 puntajes que obtuviste desde el inicio. ¿Se confirma tu hipótesis?

Ahora calcula el promedio de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6. Compara el resultado con los resultados de tu experimento. ¿Qué observas? ¿Cómo explicas tu observación?

Unidad 85 - Relaciones y patrones

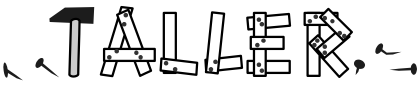
Prerrequisitos:
- Operaciones básicas.
- *(Para algunos problemas):* Múltiplos y divisores.
- *(Para algunos problemas):* Operaciones con fracciones y/o decimales.

Materiales necesarios:
- *(para el árbol genealógico):* Papelote grande.
- Tarjetas con números y flechas.
- Bloques lógicos.

Para los educadores

Al hablar de números (y objetos), y al compararlos entre sí, los relacionamos según diversas propiedades: "65 es mayor que 48." – "28 es el doble de 14." – "Este bloque es más delgado que el otro." – "Juan es el tío de Francisca." – "El procesador es una parte de la computadora." – Todos estos enunciados expresan una *relación* entre los números, objetos, o personas mencionados.

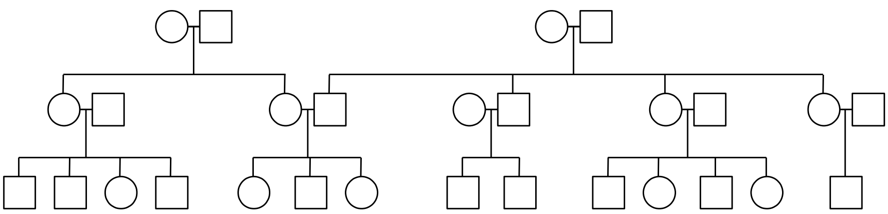
Lo que hacemos en esta Unidad, es expresar tales relaciones de una manera más abstracta, por ejemplo con diagramas y flechas en el papel. Para que los niños puedan entender estas abstracciones, es necesario que entiendan primero las relaciones que expresamos con el lenguaje cotidiano. En la vida diaria se presentan incontables oportunidades de aprender eso de una manera informal, como en los ejemplos que acabamos de mencionar.



Exploramos el árbol genealógico

Esta es una actividad que ya hicimos en el nivel de Primaria I, pero podemos ahora ampliarla con situaciones más complejas. En un papel o una cartulina grande, elaboren un árbol genealógico de su familia y parentesco. Será más interesante si pueden colocar fotos de las personas que figuran en el árbol.

Un típico árbol genealógico que incluye a la familia nuclear, los abuelos, tíos y primos, se vería por ejemplo así:



Los círculos representan mujeres y los cuadrados varones. Las rayas cortas horizontales unen matrimonios; las rayas verticales unen padres con sus hijos. En este ejemplo, la propia familia del niño es la que tiene tres hijos; a la izquierda se encuentra la hermana de la madre con su esposo y sus hijos, y a la derecha el hermano y las dos hermanas del padre con sus respectivas familias. Los hijos normalmente se ordenan de mayor a menor.

Analicen primero las relaciones que conciernen a los niños mismos: "Amalia es mi tía. Matilde es mi prima. Gregorio es mi tío abuelo. Francisco es mi ..." – Después traten de decir estas relaciones "al revés": "Si Amalia es tu tía, ¿qué eres tú de Amalia?" Descubrirán que entre éstas hay relaciones "simétricas" y relaciones "asimétricas". Las relaciones simétricas funcionan igual en ambas direcciones: Si Pedro es hermano de Ana, Ana es hermana de Pedro. Si Flora es prima de Jacob, Jacob es primo de Flora. – Las relaciones asimétricas, en cambio, son diferentes cuando las invertimos: Si Juan es el abuelo de Ana, Ana no es la abuela de Juan, es su nieta. Si Amalia es la tía de Pedro, Pedro no es el tío de Amalia, es su sobrino. Etc.

Después analicen también las relaciones de parentesco entre otras personas, que no involucran directamente a los niños. Por ejemplo: "La tía Amalia es la hermana de mi papá." – "El abuelo Juan es el papá del tío Francisco." – Etc.

Con esta actividad quizás habrá que introducir unos términos menos conocidos para los niños: "cuñado", "nuera", "suegros", etc.

Descubrirán también que entre ciertas personas en el árbol no existe ningún parentesco. Por ejemplo, si la tía Amalia es la hermana de mi papá, y el tío Francisco es el hermano de mi mamá, los hijos de ambos son mis primos. Pero entre ellos, los hijos de la tía Amalia no son primos de los hijos del tío Francisco, porque no tienen los mismos abuelos.

Si desean, pueden elaborar otros árboles genealógicos; por ejemplo de personajes de la historia de su país, del mundo, o del antiguo Israel. Puede ser interesante, por ejemplo, investigar con la ayuda de un árbol genealógico, cuál fue el parentesco entre Isaac y Rebeca, y entre Jacob y Raquel. O elaborar los árboles genealógicos de los reyes de Judá y de Israel.

Intenten resolver los siguientes acertijos, dibujando un árbol genealógico:

1. Rodrigo es el único hijo del bisabuelo de Jaime. ¿Cuál es entonces el parentesco entre Rodrigo y Jaime?

2. ¿Qué es de mí el hermano del hijo del hermano de mi mamá?

3. ¿Quién es la única hija del suegro de mi padre?

Pregunta capciosa:

En la familia de Sara hay tres hijas. La mayor se llama Carla, y le gusta pintar. La del medio toma clases de piano, y se llama Rosa. A la hija menor le gusta nadar. ¿Cómo se llama la hija menor?

4. Eliana tiene dos abuelas, Laura y Lorena. La abuela Laura tiene 11 nietos, y la abuela Lorena tiene 15 nietos. Si Eliana tiene tres hermanos, ¿cuántos primos tiene?

5. Si soy soltero, ¿qué es de mí el hijo de la nuera de mi madre?

6. ¿Quién es el abuelo de mi sobrina, si no es mi padre?

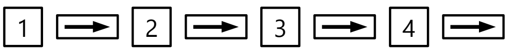
7. Hulda tiene dos sobrinos, Daniel y David. Daniel es hijo de María, y David es hijo de Jorge. Daniel y David no son hermanos ni primos. ¿Cómo podemos entonces describir la relación entre María y Jorge?

*8. Ubica las personas mencionadas correctamente en un árbol genealógico: Enrique es tío de Celina. Marta es nieta de Teodora. Teodora es suegra de Enrique. La mamá de Marta es hermana de Enrique. Jaime es abuelo de Marta, pero el papá de Marta no es hijo de Jaime. Celina y Marta no son hermanas. El hijo de Jaime es el tío de Marta. Teodora tiene un hijo y una hija. Jaime tiene un hijo y dos hijas. – Por supuesto que nadie se casó con su propio(a) hermano(a).

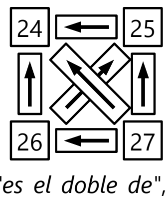
Relaciones entre números

Alisten unas tarjetas con números, por ejemplo de 1 a 30, y otras tarjetas con flechas. Definan lo que significa la flecha, y ubiquen las tarjetas (o algunas de ellas) con las flechas de la forma correcta.

Por ejemplo: La flecha significa "*es antecesor de*". Eso resultará en una fila ordenada de tarjetas, desde el 1 hasta la última, con una flecha desde cada tarjeta a la siguiente: 1 es antecesor de 2, 2 es antecesor de 3, 3 es antecesor de 4, etc.

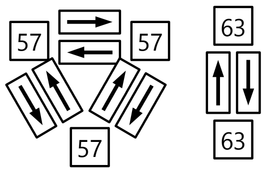


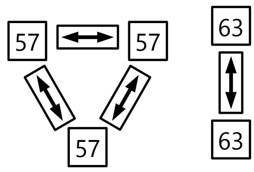
Otro ejemplo: La flecha significa "*es mayor que*". En este caso no hay que usar más que 6 tarjetas, porque tenemos que colocar una flecha entre cada combinación posible de dos tarjetas. Es que si tenemos dos números, *siempre* uno de los dos es mayor, excepto si los dos números fueran iguales.



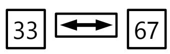
Hagan otros ejemplos: "*es menor que*", "*es el doble de*", "*es 3 menos que*", "*es múltiplo de*", "*es divisor de*", etc. – Haga también unos ejemplos donde usted comienza a colocar números y flechas sin decir lo que significa la flecha. Que los niños descubran el significado de la flecha, observando los números.

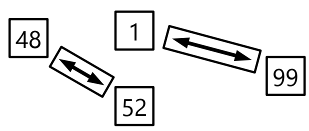
Todos los ejemplos mencionados hasta aquí son relaciones asimétricas. Pero podemos definir también relaciones simétricas; por ejemplo "*es igual a*". (En este caso necesitamos tarjetas con números iguales.) En una relación simétrica, si hay una flecha de un número a otro, tiene que haber también una flecha de regreso (Dibujo izquierdo). O se pueden usar flechas con puntas por ambos lados para indicar una relación simétrica (Dibujo derecho).





Otro ejemplo de una relación simétrica sería: "*se complementa a 100 con*". El 33 se complementa con 67 para que dé 100; e igualmente el 67 se complementa con el 33. Etc...





Hoja de trabajo 85.1 – Completa las flechas:

Se deben completar todas las flechas posibles entre los números, que cumplen con las indicaciones. A partir del no.3) hay que descubrir lo que significan las flechas, analizando aquellas que ya están dibujadas, y después completar las que faltan.

Hoja de trabajo 85.2 – Completa los números:

Se deben llenar los cuadros con números, de manera que el significado de las flechas corresponde a las indicaciones. Todas las flechas posibles están dibujadas; no se deben añadir flechas. En los nos.4) y 5) hay que descubrir lo que significan las flechas, analizando los números dados.

*Para los problemas con *) hay pautas en el Anexo A. Pero inténtenlo primero sin usar las pautas.*

Relaciones entre más que dos números

En vez de relacionar números individuales, podemos también relacionar siempre un par de números, o tres números, con otro número, según una regla fija. Por ejemplo:

(3, 13) → 39 (5, 15) → 75 (12, 7) → 84

Analizando, no es difícil encontrar la regla: El tercer número siempre es el *producto* de los dos primeros números.

La ***Hoja de trabajo 85.3*** presenta unos problemas de este tipo.

Sucesiones de números

Un tema similar son las sucesiones de números que se pueden continuar infinitamente, siguiendo una regla determinada. Esto se puede practicar en forma de un juego: Una persona inventa una sucesión, con una regla lógica, y escribe los primeros seis miembros de la sucesión. Entonces los demás tratan de descubrir cómo continúa la secuencia.

La ***Hoja de trabajo 85.4*** contiene unos problemas de este tipo.

Nota: En los problemas de este tipo, como también del tipo anterior (Hoja 85.3), la "regla" no siempre está claramente determinada. Por ejemplo, si tenemos la siguiente sucesión:

2, 4, 10, 20, ...

uno podría ver como "regla" que se debe alternadamente multiplicar por 2 y sumar 6: 2 x 2 = 4, 4 + 6 = 10, 10 x 2 = 20, ... En este caso, la sucesión resulta así:

2, 4, 10, 20, 26, 52, 58, ...

Pero uno podría también observar las diferencias y notar que siempre aumentan en 4: Primero se suma 2, después 6, después 10, entonces en el siguiente paso se debería sumar 14, etc. En este caso tenemos la siguiente sucesión:

2, 4, 10, 20, 34, 52, 74, ...

Ambas soluciones son matemáticamente correctas y lógicas. Estas ambigüedades se dan sobre todo cuando los miembros conocidos de una sucesión son pocos, y la regla no es sencilla (por ejemplo "compuesta" de dos reglas, como en este ejemplo). Por eso, cuando se practica como juego, es recomendable dar por lo menos seis miembros.

- En los problemas de las Hojas de trabajo 85.3 y 85.4 se debe intentar encontrar la regla más sencilla posible. Pero eso no significa que siempre se deben usar solamente las operaciones básicas. Una regla "sencilla" puede involucrar otras operaciones, tales como sumar las cifras de un número, etc. A veces es necesaria una combinación de dos operaciones.

Investigación

Sucesiones diagonales en la tabla de multiplicación

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7
0	2	4	6	8	10	12	...
0	3	6	9	12		...	...

a) Dibuja una tabla de multiplicación en cuadraditos, escribiendo los resultados desde 0 x 0 hasta 12 x 12 (o más allá, si quieres.)

b) Escoge unas sucesiones diagonales de números en esta tabla, e investiga sus propiedades. O sea, comienzas con un número en el borde de la tabla, y te desplazas desde allí diagonalmente hasta llegar a otro borde de la tabla. La sucesión consiste en todos los números que encuentras en el camino. – Escoge sucesiones de por lo menos 5 números; y en ambas direcciones posibles: hacia la derecha-arriba, y hacia la derecha-abajo.
Investiga, por ejemplo: Las diferencias entre los números sucesivos de estas sucesiones; las propiedades de las últimas cifras de cada número de la sucesión; y cualquier otra propiedad que te parece interesante.

c) ¿Encuentras una propiedad común de todas las sucesiones desde la izquierda-arriba hacia la derecha-abajo? ¿y una propiedad común de todas las sucesiones desde la izquierda-abajo hacia la derecha-arriba?

Patrones lógicos de figuras

Los patrones regulares de figuras o números son otra clase de estructuras donde podemos practicar encontrar relaciones lógicas, y aplicar estas relaciones de manera consecuente.

Con los bloques lógicos podemos jugar los siguientes juegos:

Sucesión de bloques lógicos

Una persona coloca algunos bloques lógicos en una fila. La secuencia debe seguir alguna regla lógica. En algún momento se detiene, y entonces los otros niños tienen que descubrir cómo continuar la secuencia.

Por ejemplo, una secuencia podría comenzar así:
- Triángulo amarillo pequeño delgado,
- Cuadrado amarillo pequeño delgado,
- Rectángulo amarillo pequeño delgado,
- Triángulo rojo pequeño delgado,
- Cuadrado rojo pequeño delgado.

¿Cuál es la continuación lógica?

Rectángulo de bloques lógicos

Lo mismo se puede hacer con un patrón rectangular. Por ejemplo:

Primera fila:
- Círculo azul grande grueso,
- Círculo azul grande delgado,
- Círculo azul pequeño grueso,
- Círculo azul pequeño delgado.

Segunda fila:
- Rectángulo azul grande grueso,
- Rectángulo azul grande delgado,
- Rectángulo azul pequeño grueso,
- Rectángulo azul pequeño delgado.

La tercera fila comienza con el triángulo azul grande grueso. ¿Pueden completar esta fila de manera lógica? ¿Y pueden hacer una suposición razonable acerca de lo que debe haber en la cuarta fila?

Inventen otros patrones como éstos.

Ley secreta

En este juego se trata de colocar bloques lógicos en fila, pero según una "ley" que nadie conoce, excepto la persona que dirige el juego. Esta persona anota de antemano la "ley" en un papel, pero nadie más tiene permiso de ver lo que está escrito. Por ejemplo, la "ley" podría decir: "Los bloques tienen que alternar siempre entre grueso – delgado – grueso – delgado, etc." – O la ley podría decir: "No se pueden poner seguidamente dos bloques del mismo color." – O una ley más complicada (para cuando ya dominen bien el juego): "A un bloque grande tiene que seguir un bloque grueso. A un bloque delgado tiene que seguir un bloque pequeño."

Entonces, se comienza con un bloque sacado de la caja al azar. Los participantes, por turnos, escogen un bloque de la caja y lo colocan al final de la fila de bloques que está creciendo. Cada vez, la persona que dirige el juego dice "Correcto" si el bloque cumple la ley. Si alguien coloca un bloque prohibido según la ley, la persona que dirige dice "Incorrecto", y devuelve el bloque incorrecto a la caja.

En este juego se trata de descubrir la ley secreta, según las indicaciones de "Correcto" o "Incorrecto" que da la persona que dirige. Quien cree haber descubierto la ley, no dice nada; simplemente se esfuerza por colocar bloques "correctos".

Se puede jugar hasta donde quieren: hasta que la mayoría de los participantes creen conocer la ley; o hasta que todos se rinden; o hasta que se acaban todos los bloques de la caja. Cuando deciden dar el juego por terminado, los participantes pueden decir lo que creen que es la ley. Después se comparan sus suposiciones con la ley escrita en el papel.

Variación: Se puede jugar por puntos. Cada vez que un jugador pone un bloque correcto, recibe un punto. Si pone un bloque incorrecto, no recibe punto.

Hoja de trabajo 85.5 – Completa los patrones

En esta hoja se trata de completar los patrones de manera lógica: En los cuadros vacíos, dibuja la figura que debe aparecer allí, según la lógica que se puede observar en los otros cuadros del mismo problema.

Los problemas de la segunda mitad (7 a 11) son un poco más difíciles. Por eso se dan pautas en el Anexo A. Pero inténtenlos primero sin usar las pautas.

Principios matemáticos

El análisis sistemático de las relaciones lleva, entre otras, a la teoría de las *funciones*, lo cual será un tema importante al nivel de Secundaria.

Unidad 86 - Operaciones con conjuntos

Prerrequisitos:

- Conceptos básicos de la teoría de conjuntos, y su notación usual: Pertenencia; elemento; notación de un conjunto por extensión; diagrama de Venn.
- *(Para algunas de las actividades y hojas de trabajo):* Conceptos de múltiplos y divisores.
- Puede ser ventajoso conocer las operaciones básicas con conjuntos: Complemento, intersección, unión, diferencia. Pero estas operaciones pueden también introducirse en el transcurso de esta Unidad.

Materiales necesarios:

- Bloques lógicos
- Objetos de la vida diaria
- Papelotes o cartulinas grandes
- Tarjetitas con números
- Papel semitransparente ("papel seda", "papel cometa", o similar); tijeras.

Principios matemáticos

Resumen de conceptos y operaciones con conjuntos

En el nivel de Primaria I ya hemos introducido diversos conceptos, y hemos practicado diversas operaciones con conjuntos, aunque algunas de ellas de manera opcional. Las resumimos aquí, junto con algunos conceptos nuevos que introduciremos en esta Unidad.

Elementos, pertenencia, notación por extensión:

Un conjunto es básicamente una colección de elementos. Los elementos pueden ser cualesquieras: números, objetos, palabras, incluso otros conjuntos.

Podemos anotar un conjunto "por extensión", enumerando sus elementos entre llaves {}. Por ejemplo, podemos definir un conjunto A con los siguientes elementos:

A = {nabo, repollo, zanahoria, perejil}

Entonces podemos decir, por ejemplo: "Repollo pertenece a A", resp. "Repollo es un elemento de A". Y también: "Manzana no pertenece a A", resp. "Manzana no es un elemento de A." Con los símbolos respectivos, se escribe:

repollo $\in$ A manzana $\notin$ A

(La mayoría de los libros sugieren leer estos símbolos como "pertenece a", resp. "no pertenece a". Pero si leemos "es elemento de", resp. "no es elemento de", entonces nos ayudamos a recordar el símbolo, porque el símbolo es una letra E redondeada, E de "elemento".)

Nota: En la notación por extensión, se enumera cada elemento una sola vez. Si escribo: A = {zanahoria, zanahoria, zanahoria}, eso es lo mismo como A = {zanahoria}. Si quiero formar un conjunto con tres zanahorias, entonces tengo que distinguir las tres zanahorias de alguna manera. Por ejemplo: A = {"zanahoria pequeña", "zanahoria mediana", "zanahoria grande"}. O: A = {"zanahoria 1", "zanahoria 2", "zanahoria 3"}.

Conjunto universal:

Al definir conjuntos, normalmente se define primero un "universo" o "conjunto universal", desde el cual elegimos sus elementos. Por ejemplo, al formar conjuntos de números, al nivel de Primaria usaremos normalmente como universo los números naturales. Al trabajar con objetos concretos, podemos definir que el universo consiste en todos los objetos que tenemos en la casa. Al trabajar con bloques lógicos, el universo son todos los bloques del juego.

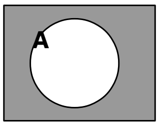
El conjunto universal normalmente se abrevia con la letra U.

Diagramas de Venn

Estos diagramas nos ayudan a visualizar conjuntos, sus propiedades, y las operaciones que realizamos con ellos. Los conjuntos se representan mediante círculos u otras figuras geométricas; se pueden anotar los elementos dentro de estas figuras. Ya que diferentes conjuntos pueden tener elementos en común, las figuras se dibujan normalmente de manera que se intersectan y tienen áreas en común.
El conjunto universal se suele dibujar en forma de un rectángulo que encierra todos los otros conjuntos del diagrama.

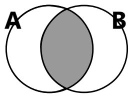
Nota: A veces estos diagramas son llamados "diagramas de Venn-Euler", o "diagramas de Euler". Es cierto que Euler fue el primero quien hizo uso de este tipo de diagramas. Él los usó para ilustrar ciertas propiedades de la lógica proposicional – un tema muy estrechamente relacionado con la teoría de los conjuntos; pero en los tiempos de Euler, la teoría de los conjuntos todavía no había sido formulada ni definida. Por eso, hay cierto anacronismo en asociar el nombre de Euler con el uso de estos diagramas en la teoría de los conjuntos.

Complemento de un conjunto



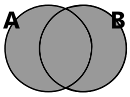
El complemento de un conjunto A contiene todos los elementos que ***no*** pertenecen a A. Se puede escribir con el símbolo **A'**, o también ***C*(A)**.
En la lógica proposicional, el complemento corresponde a la *negación*: el complemento de A es "no-A". - En el diagrama de Venn arriba, A' está sombreado.

Intersección de conjuntos



La intersección de dos conjuntos A y B contiene todos los elementos que A y B tienen en común. Se escribe **A ∩ B**. En la lógica proposicional, la intersección corresponde a la conjunción "y". Por ejemplo, si A es el conjunto de los bloques rojos, y B es el conjunto de los bloques pequeños, A ∩ B es el conjunto de los bloques que son rojos **y** pequeños. O sea, los bloques que cumplen ambas propiedades "A y B".

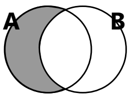
Unión de conjuntos



La unión de dos conjuntos A y B contiene todos los elementos que pertenecen a cualquiera de los conjuntos. Se escribe **A U B**.
En la lógica proposicional, la unión corresponde a la conjunción "o". Por ejemplo, si A es el conjunto de los bloques rojos, y B es el conjunto de los bloques pequeños, A U B es el conjunto de los bloques que son rojos **o** pequeños (o ambos). O sea, los bloques que son "A o B" (o ambos).

Nota: En este punto tenemos que cuidarnos de expresarnos sin ambigüedades. Podríamos decir también que la unión A U B (en el ejemplo anterior) contiene "los bloques rojos y los pequeños". En el lenguaje cotidiano, eso es correcto. Pero podríamos fácilmente confundir esta expresión con la que usamos para describir la *intersección*: "los bloques que son rojos y pequeños". ¡Eso no es lo mismo! Por tanto, en la matemática es preferible no usar la conjunción "y" al hablar de la unión de conjuntos. Es mejor decir que la unión contiene "los bloques que son rojos o pequeños" (y aclarar que eso incluye los bloques que son rojos y pequeños a la vez). Así usamos desde un principio las expresiones correctas, desde el punto de vista de la lógica proposicional, y así evitamos malentendidos y confusiones más adelante.

Diferencia de conjuntos



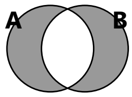
La diferencia de dos conjuntos se puede escribir **A – B**, o también **A\B**. Contiene todos los elementos que pertenecen a A, pero no a B.

Notamos, como en la diferencia (o resta) de números, que esta operación no es conmutativa: B – A no es lo mismo como A – B.

En la lógica proposicional, la diferencia se puede expresar como "A, pero no B", o más correctamente: "A y no-B". Esta expresión revela que la diferencia es lo mismo como la intersección con el complemento del otro conjunto: A – B = A ∩ B'.

Por ejemplo, si A es el conjunto de los bloques rojos, y B es el conjunto de los bloques pequeños, A – B es el conjunto de los bloques que son rojos, y a la vez no pequeños.

Diferencia simétrica de conjuntos



La diferencia simétrica se escribe **A Δ B**, y contiene todos los elementos que pertenecen sólo a uno de los conjuntos, pero no a ambos. Podemos decir también que la diferencia simétrica es "la unión menos la intersección": A Δ B = (A U B) – (A ∩ B)

En la lógica proposicional, la diferencia simétrica corresponde al "**o** exclusivo": "o A o B" (pero no ambos). Por ejemplo, si A es el conjunto de los bloques rojos, y B es el conjunto de los bloques pequeños, A Δ B es el conjunto de los bloques que **o** son rojos **o** son pequeños (pero no ambas propiedades a la vez).

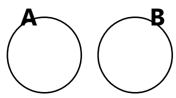
Nota: Al nivel de Primaria no es necesario introducir conceptos de la lógica proposicional. Pero estas conexiones nos ayudarán a cuidar nuestra manera de expresar las operaciones con conjuntos. Y haremos unos ejercicios donde los niños tienen que descubrir el significado lógico de las operaciones que realizamos con los conjuntos, mediante ejemplos concretos.

Conjunto vacío o conjunto nulo

Podemos definir un conjunto que no contiene ningún elemento. Se escribe con un par de llaves vacías: **{}**, o también con este símbolo: **Ø**. Aunque no contiene ningún elemento, es un conjunto; de la misma manera como una bolsa vacía sigue siendo una bolsa.

Conjuntos disjuntos

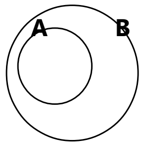
Se llaman conjuntos "disjuntos" los que no tienen ningún elemento en común. Por ejemplo, el conjunto de los bloques rojos y el conjunto de los bloques amarillos son disjuntos: No existe ningún bloque lógico que sea rojo y amarillo a la vez.
En otras palabras, dos conjuntos son disjuntos cuando su intersección es vacía: A ∩ B = Ø**.**
En el diagrama de Venn, conjuntos disjuntos se dibujan como dos áreas separadas que no tienen intersección:



Subconjunto

Un conjunto se llama "subconjunto" de otro conjunto, si está contenido completamente dentro del otro conjunto. Por ejemplo, el conjunto de los mamíferos es un subconjunto del conjunto de los animales. El conjunto de los triángulos delgados es un subconjunto del conjunto de los triángulos.

Con símbolos, "A es subconjunto de B" se escribe **A ⊂ B**. En el diagrama de Venn, el conjunto A se dibuja completamente dentro del conjunto B:



Notas:

- La relación "es subconjunto de" se puede definir matemáticamente de diferentes maneras, de acuerdo a sus propiedades respecto a las operaciones con conjuntos. Por ejemplo: A es subconjunto de B, si la diferencia A – B es vacía: $A - B = \emptyset$. O también: A es subconjunto de B, si la intersección es igual al entero conjunto A: $A \cap B = A$. (Piense si puede encontrar una definición que se basa en la operación de la *unión*.)

- La misma relación se puede escribir "al revés", y con el símbolo invertido: Si $A \subset B$, entonces $B \supset A$ (B es "superconjunto" de A). Esta expresión es muy poco usual en el idioma español; pero es más usual en otros idiomas.

- Algunos autores, particularmente en los niveles superiores, distinguen entre "subconjunto" y "subconjunto propio". Según la definición, A es un subconjunto de B aun en el caso donde los dos conjuntos son *iguales*. (Aun en este caso, la diferencia A – B es vacía, y $A \cap B = A$.) La definición de "subconjunto propio" excluye este caso: A es subconjunto propio de B solamente si $A \neq B$, o sea, si B contiene por lo menos un elemento que no pertenece a A.

Cuando se hace esta distinción, el símbolo $\subset$ se usa solamente para subconjuntos *propios*. Para subconjuntos en general (incluyendo el caso donde los conjuntos son iguales), se usa entonces el símbolo $\subseteq$
Con los niños de primaria todavía no haremos esta distinción. Pero puede ser bueno haberlo pensado con anticipación, porque quién sabe si en el transcurso de las actividades, un niño pregunta si un conjunto puede ser subconjunto de sí mismo.

- El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto. Tome unos momentos para pensar por qué.

TALLER

Conjuntos de objetos concretos

Dibuje en un papel o una cartulina grande un diagrama de Venn con dos conjuntos que se intersectan. El papel mismo servirá para significar el conjunto universal. Ahora podemos definir diversos conjuntos, y colocar objetos sobre el papel según los conjuntos que hemos definido.

*(**Nota:** Si los niños no hicieron esta actividad en el nivel de Primaria I, o si ya no se acuerdan, entonces se recomienda hacerlo primero con un único conjunto. De otro modo se puede comenzar de frente con dos conjuntos.)*

Por ejemplo, podemos definir que uno de los conjuntos va a contener carritos de juguete, y el otro conjunto va a contener juguetes rojos. Entonces, ¿adónde colocamos el carrito verde? ¿y la pelotita roja? ¿y el carrito rojo? ¿y la muñeca morena? (El "universo", en este caso, consistirá en juguetes. Para que los niños no traigan tomates o zapatos u otros objetos ...)

O podemos formar un conjunto de verduras, y un conjunto de alimentos que le gustan a Pedro. (Esperemos que haya por lo menos una verdura que le gusta a Pedro. De otro modo, la intersección quedará vacía.)

Hagan lo mismo con los ***bloques lógicos***. En este caso, por ejemplo, un conjunto contendrá cuadrados, y el otro conjunto bloques pequeños. El universo consiste en todos los bloques lógicos.

Cuando puedan hacerlo con dos conjuntos, inténtenlo con *tres* conjuntos. Para eso tenemos que dibujar tres círculos que se intersectan mutuamente, como en las Hojas de trabajo 86.3-6.

Por ejemplo: Un conjunto de vasos; un conjunto de objetos de vidrio; un conjunto de objetos que se usan en la cocina. Eso es ahora más exigente. ¿Adónde ponemos el plato de vidrio? ¿el vaso de plástico? ¿el florero de vidrio? ¿el cucharón? ¿las gafas de papá? – ¿Encuentran para cada campo un objeto que pertenece?

Hagan lo mismo con los bloques lógicos: Un conjunto con bloques azules, un conjunto con círculos, y un conjunto con bloques gruesos. ¿Pueden ubicar todos los bloques en el lugar correcto? – Etc...

Por ahora, evite definir conjuntos que se excluyen mutuamente. Por ejemplo, no forme en la misma hoja un conjunto de platos y otro de cucharas. Trate de definir los conjuntos de tal manera que existan objetos para colocar en todas las intersecciones. (No existe objeto que sea plato y cuchara a la vez; entonces esa intersección quedaría vacía.) – Este caso, el de la intersección vacía, lo examinaremos en una actividad posterior.

En el transcurso de estas actividades, aproveche las oportunidades de conversar acerca de la ubicación de diversos objetos. Así puede de manera informal repasar las operaciones con conjuntos: "Ah, el tenedor pertenece a la intersección de los objetos de cocina con los objetos de metal." – "¿Encuentras algo que podemos colocar en la diferencia del conjunto de los vasos con el conjunto de los objetos de cocina?" – "¿Cuántos objetos tenemos ahora en la unión de estos dos conjuntos?" – Etc.

Conjuntos de números

Alisten tarjetitas con los números de 1 a 60 (o más, si tienen paciencia). Hagan las mismas actividades como las anteriores, pero ahora con estos números. Por ejemplo:

Tenemos dos conjuntos en nuestro diagrama. Definimos que uno de ellos sea el conjunto de los números impares, y el otro el conjunto de los múltiplos de 5. Coloquen las tarjetas sobre el diagrama, cada número en el lugar que le corresponde.

Después hagan lo mismo con tres conjuntos. Por ejemplo: El conjunto de los números impares; el conjunto de los números menores a 30; y el conjunto de los números primos.

Hojas de trabajo

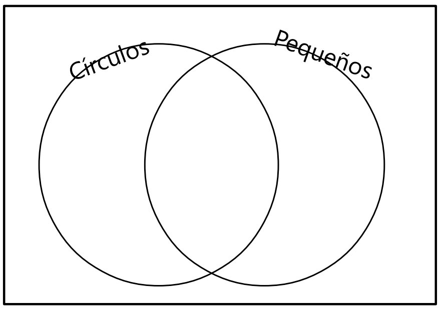
Hoja de trabajo 86.1 – Pinta las áreas indicadas:

Con esta hoja se repasa el significado lógico de las operaciones con conjuntos. Después de las actividades con objetos concretos, eso ya no debe presentar ningún problema. Si unos niños dificultan con estos conceptos, que jueguen primero algunas veces al Bingo de bloques lógicos (vea abajo), y después vuelvan a esta hoja.
Las tareas de la última fila repasan las operaciones con conjuntos.

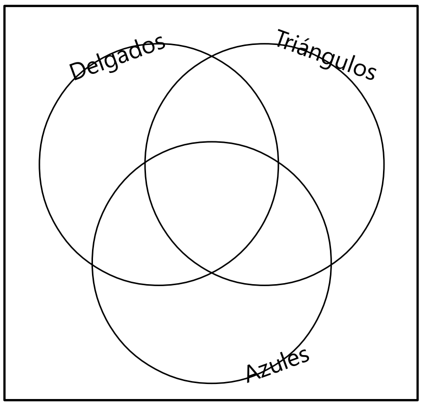
Hojas de trabajo 86.2-4 – Llenar conjuntos con elementos, según las indicaciones:

Las instrucciones están en las hojas. Esta actividad traslada al papel lo que ya hicimos anteriormente con los objetos concretos. La Hoja 86.2. usa diagramas con dos conjuntos; las Hojas 86.3-4 tres conjuntos. Los niños deberán dominar bien la actividad con dos conjuntos, antes de pasar a los tres conjuntos.

Bingo de bloques lógicos



Esta actividad también conocemos desde el nivel de Primaria I: Una persona, que dirige el juego, tiene los bloques lógicos en una caja o bolsa donde los demás participantes no los pueden ver. Los demás tienen delante de sí una hoja grande con un diagrama de Venn de dos o tres conjuntos, con significados definidos de antemano.



La persona que dirige, saca uno de los bloques y lo levanta en alto para que todos lo puedan ver. Quien cree que el bloque sirve para colocar en uno de sus conjuntos, lo reclama, llamando "¡Yo!" Quien lo reclama primero, recibe el bloque y lo coloca en el lugar correspondiente de su diagrama. (En este juego, el espacio afuera de los conjuntos no vale. Para poder reclamar un bloque, tiene que pertenecer por lo menos a uno de los conjuntos.) Si nadie reclama el bloque, se devuelve a la caja o bolsa. Entonces la persona que dirige saca el siguiente bloque (sin mirar), y así sucesivamente. Quien tiene primero todos los campos de su diagrama ocupados con por lo menos un bloque, llama "¡Bingo!" y gana el juego.

Comiencen con diagramas de dos conjuntos. Cuando los niños dominan el juego, pasen a diagramas con tres conjuntos.
Como en las actividades anteriores, evite definir en un mismo diagrama dos conjuntos que se excluyen mutuamente, como por ejemplo "Círculos" y "Rectángulos". Unas combinaciones que funcionan bien, para tres jugadores, son las siguientes:

Con dos conjuntos:

Jugador A: Rojos; Delgados.
Jugador B: Amarillos; Pequeños.
Jugador C: Azules; Gruesos.

O también:

Jugador A: Cuadrados; Grandes.
Jugador B: Triángulos; Delgados.
Jugador C: Círculos; Rojos.

Con tres conjuntos:

Jugador A: Rectángulos; Azules; Pequeños.
Jugador B: Círculos; Amarillos; Grandes.
Jugador C: Triángulos; Rojos; Gruesos.

O también:

Jugador A: Cuadrados; Azules; Delgados.
Jugador B: Rectángulos; Pequeños; Gruesos.
Jugador C: Triángulos; Amarillos; Grandes.

Se puede también definir una misma propiedad en las hojas de dos jugadores. Entonces el juego se volverá más competitivo. Por ejemplo, si dos jugadores tienen un conjunto "Rojos", competirán entre sí por los bloques rojos. Un "juego competitivo" de esta forma podría verse así:

Jugador A: Grandes; Azules; Delgados.
Jugador B: Grandes; Rojos; Gruesos.
Jugador C: Pequeños; Rojos; Delgados.

O también:

Jugador A: Cuadrados; Azules; Grandes.
Jugador B: Cuadrados; Amarillos; Gruesos.
Jugador C: Triángulos; Amarillos; Grandes.

Variación con "castigos":

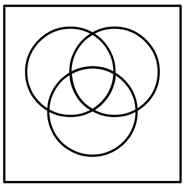
Se puede acordar de antemano que habrá ciertos "castigos" por cometer errores:

- Si alguien reclama un bloque que no pertenece a ninguno de sus conjuntos, tiene que devolverlo, y adicionalmente la persona que dirige le quitará uno de los bloques que ya están colocados en su diagrama.
- Si alguien llama "¡Bingo!", pero uno o varios de sus bloques están mal ubicados (en campos donde no pertenecen), los bloques mal ubicados se devuelven a la caja, y el juego continúa.

Este juego presenta también oportunidades para conversar acerca de la ubicación de los bloques, y así repasar de manera informal las operaciones con conjuntos.

Una ilustración de las operaciones con conjuntos

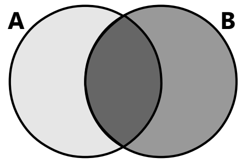
Fabricaremos una pequeña "obra de arte" de papel para ilustrar las operaciones con conjuntos. Probablemente los niños recordarán estas operaciones desde el nivel de Primaria I. Si no se acuerdan, podemos introducirlas en el transcurso de esta actividad.



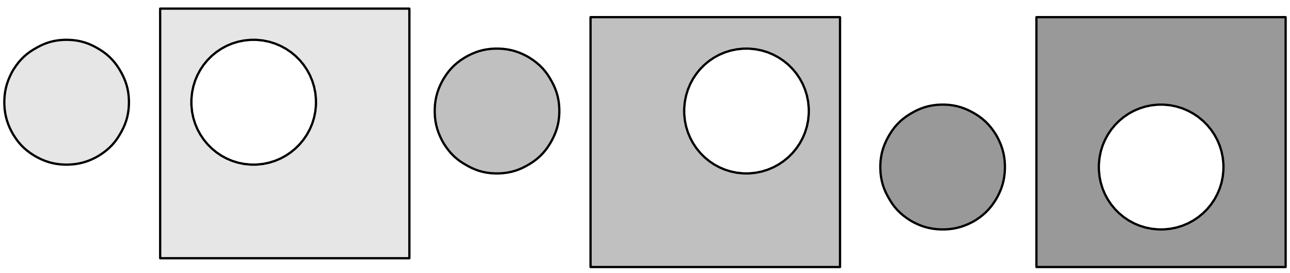
Necesitamos un tipo de papel semi-transparente ("papel seda", "papel cometa", o similar), en tres colores diferentes. En un papel normal construimos un diagrama de Venn con tres círculos secantes. Copiamos este diseño a los tres papeles semitransparentes. Si desean, pueden plastificar cada papel con un pedazo de lámina adhesiva transparente, para que dure más.

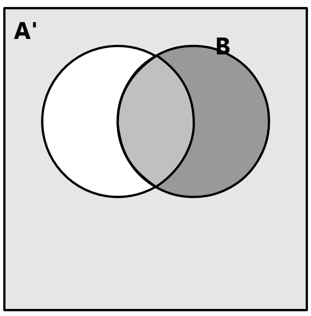
De cada uno de los papeles cortamos el rectángulo, y uno de los círculos; en cada papel un círculo diferente. Entonces obtenemos las siguientes piezas (vea abajo):

Los círculos representan conjuntos, y las partes que sobran de los rectángulos representan los complementos de los conjuntos. Ahora podemos sobreponer los conjuntos y/o sus complementos, para representar diversas operaciones. Por ejemplo:



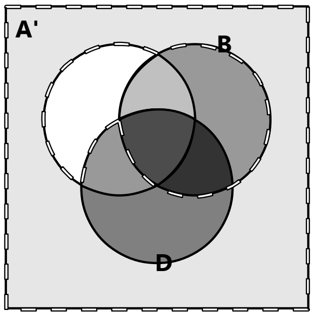
Sobreponemos un círculo amarillo con uno azul. Ahora, la *unión* de los dos conjuntos es representada por el área completa cubierta por los círculos, o sea, todo lo que tiene cualquiera de los colores (amarillo **o** azul). La *intersección* de los dos conjuntos es el área que contiene ambos colores (amarillo **y** azul), o sea, que debe aparecer de color verde, porque el amarillo y el azul juntos dan verde. La *diferencia* "amarillo – azul" es el área que contiene el color amarillo puro (amarillo, pero no azul). Igualmente, la diferencia "azul – amarillo" es la media luna de puro azul.





Ahora podemos también sobreponer un círculo con el *complemento* de otro círculo. Observen las áreas que corresponden a la unión, intersección, y diferencia de un conjunto con el complemento de otro conjunto. Así podemos descubrir, por ejemplo, que la intersección (el área verde) es igual a la diferencia B – A. O sea, B ∩ A' = B – A.

Sigan haciendo observaciones como estas, y prueben diversas combinaciones. Después de agotar las combinaciones con dos conjuntos, experimenten con los tres colores juntos. Por ejemplo así como en la imagen en la siguiente página.



Aquí, las operaciones ya se vuelven más complejas. Por ejemplo, ¿cuál es el área que corresponde a (A' U D) – B? Supongamos que los colores de A y B son los del ejemplo anterior, y D es rojo. Siguiendo la lógica, esta operación corresponde al área que tiene los colores amarillo o rojo (o ambos), pero no azul. Observando la figura, vemos que es el área entre el rectángulo y la curva trazada con trazos blancos interrumpidos.

De la misma manera, identifiquen otras operaciones y sus áreas correspondientes. Si desean, pueden dibujar y pintar algunos de los resultados.

Hojas de trabajo 86.5-6 – Operaciones con tres conjuntos:

En la Hoja 86.5 se deben pintar las áreas indicadas. Las instrucciones para la Hoja 86.6 están en la hoja.

Operaciones con tres conjuntos son considerablemente más complejas que las operaciones con dos conjuntos. Los niños deberán dar este paso solamente cuando dominan bien las operaciones con dos conjuntos, y cuando su capacidad de razonamiento esté más desarrollada. Para muchos niños será recomendable hacer estos ejercicios recién hacia el *fin* del período de Primaria II.

Puede ser una ayuda, pintar primero suavemente resultados parciales, antes de llegar al resultado final. Tomando como ejemplo la primera tarea en la Hoja 86.5: Se puede primero señalar la unión A U B, pintándola suavemente, o llenándola con rayas horizontales o verticales, o repasando su contorno con un color. Con eso hemos visualizado el conjunto del cual tenemos que quitar el conjunto D. Así es más fácil poder "ver" el resultado final: Eso es ahora una simple operación con dos conjuntos, el conjunto pintado y el conjunto D.

De esta manera, un problema complejo se puede "descomponer" en varios pasos sencillos.

La primera parte de la Hoja 86.6 requiere dos cosas: Pintar las áreas requeridas, y expresarlas mediante operaciones de conjuntos. Lo último se puede hacer de dos maneras: Se puede partir del área pintada, y pensar cómo se puede obtener esta área mediante operaciones de conjuntos. (Eso es lo que se tiene que hacer en la segunda parte de la hoja. Requiere un razonamiento bastante abstracto.) – O se puede partir del significado lógico del área que se requiere, y "traducir" esta lógica a las operaciones con conjuntos. Tomando el segundo ejemplo, "Todas las personas extranjeras adultas": No tenemos un conjunto de "extranjeros", pero tenemos un conjunto de "personas de tu país" (P); entonces el conjunto de "extranjeros" es el complemento de P. Así que el área que buscamos tiene que pertenecer tanto a A (personas adultas) como también a P' (extranjeros). (¿Qué operación tenemos que efectuar entonces con A y P' ? ¿O hay una manera de escribirlo directamente como una operación con A y P?)

Investigación

Casos especiales al formar conjuntos

Volvamos a hacer unas actividades como las anteriores, de colocar objetos, bloques lógicos, o tarjetas de números, sobre diagramas de Venn. Pero ahora definimos unos conjuntos que tendrán resultados "especiales". Por ejemplo:

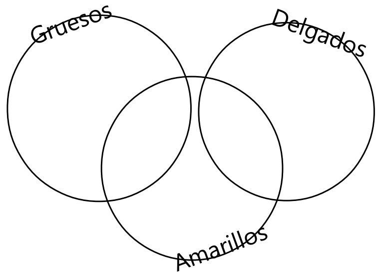
Experimento 1

Usamos como universo los bloques lógicos, y definimos los tres conjuntos "Amarillos", "Gruesos", y "Delgados". Coloquen cada bloque donde corresponde. Si lo hicieron correctamente, dos campos del diagrama quedarán vacíos. ¿Por qué?
¿y cómo describiríamos estos campos con las operaciones de conjuntos? *(Hagan el experimento y piénsenlo bien, antes de seguir leyendo.)*

Si lo hicieron correctamente, quedarán vacíos los dos campos que forman juntos la intersección de "Gruesos" con "Delgados". En estos campos habría que colocar bloques que son a la vez gruesos y delgados, pero ¡tales bloques no existen! O sea, el conjunto de "Gruesos" y el conjunto de "Delgados" no tienen ningún elemento en común. Su intersección es vacía.

Esta observación nos sirve para introducir el concepto de los ***conjuntos disjuntos***: El conjunto de los gruesos y el conjunto de los delgados son conjuntos disjuntos.

Conversen un poco más acerca de esta observación. ¿Pueden mencionar otros ejemplos de conjuntos disjuntos? (Por ejemplo: bloques rojos y bloques amarillos; números pares y números impares; gatos y perros; humanos y animales; zapatos y sillas; etc...) – ¿De qué manera podemos dibujar conjuntos disjuntos en un diagrama de Venn?



(El ejemplo usado en esta actividad se podría dibujar también como en el dibujo a la derecha.)

– ¿Qué podemos decir acerca de la *unión* de dos conjuntos disjuntos? ¿y acerca de su *diferencia*? – Podemos notar además que *un conjunto y su complemento siempre son disjuntos.* No existen bloques que son rojos y "no-rojos" a la vez; no existen objetos que son grandes y pequeños a la vez; etc.

Podemos al mismo tiempo introducir el concepto del ***conjunto vacío***: ¿Cómo anotaríamos la intersección de los gruesos con los delgados? Tenemos que escribir un par de llaves, porque es un conjunto. Pero este conjunto es vacío, no tiene ningún elemento. Entonces no hay nada entre las llaves: **{}**. Alternativamente, se puede usar el símbolo **Ø**.

Ya hemos visto un ejemplo de un conjunto vacío: el conjunto de los bloques que son gruesos y delgados a la vez. ¿Pueden mencionar otros ejemplos? (Por ejemplo: el conjunto de las piedras que caminan; el conjunto de los helados calientes; el conjunto de las mentiras verdaderas; ...)

Experimento 2

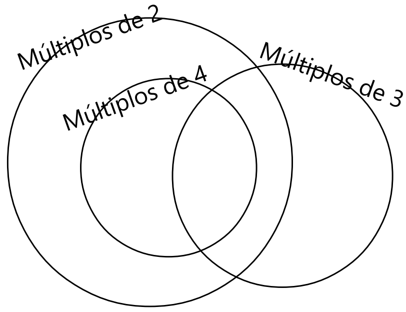
- Hagamos ahora otro ejemplo de conjuntos "especiales". Usamos como universo los números de 1 a 30. Los repartimos en tres conjuntos: Múltiplos de 2, múltiplos de 3, y múltiplos de 4. Si lo hacen correctamente, aquí también quedarán dos campos vacíos. ¿Por qué? ¿y cómo describiríamos estos campos vacíos con operaciones de conjuntos? *(Hagan el experimento y piénsenlo bien, antes de seguir leyendo.)*

Si lo hicieron correctamente, quedarán vacíos los campos que forman juntos la diferencia de "Múltiplos de 4" – "Múltiplos de 2". (A estas alturas, los niños ya deberían reconocer la forma característica de "media luna" de la diferencia de dos conjuntos en los diagramas de Venn.) O sea, no existen números que fueran múltiplos de 4, pero no múltiplos de 2. En otras palabras, todo múltiplo de 4 es a la vez múltiplo de 2. (Eso es lógico si nos damos cuenta de que el mismo 4 ya es un múltiplo de 2.)

En este caso decimos que el conjunto de los múltiplos de 4 es un ***subconjunto*** del conjunto de los múltiplos de 2. O sea, los múltiplos de 4 están completamente contenidos dentro de los múltiplos de 2.

Si llamamos A al conjunto de los múltiplos de 2, y B al conjunto de los múltiplos de 4, decimos que "B es subconjunto de A"; o escrito con símbolos: $\mathbf{B \subset A}$

El diagrama de Venn de nuestro experimento se podría dibujar también así:



Conversen también acerca de esta observación. ¿Pueden mencionar otros ejemplos de subconjuntos? (Por ejemplo: mamíferos y animales; bicicletas y vehículos con ruedas; paralelogramos y cuadriláteros; ; etc...) – ¿Qué podemos decir acerca de la *unión* de un conjunto y su subconjunto? ¿acerca de su *intersección*? ¿y acerca de su *diferencia*? – Podemos notar además que *cada conjunto es un subconjunto de su universo respectivo;* de otro modo el universo no sería el universo. Todo conjunto de bloques lógicos es un subconjunto del conjunto de los bloques lógicos; todo conjunto de números es un subconjunto del conjunto de todos los números; etc.

- Hagan algunas otras actividades de clasificar objetos o números, y examinen si ocurre algún caso especial. Dibujen los diagramas de Venn correspondientes. Por ejemplo:

Con bloques lógicos:

- Los bloques rojos, los cuadrados, y los azules.

- Los triángulos, los rectángulos, y los triángulos pequeños.

- Los grandes, los amarillos, y los grandes delgados.

Con números:

- Los números menores a 20, los números de 3 cifras, y los números menores a 13.

- Los números menores a 10, los números de 2 cifras, y los números mayores a 100.

- Los números menores a 10, los números de 2 cifras, y los números menores a 100.

- Los números menores a 20, los números de una única cifra, y los números menores a 100.

- Los números pares, los números primos, y los números impares.

- Los divisores de 12, los divisores de 18, y los divisores de 24.

- Los múltiplos de 6, los múltiplos de 12, y los números primos.

Unidad 87 - El entero y sus partes en conjuntos con intersección

Prerrequisitos:
- Entendimiento del principio del entero y sus partes.
- Conocimientos básicos de las operaciones con conjuntos.
- *(Para algunos ejemplos):* Porcentajes *(Unidad 52)*.

Materiales necesarios:
- Cartón o madera contrachapada (triplay), cúter o sierrita.

Para los educadores

En esta Unidad examinamos un fenómeno que se presenta al contar o sumar el número de elementos de conjuntos que se intersectan. En la vida práctica podemos encontrarnos con esta situación, por ejemplo, si encuestamos a nuestros amigos y vecinos si tienen zapatos, y si tienen sandalias. Al encuestar a 20 personas, puede resultar que 18 de ellos tienen zapatos, y 8 tienen sandalias – pero 18 + 8 no da 20, da 26. ¿De dónde vienen esas 6 personas adicionales? ¿El entero no es la suma de sus partes en este caso?
En la primera actividad del Taller se trata de crear una situación donde ocurre este fenómeno. Hay que tomar suficiente tiempo para hacer la experiencia y conversar acerca de ella. Una vez que los niños entienden lo que ocurre, ya no dificultarán con problemas de este tipo.

(La explicación del misterio es fácil: Hay personas que tienen ambas cosas, tanto zapatos como sandalias. Al sumar 18 + 8 hemos contado a esas doblemente: una vez con los que tienen zapatos, y otra vez con los que tienen sandalias. O sea, la *intersección* de los conjuntos se contó doblemente.)

Nota: Muchos libros escolares usan ecuaciones con incógnitas para resolver este tipo de problemas. Esos métodos no son adecuados para niños de primaria, porque la mayoría de ellos todavía no han desarrollado la capacidad del pensamiento abstracto que es necesario para entender ecuaciones algebraicas. Preferimos usar experiencias prácticas y material concreto, lo cual nos permite calcular directamente con los números, sin necesidad de introducir variables algebraicas. La clave para entenderlo es siempre el principio del entero y sus partes, que los niños conocen desde el nivel de Primaria I.

TALLER

Cuando el total no es el total

Hagan una encuesta o investigación que produce como resultado dos conjuntos con intersección. Por ejemplo, como se sugirió en la sección "Para los educadores", pregunten a sus amigos o vecinos si tienen zapatos, y si tienen sandalias. Con eso tenemos dos conjuntos: las personas que tienen zapatos, y las personas que tienen sandalias. Podemos contar cuántas personas hay en cada uno de estos conjuntos. Si sumamos estos números, probablemente saldrá un número mayor al número de personas entrevistadas. ¿Por qué? ¿No sería de esperar que la suma de los dos números nos dé el total de las personas entrevistadas? ¿Por qué en este caso no es así?

Conversen acerca de esta situación, hasta que los niños encuentren una explicación satisfactoria. Si los niños no entienden lo que ocurre, dibujen un diagrama de Venn grande con los dos conjuntos, y escriban dentro del diagrama los nombres de todas las personas entrevistadas, en el campo donde pertenecen según las respuestas que dieron. Así debe ser posible resolver el misterio.

Otros ejemplos posibles serían:

- Pregunten quién tiene perro, y quién tiene gato.

- Pregunten a quién le gustan los helados, y a quién le gustan las papas fritas.

- Cuenten en su calle, cuántas casas tienen una puerta hacia la calle, y cuántas casas tienen más que dos pisos.

- Cuenten en un párrafo en un libro, cuántas palabras contienen una ***a*** (o varias), y cuántas palabras contienen una ***o*** (o varias).

- Etc.

Al calcular la suma, algunos de estos ejemplos van a requerir contar también aquellos elementos que no pertenecen a ninguno de los dos conjuntos. Por ejemplo, si preguntamos quién tiene perro, y quién tiene gato, va a haber personas que no tienen ninguno de los dos. Entonces sumamos tres números:

- el número de personas que tienen perro,

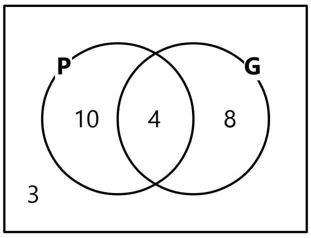
- el número de personas que tienen gato,

- el número de personas que no tienen perro ni gato.

Y comparamos esta suma con el total de los entrevistados.

Lo explicamos con el principio del entero y sus partes

Si hicieron el experimento (o varios), y dibujaron el diagrama de Venn correspondiente, entonces podemos usar ahora este diagrama para explicar la situación con la ayuda del principio del entero y sus partes. Por ejemplo, si hemos preguntado a 25 personas quiénes tienen perro (P) y quiénes tienen gato (G), el diagrama podría verse así:



Para simplificar el asunto, ya no escribimos todos los nombres; simplemente escribimos en cada campo el número de personas que pertenece.

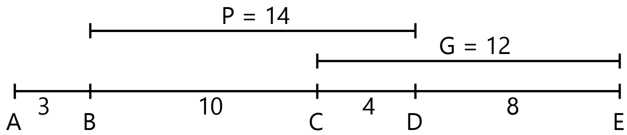
OJO: Esta es una forma un poco "irregular" de usar el diagrama de Venn. En el uso regular, este diagrama expresaría que p.ej. el conjunto P tiene dos elementos, "10" y "4". Pero eso no es lo que queremos representar aquí. Queremos decir que el conjunto P consiste en dos campos, donde el izquierdo ("P solo") contiene 10 elementos, y el derecho (la intersección) contiene 4 elementos.

Entonces, el conjunto P es un "entero" que consiste en dos partes:
- las personas que tienen "solo perro" (pero no gato), que son 10 personas,
- y las personas que tienen perro y gato; que son 4 personas.

Y el conjunto G también consiste en dos partes:
- las personas que tienen "solo gato" (pero no perro), que son 8 personas,
- y las personas que tienen gato y perro; que son 4 personas.

Entonces, si decimos solamente que "14 personas tienen perro, y 12 personas tienen gato", no estamos dando la información completa. Tenemos que informar además que hay 4 personas que tienen *perro y gato*.

Nota: Podemos señalar que matemáticamente, esta es la misma situación como la que ocurre al calcular con segmentos combinados en una recta. El ejemplo de arriba podría dibujarse también así:

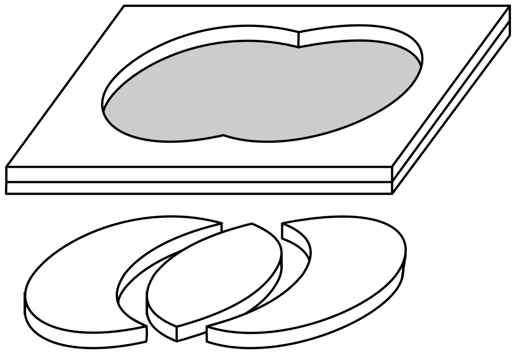


En este dibujo, el conjunto P corresponde al segmento BD, y el conjunto G corresponde al segmento CE. El segmento CD es la intersección P ∩ G. Los cálculos funcionan exactamente de la misma manera como en el diagrama de Venn. Efectivamente, un segmento de una recta puede interpretarse como un "conjunto de puntos"; y si dos segmentos tienen una parte en común, esa parte es la intersección de los dos conjuntos.

Diagrama de Venn como rompecabezas

Dibujen un diagrama de Venn como el de arriba (sin los números) en un pedazo de cartón o madera contrachapada (triplay). Corten los pedazos, y peguen otro rectángulo de cartón o madera como base debajo del marco vacío. Ahora podemos armar las piezas como rompecabezas.

Estas piezas nos permiten visualizar las operaciones que tenemos que efectuar al calcular este tipo de problemas. Por ejemplo:

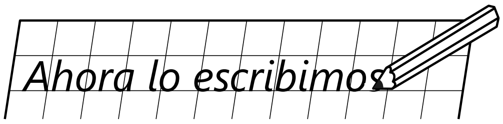


El conjunto izquierdo consiste en dos partes: la "media luna" y la intersección. Si sabemos el total de este conjunto (por ejemplo, cuántas personas tienen perro), y además la "media luna" (cuántas personas tienen "solo perro"), podemos quitar esa parte (restar), y nos queda la intersección (cuántas personas tienen perro y gato).

Sumar ambos conjuntos corresponde a juntar la media luna izquierda y la intersección, más la media luna derecha y la intersección – o sea, tenemos ahora dos intersecciones. (No tenemos efectivamente dos piezas de intersección, pero podemos imaginarlo). Si queremos tener la unión de los dos conjuntos, tenemos que quitar (restar) de esta suma una vez la intersección.

Etc.

Si desean, pueden hacer lo mismo con un rompecabezas de *tres* conjuntos, y analizar las situaciones que se pueden dar allí.

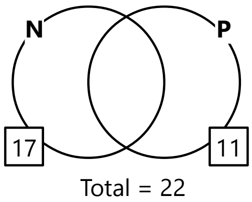


Calcular cantidades desconocidas en conjuntos con intersección

Después de los experimentos e investigaciones del Taller, podemos ahora calcular con ejemplos donde no tenemos todos los datos. Por ejemplo:

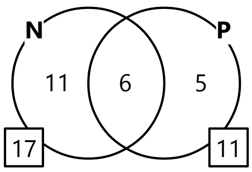
En un cumpleaños, 22 niños bebieron jugo. 17 niños bebieron jugo de naranja, y 11 niños jugo de piña.

Podemos dibujar un diagrama de Venn de la siguiente manera:



Los números 17 y 11 no los escribimos dentro de los campos, porque se refieren a conjuntos que se componen de *dos* campos. Por eso los escribimos como "etiquetas" adheridas al conjunto, para señalar que se refieren al contenido del conjunto entero.

Ahora podemos calcular cuántos niños hay en cada campo: Sumando 17 + 11 = 28, pero sabemos que en esta suma hemos contado doblemente la intersección (o sea, aquellos niños que bebieron *ambos* jugos). ¿A cuántos niños hemos contado doblemente? – Eso lo descubrimos si comparamos esta suma con el total de niños: 22 + **6** = 28, entonces son 6 niños que bebieron ambos jugos. Con eso podemos completar todos los campos:



- 11 niños bebieron solamente jugo de naranja.
- 6 niños bebieron jugo de naranja y jugo de piña.
- 5 niños bebieron solamente jugo de piña.

Otra forma posible de calcularlo es la siguiente: Si restamos del total a los que bebieron jugo de piña, nos quedan los que bebieron naranja *sólo:* 22 – 11 = 11. O sea, con eso sabemos el número de elementos en la *diferencia* N – P. Y de la misma manera podemos calcular cuántos niños hay en la diferencia P – N. Así llegamos al mismo resultado. (¡Reproduzcan estas operaciones con el rompecabezas de la actividad anterior!)

Además, podemos hacer una comprobación: Todos los campos juntos deben dar el total. (Esa es la forma correcta de sumar todas las partes: sumando cada campo particular aparte.) 11 + 6 + 5 = 22, eso nos da ahora el total correcto.

En algunos casos conocemos otros datos – por ejemplo el número de niños que bebieron ambos jugos; o el número de niños que bebieron "solamente naranja". En cualquier situación, aplicando correctamente el principio del entero y sus partes podemos calcular las partes que faltan saber.

Nota: Es importante entender y expresar los datos correctamente. Si preguntamos: "¿Cuántos niños bebieron jugo de naranja?", eso incluye a los niños que bebieron naranja y piña; o sea, nos referimos al entero conjunto N. Pero si preguntamos: "¿Cuántos niños bebieron *solamente* naranja?", entonces estamos excluyendo a los que bebieron naranja y piña; o sea, nos referimos a la diferencia N – P.

Unos problemas para practicar

Dibuja diagramas de Venn para las siguientes situaciones, anota los datos conocidos, y calcula los desconocidos:

1) En una pizzería se vendieron 40 pizzas con queso, y 30 pizzas con jamón. Si 15 pizzas tenían queso y jamón, ¿cuántas pizzas se vendieron en total?

2) Julia tiene libros sobre plantas y animales, en total 18. 13 libros son sobre animales, y 10 libros son sobre plantas. ¿Cuántos libros tratan de ambos temas?

3) Laura prepara 28 vasos de refresco con jugo de limón y de naranja. 20 vasos contienen naranja. 13 vasos contienen naranja y limón. ¿Cuántos vasos contienen limón?

4) En un pueblo, todas las familias crían pollos o cuyes. 69 familias crían solamente pollos. 187 familias crían cuyes; 53 de ellas crían también pollos. ¿Cuántas familias crían pollos? ¿y cuántas familias viven en el pueblo?

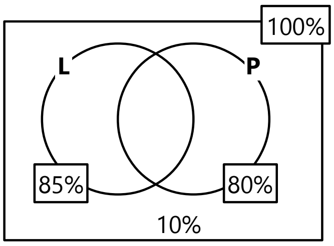
Completando el universo

Ahora hay casos donde algunos elementos del total no pertenecen a ninguno de los dos conjuntos. Ese fue el caso en el ejemplo del Taller con los perros y gatos. En este caso tenemos que completar el diagrama con el universo, que consiste en todas las personas entrevistadas, o todos los elementos que aparecen en la cuenta.

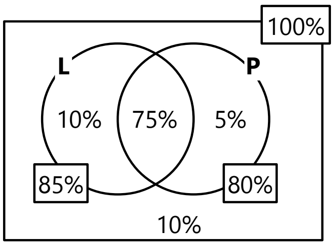
Por ejemplo:

En una ciudad, 85% de las casas son de ladrillo, y 80% de las casas tienen pararrayos. Se sabe además que 10% de las casas no son de ladrillo, ni tienen pararrayos. ¿Qué porcentaje de casas tienen pararrayos y no son de ladrillo?

Ya que se trata de porcentajes, el universo (todas las casas de la ciudad) corresponde al 100%. Entonces, estos son los datos conocidos:



De aquí podemos concluir que la *unión* L U P contiene 100% – 10% = 90% de las casas. (Nuevamente el principio del entero y sus partes: El universo es el entero, los 10% son una parte, y L U P es la otra parte.) Con eso podemos completar lo que falta, calculando las diferencias como antes:



Ahora sabemos que las que tienen pararrayos y no son de ladrillo (P – L) corresponden a 5%, porque 90% – 85% = 5%.

Más problemas para practicar

Dibuja diagramas de Venn para las siguientes situaciones, anota los datos conocidos, y calcula los desconocidos:

5) Elsa tiene 23 muñecas. 9 de ellas tienen pelo rubio. 19 muñecas son de plástico. Si 7 muñecas de plástico son rubias, ¿cuántas muñecas no son rubias ni de plástico?

6) La empresa de mudanzas "Sansón" tiene 18 camiones y algunas camionetas. 16 de sus vehículos son rojos. 11 camiones son rojos. 5 camionetas no son rojas. ¿Cuántos vehículos tiene la empresa?

7) De los 77 guías de turismo en una ciudad, 13 hablan alemán, pero no francés. 18 hablan francés, pero no alemán. Si 39 guías hablan francés, ¿cuántos no dominan ninguno de los dos idiomas?

8) En una encuesta, 484 personas dijeron tener refrigeradora. 237 personas dijeron que no tienen lavadora. 65 tienen solamente lavadora, y 324 tienen refrigeradora y lavadora.
¿Cuántas personas no tienen ninguna de las dos? ¿Cuántas tienen solamente refrigeradora? ¿y cuántas personas fueron encuestadas?

9) En cierto lugar de la sierra, en 127 días del año no llueve, y en 312 días no cae nieve. En 29 días cae solamente nieve. ¿En cuántos días del año no llueve ni cae nieve? ¿y en cuántos días llueve y cae nieve?

10) De los 351 niños encuestados en un pueblo, 235 juegan fútbol, 68 practican natación solamente, y 146 juegan fútbol solamente.
¿Cuántos niños practican ambos deportes?
¿y cuántos no practican ninguno de los dos?

*11) De los 64 empleados de una empresa, 43 han aprendido mecanografía, 38 tienen conocimientos de contabilidad, y 13 han estudiado diseño gráfico. Hay 3 empleados que dominan los tres campos. De los que saben contabilidad, 24 saben también mecanografía, y 7 saben también diseño gráfico. 15 personas saben mecanografía solamente. ¿Cuántos empleados no tienen conocimientos de ninguno de los tres campos?

*12) De los 153 integrantes de una compañía de bomberos voluntarios, 116 ayudaron alguna vez a apagar un incendio, y 70 ayudaron a combatir una inundación. 23 bomberos salvaron a una persona de las llamas, y 16 bomberos salvaron a alguien de ahogarse en una inundación. 118 bomberos, al ejercer sus funciones, nunca salvaron la vida a alguien, y 6 de ellos nunca tuvieron la oportunidad de combatir un incendio ni una inundación. ¿Cuántos bomberos tienen experiencia tanto con un incendio como con una inundación, pero sin salvar la vida a nadie?

Unidad 88 - Gran repaso

Prerrequisitos:
- Dominio de los principios matemáticos y las operaciones expuestos en las Unidades anteriores.

Materiales necesarios:
- *(para las construcciones geométricas):* Regla, escuadra, compás, transportador.

Para los educadores

Esta Unidad no contiene temas nuevos. Es una colección de problemas y desafíos que requieren aplicar los principios aprendidos a lo largo del entero período de Primaria II, y requieren razonar para hacer conexiones entre varios conceptos y principios, sea de la aritmética, de la geometría, o de otras ramas de la matemática.

Algunos de los problemas presentados son similares a los que aparecieron en alguna Unidad anterior, y así se pueden resolver recordando cómo se resolvió el problema anterior. Eso no requiere mucho pensamiento matemático.

Otros problemas son "novedosos", porque presentan situaciones que no ocurrieron en Unidades anteriores; sin embargo se pueden resolver con los principios matemáticos conocidos. Estos son los problemas que realmente entrenan el pensamiento matemático, porque requieren analizar la situación y descubrir cuáles son los principios matemáticos que se aplican a ella; y a veces requieren algo de creatividad para encontrar un camino de solucionarlo. *(Vea en la introducción a este bloque, acerca del concepto de "razonamiento".)*

Por favor no hagan una "carrera a tiempo" con los problemas de esta Unidad. Algunos se pueden resolver rápidamente; pero otros requieren detenerse y reflexionar por suficiente tiempo, para descubrir los principios matemáticos involucrados.

Operaciones con números

- Redondea divisiones inexactas a 3 decimales, excepto donde se indica algo distinto.
- Simplifica fracciones.
- Decide en cada operación, cuál es la manera más conveniente de resolverla.

1) 691'383 – 392'329 ÷ 287

2) (247'926 + 490'518) ÷ 354

3) 133 x (902'104 – 895'708) ÷ 84

4) 421 x 83 + 217 x 421

5) 5358 + 1217 + 4 x 250 – 358 + 83

6) Calcula hasta que se repita el período: 130 ÷ 63

7) (1553 ÷ 17) + (147 ÷ 17)

8) ¿Cuántos metros son 37% de $\frac{5}{7}$ de 1.05 km?

9) $$\frac{\frac{21}{0.15} + \frac{68}{119}}{\frac{3.9}{1.95} - \frac{32}{672}}$$

10) $\frac{37}{180} + 0.1875 + \frac{11}{60} + \frac{13}{144}$

Problemas con números

1) ¿Cuál es el número que dividido entre 276 da 111, con un residuo de 111?

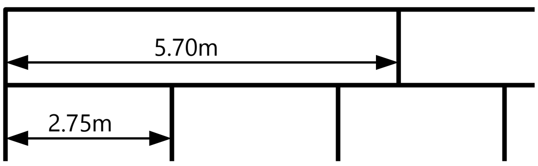
2) "Piensa en un número de tres cifras, pero no me lo digas", pide Sara. – "Está bien, ya lo tengo", responde su amiga Rebeca. – "Entonces multiplica tu número por 60, súmale 420'024, y divídelo entre 6." – Rebeca demora algún tiempo calculando. – "Ahora dime el resultado", pide Sara. – "Da 71'234", responde Rebeca. – "Entonces tu número fue..." ¿Cuánto fue?

3) Un número se multiplica por 120, se le suma 47, y el resultado es 3807. ¿Cuál es el número?

4) Un número entero se multiplicó por 3. El resultado se multiplicó por 4. El nuevo resultado se multiplicó por 7. El resultado final es mayor a 10'690, y menor a 10'800. ¿Cuál fue el número?

5) ¿Cuál es el número de tres cifras que es producto de dos números enteros sucesivos, termina con 6, y la suma de sus cifras es 18?
*) ¿Y cuáles son los números de 4 cifras con la misma propiedad?

6) Un puente tiene una baranda, cuya franja inferior tiene un apoyo vertical cada 2.75m, y la franja superior tiene un apoyo cada 5.70m. Al inicio y al final del puente, los apoyos coinciden perfectamente. Si el puente mide menos que medio kilómetro, ¿cuál es su longitud?



*7) Mario va de paseo con su perro. Al regreso, cuando se encuentra todavía a 600 metros de su casa, el perro se suelta y corre a la casa. Llegado allí, da media vuelta y corre al encuentro de Mario (quien sigue caminando). Inmediatamente da media vuelta y corre otra vez a la casa, y así sucesivamente sin descanso, hasta que Mario llega a la casa. Si Mario camina 70 metros en un minuto, y el perro corre 280 metros en un minuto, ¿qué distancia recorrió el perro corriendo?

8) De los habitantes de Suiza, 2/3 hablan alemán, 20% francés, 1/8 italiano, y 66'673 personas retorromano. Según estos datos, ¿cuántos habitantes tiene Suiza?

9) "¿Cómo te fue en tu viaje a Piquipata?", pregunta Óliver a Jaime. – "¡Mal!", responde Jaime. "Es un pueblito medio abandonado. Bueno, hasta Chuñobamba todo fue bien. Pero a partir de allí, la carretera ya no estaba asfaltada y llena de baches. Y en Michipuñuna se detuvo el bus, y nos dijeron que no podíamos avanzar más, por los trabajos de la carretera. Faltaba todavía la misma distancia como habíamos venido desde Chuñobamba. Al fin tuve que caminar esos últimos nueve kilómetros, no había otra manera de llegar. Y eso con que un tercio de esa parte ya estaba asfaltada, el bus podría haber avanzado bien por allí." – "¿Y cuántos kilómetros es el viaje entero?", quiere saber Óliver. – "No tengo idea. Pero escuché decir que cinco sextos de la carretera entera ya están asfaltados. Entonces la distancia entera debe ser ..." – ¿Puedes calcularlo tú?

10) Un acuario tiene 70 cm de largo, 5/8 m de ancho, y 38 cm de altura. Si se llena hasta los 4/5 de su altura, ¿cuántos litros de agua contiene?

11) En la carrera de 50 metros de tortugas, la ganadora Aloisia logró avanzar 3.6 m por minuto. En segundo lugar quedó Barbaravance, con una velocidad promedia de 0.2052 km/h. En el momento en que Aloisia alcanzó la meta, ¿cuántos metros detrás de ella se encontraba Barbaravance?

12) Mauricio tiene una casa de campo que se encuentra en un huerto. El terreno tiene 35m de ancho y 42.2m de largo. La casa tiene 6m de ancho y 9.5m de largo. Calcula el área del huerto.

*13) Una de las competencias deportivas más exigentes del mundo es el triatlón "Ironman" ("Hombre de hierro"). Consiste en 3.862 km de natación, 180.246 km de ciclismo, y una carrera de maratón de 42.195 km, que se realizan seguidos sin descanso. En 2016, el alemán Jan Frodeno estableció un nuevo récord mundial con tiempos de 45 min. 22 seg. en natación, 4 h 8 min. 7 seg. en ciclismo, y 2 h 39 min. 18 seg. en la carrera de maratón.
a) Calcula sus velocidades promedias, en km/h, en cada una de estas disciplinas.
b) Tomando en cuenta además dos pausas de 1 min. 36 seg. y 1 min. 18 seg, respectivamente, para cambiarse entre las distintas carreras, ¿cuál fue la velocidad promedia de Jan Frodeno respecto al triatlón entero?

Construcciones geométricas

1) Son dados los vértices A, B, C de un paralelogramo. Completa el paralelogramo.

2) Construye un triángulo con lados AB = 5 cm, AC = 7 cm, y el ángulo en A de 35º.

3) Construye un rectángulo con diagonales de 8 cm, y un par de lados de 5 cm.

4) Construye un cuadrado con diagonales de 10 cm.

5) Construye un rombo con lados de 4 cm, y una diagonal de 7 cm.

*6) Construye un trapecio con una altura de 4.5 cm, su base de 7 cm, el lado izquierdo de 5 cm, y el lado derecho de 6 cm.

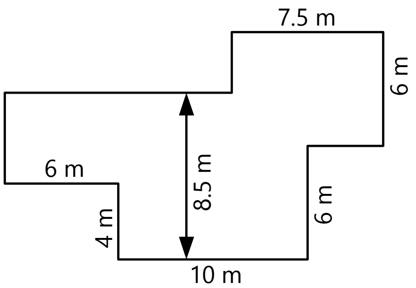
7) Dibuja un cuadrilátero cualquiera, pero no demasiado grande. Ahora construye un cuadrilátero semejante al primero, cuyos lados miden el triple del primero.

8) Se tiene un triángulo ABC, y un punto O afuera del triángulo. Con O como centro, construye el triángulo rotado por 60º en sentido contrario a las agujas del reloj.

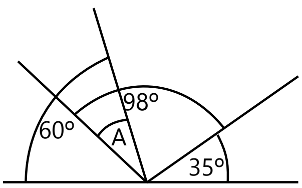
Cálculos geométricos

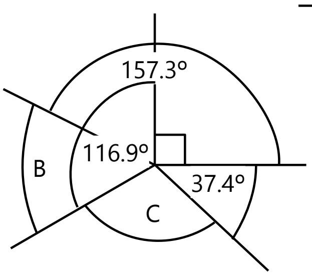
1) Calcula el perímetro de un heptágono regular con lados de 6.3m.

2) Calcula perímetro y área de la siguiente figura: (Todos los ángulos son rectos.)



3)
Calcula el ángulo A:





4) Calcula los ángulos B y C.

*5) ¿Cuánto mide el ángulo que forman las agujas del reloj entre sí, a las 5:10 h ?

6) En una encuesta entre 288 niños, 37.5% dijeron que su color favorito era el rojo, 80 personas el rosado, 1/8 el azul, 28 niños el amarillo, 1/24 de los niños turquesa, y los restantes estaban indecisos. Calcula los ángulos correspondientes a un diagrama circular que representa los resultados de esta encuesta, y construye el diagrama.

7) En un sistema de coordenadas cartesianas, el punto P (7; 13) se refleja en un eje horizontal que se encuentra a una altura de 25. Calcula las coordenadas del punto reflejado P_1.

8) En un sistema de coordenadas cartesianas se dibuja un triángulo con vértices en A (6; 7), B (9; 10), C (12;3). Este triángulo se amplía, con centro en el origen, de manera que los lados del triángulo ampliado miden 12 veces los del primer triángulo.
a) Calcula los vértices del triángulo ampliado.
b) ¿Por cuánto se multiplica el *área* del primer triángulo, al ampliarlo?

*9) En un sistema de coordenadas cartesianas se dibuja un triángulo con vértices en A (13.75; 3), B (14.25; 10.5), C (19; 5.75). Este triángulo se amplía, de manera que el vértice A_1 del triángulo ampliado se encuentra en (125; 318), y sus lados miden 28 veces los del primer triángulo. Calcula los vértices B_1 y C_1 del triángulo ampliado.

Bloque VIII: Temas más avanzados (Unidades 89 a 96)

Este bloque contiene unos temas adicionales que figuran en muchos currículos escolares para este nivel, pero que en realidad requieren un razonamiento un poco más avanzado para realmente entenderlos. Por eso, ya se encuentran en el límite hacia el nivel de Secundaria I, y se retomarán con más profundidad en el libro para ese nivel.

Se recomienda tratar estos temas solamente con aquellos alumnos que alcanzaron un buen entendimiento de los bloques previos de cálculo numérico (Bloques I a V), resp. de geometría (Bloque VI); y que muestran señales de que están comenzando a desarrollar capacidades de razonamiento abstracto.

Unidad 89 - Introducción a las potencias

Prerrequisitos:

- Operaciones básicas hasta un millón.

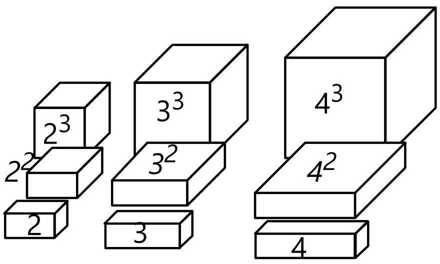
Materiales necesarios:

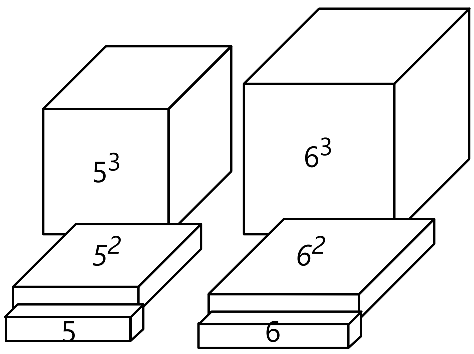
- Material multibase *(vea las instrucciones en "Para los educadores")*.

Para los educadores

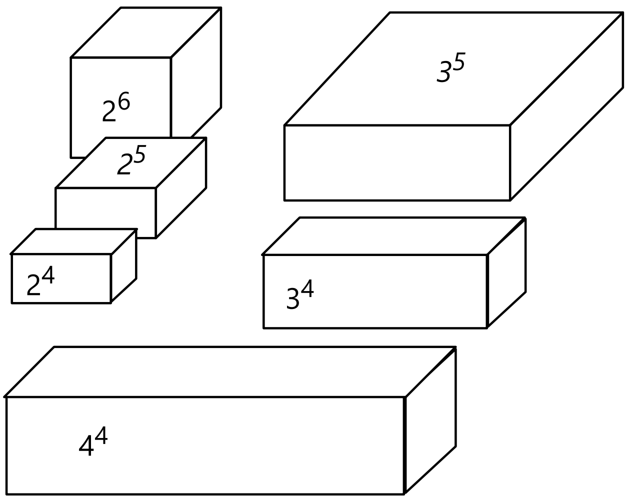
Material multibase

Este material es una extensión de las regletas Cuisenaire: Así como el material Base 10 contiene cuadrados de centenas (10 x 10 x 1 cm) y cubos de millares (10 x 10 x 10cm), el material multibase contiene las piezas correspondientes para otras bases (2, 3, 4, etc). Estas piezas representan las segundas y terceras potencias de estas bases (cuadrado y cubo):





Para bases pequeñas podemos añadir potencias mayores:



Pueden encargar a un carpintero que les corte madera en las medidas correspondientes, y pintar las piezas con los colores según las regletas Cuisenaire correspondientes: las piezas de Base 2 de rojo, las de Base 3 de verde claro, etc.

Para entender los principios, no es necesario tener material para todas las bases; pero con un número mayor de alumnos es mejor tener una cantidad mayor de material.

Volveremos a usar este material en el nivel de Secundaria I.

Si por ahora no pueden conseguir este material, pueden también armar las piezas correspondientes, juntando varias regletas Cuisenaire (y por ejemplo uniéndolas con cinta adhesiva).

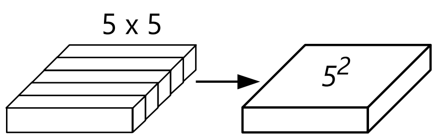
TALLER

Representar multiplicaciones sucesivas

Cuadrados

Representamos con regletas Cuisenaire unas multiplicaciones de dos factores iguales: 3 x 3, 5 x 5, 8 x 8 ... ¿Qué figuras geométricas resultan?

Ya que son cuadrados, podemos llamar estas multiplicaciones así: "tres al cuadrado", "cinco al cuadrado", "ocho al cuadrado" ... Podemos canjearlos por los cuadrados correspondientes del material multibase.

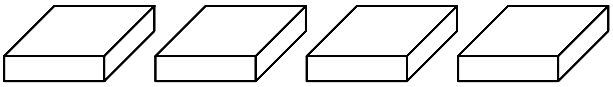


En vez de decir "al cuadrado", podemos decir también: "a la potencia de 2". ¿Por qué 2? – Porque son multiplicaciones con 2 factores. La figura geométrica correspondiente tiene 2 dimensiones: largo y ancho.

Calculen unos "cuadrados" de números mayores que ya no podemos representar con regletas: 12 al cuadrado; 30 al cuadrado; 81 al cuadrado; 700 al cuadrado; ...

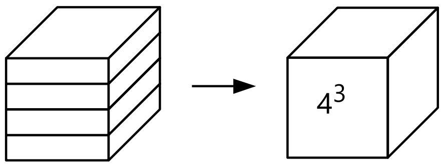
Cubos

Representemos ahora unas multiplicaciones con *tres* factores iguales. Por ejemplo 4 x 4 x 4: Comenzamos con un cuadrado de 4 x 4, y lo repetimos 4 veces. Podríamos colocar los cuadrados en una fila:



Pero también podemos poner los cuadrados uno sobre otro. ¿Qué cuerpo geométrico es este?

(4 x 4) x 4



Puesto que es un cubo, llamamos a esta operación "4 al cubo". Podemos canjear los 4 cuadrados por el cubo correspondiente del material.

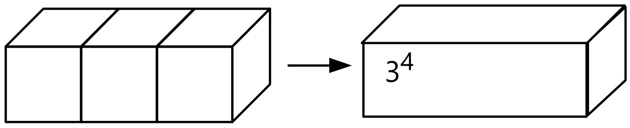
En vez de decir "al cubo", podemos decir también "a la potencia de 3", porque ahora son 3 factores. El cubo tiene 3 dimensiones: largo, ancho y altura.

Representen algunas de estas operaciones con el material. Usen primero los cuadrados o las regletas, y después canjéenlo por el cubo correspondiente: 2 al cubo; 4 al cubo; 7 al cubo ... – Calculen de cada cubo, cuántos cubitos de unidad contiene.

Calculen también unos "cubos" de números mayores: 11 al cubo; 13 al cubo; 40 al cubo; 600 al cubo; ...

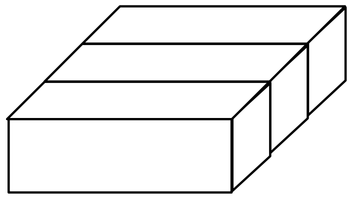
Potencias superiores

Ahora podemos representar unas multiplicaciones con 4 o más factores iguales. Por ejemplo 3 x 3 x 3 x 3: Comenzamos con un cubo de 3 x 3 x 3. Ponemos 3 de estos cubos. Si tenemos la pieza correspondiente en nuestro material, podemos canjearlo:



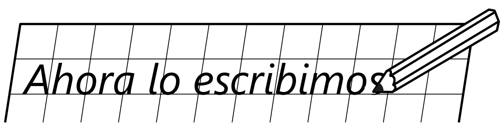
¿Cuántos cubitos de unidad contiene este cuerpo? – Esto es "3 a la potencia de 4", porque la multiplicación contiene 4 veces el factor 3.

Si tienen suficiente material, pueden representar también "3 a la potencia de 5", o sea 3 x 3 x 3 x 3 x 3. Para eso tendríamos que poner 3 veces el cuerpo mostrado arriba:



Representen y calculen algunas otras potencias de esta manera: 5 a la potencia de 4; 2 a la potencia de 5; etc.

Nota: No es posible hacer representaciones geométricas adecuadas de las cuartas potencias y superiores, porque esas corresponderían a cuerpos con 4 y más dimensiones, pero en nuestro mundo conocido existen sólo 3 dimensiones. Juntar los cubos en fila es solamente una solución "auxiliar", para que la figura encaje en nuestro espacio de 3 dimensiones.



Escribir y calcular potencias

Las potencias se escriben de la siguiente manera:

"3 a la potencia de 5" = $\mathbf{3^5}$ = 3 x 3 x 3 x 3 x 3

El número que multiplicamos (aquí el 3) se llama *base;* el número pequeño que se escribe más arriba (aquí el 5) se llama *exponente*.

Para calcular potencias, normalmente tenemos que usar multiplicaciones repetidas.

Vocabulario matemático

Las partes de una potencia son:

Exponente → 11^3 ← Base

"al cuadrado" = a la potencia de 2

"al cubo" = a la potencia de 3

Calculen unas potencias; por ejemplo:

$\mathbf{6^4}$, $\mathbf{10^6}$, $\mathbf{2^9}$, $\mathbf{3^6}$, $\mathbf{5^5}$, $\mathbf{111^2}$, $\mathbf{40^4}$, $\mathbf{21^4}$, $\mathbf{99^3}$, ...

Un poco de historia

La palabra "potencia" ("poder") fue usada ya por Euclides, pero en un sentido geométrico. Él escribió en sus "Elementos": "La potencia (o "el poder") de un segmento es el cuadrado del mismo segmento." Como hemos visto, el cuadrado es la representación geométrica de la 2^{da} potencia de un número.

Solamente muchos siglos más tarde, la palabra "potencia" fue generalizada para significar también potencias superiores.

Nicolás Oresme, en el siglo 14, fue el primer autor conocido que usó números como exponentes para escribir potencias; pero no los escribía en posición elevada. El primero en escribir exponentes de la forma como lo hacemos hoy, fue René Descartes en 1637.

Ampliaciones

Hacemos una tabla de potencias

Algunas potencias aparecen tan frecuentemente en problemas matemáticos, que es útil tenerlas listas en una tabla, o incluso saberlas de memoria. Calcula las siguientes potencias, y anótalas ordenadamente en una tabla:

- Las segundas potencias (cuadrados) de todos los números de 1 a 20.

- Las terceras potencias (cubos) de todos los números de 1 a 10.

Si deseas, puedes ampliar tu tabla con las siguientes potencias de uso frecuente:

- Todas las potencias de 2, hasta 2^{10}.

- Todas las potencias de 3, hasta 3^{6}.

- Las cuartas potencias de todos los números de 1 a 10.

- Las terceras potencias (cubos) de los números de 11 a 20.

- Las segundas potencias (cuadrados) de los números de 21 a 30.

Esta tabla te será útil en la siguiente Unidad.

Matemática divina

Más allá del universo conocido

Hemos visto que las potencias están relacionadas con las dimensiones del espacio: La 2^{da} potencia corresponde a un cuadrado (dos dimensiones), la 3^{ra} potencia corresponde a un cubo (tres dimensiones) ... y entonces la 4ª potencia correspondería a un cuerpo de 4 dimensiones, pero eso ya no nos podemos imaginar, porque nuestro espacio tiene solamente tres dimensiones.

La matemática nos muestra que pueden existir dimensiones más allá de las que conocemos; y así pueden existir mundos enteros más allá de nuestro universo conocido, mundos que nosotros no podemos percibir. Esa es otra forma de entender que Dios es mucho más grande que todo lo que podemos ver o imaginar.

¿A dónde vamos desde aquí?

Después de introducir las potencias, será lógico continuar con la siguiente Unidad, donde se introducen las raíces como operación inversa de la potencia.

Unidad 90 - Introducción a las raíces

Prerrequisitos: - Potencias *(Unidad 89)*.

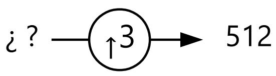
Para los educadores

Por ahora nos limitamos a introducir la radicación como la operación inversa de la potenciación. Esto significa que todavía no introducimos ningún método sistemático para calcular raíces: Simplemente probamos cuál es el número que se puede potenciar, para que dé el resultado deseado. Por ejemplo, para saber cuánto es $\sqrt[3]{343}$, simplemente buscamos cuál es el número que elevado a la 3ra potencia da 343. Por tanto, nos limitamos por ahora a raíces *exactas*. Todo lo demás viene en el nivel de Secundaria.

TALLER

"Máquinas" de potencias y raíces

La radicación (sacar la raíz) es la *operación inversa* de la potenciación. Podemos ilustrarlo con nuestras "máquinas" que funcionan avanzando y retrocediendo.
Tenemos una máquina que eleva a la 3ra potencia todo lo que entra. Por ejemplo entra 4, y sale 64.
Ahora, si salió 512 de la máquina, ¿qué número entró?



Nota: En la máquina indicamos la operación de la 3ra potencia con el símbolo ↑3. *Este no es ningún símbolo "oficial"*.

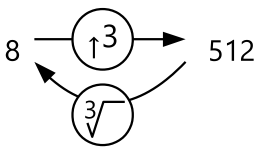
Tenemos que encontrar un número que elevado a la 3ra potencia da 512. Probando, o consultando nuestra tabla, encontramos que este número es el 8. Decimos que 8 es la *tercera raíz* de 512; o la *raíz cúbica* de 512 (porque 512 es "8 al cubo").

Escribiéndolo con símbolos:

$$\sqrt[3]{512} = 8 \quad \text{porque} \quad 8^3 = 512.$$

El pequeño número 3 en el símbolo de la raíz se llama el *índice*. Corresponde al exponente en la potencia.

Podemos ahora dibujar la "máquina" que realiza la operación inversa: la 3ra raíz.



Hagan unos ejemplos adicionales con esta misma máquina:

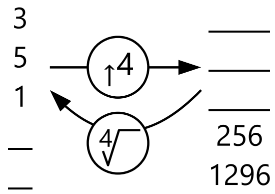
- A la máquina entra 17. ¿Qué número sale?

- De la máquina sale el número 1331. ¿Qué número entró?

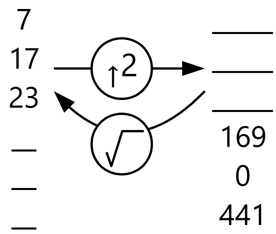
- De la máquina sale el número 125'000. ¿Qué número entró?

Escriban estas operaciones como potencias y raíces.

Hagan lo mismo con una máquina de 4as potencias y raíces: *(Cópienlo en una hoja o en el cuaderno; no escriban en el libro.)*



Y con una máquina de 2das potencias (cuadrados):



En la segunda raíz (*raíz cuadrada*) normalmente no se escribe el índice. Es el tipo de raíz más común; entonces cuando escribimos un símbolo de raíz sin índice, se sobreentiende que el índice es 2. Por ejemplo:

$$\sqrt{196} = \sqrt[2]{196} = 14, \quad \text{porque } 14^2 = 196.$$

Unos ejemplos adicionales para practicar:

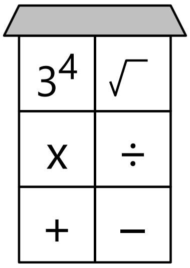
$$\sqrt[3]{1728}, \quad \sqrt{841}, \quad \sqrt[3]{729}, \quad \sqrt[6]{729}, \quad \sqrt{729},$$
$$\sqrt[5]{3125}, \quad \sqrt[7]{2187}, \quad \sqrt{1681}, \quad \sqrt[3]{343'000},$$
$$\sqrt[12]{4096}, \quad \sqrt[6]{4096}, \quad \sqrt[4]{4096}, \quad \sqrt[3]{4096}$$

Un poco de historia

El símbolo de la raíz $\sqrt{}$ se desarrolló probablemente desde una letra ***r*** de "raíz". Primero se usaba solamente para raíces cuadradas. En 1629, Albert Girard sugirió el uso de índices para escribir raíces superiores.

Ampliaciones

Precedencia de operaciones



Anteriormente hemos representado las operaciones básicas con una "casa de dos pisos". Ahora podemos añadir un tercer piso para las operaciones de la potenciación, y su inverso, la radicación.

Cuando tenemos combinaciones de diferentes operaciones, sigue válida la regla de que las operaciones de un piso superior tienen precedencia sobre las operaciones de un piso inferior. O sea, primero las potencias y raíces, después las multiplicaciones y divisiones, y finalmente las sumas y restas. (A no ser que haya paréntesis que indican un orden diferente.)

Ejemplo:

$36 - 32 \div 4^2$

$= 36 - 32 \div 16$ (Primero se resuelve la potencia)

$= 36 - 2$ (... después la división ...)

$= 34$ (... y finalmente la resta.)

Solamente que el símbolo de la raíz "funciona" de una manera diferente: Todo lo que está debajo de la raíz, se trata como si estuviera encerrado entre paréntesis. Entonces, en el siguiente ejemplo se suma primero, y después se saca la raíz del resultado:

$$\sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

De manera similar, todo lo que está escrito en el exponente se trata como si estuviera entre paréntesis:

$$3^{13-5\times 2} = 3^{13-10} = 3^3 = 27$$

En potencias sucesivas, si no hay paréntesis, la convención es que la "última" potencia se resuelve primero (o sea, la que está escrita más arriba):

$$2^{2^3} = 2^8 = 256$$

Pero para evitar ambigüedades, es preferible en estos casos usar siempre paréntesis, o sea, escribir $2^{\left(2^3\right)}$ en vez de 2^{2^3}.

Practica con las siguientes operaciones:

a. $4 + 3^3$, b. $(12 \div 2)^2$, c. $12 \div 2^2$,

d. $4^{16 \div 8}$, e. $4^4 \div 8$, f. $2 \times 5^2 \times 2$,

g. $2 \times 5^{2 \times 2}$, h. $3^5 \div 3^2$,

i. $\sqrt{18\times 2^3}$, j. $9261 \div \sqrt[3]{27}$, k. $\sqrt[3]{9261 \div 27}$,

l. $\dfrac{3^7}{\sqrt[3]{729}}$, m. $\left(\dfrac{35}{\sqrt[4]{2401}}\right)^3$, n. $\sqrt{\dfrac{6^3\times 2}{2^2-1}}$

Vocabulario matemático

Radicación: Operación de sacar la raíz. Corresponde a encontrar la *base* de una potencia.

Radicando: El número del cual sacamos la raíz.

Índice (de una raíz): El pequeño número que se escribe junto al símbolo de raíz. Corresponde al exponente en la operación inversa, la potencia.

Raíz cuadrada: Segunda raíz.

Raíz cúbica: Tercera raíz.

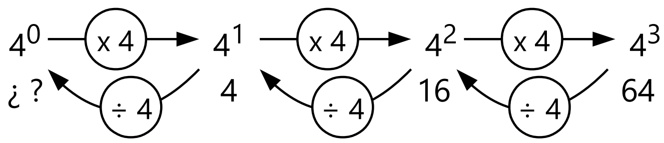
Sacando raíces

El tío Juan pregunta a Jaimito: "¿Qué has hecho hoy?" – "He sacado raíces cuadradas. ¿Y tú?" – "Ah", dice el tío, "yo he sacado raíces redondas." – "¿Raíces redondas?" – "Sí, he cosechado papas."

Potencias con exponente 1 y 0

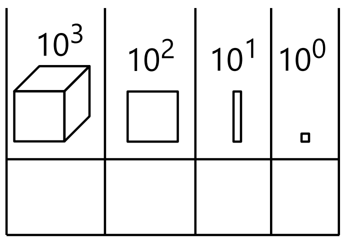
¿Qué significa 4^1? – Sería una "multiplicación" que contiene un único factor 4; o sea, simplemente el número 4 y nada más. $4^1 = 4$. ***Cada número a la potencia de 1 es el número mismo.***

¿Y qué significa 4^0? – Podríamos pensar que es 0, porque no tenemos "ningún factor". Pero este razonamiento es equivocado. Observa la "regla" de la sucesión de las potencias de 4:



¿Qué número tiene que ocupar lógicamente el lugar de 4^0?

- Podemos entenderlo también si observamos el tablero posicional del sistema decimal: Los valores posicionales son las potencias de 10. $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, etc. Es lógico que la unidad es entonces igual a 10^0.



- Con principios matemáticos un poco más avanzados, podemos entenderlo también así: Una multiplicación de "ningún factor" es lo que queda si hemos eliminado todas las factores, o sea el elemento neutro de la multiplicación. Ese es el 1, no el 0. Es lo mismo como si en una fracción se eliminan todos los factores al simplificar: el valor que queda es 1, no 0.

Cada número a la potencia de 0 es 1. (Excepto 0^0, esa es una expresión indeterminada cuyo valor no se puede definir.)

Unas operaciones para practicar:

a. $1023^1 + 2977^1$,

b. $1023^0 + 2977^0$,

c. $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$,

d. $2^5 - 2^0$,

e. $1^{999} + 999^1$,

f. $0^{999} + 999^0$,

g. $\sqrt[3]{728^0 + 728^1}$,

h. $11^3 \div 11^0$,

i. $4278^{1089-33^2}$,

j. $243^{3^5-2\times 11^2}$

Unidad 91 - Números astronómicos

Prerrequisitos:
- Números hasta un millón *(Unidad 26)*.
- Multiplicación y división con números grandes.
- *(sólo para "Notación científica" en "Ampliaciones"):* Entendimiento básico de números decimales y de potencias.

Materiales necesarios:
- *(Para el modelo del sistema solar):* Pelotitas, canicas y billas de diferentes tamaños.
- Cordel de medir.

Para los educadores

A los números muy grandes a veces los llamamos “astronómicos”, porque ocurren con mayor frecuencia en la astronomía, para describir las distancias enormes entre los cuerpos celestiales. Por eso es lo más natural, introducir estos números en el contexto de la astronomía: las medidas del sistema solar, del sol y de los planetas, las distancias de las estrellas fijas, etc. Será interesante incluir esta Unidad en un proyecto de astronomía, por ejemplo de observación y descripción de las estrellas y de los planetas.

Esta Unidad pone la teoría primero (lectura y escritura de números grandes), porque es necesaria para manejar los números que aparecen en las actividades del Taller.

Ahora lo escribimos

Números más allá de un millón

A veces leemos acerca de números muy grandes:

"La distancia media de la tierra al sol es de aproximadamente 150 millones de kilómetros."

"Se estima que en el año 2024 vivirán en la tierra cerca de 8 mil millones de personas."

¿Cómo escribimos estos números con cifras?

Podemos calcular con muchos millones, igual como ya sabemos calcular con muchos miles. Por ejemplo, podríamos contar por millones:

1'000'000 = un millón
2'000'000 = dos millones
3'000'000 = tres millones
...
10'000'000 = diez millones
11'000'000 = once millones
12'000'000 = doce millones
...
100'000'000 = cien millones
101'000'000 = ciento un millones
102'000'000 = ciento dos millones
...
1'000'000'000 = mil millones
...
2'368'000'000 = dos mil trescientos sesenta y ocho millones
...
671'054'000'000 = seiscientos setenta y un mil cincuenta y cuatro millones
... etc.

¿Ahora puedes escribir con cifras "ciento cincuenta millones", y "ocho mil millones"?

Millones y unidades

Si añadimos unidades a estos números de millones, se leen como estamos acostumbrados. Por ejemplo:

3 4 8 ' 0 5 7 ' 5 0 9 ' 3 2 0

Trescientos cuarenta y ocho ***mil***
cincuenta y siete
millones,
quinientos nueve ***mil***
trescientos veinte.

En el tablero posicional se ve así: (MIl = millones, MMIl = millares de millones)

CMMIl	DMMIl	UMMIl	CMIl	DMIl	UMIl	CM	DM	UM	C	D	U
3	4	8	0	5	7	5	0	9	3	2	0

¿Puedes leer estos números?

703'033'245'308

99'909'044'440

800'008'008'088

¿Y puedes escribir los siguientes números con cifras?

Cinco mil quinientos cinco millones ochenta y tres mil setecientos treinta.

Seiscientos treinta y ocho mil treinta y seis millones cuatrocientos catorce.

Millones de millones

Un millón de millones recibe un nuevo nombre: se llama ***un billón***. Números aun mayores tienen los siguientes nombres:

un ***trillón*** = un millón de billones

un ***cuatrillón*** = un millón de trillones

un ***quinquillón*** o ***quintillón*** = un millón de cuatrillones

un ***sextillón*** = un millón de quinquillones

etc.

La multiplicación por un millón corresponde a un desplazamiento por 6 cifras. Por eso, esos números verdaderamente "astronómicos" deben leerse en grupos de 6 cifras:

$$\underbrace{6'442'}_{\text{... trillones,}}\underbrace{505'008'}_{\text{... billones,}}\underbrace{828'647'}_{\text{... millones,}}\underbrace{023'000}_{\text{(... unidades).}}$$

Nota: En los Estados Unidos, el uso de las palabras mencionadas es diferente. Allí se avanza solamente en pasos de miles:
un billón (EEUU) = mil millones,
un trillón (EEUU) = mil billones = un millón de millones, etc.

TALLER

El sistema solar

Estudiaremos las dimensiones del sistema solar y de los planetas. Eso nos da una oportunidad de aplicar los conocimientos acerca de los "números astronómicos".

Unos datos acerca del sistema solar:

	Diámetro (km)	Masa (Billones de t)	Distancia media del sol (km)
Sol	1'392'530	1'989'000'000'000'000	-
Mercurio	4'878	331'000'000	57'910'000
Venus	12'104	4'869'000'000	108'200'000
Tierra	12'756	5'972'000'000	149'600'000
Marte	6'794	642'190'000	227'940'000
Júpiter	142'984	1'900'000'000'000	778'330'000
Saturno	120'536	568'000'000'000	1'429'400'000
Úrano	51'118	86'830'000'000	2'870'990'000
Neptuno	49'532	102'470'000'000	4'504'000'000
Plutón	2'274	12'700'000	5'913'520'000

¿Puedes leer estos números?

Nota: Plutón oficialmente se clasifica no como planeta, sino como "planeta enano". Lo puse en la tabla, porque tradicionalmente es conocido como planeta. Aparte de los mencionados, el sistema solar contiene muchos objetos menores: asteroides, cometas, meteoritos, y los satélites de los planetas como nuestra luna.

Unos datos acerca de la luna:

Diámetro: 3476 km
Distancia media desde la Tierra: 384'000 km
Masa: 73'500'000'000'000'000'000 t

Un modelo del sistema solar a escala

Los números astronómicos son tan enormes que es casi imposible imaginarlos. Podemos tener una pequeña impresión de la extensión enorme del sistema solar, si construimos un modelo a escala.

Una escala práctica podría ser de 1 : 1'000'000'000. En esta escala, 1000 km corresponden a un milímetro. En este modelo, nuestra Tierra aparecerá como una pequeña canica de 13 mm de diámetro.

Calculen las medidas de los otros planetas y del sol en el modelo. Busquen objetos redondos que corresponden aproximadamente a estas medidas. Para los planetas pequeños pueden ser canicas o billas; para los planetas grandes unas pelotas de tenis u otras pelotas pequeñas. Para el sol quizás no encuentran un objeto apropiado: si han calculado bien, habrán encontrado que en este modelo el sol debe medir 139 cm. Quizás pueden fabricar un gran disco de cartón o madera para representar el sol; o quizás encuentran en algún lugar un globo tan grande.

Junto con la Tierra podemos representar también la luna: una pequeña billa o cabeza de alfiler, de 3 mm de diámetro, que se encuentra a una distancia de 38.4 cm de la Tierra.

Para realmente armar este modelo, necesitamos un espacio muy amplio en el campo libre, o un tramo largo y recto de una carretera no muy transitada. A un extremo del espacio disponible colocamos nuestro sol. Después colocamos los planetas a sus distancias correspondientes. Tenemos que calcular estas distancias con la misma escala como los tamaños de los planetas. Así encontraremos que por ejemplo la Tierra debe encontrarse a 150 metros del sol, en nuestro modelo. Podemos medir las distancias con un cordel de medir; o (un poco menos exacto) contando pasos, o ubicándonos con un plano o mapa del lugar donde armamos el modelo. Se recomienda escoger para cada planeta una persona que se encarga de colocarlo en su lugar y cuidarlo. ¡Se sorprenderán al ver cuán enormes son las distancias entre los planetas, en comparación con su tamaño!

Armen el modelo hasta donde tengan espacio y perseverancia. Quizás no llegarán hasta Plutón, porque se encontraría a casi 6 kilómetros, según la escala que hemos escogido.

Por supuesto que pueden hacerlo a una escala menor. Por ejemplo, pueden reducir todas las medidas indicadas a la mitad (escala 1 : 2'000'000'000). Entonces las distancias se vuelven más pequeñas; pero tienen que reducir también los tamaños de los planetas a la mitad.

Hay un detalle en nuestro modelo que no es completamente correcto: En realidad, los planetas nunca se encuentran en una línea recta como en el modelo. Cada uno se encuentra en un lugar diferente de su órbita alrededor del sol. Entonces estarían esparcidos sobre un espacio aun más amplio de lo que hemos hecho aquí.

Unos desafíos para calcular con números astronómicos:

Con las siguientes preguntas haremos unas comparaciones adicionales entre las distancias inmensas del sistema solar, y del espacio exterior. Puedes calcular con números redondeados.

(En cuanto al cálculo con estos números grandes, vea también en "Ampliaciones": "Notación científica".)

1. ¿El diámetro del planeta Júpiter es cuántas veces el diámetro de la Tierra?

2. ¿El diámetro del sol es cuántas veces el diámetro de la Tierra?

3. ¿La masa de Júpiter es cuántas veces la masa de la Tierra?

4. ¿La masa del sol es cuántas veces la masa de la Tierra?

5. "Pioneer 10" fue la primera sonda espacial que llegó hasta las cercanías de Júpiter. Despegó el 3 de marzo de 1972, y logró su máximo acercamiento a Júpiter el 4 de diciembre de 1973. Calcula la velocidad promedia de esta sonda, en km/h y en m/s.

La velocidad de la luz

La luz avanza con un velocidad de aproximadamente 300'000 kilómetros por segundo.

6. Si la luz pudiera moverse en una trayectoria circular, ¿cuántas veces podría dar la vuelta alrededor de la tierra en un segundo?

7. ¿Cuánto tiempo demora la luz de la luna para llegar hasta la tierra?

8. ¿Cuánto tiempo demora la luz del sol para llegar hasta la tierra?

9. La luz de la luna y de los planetas es en realidad la luz del sol reflejada. Así por ejemplo, la luz del planeta Saturno que vemos, viajó primero desde el sol hasta Saturno, fue reflejada allí, y viajó hasta la Tierra. Cuando Saturno se encuentra en su posición más cercana a la Tierra, y vemos su luz, ¿hace cuánto tiempo salió esa luz del sol?

10. Para indicar las distancias de las estrellas fijas y de otras galaxias, los astrónomos usan como unidad de medida el año-luz. Un año-luz es la distancia que viaja la luz en un año. ¿A cuántos kilómetros equivale un año-luz?

11. La estrella más cercana, "Próxima Centauri", se encuentra a una distancia de 4.28 años-luz. ¿A cuántos kilómetros equivale eso?
- Respecto a nuestro modelo del sistema solar a escala (1 : 1'000'000'000), ¿a qué distancia se encontraría Próxima Centauri?

12. El diámetro de nuestra galaxia se estima a 80'000 años-luz. ¿A cuántos kilómetros equivale eso?

Diversos

13. Cada segundo, el sol pierde 5 millones de toneladas de su masa en forma de radiación.

a) ¿A cuántos camiones de 20 t equivale eso?
b) ¿Dentro de cuánto tiempo, el sol habrá perdido una masa equivalente a la masa de la Tierra?

14. Se ha estimado que nuestra galaxia contiene aproximadamente 300'000'000'000 estrellas, y que la masa promedia de una estrella es aproximadamente la mitad de la masa de nuestro sol. ¿Cuánto sería entonces, aproximadamente, la masa total de nuestra galaxia?

Ampliaciones

Notación científica

Nota: *Este tema es opcional; no es necesario tratarlo al nivel de Primaria. Se retomará en el nivel de Secundaria I. Se menciona aquí para el beneficio de los alumnos interesados, y que quizás están consultando libros o sitios web de astronomía para obtener datos adicionales. Para entenderlo bien, se requiere entender el concepto de los números decimales, y de las potencias (Unidad 89).*

Es un poco complicado escribir números con billones, trillones, y aun mayores. Por eso, a menudo se usa en estos casos la *notación científica*. Esta notación consiste en escribir los números como múltiplos de una potencia de 10.

Sabemos que el sistema decimal se basa en que los valores posicionales se multiplican sucesivamente por 10. Estas multiplicaciones sucesivas se pueden escribir como potencias:

$10 = 10^1$
$100 = 10^2$
$1000 = 10^3$
$10'000 = 10^4$
$100'000 = 10^5$
$1'000'000 = 10^6$
$1'000'000'000 = 10^9$
$1'000'000'000'000 = 10^{12}$
... etc.

Entonces, un número como "356 billones" se puede escribir así: $356 \cdot 10^{12}$. Esto es más corto que 356'000'000'000'000.

Además, si conocemos las leyes de los exponentes, podemos calcular fácilmente con estos números. Quizás no conoces estas leyes, pero sabes cómo funciona el "añadir ceros" al multiplicar números con muchos ceros:

1'000'000 x 10'000'000 = 10'000'000'000'000
(6 ceros) (7 ceros) (13 ceros)

O sea, el número de ceros simplemente se suma. En notación científica, eso se ve así:

$$10^6 \times 10^7 = 10^{13}.$$

Y si tenemos unos factores adelante, una multiplicación en notación científica se ve por ejemplo así:

$$4 \cdot 10^5 \times 3 \cdot 10^{11} = 12 \cdot 10^{16}.$$

Piensa: ¿Cómo funciona la ley para la *división* de números en notación científica?

Para hacer:

- Escribe algunos datos de la tabla del sistema solar en notación científica. (En la columna de "masa", usa ahora toneladas en vez de "Billones de toneladas".)

- Resuelve algunos de los problemas arriba en "Desafíos para calcular con números astronómicos", usando la notación científica. Puedes redondear los números.

Nota: Según la convención exacta de la notación científica, se adapta el exponente de tal manera que el factor adelante contiene exactamente una cifra significativa antes del punto decimal. Así por ejemplo, en vez de $356 \cdot 10^{12}$ se debería escribir $3.56 \cdot 10^{14}$, y en vez de $12 \cdot 10^{16}$ se debería escribir $1.2 \cdot 10^{17}$. Pero estas manipulaciones serán demasiado difíciles para la mayoría de los alumnos de primaria; las dejaremos para el nivel de Secundaria I.

Matemática divina

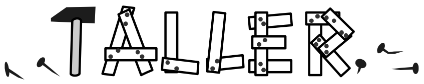
Las extensiones inmensas del universo nos llevan a admirar la grandeza de su Creador. “¿Quién midió las aguas con su puño, y aderezó los cielos con su palmo, y con tres dedos juntó el polvo de la tierra, y pesó los montes con balanza, y con peso los collados?” (Isaías 40:12)
“Él está sentado sobre el globo de la tierra, cuyos habitantes son como langostas. Él extiende los cielos como una cortina, los tiende como una tienda para habitar. Él convierte en nada a los poderosos, y a los que gobiernan la tierra hace como cosa vana.” (Isaías 40:22-23)

Es cierto que en los tiempos modernos, los hombres han encontrado métodos para estimar aun las medidas del cielo visible (o sea, del espacio exterior), por lo menos aproximadamente. Los resultados enormes de estos cálculos solamente aumentan nuestro asombro ante el Creador de un mundo tan inmenso.

Y tengamos presente que los números que los científicos manejan acerca de las medidas del universo, no significan que alguien hubiera realmente viajado tan lejos para confirmar que estas distancias calculadas sean ciertas. Son solamente estimaciones, calculadas a base de observaciones hechas desde la tierra, y ciertas suposiciones acerca de la naturaleza del universo (que tienen que corregirse de vez en cuando). Aunque existen unas sondas espaciales que se están alejando de la tierra ya por algo de treinta o cuarenta años, todavía no han llegado más lejos que las regiones exteriores de nuestro sistema solar. A esta velocidad, necesitarían muchos miles de años para llegar tan solamente hasta la estrella más cercana. Así que en realidad, las distancias inimaginables del universo siguen tan inalcanzables como siempre.

Unidad 92 - Números negativos

Materiales necesarios:
- Termómetro



¿Cuánto es menos que cero?

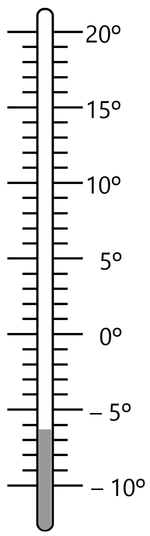
Busquemos oportunidades en la vida diaria donde aparecen números menores a cero. Eso no es tan frecuente; aquí hay unas ideas:

Temperaturas negativas

Las temperaturas, medidas en grados Celsius (ºC), pueden descender a valores por debajo de cero. Si viven en una zona con un clima frío, pueden observarlo en vivo y directo. En una noche helada, pongan un termómetro afuera. Después de unos 15 a 20 minutos podrán leer su temperatura: señalará "menos que cero".

Si el clima no permite hacer eso, quizás tienen una congeladora donde pueden hacer lo mismo.

La escala de temperatura en grados Celsius está diseñada de manera que el punto de congelación del agua corresponde a 0ºC. Cuando la temperatura baja a valores negativos, el agua se congela. Pueden comprobarlo si en los experimentos anteriores colocan una pequeña cantidad de agua en un recipiente junto al termómetro afuera resp. a la congeladora. Pero en este caso tendrán que dejarlo allí durante una hora o aun más tiempo, porque el agua demora en adquirir la temperatura de su ambiente.



Practiquen leer estos números negativos en la escala del termómetro.

El sótano

Algunos edificios tienen uno o varios sótanos. Si el edificio tiene los pisos enumerados (por ejemplo en los botones del ascensor), el sótano se suele indicar como el piso número –1. Si hay un segundo sótano debajo del primero, recibe el número –2. Busquen un edificio donde pueden observar eso.

(Un número como –2 se lee "menos dos", o "dos negativo".)

Haciendo deudas

Jueguen a la tienda. Incluyan unas situaciones donde el comprador no tiene suficiente dinero para pagar lo que compró. Por ejemplo, compro alimentos por 23.–, pero tengo solamente 17.–. Pago con todo lo que tengo, pero todavía debo 6.–. ¿Cuánto dinero tengo ahora? Tengo menos que nada, porque he dado todo lo que tenía. Podemos decir que tengo –6.–. Si gano 6.–, entonces recién voy a tener cero, porque eso alcanza justamente para pagar mi deuda, y entonces me quedo con cero.
Reproduzcan otras situaciones similares en el juego, donde alguien contrae deudas, después gana una cantidad de dinero y paga su deuda (o una parte de ella).
Por ejemplo:
Fabiana hace compras por 35.–, pero tiene solamente 24.–. ¿Cuánto de deuda tiene? – Después gana 16.–, pero tiene que pagar su deuda. ¿Cuánto tiene ahora?
Roberto compra medicina por 28.–, pero tiene solamente 19.–. ¿Cuánto de deuda tiene? – Después gana 5.–, pero tiene que pagar su deuda. ¿Cuánto tiene ahora?

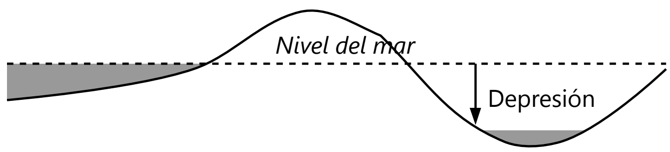
Estas situaciones son una primera introducción a las sumas y restas con números negativos.

Debajo del nivel del mar

Las alturas geográficas se indican en "metros sobre el nivel del mar" (m.s.n.m). Por ejemplo la cumbre del Aconcagua, el punto más alto de las Américas, se encuentra a 6961 m.s.n.m. Un punto en la playa del mar está a 0 m.s.n.m. ¿Y si nos sumergimos en el mar, por ejemplo en un submarino? Entonces su altura se vuelve negativa. Por ejemplo, un submarino que se encuentra a 160 metros debajo del nivel del mar, está a –160 m.s.n.m.

(Eso no lo podemos experimentar en la práctica, pero podemos buscar un libro o un sitio web que habla de los submarinos, o de los peces marinos, a qué profundidades viven.)

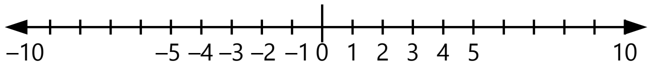
Existen también algunos lugares en la superficie de la tierra seca que se encuentran debajo del nivel del mar. Estos lugares se llaman "depresiones". Por ejemplo, el punto más bajo del Perú, la Depresión de Bayóvar, se encuentra a –34 m.s.n.m. La depresión más profunda de la tierra es el Mar Muerto en Israel, cuya orilla se encuentra a –394 m.s.n.m.



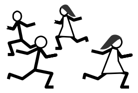
Extendemos la recta numérica

Hasta ahora siempre hemos usado una recta numérica que comienza con cero. Pero ahora vamos a extenderla hacia el lado izquierdo, porque allí se encuentran los números negativos.

> **Vocabulario matemático**
>
> **Número negativo:** Que es menor a cero.
>
> **Número positivo:** Que es mayor a cero.
>
> ***Nota:*** El cero no es ni positivo ni negativo.



Con esta recta numérica "extendida" podemos hacer algunas de las actividades que hicimos en el nivel de Primaria I con los números positivos. Dibujen la recta numérica en un papel grande y usen figuritas de juego. O dibujen una recta numérica grande en el piso, y muévanse ustedes mismos sobre ella:



- Pasos hacia adelante y hacia atrás: Todos comienzan en el cero. Por turnos, cada uno tira el dado. En el primer turno, todos avanzan el número de pasos que muestra el dado. En el segundo turno, todos *retroceden* según el puntaje que tiraron. En el siguiente turno avanzan, después retroceden otra vez, y así sucesivamente.
Pueden jugar hasta que alguien alcance el 10. O pueden jugar un número determinado de turnos (por ejemplo 12 turnos), y gana quien llegó más lejos por el lado positivo.

- Operaciones en tarjetas: Usen las tarjetas con operaciones sencillas (***Hoja de trabajo 92.1***, primera mitad). Una persona saca una tarjeta y da instrucciones según la operación escrita. Los demás se ubican en la recta numérica y se mueven según las instrucciones. Por ejemplo: La tarjeta dice "6 – 11". Entonces las instrucciones son: "Comienza en el 6. Retrocede 11 pasos." Adicionalmente se puede preguntar: "¿Adónde llegaste?"

- Quiero viajar: Alisten tarjetas de cartulina para cada uno de los números que tienen en la recta numérica grande. (Por ejemplo desde –10 hasta 10, o desde –20 hasta 20, dependiendo del tamaño de la recta que dibujaron.) Jueguen de dos en dos: Una persona saca una tarjeta y dice a la otra: "Ponte en el ..." (el número que sacó). Entonces esa otra persona se coloca en ese número en la recta numérica y saca a su vez una tarjeta: "Quiero viajar al ..." (el número que sacó.) "¿Cuántos pasos tengo que dar?" – Entonces la primera persona tiene que darle las indicaciones correctas, por ejemplo: "Avanza 7 pasos." O: "Retrocede 12 pasos." – La persona que está en la recta numérica camina según las indicaciones. Si llega al número correcto, dice: "Llegué." Si llega a un número equivocado, dice: "No llegué", o: "Me perdí." Entonces tiene que volver al número donde comenzó, y la primera persona tiene que corregir sus instrucciones.

- ***Subir y bajar gradas:*** Si tienen un lugar con gradas que se extienden sobre varios pisos, pueden jugar estos mismos juegos, subiendo y bajando las gradas: En un piso del medio se define el cero. En las gradas que suben desde allí, se escriben sucesivamente los números positivos; en las gradas que bajan, los negativos. Usen estas gradas de la misma manera como la recta numérica.

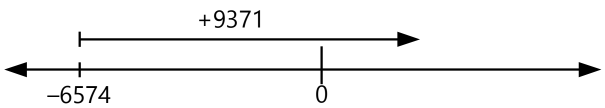
Al hacer estas actividades, observen lo que sucede en las sumas y restas que involucran números negativos. ¿Quizás encuentran ya unas reglas que les permiten resolver estas operaciones de manera sistemática?

Por ejemplo: ¿Pueden decir, antes de calcularlo, si el resultado de (–6574) + 9371 será positivo o negativo? ¿y el resultado de 4883 – 5024? ¿Y qué sucede si restamos algo de un número negativo, por ejemplo (–208) – 2208?

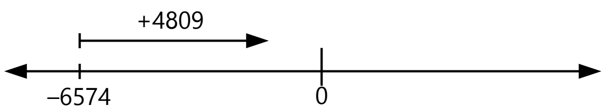
Nota: Al interior de una operación, los números negativos se escriben normalmente entre paréntesis.

Representar operaciones con números grandes en la recta numérica

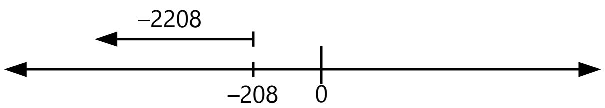
Podemos representar los ejemplos anteriores en la recta numérica, aun sin ubicar los números con exactitud. Solamente tenemos que mantener las relaciones de "menor" y "mayor". Por ejemplo (–6574) + 9371: Comenzamos por el lado negativo. 9371 es mayor que 6574, entonces la flecha que representa la suma nos lleva más allá del cero, hasta el lado positivo:



En cambio, si la operación es (–6574) + 4809, entonces la flecha no alcanza hasta el cero, y el resultado es negativo:



Finalmente, si restamos algo de un número negativo, en todo caso el resultado es "aun más negativo":



Resuelvan algunas operaciones de este tipo:

a) (–5045) + 9822 b) (–15'555) + 15'556

c) (–5045) – 9822 d) 5045 – 9822

e) (–9822) + 5045 f) 15'555 – 15'556

g) (–366) – 9634 h) (–9643) – 366

Ampliaciones

Problemas sencillos con números negativos

Si es necesario, ayúdate con un dibujo; después calcula. Cuando entiendas la situación, intenta escribirla como una operación con números negativos.

1) En un lugar de la sierra, el 8 de julio de 2013, la temperatura en la madrugada era de –3ºC. Hasta el mediodía, la temperatura subió en 20 grados. ¿Cuánto era la temperatura al mediodía?

2) El 2 de septiembre, la temperatura en la madrugada era de –5ºC, y al mediodía 19ºC. ¿En cuántos grados había subido la temperatura?

3) En la tienda tengo una deuda de 28.–. Compro alimentos en valor de 24.–, y pago con 50.–. ¿Recibo cambio, o sigo debiendo? ¿Cuánto?

4) La ciudad de Jericó se encuentra a 260 m por debajo del nivel del mar. Jerusalén está a 750 m.s.n.m. ¿Cuántos metros de subida son de Jericó a Jerusalén?

5) El chofer Samuel viajó desde su ciudad 238 km hacia el norte, después 761 km hacia el sur, después 355 km hacia el norte; todo en la misma carretera. ¿A cuántos kilómetros de su ciudad se encuentra Samuel ahora, y en qué dirección?

6) Un submarino se encuentra a 350m de profundidad. Baja 1260m, después sube 427m. ¿A qué profundidad se encuentra ahora?

7) En la semana del 1 al 7 de septiembre, las temperaturas mínimas de cada día fueron, desde domingo hasta sábado: 1ºC, –5ºC, –3ºC, –1ºC, 0ºC, 1ºC, 1ºC. ¿Cuál fue el promedio de estas temperaturas mínimas?

8) Una barrita de chocolate pesa 30g. Si ato un globo de helio a esta barra de chocolate y vuelvo a pesar todo junto, el peso total es de 24g. ¿Cuánto pesa el globo? ¿Qué concluyes del resultado?
(Si puedes obtener un globo de helio y una balanza exacta, ¡haz el experimento!)

9) El lunes compré alimentos por 32.40, el martes por 64.70. Pagué por las dos compras con 100.–, y me dijeron: "Tiene todavía una deuda de 15.10." ¿Qué concluyes?

10) Jaime tiene una cuenta corriente en el banco, donde le permiten retirar dinero hasta tener una deuda máxima de 3750.–. Actualmente, Jaime tiene un saldo de 10'768.–.
a) ¿Cuánto dinero le permitirán retirar al máximo?
b) El martes, Jaime deposita 1522.– en su cuenta, y el viernes retira 14'275.–. ¿Cuál es ahora el monto máximo que le permitirán retirar todavía?

Unidad 93 - Introducción a las leyes de los signos

Prerrequisitos:
- Números negativos *(Unidad 92)*.

Materiales necesarios:
- Recta numérica; flechas positivas y negativas (según las instrucciones del Taller)

Para los educadores

Una nueva interpretación del signo "–"

Una clave para entender todos los temas de esta Unidad es el significado del signo "menos". Hasta ahora decíamos que este signo significa "restar, quitar", o "retroceder en la recta numérica". Pero cuando nos ocupamos de operaciones con números negativos, esta interpretación ya no es suficiente. El gran desafío consiste en acomodar ahora en nuestra mente una definición más amplia del signo "–".

Esta nueva interpretación es: El signo "–" significa *"invertir la dirección"*. En cambio, el signo "+" significa *"mantener la dirección actual"*. Y definimos que la dirección "por defecto" (cuando no hay signo) es la dirección positiva, o sea "hacia adelante".

Esta nueva definición incluye las situaciones que ya conocemos: Si estamos caminando "hacia adelante", y aparece un número con un signo "–" por delante que nos manda cambiar de dirección, entonces efectivamente estaremos retrocediendo, como siempre lo hemos hecho al restar. Pero adicionalmente, la nueva definición nos explica también lo que sucede al sumar y restar números negativos.

Una vez que los alumnos entienden este principio, serán capaces de entender todas las operaciones que involucran sumas y restas de números negativos. No hay necesidad de memorizar una docena de reglas para casos especiales. Es suficiente aplicar de manera consecuente este principio de que el signo "+" mantiene la dirección, mientras el signo "–" cambia de dirección. Este es un tema donde un *aprendizaje basado en principios* simplifica mucho las cosas, en comparación con los métodos escolares usuales. Las actividades del Taller guían a los alumnos paso por paso en la aplicación de este principio a varias situaciones.

Introducimos los principios primero con números pequeños, donde los resultados son bastante obvios. Cuando los alumnos pueden resolver estas operaciones sin dificultad, podrán aplicar los mismos principios a números mayores.

TALLER

Las flechas indican el camino

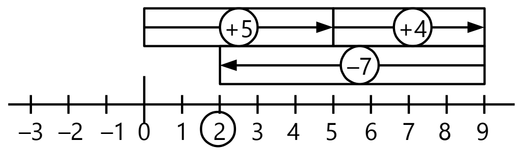
Usen una recta numérica o fabriquen una nueva, y alisten flechas en las medidas correspondientes. Por ejemplo, pueden dibujar una recta numérica donde la unidad mide 1 cm, de acuerdo a las medidas de las regletas Cuisenaire. Entonces pueden dibujar pequeñas flechas con operadores en papel, y pegarlas sobre las regletas con cinta adhesiva. O si no les importa tener regletas pintadas, pueden dibujar las operaciones con plumón directamente sobre las regletas. Las flechas deben verse como en los dibujos de las actividades que siguen: un signo que indica la dirección ("+" o "–"), un número que indica el número de pasos, y una flecha en la dirección correspondiente. Necesitan flechas positivas de +1 hasta +10, y flechas negativas de –1 hasta –10.

Si desean hacerlo en un tamaño más grande, pueden dibujar una recta con espacios mayores en un papel o una cartulina grande, y cortar flechas del tamaño correspondiente de cartulina o cartón. La recta numérica debe tener un rango mínimo de –15 hasta 15, o mejor desde –20 hasta 20.

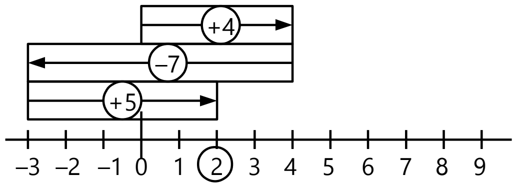
Aplicamos la ley conmutativa

Esta ley ya conocemos desde el nivel de Primaria I. Hemos visto y practicado, que no solamente los sumandos de una suma se pueden intercambiar. También podemos intercambiar las operaciones de una suma y resta combinada, *mientras cada número se mantiene unido a su signo*. (Vea el "Resumen de principios matemáticos" en la introducción al Bloque I.)

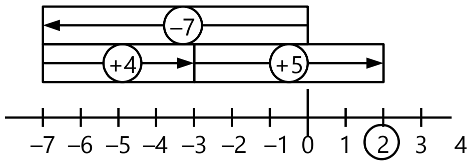
Representemos una operación así con las flechas: 5 + 4 – 7. Comenzamos en el cero. El primer número es 5 (positivo), entonces usamos una flecha +5. En el lugar donde esa flecha termina, colocamos el comienzo de la siguiente flecha: +4. Con eso llegamos hasta el 9. En este punto colocamos el comienzo de la siguiente flecha (–7). Ya que es una flecha negativa, tiene que ir en dirección negativa. La punta de esta flecha queda en el 2.



Ahora podemos intercambiar las flechas, por ejemplo así: 4 – 7 + 5. Ahora que conocemos los números negativos, podemos representar esto en la recta numérica y también calcularlo. Efectivamente, esta operación también da 2.



Incluso podemos comenzar con el número negativo primero: – 7 + 4 + 5. Y nuevamente el resultado es 2.



Solamente que las flechas tienen que mantener su dirección. Si volteamos el 4 en dirección negativa, o el –7 en dirección positiva, allí sí se va a alterar el resultado.

Inventen unas operaciones de esta clase y represéntenlas con las flechas. Si desean, pueden hacer lo mismo con las operaciones de la Hoja de trabajo 92.1 (primera mitad), que ya hemos usado en la Unidad anterior.

(Al representar las operaciones en la recta numérica, podríamos omitir la primera flecha, y comenzar el "viaje" directamente en el primer número de la operación. Pero para observar cómo funciona la ley conmutativa, es mejor usar flechas para *todos* los números, y comenzar en el cero.)

En la práctica usaremos la ley conmutativa sobre todo en aquellas situaciones donde nos permite resolver una operación de una manera más sencilla. Por ejemplo:

1478 – 1734 + 645

Un niño puede sentirse incómodo con el resultado negativo de la resta, y decidir sumar primero:

1478 + 645 – 1734

O en esta situación:

577 + 1765 + 2689 – 577 – 2000 – 689

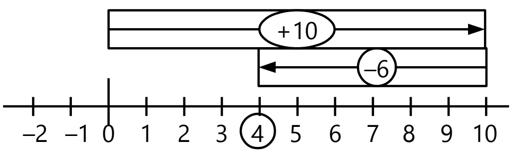
Vemos que la mayoría de las sumas y restas se anulan. Es más fácil de ver si lo ordenamos así:

577 – 577 + 2689 – 2000 – 689 + 1765

Ahora notamos fácilmente que se anula todo, excepto el 1765 que queda como resultado final.

Suma y resta de números negativos

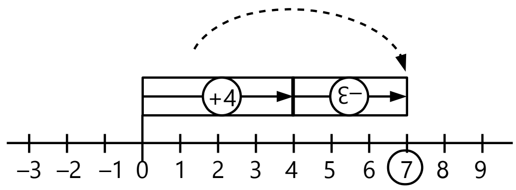
Observemos ahora qué sucede si sumamos y restamos números negativos. Por ejemplo: 10 + (–6). Eso es comenzar con +10, y "aumentar" una flecha "–6". Vemos que es lo mismo como si hubiéramos restado 10 – 6:



Y si intercambiamos las flechas, vemos que es también lo mismo como (–6) + 10, una operación que ya conocemos.

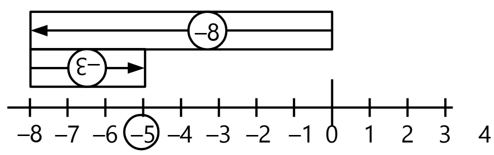
¿Y si *restamos* un número negativo? Por ejemplo, ¿cuánto es 4 – (–3) ?

Este es ahora el momento de introducir la interpretación más amplia del signo "–". Es difícil imaginarnos cómo "quitar una cantidad negativa". Pero lo que hace el signo "–" en realidad, es *invertir la dirección* en la que caminamos. El 3 (sin signo) es positivo. –3 significa "voltear el +3". Si volteamos la flecha positiva, mira en la misma dirección como la flecha negativa. Ahora, si ponemos otro signo "–" por delante, eso significa que tenemos que voltear la flecha otra vez. Toma la flecha –3 y voltéala: ahora mira en dirección positiva. Entonces, – (–3) significa lo mismo como +3.



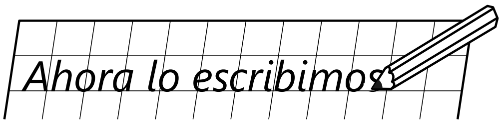
En este proceso, el 4 no tiene nada que ver: es simplemente el número donde comenzamos nuestro "viaje". No tenemos que voltearlo ni hacer algún otro cambio con el 4, porque no tiene ningún signo por delante. (Recordemos que el signo se aplica siempre *a lo que le sigue*, no a lo que precede. Por eso hemos insistido todo el tiempo en que el signo se escribe delante del número, no detrás.)

Entonces, todo funciona exactamente igual si el primer número es negativo. Por ejemplo (–8) – (–3): Como antes, tomamos la flecha "–3" y la volteamos (porque tiene otro signo "–" por delante"). Solamente que ahora el "viaje" comienza en el –8.



Practiquen algunas de estas operaciones. Pueden usar las tarjetitas de la ***Hoja de trabajo 92.1***, las de la segunda mitad (que están marcadas con un circulito).

OJO: Algunos alumnos que fueron enseñados a memorizar que "menos menos es más", piensan que eso significa que el resultado de una operación como (–8) – 3 debe ser positivo. La representación con las flechas nos muestra inmediatamente que eso no puede ser: Comenzamos por el lado negativo de la recta numérica, y la flecha –3 nos lleva todavía más hacia el lado negativo. Es que esa expresión "menos menos" se refiere a un número que tiene *dos veces* el signo "–", como –(–6). Pero en el ejemplo anterior, cada número tiene *un único* signo "– ", ninguno se voltea dos veces.



Hoja de trabajo 93.2 – Une los puntos:
Comienza con las primeras operaciones, que ya están unidas con un línea (5 + 3, 8 – 10). Une los puntos con líneas rectas. El resultado de cada operación es el comienzo de la siguiente: 5 + 3 = 8, por eso el punto está unido con la operación que comienza con 8. El siguiente punto está donde la operación comienza con el resultado de 8 – 10, y así sucesivamente.

Practicamos con números mayores

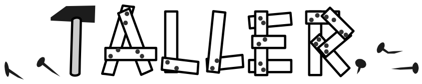
Es importante hacer suficientes ejemplos con las flechas, para entender bien estos "viajes" con números negativos. Cuando lo entendieron bien, pueden entonces aplicar estos principios a las siguientes operaciones:

a) –123 – 768 + 250

b) 999 + (–2573) – (–101)

c) –378'555 + 622'312 – 244'757

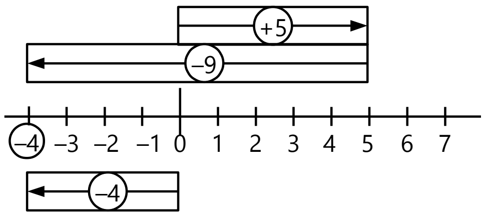
d) 0 – (–7444) + 5556 + (–12'999)



(Continúa)

Signos delante de paréntesis

Veamos ahora unas operaciones que usan paréntesis. Por ejemplo: (–2) + (5 – 9). Sabemos que la operación dentro del paréntesis se resuelve primero. La representamos con flechas:



Como resultado, llegamos al –4. O sea, podemos remplazar el paréntesis entero por una flecha –4. La operación se ve ahora así: (–2) + (–4). Ya sabemos cómo representar eso.

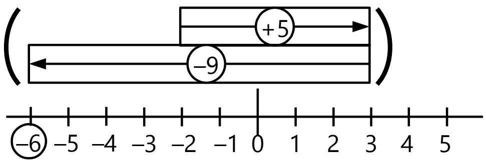
De la misma manera podemos resolver una operación que tiene un signo negativo delante del paréntesis, por ejemplo 8 – (–6 + 9). Descubran cuál es la flecha que sustituye el paréntesis, después representen la operación con esta sustitución.

Hagan unos ejemplos de esta clase. Pueden usar las tarjetas de la ***Hoja de Trabajo 93.1***, o inventar sus propios ejemplos.

Pero podríamos decidir, por alguna razón, que no queremos resolver el paréntesis primero. ¿Cómo tendríamos que escribir estas operaciones sin paréntesis? Sabemos, por ejemplo, que si todas las operaciones son sumas, podemos omitir los paréntesis sin que eso afecte el resultado: 4 + (5 + 6) = 4 + 5 + 6. Pero ¿qué sucede en nuestros ejemplos?

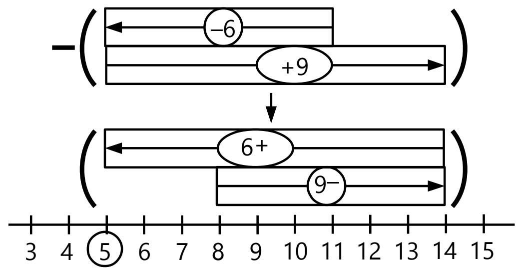
Recordemos nuevamente que un signo "+" mantiene la dirección, y un signo "–" invierte la dirección. Eso vale no solamente para números individuales, vale también para paréntesis enteros.

Volvamos entonces al primer ejemplo: (–2) + (5 – 9). Representamos el paréntesis con una flecha de +5, a la que sigue una flecha –9. Esta combinación de flechas comienza en el número (–2).



Efectivamente, esta operación da el mismo resultado como la primera: –6. Y es lo mismo como si hubiéramos calculado (–2) + 5 – 9. El signo "+" delante del paréntesis mantiene la dirección de todo lo que está dentro del paréntesis. Entonces, en todos estos casos podemos omitir los paréntesis, y el resultado sigue igual.

Ahora el otro ejemplo: 8 – (–6 + 9). El paréntesis se representa con una flecha de –6, y otra de +9. Y este "viaje" tiene que comenzar en el número 8. Pero delante del paréntesis hay un signo "–". Esto significa que tenemos que voltear el paréntesis entero, o sea las dos flechas juntas. Este es el resultado:



Así, efectivamente nuestro viaje termina en el 5, igual como cuando resolvemos el paréntesis primero. Pero observemos qué pasó con las flechas dentro del paréntesis: Hemos volteado el paréntesis entero; así que *cada flecha* dentro del paréntesis ha cambiado de dirección. Este es el efecto de un signo negativo delante de un paréntesis: *Invierte los signos* de todos los sumandos dentro del paréntesis.

O sea, podemos escribir nuestra operación así: 8 + 6 – 9. Calculamos esto, y efectivamente también da 5.

Practiquen y verifiquen esto con las operaciones en las tarjetas de la ***Hoja de trabajo 93.1.*** Saquen una tarjeta y hagan lo siguiente:

- Primero resuelvan la operación de la manera acostumbrada, calculando el paréntesis primero.

- Después representen el contenido del paréntesis con dos (resp. tres) flechas, colóquenlas en el lugar correcto y en la dirección correcta, y verifiquen si están llegando al resultado correcto.

- Finalmente, escriban la operación sin paréntesis (con los signos cambiados si hay un signo "–" delante del paréntesis), calcúlenla, y verifiquen nuevamente si el resultado es correcto.

Hagan esto con tantas tarjetas como necesitan hasta entender bien los principios.

Nota 1: A veces puede ser necesario cambiar un signo varias veces. Por ejemplo: 13 – (8 –(–5)). El contenido del paréntesis equivale a 8 + 5. Pero hay un signo negativo delante del paréntesis, entonces tenemos finalmente – 8 – 5. Al número 5 se aplicaron un total de *tres* signos negativos. Eso hace que al final de cuentas quede negativo. ¡Verifíquenlo con las flechas!

Nota 2: En el nivel donde nos encontramos ahora, esta ley todavía no es tan importante, porque toda operación con números se puede resolver, calculando el contenido de los paréntesis primero. Se volverá más importante en el álgebra, donde los paréntesis pueden contener incógnitas, y por tanto no se pueden resolver primero.

Ahora lo escribimos

Practicamos con números mayores

Resuelve cada una de las siguientes operaciones de dos maneras:

1. Calcula el paréntesis primero.
2. Escribe la operación sin paréntesis (con los signos correctos) y resuélvela de esta manera. Si deseas, pon los sumandos en un orden más conveniente.

e) 1000 – (875 – 1216)

f) 3303 + (–4567 – (–987))

g) (–9999 + 4004) – (5933 – 8022)

h) 35'734 – (40'001 – (– 35'735))

i) 576 – (–(–(–(–(–(–789))))))

Ampliaciones

Otra forma de entender las operaciones con números negativos

Para algunos alumnos puede ser más fácil entender las operaciones con números negativos, si usamos una ilustración del mundo de los negocios: Los montos de dinero que tengo o que gano, son números positivos. Las deudas son números negativos.

Entonces, sumar un número negativo significa *aumentar deudas*: Debo 28.– a la tienda. Hago compras por 15.–, pero no tengo con qué pagar; entonces se añade otra deuda a la anterior. Esto corresponde a la operación: –28 + (–15).

Restar un número negativo corresponde a *condonar una deuda*: Si la tienda decide condonarme 10.– de mi deuda, me está "quitando una deuda", o sea, me está restando una cantidad negativa: –28 – (–10). El efecto de eso es que después tengo 10.– *más:* es como si me hubieran regalado 10.–. Por eso, la operación es equivalente a –28 + 10.

Para los alumnos que prefieren esta forma de ilustración, podemos seguir jugando a la tienda como en la Unidad anterior, pero ahora también sumando y restando números negativos, y anotando las operaciones correspondientes.

Principios matemáticos

Los principios expuestos en esta Unidad anticipan de diversas maneras unos conceptos que trataremos en niveles más avanzados. Mencionaré aquí dos de ellos:

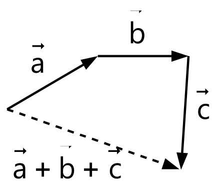
La combinación de los signos corresponde a multiplicación

En este libro todavía no nos ocupamos de la *multiplicación* de números negativos. Pero puede ser interesante notar que una combinación de varios signos, como –(–(–9))), equivale a "multiplicar" los signos. O más exactamente, poner un signo "–" delante de una expresión, equivale a multiplicar la expresión entera por (–1). Y así como –(–1) = +1, efectivamente la multiplicación (–1) x (–1) da +1 (positivo).
Observemos bajo esta perspectiva el signo negativo delante de un paréntesis: El paréntesis se multiplica por (–1). Podemos aplicar la ley distributiva y decir que *cada sumando* dentro del paréntesis se multiplica por (–1). Por eso, cada sumando cambia de signo.

Así que las leyes de los signos para la multiplicación y división están de cierta manera ya "contenidas" dentro de las leyes que hemos tratado en esta Unidad.

Nuestras flechas son vectores

La manera de representar sumas y restas en forma de "viajes" con flechas sucesivas, corresponde a una suma de vectores. Un vector se puede representar como una "flecha" que tiene una longitud y una dirección definida, pero se puede trasladar a cualquier lugar que queremos, como lo hemos hecho con nuestras flechas. Solamente que nuestras flechas están limitadas a un "espacio de una única dimensión" (la recta), mientras las operaciones con vectores consideran espacios de dos, tres y más dimensiones, lo cual hace que el asunto se vuelva más complicado.



Matemática divina

Interpretación espiritual de las leyes de los signos

Las leyes de los signos pueden ayudarnos a entender desde una nueva perspectiva el propósito para el cual vino Jesucristo al mundo:

La creación original de Dios fue "muy buena" (Génesis 1:31). Podemos decir que tenía "signo positivo". Pero llegó el momento en que el hombre, por una decisión de su propia voluntad, decidió dar la espalda a Dios y caminar en la dirección opuesta. Así que el hombre y todos sus descendientes adquirieron el "signo negativo". "Como por un solo hombre entró el pecado al mundo, y con el pecado la muerte, así también pasó la muerte a todos los hombres, en tanto que todos pecaron." (Romanos 5:12)

Ahora ya no es posible al hombre, "cambiar de signo" por voluntad propia. Desde que nace, se encuentra por el lado negativo de la recta numérica, y está programado para seguir caminando hacia lo más negativo. Tampoco es posible que un hombre redima a otro: Si se suman dos números con signo negativo, el resultado es aun más negativo. Una persona endeudada ante Dios no puede pagar la deuda de otra persona: las dos deudas juntas resultan en una deuda mayor.

En esta situación imposible de resolver por el hombre, Dios envió a su Hijo al mundo. El Hijo de Dios nunca pecó: mantuvo su "signo positivo". Además, por ser Hijo de Dios, corresponde a un nivel superior a nosotros los humanos. Podemos decir que Jesús tuvo una "calidad multiplicativa" en vez de solamente aditiva.

Pero todavía faltó algo para poder efectuar la redención. Un número negativo multiplicado por algo positivo sigue siendo negativo. Si un hombre pecador decidiera seguir a Jesús, simplemente porque Jesús es bueno, eso no cambiaría en nada la naturaleza "negativa" del hombre. Era necesario que Jesús adquiriera un "signo negativo". Por eso tuvo que ser condenado como si fuera pecador; tuvo que cargar nuestro pecado y ser "herido por nuestras rebeliones", como fue profetizado en Isaías 53:5–6. Ahora, un hombre con "signo negativo" puede reconocer que su pecado ofende a Dios, que tiene necesidad de ser redimido, y que fue *su* pecado el que cargó Jesús en la cruz. Así puede someterse a Jesús, y permitir que este "signo negativo" de Jesús se aplique a su propia vida. Y así se cumple la fórmula –(–y) = +y, donde la "y" significa el "yo" del hombre. El hombre que "se niega a sí mismo y lleva su cruz" (Mateo 16:24), recupera el "signo positivo" que el primer hombre tuvo al inicio de la creación.

Y por supuesto, Jesús no se quedó con el "signo negativo", porque nunca fue suyo propio. Él había cargado *nuestro* pecado, el signo negativo colectivo de toda la humanidad. Este signo negativo se puede ahora multiplicar con el signo negativo de cada persona que está dispuesta a recibirlo. Pero después de cumplir con esta obra, Jesús recuperó su verdadero signo original, que es y siempre fue "positivo". La demostración de ello es Su resurrección: la muerte (el "negativo infinito") no tuvo poder sobre Él.

Unidad 94 - Áreas de triángulos, y de figuras compuestas de triángulos

Prerrequisitos:
- Áreas de rectángulos, y de figuras compuestas de rectángulos *(Unidad 65)*
- Unidades de medida de áreas *(Unidad 32)*.

Materiales necesarios:
- Regla, escuadra, compás, transportador.
- *(Opcional):* Cartón o madera, cúter o sierrita.

Para los educadores

En el nivel de Secundaria expresaremos los cálculos de áreas con fórmulas algebraicas. Para el nivel de Primaria tenemos que usar un acercamiento más concreto. Usaremos el "principio del rompecabezas", que hemos aplicado ya en la *Unidad 65* al cálculo de diversas áreas.

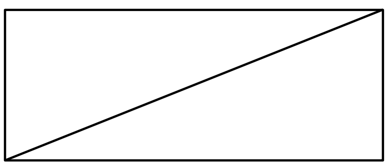
Las figuras que acompañan las preguntas de investigación, podrían realmente fabricarse en forma de rompecabezas de cartón o madera. El Taller no menciona explícitamente esta posibilidad, pero se puede sugerirlo a los alumnos si les gusta este tipo de manualidades.

Todavía no entraremos al tema del perímetro y área de un *círculo*, porque esos temas son más difíciles de entender de una manera "concreta". Preferimos esperar con este tema hasta que los alumnos hayan desarrollado más su capacidad del pensamiento abstracto, y entonces podrán entender el *"por qué"* de las fórmulas.

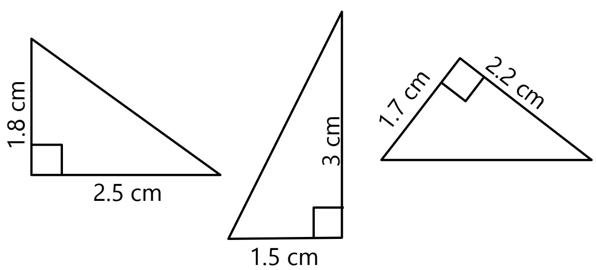
Investigación

Áreas de triángulos

Dibuja un rectángulo de 2 x 5 cm. Dibuja una de sus diagonales. La diagonal parte el rectángulo en dos mitades. ¿Cuánto es el área de una de estas mitades?



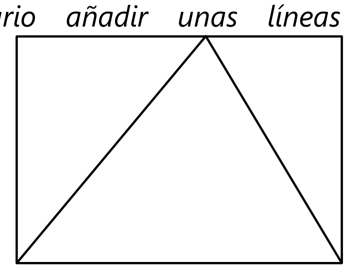
Con esto hemos calculado el área de un *triángulo*. Podemos hacer lo mismo con todo triángulo rectángulo, porque cada triángulo de este tipo es la mitad de un rectángulo. Por ejemplo, ¿cuáles son las áreas de estos triángulos?



Ahora, ¿existe una manera de calcular el área de *cualquier* triángulo de una manera similar? – Piénsalo por un tiempo y experimenta con diversas posibilidades, antes de seguir leyendo.

Un triángulo "cualquiera" no es medio rectángulo; por lo menos no hay una manera obvia de dibujarlo así. Hasta ahora sabemos calcular solamente áreas de rectángulos, y de fracciones de rectángulos. ¿Podemos representar un triángulo "cualquiera" como una fracción de un rectángulo?

Tal vez tengo que dar una pequeña ayuda. El dibujo al lado muestra un triángulo "cualquiera" encajado en un rectángulo. ¿Te permite este dibujo descubrir qué fracción del rectángulo es este triángulo?
(Puede ser necesario añadir unas líneas adicionales al dibujo. Pero hazlo en una hoja aparte, no en el libro.)



Si lo has pensado por mucho tiempo y no encuentras la solución, consulta el *Anexo A*. Necesitarás este resultado para lo que sigue.

Hoja de trabajo 94.1 (arriba): En cada uno de los triángulos dibujados, construye su altura, mide la base y la altura, y calcula su área.

Nota: En realidad, cada triángulo tiene *tres* alturas, porque podemos rotarlo como queremos, así que podemos tomar cualquiera de sus lados como base.

Todo polígono consiste en triángulos

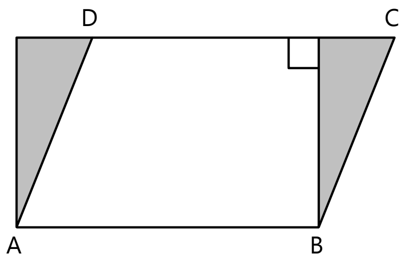
Ahora podemos teoréticamente calcular el área de cualquier polígono. Simplemente lo partimos en triángulos. – Digo "teoréticamente", porque en la práctica necesitamos saber las alturas de todos esos triángulos, y eso no siempre es posible. Si podemos construir el polígono en un papel, entonces podemos construir y medir todos esos triángulos. Pero si queremos un cálculo matemáticamente exacto, habrá todavía unas dificultades adicionales.

Hoja de trabajo 94.1 (abajo): Dibuja líneas auxiliares para partir estos polígonos en triángulos. Construye alturas en los triángulos, mídelos y calcula sus áreas, para obtener las áreas de los polígonos enteros.

Desafío adicional: ¿Cuál es el área de un nonágono regular inscrito en un círculo con 6 cm de radio? – Constrúyelo, mide y calcula. ¿Puedes hacerlo sin tener que construir el nonágono entero?

Área de un paralelogramo

Veremos ahora unas figuras geométricas donde sí podemos calcular sus áreas con exactitud, si conocemos unos datos específicos. Por ejemplo el paralelogramo. Mira el dibujo:



¿Qué puedes decir acerca de los dos triángulos sombreados? – ¿y qué puedes concluir entonces acerca del área del paralelogramo ABCD? – ¿Qué datos necesitas saber para poder calcular su área?

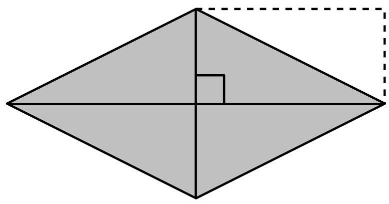
Vocabulario matemático

Altura (de un triángulo): Distancia entre la base y su vértice opuesto. (O sea, una recta perpendicular a la base, que pasa por el vértice opuesto.)

Altura (de un paralelogramo o trapecio): Distancia entre los dos lados paralelos.

Área de un rombo

El dibujo te da una pauta de cómo se podría calcular el área de un rombo.



¿Puedes completar el razonamiento, y explicar cómo calcular el área? ¿Cuáles datos necesitamos para eso?

Para investigadores aficionados: Dos desafíos adicionales

Área de un trapecio: ¿Cómo se podría calcular el área de un trapecio? ¿y qué datos se necesitaría para eso?

Área de un cuadrado desde su diagonal: Si conocemos el *lado* de un cuadrado, es fácil calcular su área, porque es un caso especial de un rectángulo. Pero ¿qué tal si no sabemos cuánto mide el lado, y en su lugar conocemos la *diagonal*? ¿Cómo se podría en este caso calcular su área? (con un cálculo exacto, no construyendo y midiendo el lado.) *¿y qué nos dice eso acerca de la proporción entre la diagonal y el lado de un cuadrado?

Unidad 95 - Propiedades de ángulos

Prerrequisitos:
- Construcciones con regla, escuadra y compás *(Unidades 56, 57, 62)*.
- Ángulos *(Unidades 59, 60)*.
- Construcciones de triángulos *(Unidades 58, 59)*.

Materiales necesarios:
- Regla, compás, escuadra, transportador, tijeras.

Para los educadores

Por su metodología y contenido, esta Unidad ya es prácticamente una unidad de Secundaria: Tiene pocas actividades con material concreto, y plantea desafíos de investigación y construcción que requieren capacidades de razonamiento un poco más avanzadas. Por eso aparece hacia el fin del bloque. Pero sus elementos básicos (rectas, ángulos, triángulos) se pueden graficar de manera "concreta" sobre el papel. Por eso, su contenido puede ser accesible para algunos alumnos de primaria.

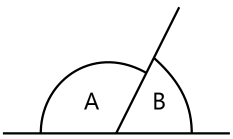
Esta Unidad contiene bastantes problemas para resolver, tanto de construcción como de cálculo. Se recomienda no exigir que un alumno resuelva de una vez todos los problemas de una serie; a no ser que tenga realmente la perseverancia y la motivación para hacerlo. En el caso normal, será mejor que haga solamente unos cuantos por día, y que el trabajo se reparta sobre un espacio de una a dos semanas. Así habrá un efecto de entrenamiento y repaso durante un tiempo prolongado.

Si hay alumnos que no logran entender estos temas ahora, no hay razón de preocuparse; los contenidos de esta Unidad se retomarán en el nivel de Secundaria I.

TALLER

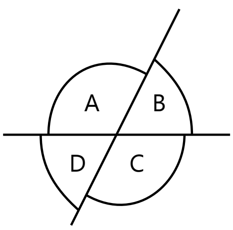
Observamos el comportamiento de los ángulos

1. Observa estas dos rectas y los ángulos que forman. ¿Qué puedes decir acerca de los ángulos A y B? ¿Cuál es su suma?

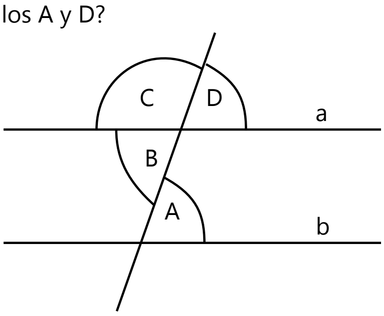


Nota: Ángulos en una posición como esta se llaman *ángulos suplementarios*.

2. Observa las siguientes dos rectas y los ángulos que forman. ¿Qué puedes decir acerca de los ángulos A y C? ¿y acerca de los ángulos B y D?



3. En el siguiente dibujo, las rectas ***a*** y ***b*** son paralelas. ¿Qué puedes decir acerca de los ángulos A y B? ¿y acerca de los ángulos A y D?

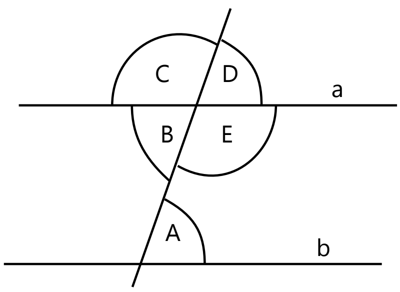


Un poco de historia

La propiedad **2.** es uno de los primeros teoremas que Euclides demuestra en sus "Elementos" (Libro I, Proposición 15). Lo demuestra de la siguiente manera:

Los ángulos A+B suman 180º, porque son ángulos suplementarios. Pero los ángulos A+D también suman 180º, porque también son suplementarios. O sea, empezando con A, puedo sumarle B o puedo sumarle D, y obtengo la misma suma. Por tanto, los ángulos B y D tienen que ser iguales. Y de la misma manera se puede demostrar que los ángulos A y C son iguales.
(Solamente que Euclides no dijo que la suma es "180 grados", porque los antiguos griegos no medían los ángulos en grados. Él dijo que la suma es "igual a dos ángulos rectos".)

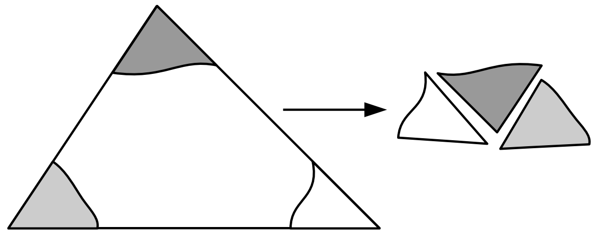
4. Observa el siguiente dibujo. Si el ángulo A mide 67º, ¿puedes decir de todos los otros ángulos cuánto miden?



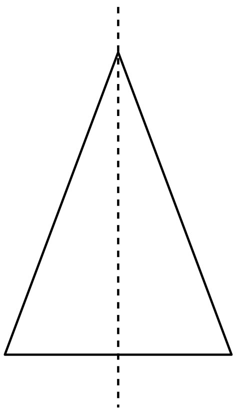
Un experimento con triángulos

Dibuja un triángulo en papel, usando la regla para que sus lados sean bien rectos. Corta el triángulo. Ahora rompe sus esquinas con la mano. No las cortes con tijera, para que puedas fácilmente reconocer cuáles son las esquinas originales del triángulo. Junta estas esquinas con sus ángulos juntos. ¿Qué observas?

Repite el experimento con otro triángulo que tiene otros ángulos. ¿Qué sucede? ¿Crees que lo mismo va a suceder con *todos* los triángulos? *¿Puedes explicar *por qué*?



(La sección "Principios matemáticos" contiene unas explicaciones adicionales *acerca de este experimento.)*



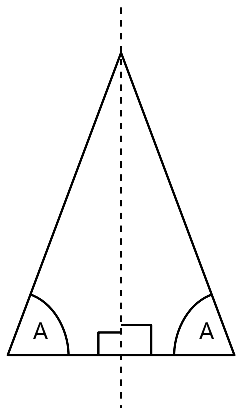
Ángulos en un triángulo isósceles

En la *Unidad 62* hemos observado el rombo y los triángulos isósceles. ¿Ya descubriste las propiedades de sus ángulos? – Si no, lo observamos otra vez:

Un triángulo isósceles es una figura simétrica. Su eje de simetría pasa por el punto medio del lado que es diferente de los otros. (En nuestro dibujo podemos llamar "*base*" a este lado, porque el triángulo está parado sobre este lado.) Recordemos las propiedades de las figuras simétricas:

Una figura y su reflejo simétrico son congruentes. Por tanto, los ángulos al lado izquierdo son iguales a los ángulos al lado derecho.

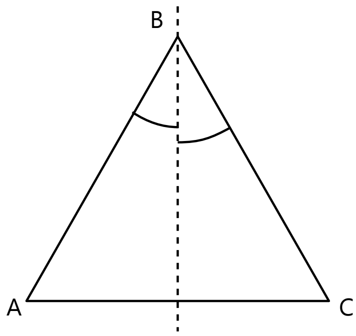
En particular, los ángulos entre el eje de simetría y la base son iguales por ambos lados. Por eso, estos ángulos son cada uno la mitad de un ángulo llano, o sea son ángulos rectos.



Ángulos en un triángulo equilátero

En la *Unidad 57* hemos aprendido a construir un triángulo equilátero, o sea un triángulo con sus tres lados iguales. Observemos ahora los ángulos de este triángulo. Un triángulo equilátero tiene simetría rotacional *(vea Unidad 60)*, entonces sus tres ángulos son iguales. Según lo que descubrimos en nuestro "experimento con triángulos", *¿cuánto mide entonces cada ángulo de un triángulo equilátero?*

Dibujamos un eje de simetría en un triángulo equilátero. *¿Cuánto miden los ángulos marcados por ambos lados del eje de simetría?*



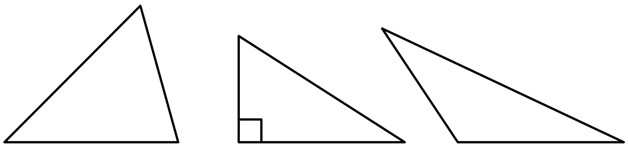
(Hay dos maneras de descubrirlo:

- Los dos ángulos son iguales, entonces cada uno es la mitad del ángulo en la punta B.

- Consideremos la suma de los ángulos en uno de los "medios triángulos", por ejemplo la mitad izquierda: Este triángulo tiene un ángulo recto en la base, más el ángulo en A, más el ángulo que buscamos. ¿Puedes calcularlo así?)

Ahora lo escribimos

Clasificación de triángulos por sus ángulos



acutángulo rectángulo obtusángulo

Existen diferentes clases de triángulos, según los ángulos que tienen. *(Vea en el "Vocabulario matemático").*

Para pensar: ¿Puedes dibujar un triángulo que tiene dos ángulos obtusos? ¿o dos ángulos rectos? Investígalo y saca tus conclusiones.

Las tarjetas de la ***Hoja de trabajo 54.1*** contienen diferentes clases de triángulos. Podemos usarlas ahora para repasar las propiedades de los triángulos. Podemos ordenarlas también en una tabla (Diagrama de Carroll) o en un diagrama de Venn, según un esquema como el siguiente:

	equilátero	isósceles	escaleno
acutángulo			
rectángulo			
obtusángulo			

Problemas de construcción

1) Construye un triángulo ABC con AB = 6 cm, AC = 9 cm, y BC = 7 cm.

2) Construye un triángulo ABC con AB = 8.5 cm, AC = 7 cm, y el ángulo en A = 40º.

3) Construye un triángulo ABC con BC = 3 cm, el ángulo en B = 70º, y el ángulo en C = 81º.

Vocabulario matemático

Ángulos suplementarios: Que forman juntos un ángulo llano (180º).

Triángulo acutángulo:
Un triángulo que tiene solamente ángulos agudos.

Triángulo rectángulo:
Un triángulo que tiene un ángulo recto.

Triángulo obtusángulo:
Un triángulo que tiene un ángulo obtuso.

Triángulo equilátero:
Un triángulo que tiene tres lados iguales.

Triángulo isósceles:
Un triángulo que tiene dos lados iguales.

Triángulo escaleno:
Un triángulo "irregular" (con tres lados de diferentes longitudes).

Base *(de una figura geométrica):*
El lado sobre el cual la figura está parada, o sea el lado de abajo.
(La figura se puede girar; entonces será otro lado que se convierte en base.)

4) Construye un rombo con diagonales 4 cm y 6 cm.

5) Construye un rectángulo con una base de 6.5 cm y una diagonal de 8 cm.

6) Construye un rombo con lado 4 cm y una diagonal de 3.5 cm.

7) Construye un paralelogramo con lados 3 cm y 6 cm, y una diagonal de 8.5 cm.

8) Dibuja un par de rectas paralelas ***a*** y ***b*** con una distancia de 5 cm entre ellas. Construye un triángulo isósceles ABC con AB = BC = 6 cm, tal que A y C son puntos de la recta ***a***, y B es un punto de la recta ***b***.

9) Dibuja un par de rectas paralelas ***a*** y ***b*** con una distancia de 5 cm entre ellas. Construye un triángulo equilátero ABC, tal que A y C son puntos de la recta ***a***, y B es un punto de la recta ***b***.

10) Dibuja un círculo con radio 4.5cm. Marca un punto A en su circunferencia. Construye un triángulo ABC inscrito al círculo, tal que AB = 5cm y BC = 7 cm.
(Un triángulo *inscrito* en un círculo es un triángulo cuyos tres vértices son puntos de la circunferencia.)

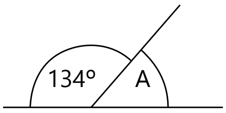
11) Construye un rectángulo con base 5 cm, y cuyas diagonales se cortan en un ángulo de 70º.

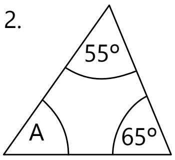
La ***Hoja de trabajo 95.1*** contiene unos problemas de construcción adicionales.

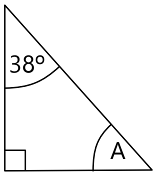
Problemas de calcular ángulos

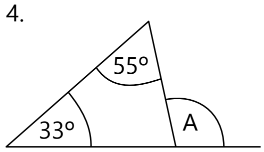
En las siguientes situaciones se debe calcular cuánto mide el ángulo marcado con A:

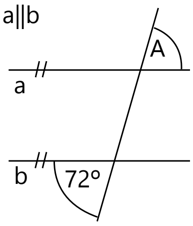
(Los dibujos no necesariamente muestran las medidas reales de los ángulos. No se debe asumir que dos rectas sean paralelas o perpendiculares, o que dos segmentos sean iguales, excepto donde eso se indica explícitamente.)

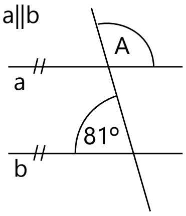
1.


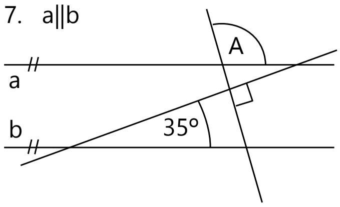
2.


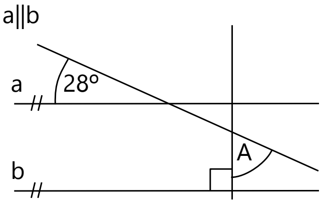
3.


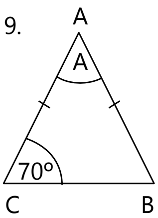
4.


5. a||b


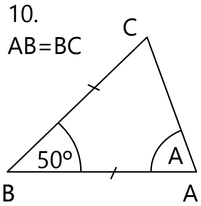
6. a||b


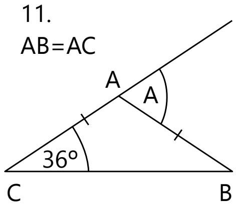
7. a||b


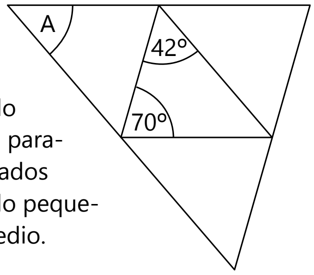
8. a||b


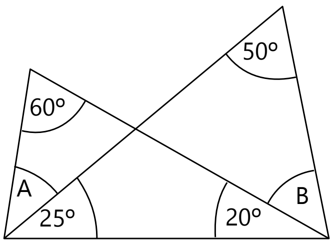
9.


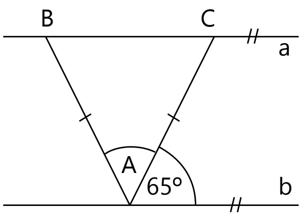
AB=AC

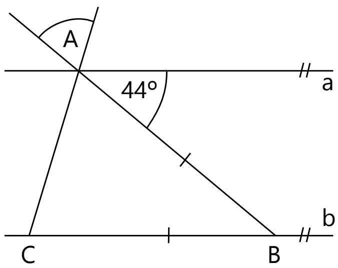
10.
AB=BC


11.
AB=AC


12. Los lados del triángulo grande son paralelos a los lados del triángulo pequeño en el medio.


13. Calcula los ángulos A y B.


14. AB=AC, a||b


15. AB=BC, a||b


16. Calcula los ángulos en los vértices de un pentágono regular; de un octágono regular; de un eneágono regular; de un decágono regular; y de un dodecágono regular.

Principios matemáticos

La suma de los ángulos en un triángulo, y las demostraciones matemáticas

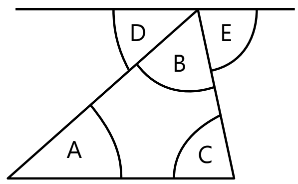
El experimento con las esquinas del triángulo no es realmente una demostración matemática, pero ilustra de manera visible y tangible que la suma de los ángulos en un triángulo es siempre 180º. Para demostrarlo formalmente, habría que fundamentar que esta propiedad se puede generalizar para *todos* los triángulos.

La última pregunta del experimento pide a los niños explicar por qué creen que esta propiedad se puede generalizar. Es improbable que lleguen a una respuesta lógicamente coherente; pero queremos hacerles pensar y razonar por algún tiempo acerca de esta pregunta, y observar las discusiones entre los niños que pueden surgir. Es que se trata de una situación que los matemáticos profesionales enfrentan muy a menudo: Se observa una propiedad, y parece bastante seguro que la propiedad se puede generalizar; todos los ejemplos la confirman; y sin embargo no se puede dar una fundamentación lógica de *por qué* debería ser así en *todos* los casos. O sea, tenemos una *suposición* o *conjetura*, y tenemos muchas razones para creer que la conjetura es cierta; pero nos hace falta una *demostración* que nos convence con toda seguridad de que debe ser así.

Es entonces una de las tareas fundamentales de la matemática, *demostrar* la veracidad general de las leyes y propiedades que se han observado en ciertos casos. La demostración es la respuesta lógicamente convincente a la pregunta *¿Por qué?*. Eso es uno de los aspectos más exigentes de una investigación matemática. De los alumnos de primaria todavía no exigimos que encuentren sus propias demostraciones; pero queremos hacerles entender el desafío que esto significa para un matemático, y la importancia que tiene la pregunta *¿Por qué?*. Antes de demostrar algo, solamente suponemos y conjeturamos; pero después de encontrar una demostración, tenemos la seguridad de que la ley matemática es verdadera.

Volviendo al triángulo, dependiendo del nivel de entendimiento de los niños, quizás podemos presentarles la siguiente demostración, después de que ellos mismos hayan pensado y conversado por algún tiempo acerca la pregunta del "por qué":

Tenemos el triángulo ABC con sus ángulos correspondientes. Construimos una paralela a AC que pasa por B, y damos "nombres" a los ángulos que esta paralela forma con los lados del triángulo:



Ahora, el ángulo D es igual al ángulo en A, por la propiedad descubierta en el punto 3 de nuestras actividades de observar ángulos. Por la misma razón, el ángulo E es igual al ángulo en C. Es como si hubiéramos rota la esquina A y la hubiéramos puesto arriba al lado izquierdo de B, y la esquina C al lado derecho de B, como lo hicimos en nuestro experimento. Ahora, la demostración nos muestra que esto efectivamente funciona con cualquier triángulo: Los ángulos D, B y E forman juntos un ángulo llano (una recta); entonces lo mismo vale para los ángulos A, B y C juntos.

¿A dónde vamos desde aquí?

Después de estudiar los temas de esta Unidad, quizás algunos alumnos querrán volver a algunos de los desafíos de investigación anteriores, si es que no los entendieron bien. Por ejemplo:
Las investigaciones acerca de la simetría en la *Unidad 60*, particularmente la Pregunta *4.
Las investigaciones y problemas de construcción en la *Unidad 62*.
Los problemas de construcción en la *Unidad 88*.

Unidad 96 - Aplicaciones adicionales de la semejanza geométrica

Prerrequisitos:

- Proporciones en la geometría; semejanza geométrica *(Unidad 70)*.

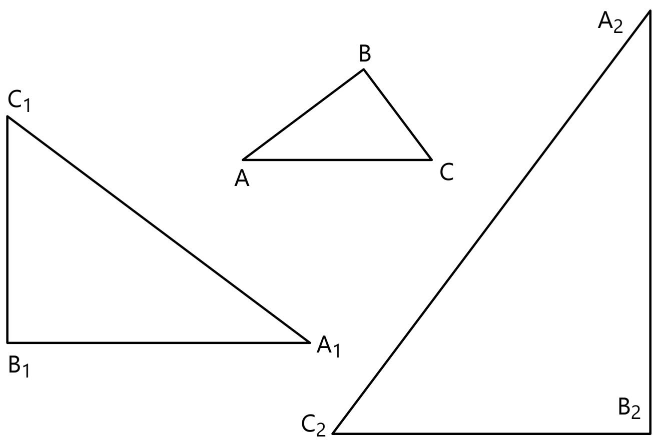
Materiales necesarios:

- Regla, escuadra, compás.

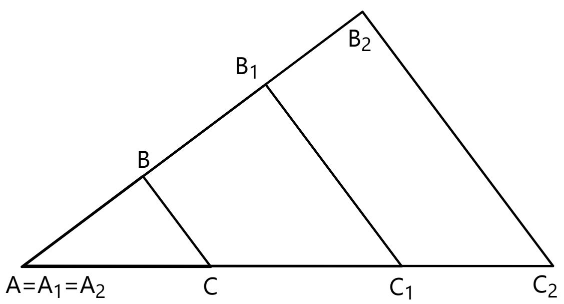
TALLER

El teorema de Thales

En la *Unidad 70* hemos observado las propiedades de los triángulos semejantes como estos:



Ahora podemos rotar y trasladar estos triángulos, de manera que coinciden en un vértice y en su orientación. Ya que tienen los mismos ángulos, los lados que proceden de este vértice se sobreponen:



Además observamos que los lados opuestos a A son paralelos:

$BC \parallel B_1C_1 \parallel B_2C_2$ (El símbolo || significa "paralelo a").

Ahora, el lado AB_2 está dividido en tres segmentos por los puntos B y B_1. Igualmente, el lado AC_2 está dividido en tres segmentos.

***Observa y escribe en el cuaderno** (no en el libro):*

- Mide o calcula las longitudes de estos segmentos:

$AB =$ ___, $BB_1 =$ ___, $B_1B_2 =$ ___

$AC =$ ___, $CC_1 =$ ___, $C_1C_2 =$ ___

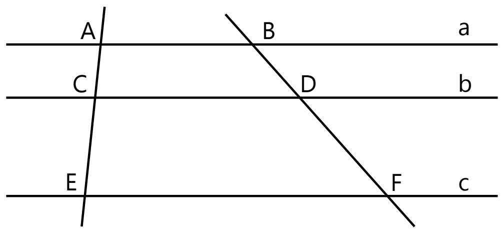
- Calcula sus proporciones entre sí:

$$\frac{BB_1}{AB}, \quad \frac{B_1B_2}{AB}, \quad \frac{B_1B_2}{BB_1}$$

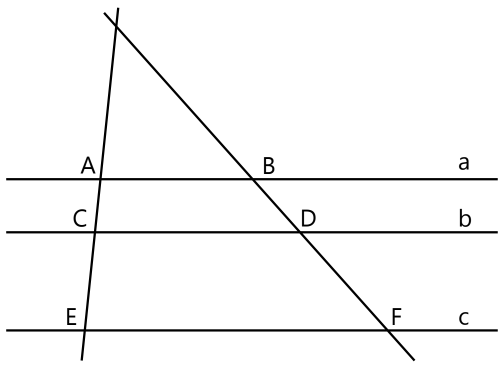
$$\frac{CC_1}{AC}, \quad \frac{C_1C_2}{AC}, \quad \frac{C_1C_2}{CC_1}$$

Si anotaste todas estas proporciones en números: ¿Cuáles de ellas son iguales?

Ahora, la misma propiedad aplica si tenemos unas rectas cualesquieras que cortan varias paralelas, como aquí ($a \parallel b \parallel c$):



Podríamos completar esta imagen para obtener los triángulos semejantes como el ejemplo anterior:

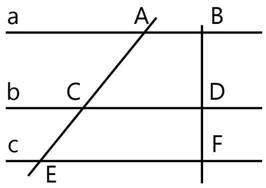


Entonces podemos ver que aquí vale, como antes: $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$

Esta proporcionalidad es conocida como el *teorema de Thales:* Si dos rectas cortan una serie de paralelas, sus segmentos entre las paralelas son proporcionales entre sí.

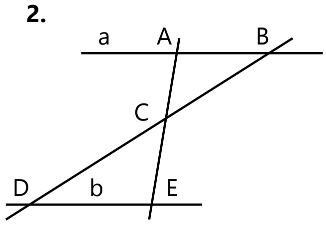
Descubre cómo calcular los siguientes problemas:

1.



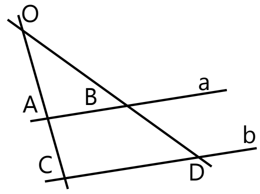
a || b || c
AC = 5cm, BD = 3 cm,
CE = 3.6 cm. Calcula DF.

2.



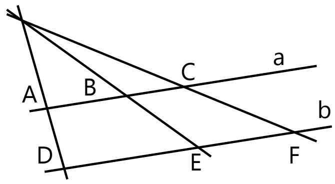
a || b
AC = 4cm, AE = 8.5 cm,
CD = 7.2 cm. Calcula BC.

3.



a || b
OA = 4.5 cm, OC = 6 cm,
CD = 4.4 cm. Calcula AB.

4.



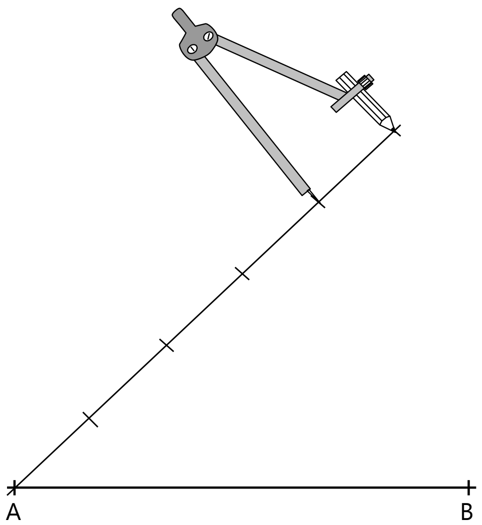
a || b
DE = 8 cm, EF = 6.5 cm,
AB = 4.8 cm. Calcula BC.

Dividir un segmento de manera proporcional

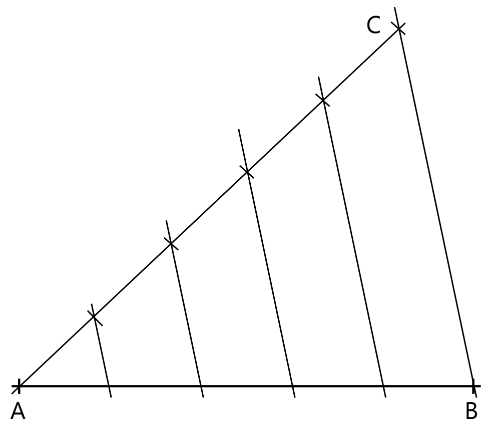
Tenemos un segmento recto, y deseamos dividirlo en partes iguales; digamos en 5 partes. Podríamos medirlo con la regla, dividir la medida entre 5, y marcar segmentos de esta longitud. Eso sería un método *aritmético*, porque lo resolvemos mediante un cálculo con números.

Pero existe también un método *geométrico* para resolver este problema; un método que no necesita la escala de la regla. Este método se basa en el teorema de Thales.

Definimos un extremo de nuestro segmento AB como "origen", y dibujamos desde allí otra recta, en ángulo agudo con nuestro segmento. Marcamos en esta recta 5 segmentos sucesivos iguales. Su medida exacta no importa, con tal que sean iguales entre sí. Podemos usar el compás para eso, manteniendo su apertura constante:



Unimos el final del último segmento (C) con el extremo B. Desde allí construimos paralelas a BC que pasan por las marcas de los otros segmentos:



Según el teorema de Thales, las proporciones entre los segmentos en la recta AC son iguales a las proporciones entre los segmentos en la recta AB. En este caso especial, los segmentos en AC son iguales (una proporción de 1:1:1:1:1). Por tanto, los 5 segmentos en AB también son iguales.

Haz una construcción como esta en el cuaderno o en una hoja de papel. Tú defines el número de segmentos que quieres crear.

Para pensar: ¿Cómo puedes usar este método para partir un segmento de manera proporcional, por ejemplo en 3 partes que tengan entre sí la proporción 1:2:4 ?

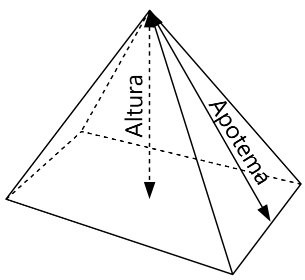
Un poco de historia

Cómo Thales midió la altura de las pirámides

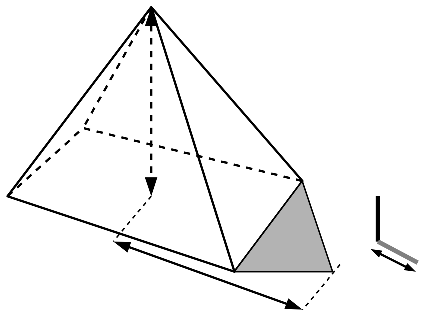
¿Quién fue ese Thales, el descubridor del teorema que lleva su nombre? – Vivía en Grecia en el siglo 6 antes de Cristo. Se le considera el fundador de la matemática y filosofía griega.

Thales pasó bastante tiempo en Egipto, y aprendió allí lo que los egipcios sabían de geometría. Después siguió investigando por su cuenta, y descubrió muchas leyes de la geometría que los egipcios no habían descubierto. Los historiadores cuentan que el faraón Amasis de Egipto se asombró por la capacidad de Thales de medir la altura de las pirámides. (Los constructores de las pirámides habían muerto hacía mucho tiempo; y parece que muchos de sus conocimientos se habían perdido.)

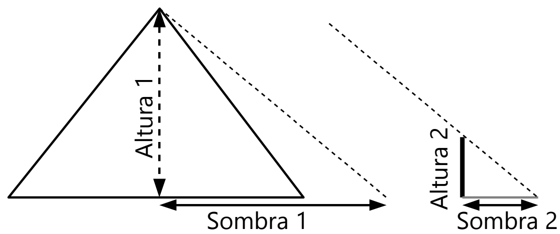
No se puede medir la altura de una pirámide directamente, porque para eso sería necesario penetrar al interior de la pirámide. Si medimos por afuera, de manera inclinada, no obtenemos la altura, sino otra medida que es más larga que la altura. (Esa medida se llama "apotema".)



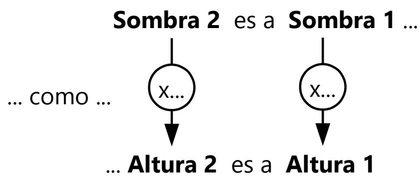
Pero Thales encontró otro método: En un día soleado, colocó un palo verticalmente en la tierra, cerca de la pirámide. Midió la altura del palo y la longitud de su sombra. Después midió la longitud de la sombra de la pirámide. (Eso se puede hacer, midiendo la sombra desde la base de la pirámide, y sumando a eso la mitad del lado de la base.)



Los rayos del sol caen sobre la pirámide y sobre el palo en el mismo ángulo. Por eso, sus alturas y sus sombras forman triángulos semejantes.



Entonces Thales pudo establecer la siguiente proporción:



Desde allí pudo calcular la altura de la pirámide.

Aplica este método para medir y calcular la altura de un edificio, de un árbol, o de algún otro objeto alto.

Anexo A: Pautas para problemas y preguntas de investigación

Pautas para el Bloque VI

Unidad 56: Construcciones básicas con regla y escuadra

Hoja de trabajo 56.5

1) Si pudiéramos construir todos los puntos que están a una distancia de 1.6 cm de la recta, por uno de sus lados, entonces formarían una *paralela* a la recta. Pero podemos medir la distancia también hacia el otro lado de la recta. Entonces, la respuesta completa es: Los puntos forman *dos paralelas* a la recta, una por cada lado.

2) Si pudiéramos construir todos los puntos que están a una distancia de 3 cm de P, el resultado sería un *círculo* con radio 3 cm y centro en P. ¡Esta propiedad de los círculos es muy importante! La usaremos en la siguiente Unidad (57), y en muchas situaciones después.

Nota: Las ubicaciones de estos puntos se llaman también sus *lugares geométricos*. Por ejemplo el "lugar geométrico" de los puntos que están a una distancia de 3 cm de P, es el círculo.

Pregunta capciosa: Los sobrevivientes no se entierran.

Unidad 57: Uso del compás

Hoja de trabajo 57.3 – Construcciones de rombos y paralelogramos

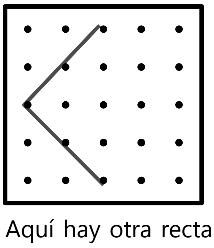
***4)** Llamamos C al vértice opuesto a A en la diagonal. Entonces BC = BA (porque en un rombo todos los lados son iguales). Para encontrar C, dibujamos un arco con centro en B y radio = BA:
Colocamos la punta de metal del compás en B y hacemos coincidir la punta de lápiz con A. Ahora la apertura del compás es igual al lado del rombo. Con esta misma apertura dibujamos un arco que se intersecta con la diagonal por el lado opuesto a A. (Mantenemos el centro en B.) Esta intersección es el vértice C. Ahora ya no es difícil encontrar el último vértice.

***5)** Para cumplir la condición de que AB = AC, dibujamos un arco con centro en A y radio = AC. Donde este arco se intersecta con la recta, allí se encuentra el vértice B. Ahora podemos completar el paralelogramo como en los problemas anteriores.

***6)** "Medimos" el segmento PQ con el compás; o sea, hacemos que su apertura sea igual a PQ. Con esta apertura dibujamos arcos con centros en B y en D, hacia ambos lados. Las intersecciones de estos arcos son los vértices A y C del rombo.

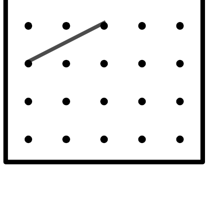
Unidad 59: Ángulos y el transportador

Ángulos en el geoplano:



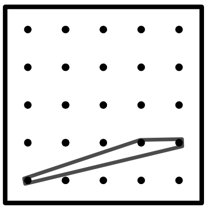
1) Aquí una idea. ¿Puedes demostrar que este es efectivamente un ángulo recto?

Aquí hay otra recta inclinada. ¿Cuál clavo hay que usar para formar un ángulo recto con esta recta?



2) Aquí un ejemplo de un ángulo muy pequeño.

Pero ¿quizás hay todavía más pequeños?

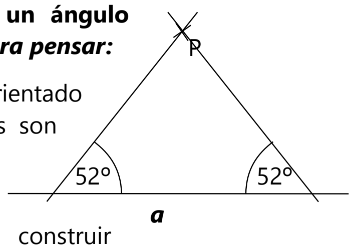


3) ¿Cuántos de estos ángulos tendrías que juntar para obtener la "vuelta completa" alrededor del círculo? Recuerda que la vuelta completa mide 360º. ¿Cómo puedes entonces calcular la medida de este ángulo?

Suma y resta de ángulos - *Para pensar:*

Los dos ángulos adyacentes a una misma recta suman juntos un ángulo llano, o sea 180º. Cuando se cortan en ángulo recto, ambos ángulos son 90º, o sea la mitad de 180º. Ahora, si uno de los ángulos es menor a 90º, o sea menos que la mitad, necesariamente el otro ángulo tiene que ser mayor que la mitad, para que su suma siga siendo 180º. Por eso, si uno de ellos es agudo (menor a 90º), el otro tiene que ser obtuso (mayor a 90º), y vice versa.

Construir un lado de un ángulo por un punto dado – *Para pensar:*



El ángulo puede ser orientado hacia el otro lado. Estas son las dos soluciones:

Ahora tú mismo podrás descubrir cómo construir ambas.

Hoja de trabajo 59.3 – Construcción no.3:

La diagonal parte el trapecio en dos triángulos. Entonces el problema equivale a construir triángulos congruentes a esos dos. Eso se puede hacer con cualquiera de los métodos que conoces. Tienes un control adicional con que los lados del trapecio deben salir paralelos.

Unidad 60: Espejos y simetría

Pregunta capciosa: Mi reflejo en el espejo.

Experimento: Ángulo de espejos

Los reflejos son congruentes a la figura original. Por tanto, el reflejo de un ángulo mide igual como el ángulo original. Ahora examina qué pasa cuando intentamos colocar cierto número de ángulos iguales alrededor de un punto central, como en la imagen que aparece en el espejo. Con eso debes descubrir la relación matemática que buscamos.

Construir y observar figuras simétricas:

***4)** Como en el experimento anterior, tus mediciones deberán confirmar que una figura reflejada en espejo es congruente a la original. Eso vale también para figuras "invisibles", tales como la recta PP_1 o los rayos de luz. Por tanto, las longitudes y los ángulos correspondientes deben ser iguales. O sea, un rayo de luz se refleja en un espejo de tal manera que ambos lados del rayo forman ángulos iguales con el espejo.
¿Cuál es entonces el ángulo entre PP_1 y el eje de simetría?

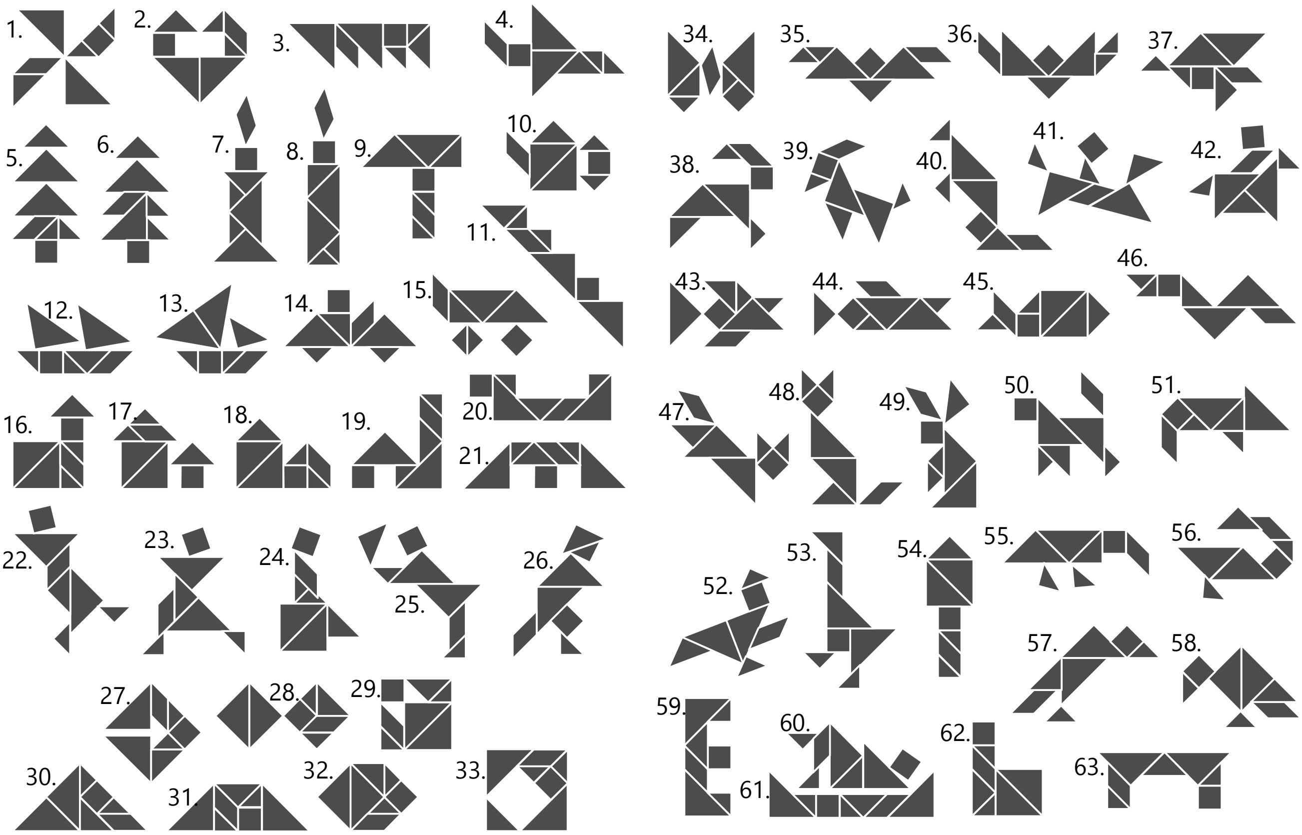
Unidad 61: El Tangram y el Origami

Investigaciones con el Tangram:

4) En la Pregunta 3 habrás visto que un cuadrado puede descomponerse en dos triángulos. Ahora, ¿puedes con esos dos triángulos formar un único triángulo? Ése tendrá la misma área como el cuadrado.

6) Después de experimentar tanto con triángulos y cuadrados, podemos entender que ambos cuadrados, el pequeño y el grande, pueden de alguna manera componerse de triángulos. Si usamos el mismo tamaño de triángulos para ambos, entonces por ejemplo el cuadrado pequeño podría consistir de 2 triángulos y el grande de 4 triángulos. O el pequeño de 4 y el grande de 8.

7) Esta es la "operación inversa" de la pregunta anterior.



Investigaciones relacionadas con el Origami:

10) Esto funciona casi igual como la mitad de un segmento (Pregunta 8), que supongo que fue fácil. Solamente tenemos que doblar el ángulo en dos partes iguales, a lo largo de su eje de simetría.

11) Si pudiste resolver la Pregunta 7, eso debe darte una pauta.

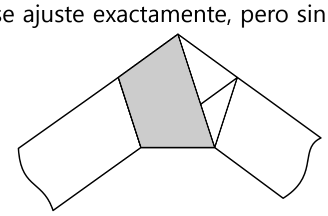
***12)** Tenemos que cumplir las dos condiciones que definen un cuadrado: Lados iguales, y ángulos rectos.
Un ángulo recto es la mitad de un ángulo llano (o sea, de una línea recta). Por supuesto que al doblar el papel, de todos modos obtienes una línea recta. ¿Cómo puedes de allí obtener *la mitad* del ángulo llano?
La longitud del lado puedes escoger libremente, mientras cabe en el papel. Una vez definido un lado, ¿cómo puedes doblar el papel para obtener otro lado de la misma longitud?

- Como alternativa, puedes también hacer uso de ciertas propiedades de las *diagonales*, y construir las diagonales primero.

La tarea no exige que se pueden doblar *únicamente los lados* del cuadrado. Puedes doblar tantas "líneas auxiliares" como sea necesario para la construcción. (Encontrarás que no necesitas tantas de ellas.)

****13)** Esto es realmente muy difícil de descubrir. Por eso el problema tiene dos estrellas; y te doy la solución aquí:

Haz un *nudo* "normal" con la tira. Pero hazlo de manera bien exacta, que el nudo se ajuste exactamente, pero sin que el papel forme arrugas. Aplana el nudo cuidadosamente. Si lo hiciste con exactitud, el nudo forma ahora un pentágono regular.



Unidad 62: Punto medio y ángulo recto con el compás

Investigación

1) En las actividades anteriores ya hemos construido ángulos rectos con el compás. Teníamos dos puntos A y B, y el ángulo recto se produjo en el punto medio entre A y B. Entonces tenemos que lograr que el punto P sea el punto medio entre dos puntos A y B sobre la recta dada. (¿Cómo encontramos tales puntos A y B?) Después hacemos la misma construcción como antes.

2) Aquí P no puede ser el "punto medio" entre A y B; pero puede ser un punto de su mediatriz. Recuerda que la mediatriz es el *eje de simetría* entre A y B: Todo punto de la mediatriz tiene la misma distancia de A como de B. Con este dato, ¿puedes encontrar puntos A y B sobre la recta dada, como en el problema anterior?

3) Un cuadrado es un caso especial de un rombo. Entonces conoces varias propiedades de sus diagonales.

4) Aquí también es preferible pensar primero en las *diagonales*.

***5)** Rectas paralelas tienen por todas partes la misma distancia. Esta distancia se mide en ángulo recto. Ahora ya sabes cómo construir un ángulo recto con regla y compás. Haz esto desde dos puntos de la recta dada, y mide (con el compás) desde ambos puntos la misma distancia. Con eso puedes completar la paralela. – En otras palabras: Estamos construyendo un *rectángulo*, usando las construcciones con regla y compás que conocemos.

****6)** El centro tiene la misma distancia hacia todos los puntos de la circunferencia. Entonces, si escoges dos puntos cualesquieras de la circunferencia, el centro tiene la misma distancia hacia ambos. ¿En qué linea se encuentran todos los puntos que tienen la misma distancia hacia dos puntos dados? Construye esa línea, y sabemos que el centro tiene que encontrarse en esa línea.

Ahora haz lo mismo con dos otros puntos de la circunferencia. Obtendrás otra línea, y sabes que el centro tiene que encontrarse también en esa línea. Entonces, el centro es la *intersección* de las dos líneas que construiste.

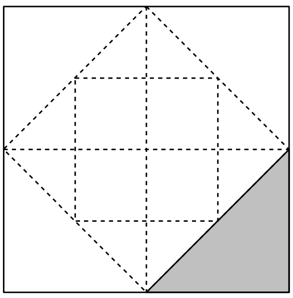
Unidad 64: Mosaicos de polígonos regulares

Investigación

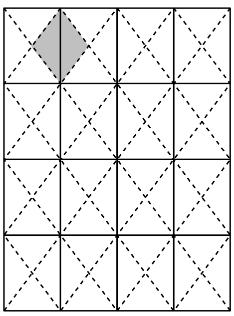
2, 3) Para que no queden huecos, en cada vértice tienen que juntarse ángulos que suman exactamente 360º. Investiga con cuáles polígonos se puede lograr eso. Así debes encontrar todas las combinaciones posibles.

Unidad 65: Perímetros y áreas

Fracciones de áreas:



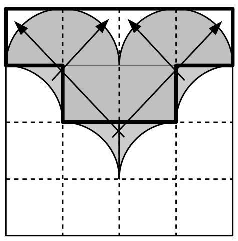
***11)** Recuerda las investigaciones con el Tangram. Sabemos algo acerca de la proporción entre las áreas de estos triángulos sucesivos.
O quizás te ayuda la construcción auxiliar en el dibujo.



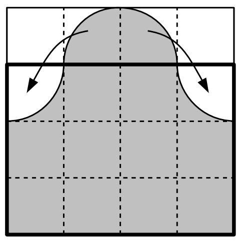
***12)** Con los triángulos que quedan en los bordes, podemos hacer un "rompecabezas", armando rombos enteros como los sombreados. Con eso puedes descubrir a cuántos rombos corresponde la figura en total.
O alternativamente, observa la construcción auxiliar en el dibujo.

13 a 20) Los siguientes dibujos te dan pautas de cómo resolver los "rompecabezas". En algunos casos se dan dos alternativas. – A veces es más fácil descubrir las fracciones que corresponden a las partes *no sombreadas*.

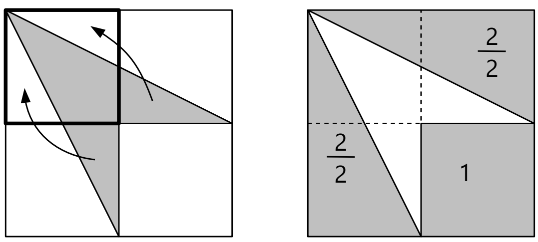
13.



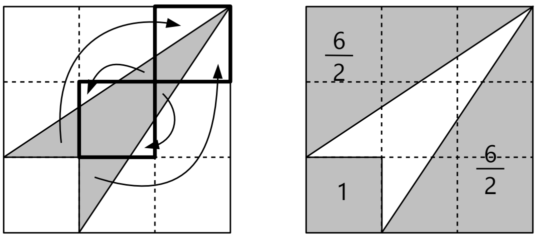
15.



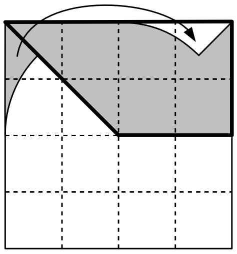
14.



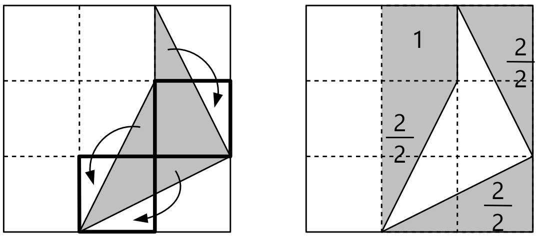
16.



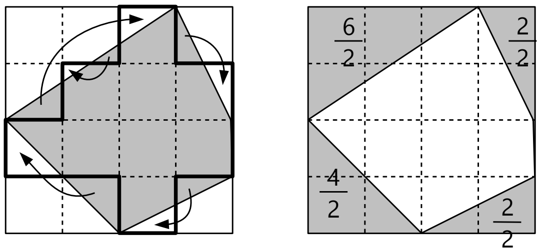
17.



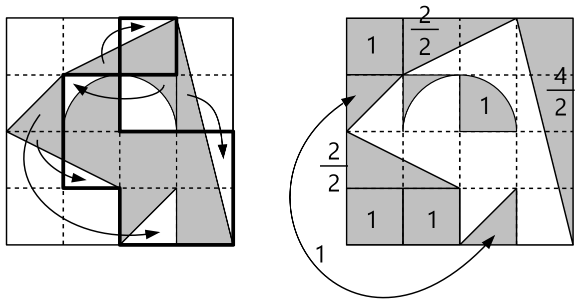
18.



19.



20.



Investigación: Una paradoja de medidas

Es muy importante entender que las medidas de longitudes son *incompatibles* con las medidas de áreas. Por ejemplo, no tiene sentido preguntar: "¿Cuántos metros (lineales) hay en un metro cuadrado?", o "¿Cuál es mayor, un metro (lineal) o un decímetro cuadrado?" (El uno es más largo; pero el otro tiene adicionalmente "anchura".)

Con las medidas lineales medimos objetos de "una sola dimensión" (longitud). Con las medidas de áreas medimos objetos de "dos dimensiones" (largo y ancho). Éstos pertenecen a una clase muy distinta de los primeros.

El perímetro de una figura es una *longitud*; por tanto no tiene sentido compararlo con su área.

Analicemos lo que sucede con los números en el ejemplo de Ernesto y Enrique: Cuando convertimos cm en mm, todos los números se multiplican por 10. Por eso, el perímetro de 18 cm es igual a 180 mm. Pero cuando calculamos el área, multiplicamos "milímetros por milímetros". Por eso, las medidas de áreas contienen el factor 10 *dos veces*, y en un cm^2 hay 10 x 10 = 100 mm^2. Por eso, el número que indica el área se multiplica por 100, y resultan 1800 mm^2.

Así o así, no tiene sentido comparar el perímetro con el área y decir que sean "iguales", o que el uno sea "diez veces" el otro. A lo máximo podríamos decir que el perímetro, *expresado en centímetros,* es igual al área, *expresada en centímetros cuadrados.* Pero como hemos visto, si los expresamos en otras unidades de medida, la igualdad ya no aplica.

Si deseas, investiga qué pasa si convertimos las medidas de este rectángulo en *decímetros*.

Unidad 67: Planos y mapas

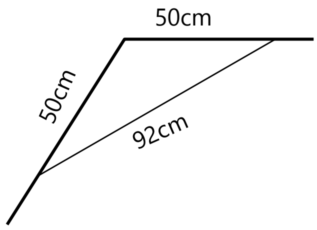
¿Cómo dibujar correctamente en el plano las esquinas que no están en ángulo recto?

Cuando los ángulos de una habitación no son rectos, su forma es un polígono irregular. Conocemos dos métodos que pueden servir para construir un polígono irregular congruente a otro:

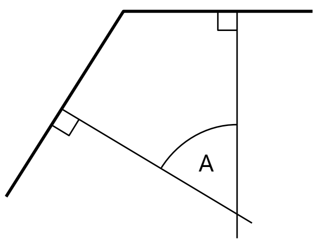
a) Copiar las longitudes de los lados, y los *ángulos* entre ellos.

b) Dibujar *diagonales* para dividir el polígono en triángulos.

Si queremos usar el método a), encontraremos que no es tan fácil medir el ángulo de una esquina interior. ¡No podemos colocar el transportador encima como si fuera una figura en un papel! Probablemente tendremos que hacer alguna construcción auxiliar sobre el piso de la habitación. Por ejemplo, podemos medir una distancia fija desde la esquina hacia ambos lados, por ejemplo 50cm o un metro, y marcar puntos allí. Después medimos la distancia entre los dos puntos marcados. Así tenemos un triángulo, y podemos reconstruir este mismo triángulo en el plano. Así obtenemos el ángulo de la esquina. (Esto ya se está acercando al método de las diagonales.)

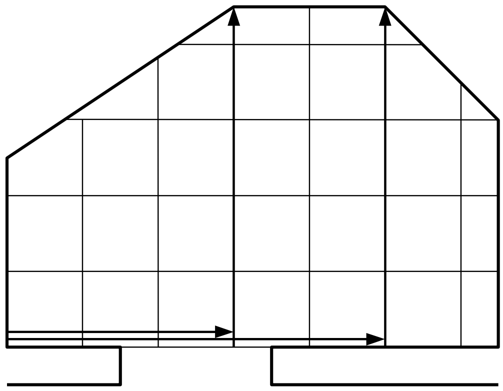


Otra posibilidad es la siguiente, que requiere dibujar unas líneas sobre el piso. Si no se puede dibujar sobre el piso, pegamos una cartulina o un cartón en una posición fija en el piso, y dibujamos encima. Colocando una escuadra contra la pared, podemos dibujar rectas en ángulo recto. Podemos medir los ángulos de sus intersecciones sobre el cartón, y así calcular los ángulos originales:



(Esto requiere conocimientos de algunas propiedades de ángulos, que introducimos en la *Unidad 95*.)

c) Una tercera posibilidad consiste en determinar la ubicación de las esquinas respecto a un sistema de *coordenadas*. Nosotros mismos definimos el origen de las coordenadas, y la dirección de sus ejes. Si una de las esquinas de la habitación tiene un ángulo recto, lo más lógico es definir el origen en esa esquina, y los ejes en dirección de las paredes que proceden desde el origen. Entonces podemos desde esas paredes medir las distancias hacia ciertos puntos de las paredes opuestas, y así obtener sus coordenadas y construirlos. Solamente tenemos que asegurarnos de hacer la medición de estas distancias en ángulo recto. Les dejo a ustedes la tarea de descubrir cómo se puede lograr eso. (Si *ninguna* esquina tiene un ángulo recto, tenemos que *construir* un ángulo recto hacia una de las paredes para establecer los ejes del sistema de coordenadas.)



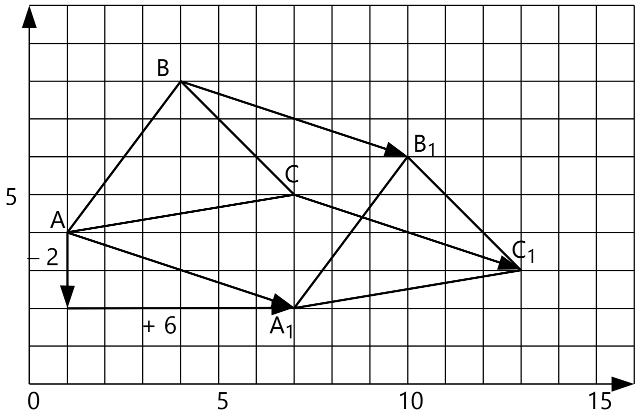
d) Otra posibilidad, un poco menos exacta, consiste en medir la orientación de las paredes con la ayuda de una brújula *(vea Unidad 68)*. Desde allí podemos calcular los ángulos entre ellas.

Unidad 69: Transformaciones de figuras en el sistema de coordenadas

Traslación:

Observa y describe:

- Ya que las figuras trasladadas son congruentes, sus lados tienen *las mismas longitudes* como los lados de la figura original.
Y puesto que no giramos la figura, sus lados son también *paralelos* a los lados correspondientes de la figura original.



- Todos los vértices de la figura trasladada han realizado el mismo movimiento, respecto al original. Por tanto, sus coordenadas han aumentado o disminuido por el mismo valor, respecto al original.

En el ejemplo anterior, la figura entera se ha trasladado por 6 unidades hacia la derecha, y 2 unidades hacia abajo. Por tanto, las coordenadas horizontales de todos los vértices han aumentado en 6, y las coordenadas verticales de todos los vértices han disminuido en 2.

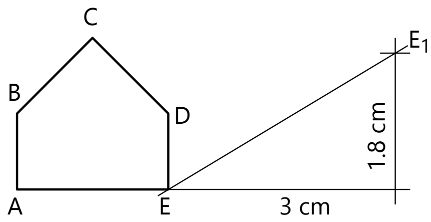
Para pensar:

- Cómo calcular las coordenadas trasladadas: La pregunta anterior da también la respuesta a ésta: Sumamos o restamos a las coordenadas originales de todos los vértices el mismo valor (la distancia de la traslación), así obtenemos las coordenadas de la figura trasladada. Eso hay que hacerlo separadamente para las coordenadas horizontales y para las verticales.

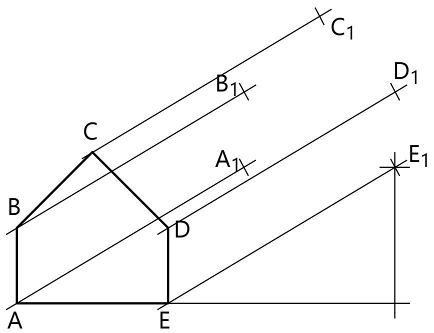
(Matemáticamente, eso equivale a una *suma de vectores:* A las coordenadas de cada vértice se suma el mismo vector de traslación. Pero al nivel de Primaria todavía no necesitamos entrar en este tema.)

- Cómo construir una traslación geométricamente:

A) Podemos hacer lo mismo como con las coordenadas: "Movemos" cada vértice en la misma dirección y por la misma distancia. Por ejemplo, queremos trasladar una figura por 3 cm hacia la derecha y 1.8 cm hacia arriba. Entonces construimos esta dirección de la traslación desde uno de los vértices:

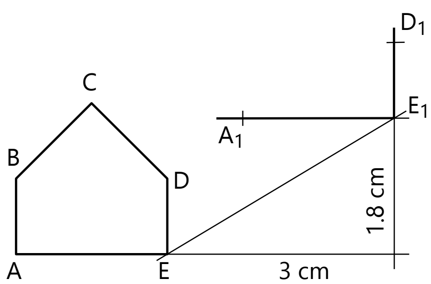


Ahora, desde los otros vértices construimos segmentos paralelos al primero, y con la misma longitud (copiando la longitud del primero con el compás, o midiendo con la regla):



Así ya tenemos todos los vértices trasladados, y solamente falta unirlos.

B) Alternativamente, podemos usar la propiedad de que la figura trasladada es congruente y paralela a la original. Una vez que está definido el primer vértice trasladado, construimos desde allí una figura congruente y paralela a la primera. Empezamos con dos rectas partiendo de este vértice y paralelas a los lados de la figura original. Copiamos sobre estas rectas las longitudes de los lados de la figura original:

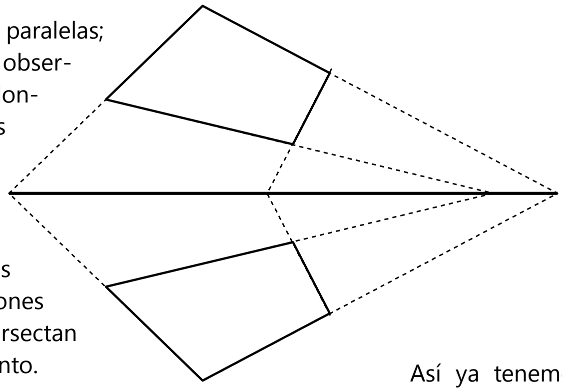


Así obtenemos los siguientes dos vértices, y desde allí podemos continuar de la misma manera hasta completar la figura entera.

Reflexión:

Observa y describe:

- Ya que las figuras reflejadas son congruentes, sus ***lados*** tienen *las mismas longitudes* como los lados de la figura original.
Sus direcciones no son paralelas; pero podemos hacer una observación interesante si prolongamos todos los lados hasta su intersección con el eje de simetría:

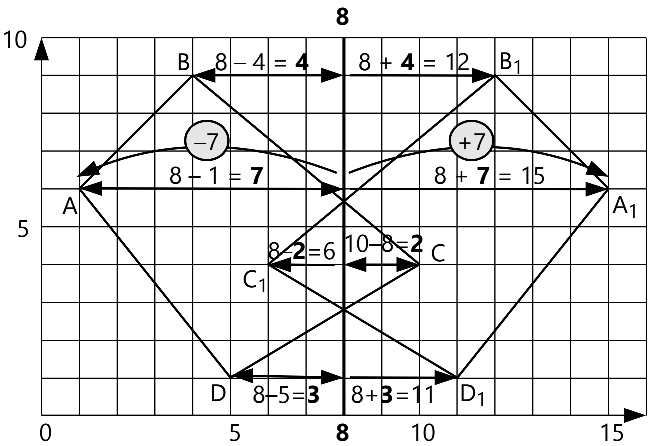


Notamos que todos los pares de prolongaciones correspondientes se intersectan con el eje en el mismo punto.

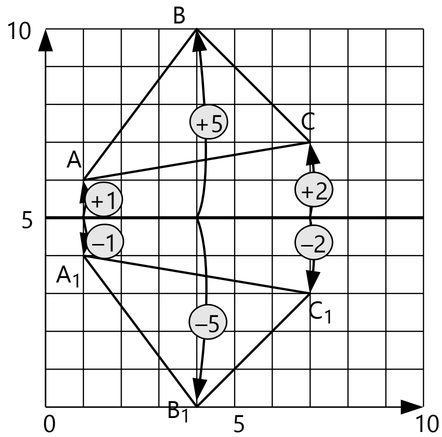
- Notamos que el ***orden de los vértices*** se invierte: Si en la figura original estaban en sentido horario, en la figura reflejada están en sentido antihorario; y vice versa. Esto sucede, independientemente de la dirección del eje de simetría. (¡Verifícalo!)
Este es efectivamente el mismo efecto como sucede al voltear el papel, si hacemos el experimento con una figura cortada de papel y un espejo.

- Para entender lo que sucede con las ***coordenadas***, tenemos que recordar que cada punto se encuentra a la misma distancia del eje de simetría como su reflejo. Si el eje es vertical, esta distancia es la diferencia entre las coordenadas horizontales. *(Vea el dibujo abajo.)*

Para obtener la coordenada horizontal de un punto reflejado, calculamos primero su diferencia con el eje de simetría. Ahora, si el punto reflejado está a la izquierda del eje, tenemos que *restar* este valor de la coordenada del eje. Si el punto reflejado está a la derecha, tenemos que *sumarlo*. – Las coordenadas verticales no cambian.



Si el eje es horizontal, tenemos que aplicar el proceso anterior a las coordenadas verticales, mientras las coordenadas horizontales siguen las mismas:



Así ya tenemos la respuesta a la pregunta de cómo calcular las coordenadas.

Como construir geométricamente una figura reflejada:

En la *Unidad 60* ya hemos visto dos posibilidades:

A) Construir desde cada vértice una recta perpendicular al eje de simetría, y construir el punto reflejado al otro lado del eje (a la misma distancia como el punto original).

B) Construir dos vértices reflejados, y desde allí construir una figura congruente a la original (pero invertida).

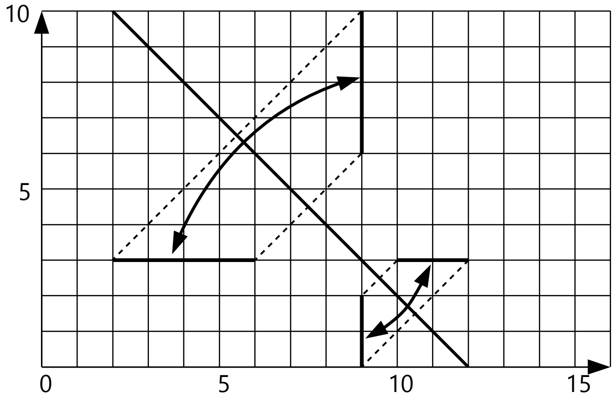
Ahora, en la tarea de observación hemos visto que las prolongaciones de lados correspondientes tienen la misma intersección con el eje de simetría. Esto nos permite construir la figura reflejada de una tercera manera, si tenemos suficiente espacio en el papel:

C) Construimos un vértice reflejado, y las prolongaciones de los lados de la figura original. Si el vértice A_1 es el reflejo de A, buscamos en el eje de simetría las intersecciones con las prolongaciones de los lados que pasan por A. Unimos estas intersecciones con A_1, y así obtenemos los lados reflejados. Podemos definir los siguientes vértices copiando las longitudes de los lados (Método B), o construyendo rectas perpendiculares (Método A). Después podemos nuevamente unir intersecciones para obtener las direcciones de los siguientes lados.

**** Reflexión en un eje de simetría inclinado en 45º***

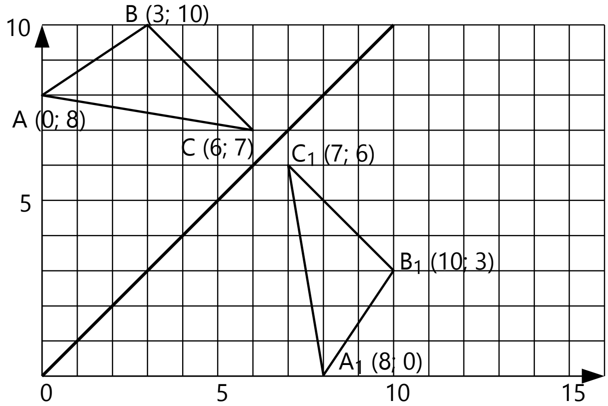
Geométricamente no hay nada nuevo en esta situación. Si giramos el papel en 45º, tenemos la misma situación como con un eje horizontal o vertical. Y por supuesto que aplican todas las propiedades de la simetría axial: Figuras reflejadas son congruentes; las prolongaciones de lados correspondientes se intersectan sobre el eje de simetría; y una recta que une un punto con su reflejo es perpendicular al eje de simetría.

En cuanto a las *coordenadas*, una clave para entender la situación es que aquí se convierte "horizontal en vertical", y vice versa. O sea, una línea horizontal que se refleja en un eje diagonal, se convierte en vertical, y vice versa.



Esto hace que en este caso cambian ambas coordenadas, ambas por el mismo valor (sea sumando o restándolo, según la orientación del eje de simetría).

En el caso especial donde el eje de simetría pasa por el origen, vemos que simplemente los valores de las coordenadas horizontal y vertical se intercambian:



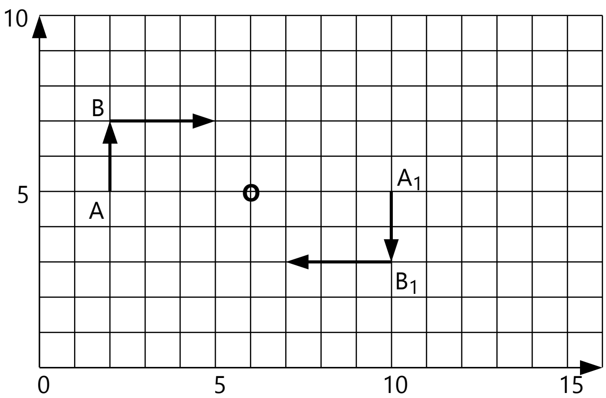
Los alumnos interesados en el tema pueden seguir investigando; todavía hay mucho por descubrir. Pero a profundidad entraremos a este tema recién en el nivel de Secundaria I.

Rotación

Observa y describe:

- Ya que las figuras rotadas son congruentes, las longitudes de sus lados no cambian al rotarlas.

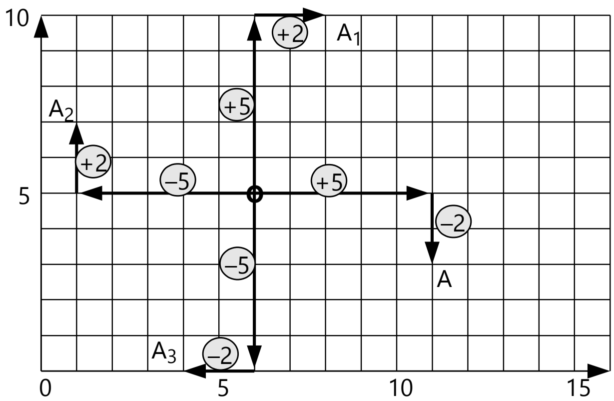
La *dirección* de cada lado cambia según el ángulo de rotación. Entonces, en una rotación por 90° y por 270°, las líneas horizontales se convierten en verticales, y vice versa. En cambio, en una rotación por 180° damos "media vuelta", entonces los lados de la figura rotada son paralelos a la original. Solamente que van en sentido opuesto: Si dibujamos una flecha desde A hacia B, y en la figura original la flecha señala hacia arriba, la flecha A_1B_1 en la figura rotada señalará hacia abajo. Una flecha hacia la derecha, en la figura rotada señala hacia la izquierda.



Etc.

- Se nota fácilmente que el orden de los vértices no cambia: Si los vértices están en sentido horario, lo serán también después de una rotación. O sea, la rotación no invierte la figura. Recuerda el experimento con la regla que gira: No hemos volteado la figura a su otra cara (a diferencia de la reflexión en espejo).

- * Para entender lo que sucede con las coordenadas, primero tenemos que recordar que las distancias hacia el centro se mantienen iguales. Pero estas distancias también serán rotadas. Por ejemplo, un punto A se encuentra a 5 unidades a la derecha y 2 unidades por debajo del centro de rotación. Si lo rotamos en 90°, la distancia "hacia la derecha" se convierte en distancia "hacia arriba", y la distancia "hacia abajo" se convierte en distancia "hacia la derecha". Entonces el punto rotado A_1 se encuentra a 5 unidades *por encima*, y 2 unidades *a la derecha* del centro.



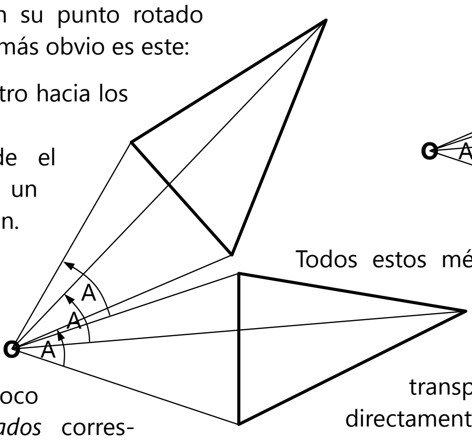
Analiza de manera similar lo que sucede con las coordenadas en una rotación por 180° y por 270°.

Para pensar:

- Construir una rotación geométricamente:

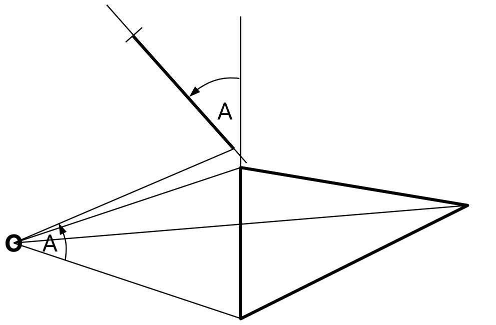
El ángulo de rotación aparece entre todas las rectas que unen el centro con un punto, y con su punto rotado correspondiente. Entonces el método más obvio es este:

- Dibujamos estas rectas desde el centro hacia los vértices de la figura original.
- Construimos nuevas rectas desde el centro, que forman con las primeras un ángulo igual al ángulo de rotación. (Esto corresponde a "girar la regla" en nuestra demostración práctica.)
- Copiamos las distancias hacia los vértices a estas rectas nuevas.



Observando y reflexionando un poco más, veremos que también los *lados* correspondientes (entre la figura original y la rotada) forman entre sí un ángulo igual al ángulo de rotación. Entonces necesitamos rotar un único vértice con el método anterior, y después obtenemos la dirección de los lados, rotando los lados de la figura original.

Cuando tenemos un vértice y un lado rotado, podemos también completar la figura congruente a la original, copiando las longitudes de los lados y los ángulos entre ellos.



Todos estos métodos se pueden usar con *cualquier* ángulo de rotación. Solamente que en los ángulos "especiales" de 90º, 180º y 270º no necesitamos transportador: podemos construir directamente ángulos rectos, resp. paralelas, usando la escuadra.

- * Calcular las coordenadas de una figura rotada:

Hemos visto que las *distancias hacia el centro de rotación* también se rotan. *(Vea la última pregunta en "Observa y describe".)* Entonces calculamos primero estas distancias, para cada vértice de la figura original. Después aplicamos las transformaciones correspondientes a estas distancias. O sea, razonamos cuáles serán sus nuevas direcciones, de acuerdo al ángulo de rotación.

Unidad 70: Proporciones en la geometría

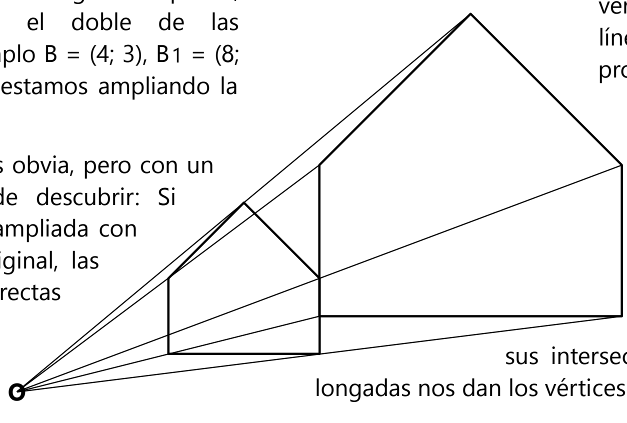
Ampliación de figuras geométricas

Observa y describe:

- Ya que estamos ampliando la figura al doble, es lógico que todos los lados de la figura ampliada midan el doble de los lados correspondientes en la figura original.
Además se puede observar que los lados de la figura ampliada son *paralelos* a los lados correspondientes del original. Esto implica que los *ángulos* de la figura ampliada son iguales a los ángulos del original. (Eso se puede observar en la figura. Se puede también deducir de las propiedades de los ángulos en paralelas, pero todavía no hemos estudiado esta propiedad formalmente. Vea *Unidad 95.*)

- Acerca de las *coordenadas* de la figura ampliada, observamos que son siempre el doble de las coordenadas del original. Por ejemplo B = (4; 3), B_1 = (8; 6). Eso también es de esperar si estamos ampliando la figura al doble.

- La siguiente propiedad es menos obvia, pero con un buen "ojo geométrico" se puede descubrir: Si unimos cada vértice de la figura ampliada con el vértice correspondiente del original, las prolongaciones de todas estas rectas pasan por el origen.
La siguiente actividad de esta Unidad nos hará entender mejor *por qué* eso es así.



Para pensar:

- Ya hemos observado lo que pasa con las coordenadas: Todas se multiplican por el factor de ampliación. En nuestro ejemplo este factor es 2; pero podemos elegir un número cualquiera como factor de ampliación.

- * La construcción más obvia consistiría en construir una figura con lados paralelos a la figura original, midiendo cada lado con la regla y multiplicando su longitud por el factor de ampliación. Pero eso es bastante complicado, y la pregunta pide una construcción *fácil*.
Podemos tomar en cuenta la última propiedad mencionada en "Observa y describe": Unimos cada vértice de la figura original en línea recta con el origen, y prolongamos estas rectas. Construimos un vértice de la figura ampliada, usando el factor de ampliación. A partir de allí, solamente necesitamos construir lados paralelos a los lados de la figura original: sus intersecciones con las rectas prolongadas nos dan los vértices siguientes.

Semejanza geométrica

Hoja de trabajo 70.2, abajo: *¿Cómo construir una figura semejante, si sus lados no son paralelos a la original?*

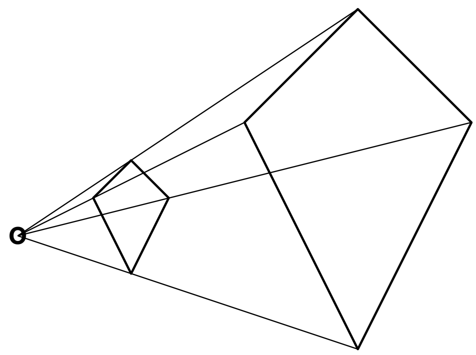
Tomando en cuenta las propiedades de figuras semejantes, podemos considerar las siguientes posibilidades:

- Podemos primero construir una figura semejante del tamaño requerido, pero paralela a la original. Ya conocemos una construcción fácil para eso. Después construimos una figura congruente a esa, en el lugar y la orientación requeridos.

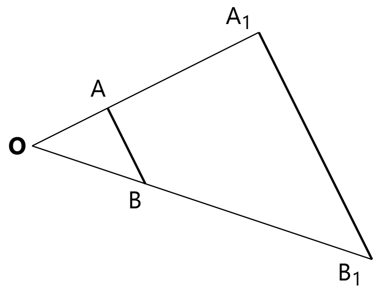
- Sabemos que las figuras semejantes tienen ángulos iguales y lados proporcionales. Podemos entonces copiar los ángulos de la figura original – y en el caso de un triángulo descubrimos que con eso ya hemos terminado.
El caso de un cuadrilátero no es tan fácil. Podríamos calcular una proporción para saber las longitudes de los lados del cuadrilátero semejante, y construirlo así. Otra opción consiste en descomponer el cuadrilátero en dos triángulos (¿sabes cómo?), y construir ésos.

Por qué funciona la "construcción fácil" de una figura ampliada:

Observemos una construcción así: Los lados de la figura ampliada son paralelos a los lados de la figura original. Por tanto, ¡tenemos triángulos semejantes por todas partes!



Sacamos uno de estos pares de triángulos para observar sus propiedades:



Ya sabemos que el lado A_1B_1 mide igual como el lado AB multiplicado por el factor de ampliación. Pero no sólo eso: Por ser triángulos semejantes, la misma proporción existe entre OA_1 y OA, y también entre OB_1 y OB.

Y sabemos que triángulos semejantes tienen ángulos iguales. Por tanto, si los lados AB y A_1B_1 son paralelos, los lados OA y OA_1 tienen que sobreponerse, e igualmente los lados OB y OB_1. Eso explica por qué las rectas AA_1 y BB_1 tienen que pasar por el origen, e igualmente todas las rectas que unen un vértice de la figura ampliada con un vértice del original.

El efecto de la ampliación sobre las áreas de las figuras

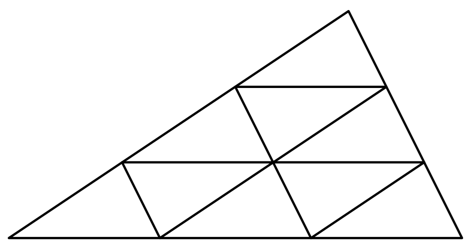
4) Si no encuentras la respuesta, revisa otra vez los resultados de las preguntas 1 a 3. Si lo hiciste correctamente, debes haber obtenido los siguientes resultados:

1) Factor de ampliación 3: El área ampliada es 9 veces el área original.
2) Factor 2: Área ampliada = 4 veces el original.
3) Factor 6: Área ampliada = 36 veces el original.
Factor 4: Área ampliada = 16 veces el original.

¿Qué relación encuentras cada vez entre el factor de ampliación, y el factor por el cual se multiplica el área?

5) Según el principio de la pregunta 4: Si la figura se amplía por un factor de 5, ¿por cuánto debe multiplicarse su área? – Lo interesante es que eso funciona independientemente de la forma de la figura. No importa si es un rectángulo, una figura compuesta de cuadrados, o cualquier figura irregular: la proporción entre las áreas obedece siempre la misma ley.

6) Por si no entendiste la tarea: La construcción debe resultar así:



El triángulo grande contiene 9 triángulos congruentes al original, entonces su área es 9 veces el área del triángulo original. ¿Ves como esto confirma la ley de la pregunta 4? – Si quieres, puedes probar lo mismo con otro factor de ampliación. Con triángulos funciona siempre, mientras que el factor de ampliación es un número entero.

7) Compara: ¿Cuántos mm hay en un cm? ¿y cuántos mm^2 hay en un cm^2 ? – O también: ¿Cuántos cm hay en un metro? ¿y cuántos cm^2 hay en un m^2 ?
¿Puedes ver que las medidas de áreas se relacionan con las medidas lineales de la misma manera como las áreas de las figuras ampliadas se relacionan con el factor de ampliación?

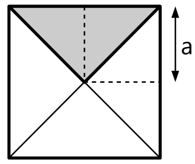
Unidad 71: Orientación en tres dimensiones, y medidas de volúmenes

Problemas con volúmenes:

***8)** Por si no encuentras la manera de calcular estos volúmenes:

La *base* de cada bolsa es un cuadrado. Ya que los cuatro lados son iguales, un lado del cuadrado mide $^1/_4$ del lado del papel: 20 ÷ 4 en el caso de Susana, y 30 ÷ 4 en el caso de Sabina.

Para la *altura* de la bolsa, se quita de la altura del papel la parte que ocupan los triángulos de la base abajo. ¿A cuánto equivale eso? Examina cómo se construye la base de la bolsa:



Entonces la altura del triángulo es la mitad del lado del cuadrado. Así puedes calcular la altura de la bolsa.

Ahora tienes las medidas completas de cada bolsa, y puedes calcular sus volúmenes.

Unidad 72: Cuerpos geométricos

Investigación:

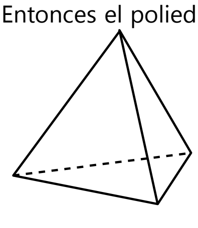
1) En un cuerpo tridimensional tenemos que distinguir entre dos clases de diagonales:
a) Diagonales de las caras. En un cubo, esas son las diagonales de cada uno de los cuadrados que conforman el cubo.
b) Diagonales espaciales. Esas son las diagonales que unen dos vértices, pasando por el *interior* del cuerpo. En un cubo, desde cada vértice podemos trazar exactamente una diagonal espacial, porque existe un único vértice que está "opuesto" de tal manera que tenemos que pasar por el interior del cubo para alcanzarlo en línea recta.
Para responder la pregunta exactamente, tenemos que detallar entonces:
¿Cuántas diagonales de las caras tiene un cubo?
¿y cuántas diagonales espaciales tiene?
¿y cuántas son todas estas en total?

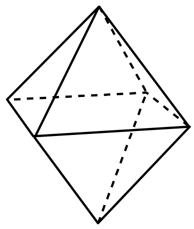
* Con esta aclaración pueden ahora intentar hacer lo mismo con un prisma hexagonal (o con cualquier otro poliedro). Construyan el poliedro y obsérvenlo. Si les ayuda y si tienen perseverancia, pueden marcar las diagonales con hilos o lanas: las diagonales espaciales con un color, y las diagonales de las caras con otro color.

2) Daré aquí la respuesta completa, y así conoceremos a la vez los nombres de los poliedros regulares. Por si todavía no hiciste la *Unidad 63*, podrías ahora hacer la actividad de construir los poliedros regulares de cartulina.

Las caras tienen que ser polígonos regulares. Para hacerlo sistemáticamente, comenzamos con el más pequeño, el *triángulo* (equilátero).

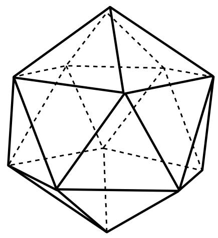
En un vértice tienen que unirse por lo menos 3 caras, porque de otro modo no se forma ningún vértice. Entonces el poliedro regular más pequeño es uno donde se unen 3 triángulos en cada vértice. Ese es el ***tetraedro*** que ya conocemos. ("Tetra" es griego y significa "cuatro", porque el tetraedro tiene 4 caras.)





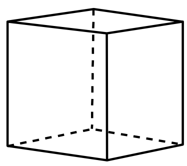
Otro poliedro regular obtenemos si unimos 4 triángulos en cada vértice. Este es el ***octaedro*** (del griego "octos" = "ocho", porque tiene 8 caras.)

Si juntamos 5 triángulos en cada vértice, nos resulta el ***icosaedro***, un cuerpo con 20 caras.



Si intentamos juntar 6 triángulos en cada vértice, la figura se vuelve completamente plana. ¿Recuerdas las flores de círculos *(Unidad 57)*, y los polígonos regulares *(Unidad 64)*? 6 triángulos equiláteros juntos forman un hexágono regular, o sea una figura plana. Con eso no podemos formar ningún poliedro.

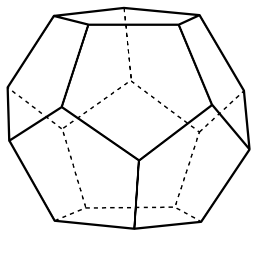
Y con 7 o más triángulos en un vértice ni siquiera alcanza el espacio para acomodarlos todos. Entonces no puede existir ningún otro poliedro regular con triángulos.



Pasamos entonces al siguiente polígono regular, el *cuadrado*. Con 3 cuadrados en cada vértice tenemos el ***hexaedro*** o ***cubo*** que conocemos bien.

Con 4 cuadrados en un vértice tenemos otra vez una figura plana, de manera que no podemos formar ningún poliedro. Y más que 4 cuadrados no se pueden acomodar en un vértice.

El siguiente polígono regular es el *pentágono*. Podemos juntar 3 pentágonos en cada vértice. Así obtenemos el ***dodecaedro***, un poliedro con 12 caras.



Más de tres pentágonos regulares no se pueden acomodar en un vértice. Intentamos entonces con *hexágonos*. Pero 3 hexágonos en un vértice ya forman una figura plana, entonces no podemos formar ningún poliedro. Y los polígonos mayores (heptágonos, octágonos, etc.) tienen ángulos aun mayores en sus vértices, entonces no es posible unir ni siquiera tres de ellos en un vértice.

Por tanto hemos terminado: No pueden existir otros poliedros regulares que los cinco que encontramos.

Pautas para el Bloque VII

Unidad 73: Juegos de razonamiento estratégico

Cram – Desafío de investigación

Se puede seguir una estrategia de simetría central: Para cada ficha que coloca mi oponente, yo coloco mi ficha en la posición simétrica respecto al centro del tablero. Si ambos lados del tablero son pares, el segundo jugador ganará con esta estrategia, porque para *cada* posición de una ficha existe otra que es simétrica a ella.
Si uno de los lados es impar y el otro es par, entonces existe una posición en el centro del tablero donde una ficha es simétrica a sí misma. En este caso gana el primer jugador: Coloca su primera ficha exactamente en el centro. En los siguientes turnos, coloca su ficha en posición simétrica respecto a la ficha que colocó su oponente.
Si ambos lados del tablero son impares, entonces el centro consiste en un único cuadro. Cuando uno de los jugadores coloca su ficha de manera que ocupa este cuadro central (y uno adicional), se destruye la simetría, y ninguno de los dos puede aplicar la estrategia descrita.

Para seguir pensando: ¿Cómo se afecta la validez de esta estrategia si usamos regletas de 3 en vez de dominóes?

No hagas un triángulo – Para pensar:

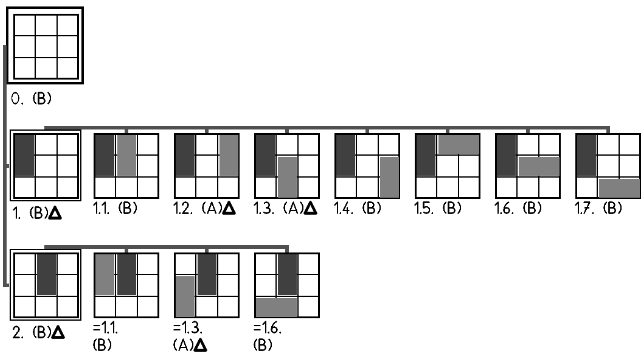
Mientras nadie hace un triángulo, el juego continúa; en el caso extremo hasta que todas las rectas sean trazadas con el uno o el otro color. Entonces, en una posición de empate no podría quedar ninguna recta sin trazar. ¿Es eso posible sin que se forme un triángulo de un color?

Para encontrar la respuesta, quizás ayuda analizar cuántos triángulos posibles contiene la figura en total.

Para seguir pensando: ¿Cómo es la situación si se juega entre 3 personas, o sea con 3 colores distintos? ¿Y con 7, 8, o más puntos?

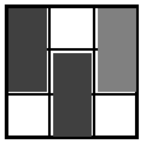
Ampliaciones: "Cram" en un tablero mínimo

Los resultados de analizar las posiciones 1.1. a 1.7. son los siguientes:



Por tanto, no importa cómo comience A, B siempre puede ganar. Solamente que no debe escoger las posiciones 1.2. y 1.3, porque en estos casos gana A.

Analizando un poco más, vemos que la única posición final donde gana A, es esta:



Entonces, B solamente tiene que colocar su dominó de una manera que no permite llegar a esta posición, y va a ganar.

"Cram cruzado" en un tablero mínimo

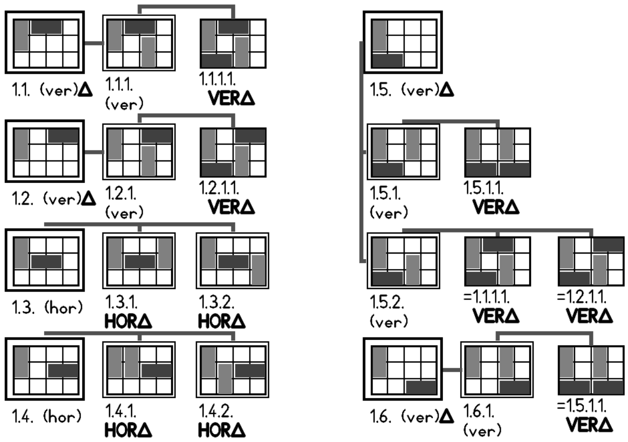
La posición 2 es una victoria segura para "Vertical". Entonces si "Vertical" comienza el juego, va a elegir esta jugada y prácticamente ya ha ganado. Elegir la posición 1 sería un grave error, porque en este caso ganaría "Horizontal" con la posición 1.2.

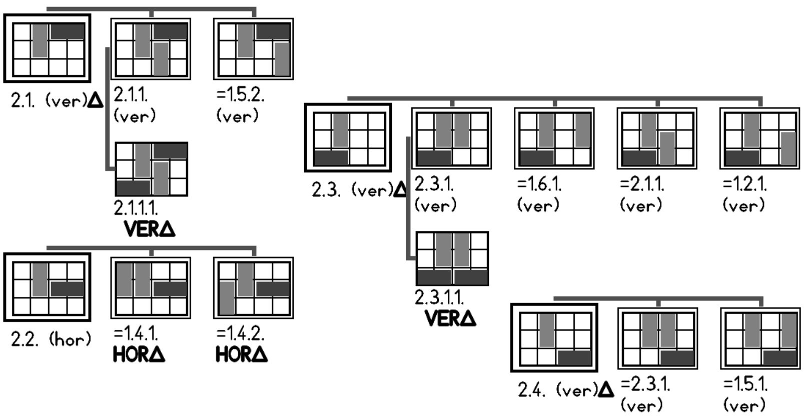
En un tablero *cuadrado* no importa si se comienza en horizontal o en vertical: Si comienza "Horizontal", se aplica exactamente el mismo árbol, solamente que todas las posiciones se giran en 90º. Entonces en un tablero de 3x3, de todos modos gana el jugador que comienza.

En un tablero *rectangular,* la cosa es diferente, porque si lo giramos en 90º, ya no tenemos el mismo tablero. En ese caso sí importa en cuál orientación se comienza.

Un último ejemplo

Pregunta 1: Un árbol completo para este juego ya se haría bastante grande. Pero si nos limitamos a las jugadas "inteligentes", el árbol para la tercera y cuarta jugada se verá así:





Aquí hemos marcado los finales de los partidos una jugada antes de que realmente termina, porque la continuación es obvia. Además hemos asumido que cada jugador razona con dos jugadas de anticipación. O sea, si ve que puede asegurarse su victoria en la siguiente jugada, lo hará. Por eso, por ejemplo en la posición 1.6. se muestra una única continuación para "Vertical", porque esa es la jugada inteligente con la que gana en su siguiente jugada. Así, el árbol se reduce considerablemente.

Revisa el árbol, y verifica que las jugadas dibujadas son efectivamente las "más inteligentes" en cada caso. – Y bien, ¿quién gana entonces este juego, si cada uno juega de la manera más inteligente?

Pregunta 2: Revisa qué tienen en común las posiciones 1.3, 1.4 y 2.2. (porque estas son las que aseguran que "Horizontal" gane). De manera generalizada: ¿En qué lugar tiene que colocar "Horizontal" su dominó para ganar? – ¿Y qué puede hacer "Vertical" para impedirlo? ¿O no puede impedirlo?

Pregunta 3: A diferencia del tablero cuadrado, aquí sí hace una diferencia quién comienza. Verás que si "Horizontal" comienza, el juego se vuelve bastante aburrido, porque "Vertical" no tiene prácticamente ninguna posibilidad de impedir que "Horizontal" gane – por lo menos si "Horizontal" comienza de la manera correcta. ¡Analízalo!

Unidad 74: Ajedrez

Problema 1 – Laberinto para torres: La torre puede llegar en cuatro movimientos. ¿Encuentras por dónde?

Problema 2 – Laberinto para alfiles: El alfil puede llegar en tres movimientos. ¿Encuentras por dónde?

Problema 3: Alfiles contra torres – Para pensar: Los movimientos de la torre y del alfil tienen el mismo alcance, así que podríamos pensar que ambos son igual de "fuertes". Pero hemos visto que un alfil está limitado a los cuadros de un único color; a los otros no puede llegar nunca. Una torre, en cambio, puede llegar a cuadros blancos y negros por igual. Por eso, la torre es más "fuerte" que el alfil.

Problema 4: Un problema de damas: ¿Cuál es forma de acercar dos damas lo más cercano posible, sin que se puedan capturar mutuamente? Intenta repetir esta constelación por todo el tablero, tantas veces como puedes. Así debes poder llegar a una solución. – O inténtalo primero con 4 damas en un tablero de 4 x 4. Si logras resolver eso, intenta "ampliar" esta solución para un tablero de 8 x 8.

Problemas de caballos: Estos son los números mínimos de movimientos necesarios en cada problema. Pero tú mismo tendrás que descubrir por dónde es el camino:
Problema 5: 3 movimientos
Problema 6: 4 movimientos
Problema 7: 4 movimientos
Problema 8: 6 movimientos

Problema 9: El rey blanco ya está controlando los cuadros b7, c7 y d7. Para hacer jaque mate, la dama tiene que ir a un lugar de donde controla la entera fila 8. Pero no sirve ir a d8, porque allí el rey negro la va a capturar. ¿A dónde más puede ir la dama para controlar la fila 8?

Problema 10: Aquí no podemos hacer lo mismo como en la situación anterior: Si la dama va a la columna a (por ejemplo a a2), el rey puede escapar a b5. Pero la dama puede dar jaque desde b6, y así controla todos los cuadros de escape. El rey negro no puede capturarla allí, porque la dama está protegida por su rey.

Problema 11: ¿Recuerdas el jaque mate con dos torres? Ya lo hemos visto arriba. Una de las torres tiene que dar jaque desde la columna a. ¿Cuál de las dos torres tiene que hacer eso para que sea jaque mate?

Problema 12: La dama tiene muchos cuadros de donde puede poner al rey en jaque. Pero para que sea jaque mate, tienen que cumplirse dos condiciones: Se deben controlar todos los cuadros de escape del rey; y el rey no debe poder capturar a la dama. ¿Cuál de los cuadros posibles cumple estas condiciones?

Problema 13: Una situación muy similar a la última. No sirve dar jaque con el caballo, porque al rey le quedarán diversos cuadros para escapar. ¿Cuál es la utilidad del caballo aquí?

Problema 14: Si el peón c3 avanza, el rey está en jaque, pero puede escapar a c1. En cambio, ¿qué pasa si el otro peón avanza? (¿Qué sucede con un peón que llega al final de su camino?)

Problema 15: Esta clase de jaque mate ya hemos visto. Basta que la dama controle la fila 1, y el rey ya no puede escapar.

Problema 16: ¡Esta situación es diferente de la anterior! Si la dama va a d1, la torre la va a capturar. Pero aquí los negros tienen adicionalmente un alfil. ¿Qué puede contribuir este alfil al jaque mate?

Ampliaciones - Protección mutua: Evaluando unas cuantas posibilidades para el movimiento de Blanco:

La dama blanca puede moverse a un costado, para evitar ser capturada. Pero ella se encuentra ahora en una posición ventajosa, y no es aconsejable abandonar esta posición.

Otras posibilidades son Cd2 o Cg5. Así el cuadro e4 tiene una protección adicional: por el segundo caballo, y además por el Ag2 (!). Eso permite que el peón d3 quede en su sitio, y en su lugar puede un caballo, o el alfil, "vengar" al peón e4 capturado. Si el caballo negro captura esa pieza, será a su vez capturado. Es ventajoso para Blanco que al final quede uno de sus caballos en e4, porque eso permitirá atacar enseguida al Ac5; y quizás incluso al desprotegido Ab7.

Blanco podría también lanzar un contraataque; por ejemplo Axc5 (pero perderá a su propio alfil también). O podría realizar alguna otra maniobra, por ejemplo Ag5. Eso impedirá que el Cf6 se mueva; porque si se mueve, Negro perderá su dama. Entonces si Negro captura e4, Blanco puede sin peligro capturar al peón negro con su caballo.

Eso fue solamente una muy pequeña muestra de las inmensas posibilidades que tiene el juego de ajedrez.

¿Cuál pieza vale más?

Problema 17: Negro debe capturar el caballo blanco con su *alfil*. De otro modo perderá el alfil también, porque está desprotegido y será capturado por la Te1.

Problema 18: Negro podría avanzar con el peón h7. De esta manera, si el rey está puesto en jaque desde la fila 8, tiene todavía un cuadro adonde escapar. Sin embargo, Blanco tiene una gran ventaja en esta posición, y es improbable que Negro pueda evitar definitivamente su derrota.
Para seguir pensando: ¿Por qué no debe avanzar Negro con el peón g7? ¿Qué haría Blanco en este caso?

Problemas adicionales

Blanco logra jaque mate:

Problema 19: Ce7++ (sin más comentario.)

Problema 20: El rey blanco ya controla los cuadros c4, d4, e4. Solamente hay que impedir que el rey negro escape hacia arriba o hacia los costados. ¿Cuál pieza puede lograr eso?

Problema 21: Hay una sola pieza que está en la capacidad de poner al rey en jaque con un único movimiento. Solamente tienes que descubrir *a dónde* debe moverse esa pieza.

Problema 22: ¿No hay pieza que puede dar jaque? Pues sí hay una ... si le liberas el camino. Y la pieza que se quita del camino, tiene que ir a un lugar particular para quitarle al rey negro los restantes cuadros de escape que le quedan.

Negro logra jaque mate:

Problema 23: La función del caballo no es dar el jaque; es proteger a la pieza que da el jaque.

Problema 24: Aquí no sirve coronar el peón: aun si lo conviertes en dama, el rey negro podrá escapar a e2. ¿Para qué otra cosa podría servir ese peón? ¿y la dama que ya tienes?

Problema 25: Ese peón d6 impide que el Aa7 ponga al rey en jaque. Aquí sí necesitamos coronar el (otro) peón – ¿y en qué debe convertirse?

Problema 26: La dama no puede poner al rey en jaque mate: En cualquiera de las posiciones será capturada por la torre blanca, o por el rey mismo. ¿Qué otra posibilidad hay para poner al rey en jaque?

Problema 27: Negro tiene que comenzar con Ag5+. De esta manera, el rey no puede escapar a la derecha, y tampoco puede el alfil blanco interponerse. Sólo queda 2. Rb1, o Rb2. En el primer caso sigue 2. ... Da2++, en el segundo caso 2. ... Db3++.

Problema 28: El arte consiste en acorralar al rey sin ahogarlo. Para el jaque mate, el rey blanco tiene que ayudar a su dama. Por tanto, primero tiene que acercarse más a su oponente: 1. Rf6. Ahora, el rey negro tiene dos cuadros adónde ir. ¿Encuentras el jaque mate para ambos?

Problema 29: Parece que las negras pueden capturar a toda figura blanca que intente poner al rey en jaque. Pero hay una posibilidad de lograr que en la *segunda* jugada, las negras ya no puedan impedirlo. ¿La encuentras?
- Por si sigues sin encontrar una solución, una pauta más: La dama tiene que sacrificarse, sin poder capturar ninguna pieza negra a cambio. Eso es uno de los momentos más "heroicos" del ajedrez, cuando la dama entrega su vida para lograr la victoria de su rey.

Problema 30: Como en el Problema 28, primero el rey negro tiene que acercarse a su oponente. Entonces el rey blanco solamente puede refugiarse en el rincón; o el caballo puede saltar a uno de cuatro cuadros posibles. ¿Encuentras un jaque mate para cada una de estas posibilidades? (De hecho, en algunos casos hay dos soluciones posibles para ese segundo movimiento.) – Si no lo logras, entonces puede ser que el rey negro se fue al cuadro equivocado en la primera jugada.
- ¿Y cuál es la función del peón negro? Pues, está sólo de adorno. (¡No puede ir a la fila 8 a coronarse, porque los peones negros caminan en la dirección opuesta!)

Problema 31: Como coronación de tu primer entrenamiento en ajedrez, una situación más compleja que las anteriores. ¿La analizaste desde todos los ángulos?
Es un único pequeño peón que logrará la hazaña entera. Aunque en su primer movimiento no será él mismo que pone al rey en jaque. Por eso no les servirá a las negras capturar al peón: con eso no librarían a su rey del jaque. Entonces, al rey le queda un único cuadro donde refugiarse, y allí el peón lo va a rematar. ¿Encuentras cómo?
La moraleja: ¡No menosprecies a los pequeños!

Unidad 75: Razonar con números

Hoja de trabajo 75.1: Sudokus fáciles y de mediana dificultad – Soluciones

1)

2	4	6	5	1	8	3	9	7
1	5	9	3	2	7	4	8	6
3	7	8	6	4	9	1	2	5
7	9	1	4	5	2	8	6	3
8	6	3	7	9	1	2	5	4
4	2	5	8	3	6	7	1	9
5	1	4	2	6	3	9	7	8
9	3	7	1	8	5	6	4	2
6	8	2	9	7	4	5	3	1

2)

6	5	1	4	3	9	7	8	2
8	9	4	6	2	7	1	3	5
7	2	3	5	1	8	6	4	9
9	4	6	1	5	2	3	7	8
3	7	2	9	8	6	4	5	1
5	1	8	7	4	3	2	9	6
2	8	7	3	6	5	9	1	4
1	6	9	8	7	4	5	2	3
4	3	5	2	9	1	8	6	7

3)

3	6	7	8	2	4	9	1	5
2	5	4	6	9	1	8	3	7
9	8	1	3	5	7	4	2	6
6	9	3	7	8	2	5	4	1
1	7	8	4	3	5	6	9	2
4	2	5	1	6	9	3	7	8
7	1	6	5	4	3	2	8	9
8	3	2	9	7	6	1	5	4
5	4	9	2	1	8	7	6	3

4)

3	9	2	4	6	8	5	1	7
6	7	8	5	9	1	2	3	4
4	5	1	7	2	3	8	6	9
5	8	4	9	1	6	7	2	3
1	6	7	2	3	4	9	8	5
9	2	3	8	5	7	1	4	6
7	4	9	6	8	2	3	5	1
2	3	5	1	4	9	6	7	8
8	1	6	3	7	5	4	9	2

5)

5	2	6	9	1	7	3	4	8
4	3	9	5	8	6	2	1	7
8	7	1	2	3	4	5	6	9
7	5	2	8	4	3	6	9	1
6	8	3	1	5	9	7	2	4
9	1	4	7	6	2	8	5	3
1	4	5	6	7	8	9	3	2
3	9	8	4	2	5	1	7	6
2	6	7	3	9	1	4	8	5

6)

6	3	9	8	1	7	2	5	4
8	1	2	3	4	5	6	7	9
7	4	5	9	6	2	8	3	1
3	5	8	1	2	6	4	9	7
9	6	1	4	7	3	5	8	2
2	7	4	5	8	9	1	6	3
5	8	3	2	9	1	7	4	6
1	9	7	6	5	4	3	2	8
4	2	6	7	3	8	9	1	5

Hoja de trabajo 75.2: Sudokus difíciles – Soluciones

1)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	4	9	8	3	2	5	6	1
6	5	8	1	7	9	3	4	2
5	6	2	9	1	4	8	7	3
8	3	7	2	6	5	1	9	4
4	9	1	3	8	7	6	2	5
3	1	4	7	2	8	9	5	6
2	8	5	6	9	1	4	3	7
9	7	6	5	4	3	2	1	8

2)

4	1	2	8	3	9	6	7	5
8	9	5	6	4	7	2	3	1
6	3	7	2	5	1	9	4	8
5	4	8	9	6	3	1	2	7
7	2	3	4	1	8	5	6	9
1	6	9	7	2	5	3	8	4
2	8	4	5	9	6	7	1	3
9	7	1	3	8	2	4	5	6
3	5	6	1	7	4	8	9	2

3)

5	1	7	9	4	6	8	3	2
2	8	9	3	5	1	7	4	6
3	6	4	2	7	8	1	5	9
6	4	2	8	1	7	5	9	3
9	7	3	4	2	5	6	1	8
8	5	1	6	3	9	4	2	7
7	2	8	1	9	4	3	6	5
1	3	6	5	8	2	9	7	4
4	9	5	7	6	3	2	8	1

4)

9	3	6	4	1	7	8	5	2
4	8	1	5	2	9	6	3	7
2	5	7	8	3	6	1	4	9
6	9	8	7	4	2	5	1	3
1	2	3	9	5	8	7	6	4
7	4	5	1	6	3	2	9	8
5	1	9	2	7	4	3	8	6
3	7	4	6	8	1	9	2	5
8	6	2	3	9	5	4	7	1

5)

8	7	3	1	9	2	6	4	5
4	1	2	5	8	6	3	9	7
5	6	9	7	3	4	8	2	1
2	3	6	9	7	8	5	1	4
9	5	1	6	4	3	7	8	2
7	4	8	2	5	1	9	3	6
1	2	5	8	6	9	4	7	3
6	9	4	3	2	7	1	5	8
3	8	7	4	1	5	2	6	9

6)

6	7	4	1	2	3	8	9	5
5	2	9	8	7	4	6	1	3
8	1	3	9	6	5	2	4	7
1	9	7	4	5	8	3	6	2
2	8	6	3	1	7	4	5	9
3	4	5	2	9	6	1	7	8
7	6	8	5	4	2	9	3	1
9	5	2	6	3	1	7	8	4
4	3	1	7	8	9	5	2	6

Hoja de trabajo 75.3: Sudokus irregulares – Soluciones

1)

1	2	6	3	4	5
5	3	2	4	1	6
6	4	3	2	5	1
4	5	1	6	3	2
2	1	4	5	6	3
3	6	5	1	2	4

2)

1	2	3	5	7	4	6
4	3	2	1	6	7	5
6	7	5	2	1	3	4
7	5	6	4	3	2	1
3	6	1	7	4	5	2
5	4	7	6	2	1	3
2	1	4	3	5	6	7

3)

7	6	1	5	8	4	3	2
1	4	3	2	7	8	6	5
8	3	2	1	6	5	7	4
6	5	7	4	2	1	8	3
4	8	6	3	5	7	2	1
2	7	5	6	1	3	4	8
3	1	8	7	4	2	5	6
5	2	4	8	3	6	1	7

4)

3	1	8	5	7	4	2	6
4	7	5	6	2	8	3	1
6	2	4	7	8	5	1	3
2	4	3	1	5	6	8	7
1	3	2	8	6	7	4	5
7	6	1	3	4	2	5	8
8	5	7	4	1	3	6	2
5	8	6	2	3	1	7	4

5)

7	6	5	8	1	2	4	9	3
1	4	9	5	7	6	3	2	8
8	7	2	3	4	9	5	1	6
9	2	8	1	3	5	6	7	4
5	3	1	2	6	4	9	8	7
6	5	4	9	8	7	2	3	1
4	1	7	6	9	3	8	5	2
2	8	3	4	5	1	7	6	9
3	9	6	7	2	8	1	4	5

6)

1	9	5	10	8	7	4	2	6	3
3	2	9	7	6	1	8	10	4	5
5	8	3	6	10	4	1	9	2	7
7	6	8	4	9	2	5	3	10	1
10	4	2	1	5	3	6	7	8	9
2	10	1	8	7	6	9	5	3	4
6	3	10	9	4	8	7	1	5	2
9	7	4	2	3	5	10	8	1	6
4	1	7	5	2	10	3	6	9	8
8	5	6	3	1	9	2	4	7	10

Hoja de trabajo 75.4: Sudokus de sumas - Soluciones

1)

4	1	6	3	2	5
2	3	1	4	5	6
3	2	5	6	4	1
1	4	2	5	6	3
5	6	4	1	3	2
6	5	3	2	1	4

2)

4	6	5	7	3	1	2
6	5	7	2	4	3	1
1	4	6	5	7	2	3
2	1	3	4	6	7	5
5	3	4	1	2	6	7
3	7	2	6	1	5	4
7	2	1	3	5	4	6

3)

1	2	7	5	3	6	4
2	1	6	3	7	4	5
4	3	2	1	5	7	6
7	4	1	6	2	5	3
5	6	3	2	4	1	7
3	5	4	7	6	2	1
6	7	5	4	1	3	2

4)

6	5	4	1	2	3
2	4	3	5	6	1
1	3	6	4	5	2
3	6	5	2	1	4
4	1	2	6	3	5
5	2	1	3	4	6

*5)

3	4	5	2	1	6
2	1	3	5	6	4
4	2	1	6	5	3
1	5	6	4	3	2
6	3	2	1	4	5
5	6	4	3	2	1

*6)

7	5	4	3	1	2	6
5	2	6	4	3	1	7
6	7	5	2	4	3	1
1	4	3	6	2	7	5
3	1	7	5	6	4	2
2	3	1	7	5	6	4
4	6	2	1	7	5	3

Hoja de trabajo 75.5: Sudokus 3D, 4 x 4 x 4 - Soluciones

1)

4	3	1	2
1	2	4	3
2	1	3	4
3	4	2	1
1	2	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2
2	1	3	4
2	1	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
1	2	4	3
3	4	2	1
2	1	3	4
1	2	4	3
4	3	1	2

2)

1	4	2	3
3	2	1	4
2	3	4	1
4	1	3	2
2	3	4	1
1	4	3	2
4	1	2	3
3	2	1	4
3	2	1	4
4	1	2	3
1	4	3	2
2	3	4	1
4	1	3	2
2	3	4	1
3	2	1	4
1	4	2	3

3)

3	4	1	2
1	2	4	3
2	1	3	4
4	3	2	1
4	1	2	3
2	3	1	4
3	2	4	1
1	4	3	2
2	3	4	1
4	1	3	2
1	4	2	3
3	2	1	4
1	2	3	4
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	4	3

4)

1	2	4	3
4	3	1	2
3	1	2	4
2	4	3	1
4	3	1	2
1	2	4	3
2	4	3	1
3	1	2	4
3	1	2	4
2	4	3	1
1	2	4	3
4	3	1	2
2	4	3	1
3	1	2	4
4	3	1	2
1	2	4	3

Hoja de trabajo 75.6: Sudoku 3D, 6 x 6 x 6 - Solución

3	2	1	4	6	5
5	1	3	6	4	2
6	4	5	2	3	1
4	6	2	5	1	3
2	3	6	1	5	4
1	5	4	3	2	6
5	6	2	3	1	4
4	2	5	1	6	3
1	3	4	6	5	2
6	1	3	4	2	5
3	5	1	2	4	6
2	4	6	5	3	1
2	1	4	6	5	3
3	4	2	5	1	6
5	6	3	1	2	4
1	5	6	3	4	2
6	2	5	4	3	1
4	3	1	2	6	5
4	3	5	1	2	6
6	5	4	2	3	1
2	1	6	3	4	5
3	2	1	6	5	4
1	4	2	5	6	3
5	6	3	4	1	2
1	4	6	5	3	2
2	6	1	3	5	4
3	5	2	4	1	6
5	3	4	2	6	1
4	1	3	6	2	5
6	2	5	1	4	3
6	5	3	2	4	1
1	3	6	4	2	5
4	2	1	5	6	3
2	4	5	1	3	6
5	6	4	3	1	2
3	1	2	6	5	4

Hoja de trabajo 75.8: Kakuros difíciles – Soluciones

1)

	4	8	9	
1	3	4	2	7
2	1	6	4	8
4	2	7	1	9
	6	9	7	

2)

3	5	6	1	2
7	8	9	2	4
1	4		4	9
4	7	2	3	1
8	9	5	6	7

3)

				9	6	8				
			8	4	2	3	1			
		6	4		1		6	2		
	1	5		9	3	7		4	9	
2	4		4	7	5	8	9		3	4
7	5	9	3	8		3	5	8	2	1
1	3		1	2	3	4	7		1	5
	2	8		3	8	9		6	4	
		4	9		2		2	5		
			6	9	5	7	8			
				7	1	8				

4)

2	1	7	9	8
8		3	1	4
3	9	8	6	7
5	8	9		9
1	6	2	3	5

5)

		9	6		
		4	8		
2	8	3	1	9	6
1	5	2	3	6	4
		1	7		
		7	9		

(2 soluciones)

		9	6		
		4	8		
1	8	***2***	***3***	9	6
2	5	***3***	***1***	6	4
		1	7		
		7	9		

Hoja de trabajo 75.9: Kakuros difíciles – Soluciones

6)

		9	5		
	6	3	2	1	
2	5	7	4	3	1
5	9	8	7	6	3
	4	6	3	2	
		5	1		

7)

	4	9	5	7	6	8	1	
9	2		2	9	8		3	8
5		8	1	5	2	9		2
8	7	9		1		8	9	5
7	1	2	8	4	9	5	6	3
4	2	1		2		6	8	4
6		3	2	6	9	7		1
2	3		1	3	2		8	7
	2	9	3	8	6	7	4	

8)

	9	3	4	5	2	1		9	1	3	4
3	5	1		9		9	8	4	3	2	1
2	7		4	7	5	3	2	1		1	
8		8	6		8	7	1		3	9	8
1	2	5		9	7	2		6	5		5
6		9	4		1		4	1		3	9
7	9		3	2	6	1	7		9	1	3
5	1	4		3	9	7		6	3	2	1
	8	9	5	1		2	7	9	8	5	

Hoja de trabajo 75.11: MultipliKakuro – Soluciones

14)

1	8	5		5	3	9
5	3	6	4	2		5
3	1		1	7	3	
		6	7	3	2	

15)

2	5		6	2
9	3	7	1	4
4	6	1		
		9	2	4
9	3	4	6	5
4	6		8	2

(2 soluciones)

2	5		6	2
9	3	7	1	4
4	6	1		
		9	***8***	***1***
9	3	4	6	5
4	6		***2***	***8***

16)

2	8	6	4		7	8	2	5	4
1	2	3	5		4	9	6	3	2
5	6	7	9	8		4	1	7	3
6	4	1	3	2	5		4	2	1
7	5	9		1	8	4		9	7
4	1		3	4	2	1	5		6
3		2	4	5		2	1	7	9
	8	1	9	7		8	3	2	5

(2 soluciones)

2	8	6	4		7	8	2	5	4
1	2	3	5		4	9	6	3	2
5	6	7	9	8		4	1	7	3
6	4	1	3	2	5		4	2	1
7	5	9		***4***	8	***1***		9	7
4	1		3	***1***	2	***4***	5		6
3		2	4	5		2	1	7	9
	8	1	9	7		8	3	2	5

Hoja de trabajo 75.16 – Operaciones cruzadas 1:

A), B) y D) no necesitan pautas, porque hay suficientes datos para completar las operaciones una por una, empezando con aquellas que tienen dos números dados.

C) Para completar la primera fila hay una sola posibilidad para que ambos factores tengan una única cifra. Después se puede completar todo lo demás.

E) ¿No hay suficientes datos? – Pero *la cantidad de cifras* en cada número nos da pautas adicionales. Por ejemplo la suma en la segunda fila: Un número de tres cifras más un número de una cifra da 1007. Existen solamente dos posibilidades para una suma así. Puedes probar con ambas; o puedes razonar para descubrir de antemano cuál es la alternativa correcta:
Una de estas posibilidades se excluye, observando las otras operaciones: En la tercera fila, dos números de una cifra se suman y dan un número de dos cifras. Entonces, ninguno de estos números puede ser cero. Además, en la segunda columna (vertical) tenemos una resta de dos números de una cifra. Ya que el número de abajo no puede ser cero, los dos números que se restan no pueden ser iguales. Esto deja una sola posibilidad para el número del medio, y para la operación entera de la segunda columna. Después queda también para tercera fila una sola posibilidad, y así se puede completar todo.

F) Cero multiplicado por algo siempre da cero (la operación vertical en el medio). Si completamos eso, podemos seguir resolviendo las operaciones que quedan.

G) Después de completar la multiplicación en la columna izquierda, hay que buscar el mejor lugar para continuar. Para la primera y para la segunda fila hay dos posibilidades; pero solamente una de ellas permite completar la segunda columna correctamente.
– Alternativamente podemos completar primero la tercera fila: Existe una sola posibilidad de descomponer 600 en un factor de una cifra y un factor de dos cifras. (Piensa: Si el factor pequeño es 6 o menos, el factor grande llega a tener tres cifras. Por tanto, el factor pequeño tiene que ser mayor a 6. Pero solamente uno de esos es un divisor de 600.)

H) Aquí podemos razonar de manera similar a **E)** (y es incluso más fácil). Un buen lugar para empezar es la tercera columna: Un número de dos cifras más un número de tres cifras suman 110. Existe una sola posibilidad de completar eso.
Para completar la segunda columna hay dos posibilidades. Pero solamente con una de ellas se puede completar la tercera fila de tal manera que el número al inicio tenga dos cifras.

I) Si encontramos dónde comenzar, el problema estará prácticamente resuelto. Recomiendo que te fijes en el primer número, arriba a la izquierda. Este número es un divisor de 70 (la multiplicación horizontal), y también es un divisor de 168 (la multiplicación vertical). Entonces solamente necesitas calcular el MCD de 70 y 168, y ya lo tienes; porque los divisores comunes menores no tienen dos cifras.

J) El primer número (arriba a la izquierda) tiene que ser un múltiplo de 21. Verticalmente, este mismo número se divide de manera que el cociente es 7. ¿Qué podemos decir entonces acerca de este divisor en la operación vertical? (21 es 7 x 3. Entonces todos los múltiplos de 21 contienen el factor 3. Si los dividimos entre algo, y el cociente no contiene el factor 3, entonces este factor debe estar en el divisor.)
Miremos ahora la suma horizontal en el medio: A este divisor (al número a la izquierda en el medio) se suma 3, y el resultado tiene una sola cifra. Entonces este número no puede ser 9. Pero tiene que ser un múltiplo de 3, según el razonamiento anterior. Entonces quedan solamente dos posibilidades. Prueba con ambas, y descubrirás cuál es la correcta.

K) Observa la división vertical a la izquierda: 45 se divide entre un número con una única cifra, y el cociente también tiene una única cifra. Existe un único par de cifras que podemos usar aquí. Solamente nos falta saber en qué orden están: ¿cuál es el divisor, y cuál es el cociente? Prueba con ambas posibilidades.
Podemos limitar las posibilidades para los números que quedan: El número arriba a la derecha es el resultado de restar 45 menos un número de una única cifra. ¿Cuánto puede entonces este número ser como máximo, y como mínimo? – Observamos ahora la resta vertical a la derecha: De este número se resta algo, y el resultado es 12. ¿Cuál es entonces el mínimo y el máximo para este número a la derecha en el medio? – Pero si observamos la fila del medio, vemos que este número tiene que ser a la vez un múltiplo del número a la izquierda en el medio. Así ya no quedan muchas posibilidades para probar.

Hoja de trabajo 75.17 – Operaciones cruzadas 2:

A) ¿Dónde se puede comenzar? – Fíjate en la división de la tercera columna (vertical, a la derecha): Hay una sola manera de descomponer 144 en dos factores, de manera que ambos tengan dos cifras.
Ahora, para descomponer 250 de esta manera hay también una sola factorización; pero todavía no conocemos el orden de los factores. Pero solamente una de las posibilidades permite completar la suma de la segunda fila.

B) En algún lugar tenemos un divisor común de 420 y 189. (¿Dónde?) Si lo encuentras, la continuación ya no es difícil.

C) Fíjate en el número abajo a la derecha: ¿Cuánto puede ser este número al máximo? (Si le restamos 98, el resultado tiene una única cifra ...) – Además es un múltiplo de 20 (la multiplicación vertical en la primera columna). ¿Ahora sabes cuánto es este número?

D) Aquí tenemos que hacer unos razonamientos bastante complejos, tomando en cuenta varias operaciones a la vez; y así podemos limitar las posibilidades que tenemos que probar. Observemos primero las tres multiplicaciones horizontales: Cada vez se multiplican dos números de una cifra, y el resultado tiene dos cifras. Por eso, ninguno de estos números puede ser 0 ni 1, porque en este caso el resultado tendría una única cifra.
Miremos ahora el número abajo a la derecha: Es el resultado de sumar 12 más un número de dos cifras. Entonces este número es por lo menos 22. Pero este número es a la vez el producto de dos factores de una única cifra (la multiplicación horizontal abajo). Entonces, ninguno de estos factores puede ser 2, porque tendríamos que multiplicarlo con un número mayor a 10.
Ahora consideramos la división vertical en el medio. Sabemos ahora que el divisor es por lo menos 2, y el cociente es por lo menos 3. Con eso ya no quedan muchas posibilidades: 6 ÷ 2 = 3, 8 ÷ 2 = 4, 9 ÷ 3 = 3. Prueba con estas posibilidades y haz elecciones sabias para los números que quedan; así descubrirás cuál es la correcta.

E) El mejor lugar para empezar es la multiplicación vertical en el medio que da 39. No puede ser 1 x 39, por la división horizontal en la primera fila. Entonces queda una sola posibilidad para completar esta multiplicación. Después, una estrategia posible consiste en buscar límites mínimos y máximos para los números que quedan. Por ejemplo: El número abajo a la derecha no puede ser mayor a 99, porque tiene dos cifras. Entonces, ¿cuán grande puede ser el número abajo a la izquierda, al máximo? – El número arriba a la izquierda es el producto del número arriba en el medio (que ya conocemos), por un número de una única cifra. (Leyendo la división al revés.) Entonces, ¿cuál es el valor máximo que este número puede asumir? ¿Y cuál es el valor mínimo del cociente arriba a la derecha, considerando que el dividendo tiene dos cifras?
Continuando así, podemos también establecer límites para los números de la fila del medio, y con eso quizás establecer límites más precisos para los otros números, y así poco a poco limitar las posibilidades que tenemos que probar. Por ejemplo, ¿cuál es el valor *mínimo* posible para el número abajo a la derecha? (considerando que es el resultado de dos sumas consecutivas, primero la vertical a la izquierda, y después la horizontal abajo que contiene el número 39.) Además, el número a la izquierda en el medio no puede ser menor a 23 (¿por qué?), lo cual levanta el límite mínimo aun más.
Aun así quedarán todavía bastantes posibilidades para explorar con perseverancia. Es que ya estamos entrando a los problemas "avanzados" de esta serie.

F) Aquí son dos observaciones claves que pueden llevarnos rápidamente a la solución. La primera es que 144 es un múltiplo de 16. Encima del 144 tenemos también un múltiplo de 16 (porque este número se divide entre "algo", y el cociente es 16). Recordarás que la suma de dos múltiplos del mismo número resulta en otro múltiplo del mismo número. Entonces abajo a la

izquierda tenemos también un múltiplo de 16. Y abajo a la derecha tenemos también un múltiplo de 16, porque es el producto de multiplicar 16 por algo. Por tanto, el número abajo en el medio también tiene que ser un múltiplo de 16.
Ahora viene la segunda observación clave: Este número abajo en el medio es la suma de dos números de una única cifra. O sea, no puede ser mayor a 18. ¿Cuál es entonces este número?
Esto deja muy pocas posibilidades para esos números de una única cifra; sobre todo si tomamos en cuenta que el segundo de ellos tiene que ser un divisor de 144. Prueba con estas posibilidades hasta que encuentres la correcta.

G) Aquí es recomendable comenzar con la factorización de 290 (la multiplicación de la tercera fila). Después tendrás que probar de manera inteligente cómo puedes completar la primera y la tercera columna.

H) El número arriba en el medio es un múltiplo de 15. No hay muchas posibilidades para eso.
Podemos además establecer límites para algunos números, como lo hemos hecho en el problema E): El número a la derecha en el medio es por lo menos 25, porque es la suma de 15 más un número de dos cifras. Por el mismo razonamiento, el número arriba a la derecha es por lo menos 35. Entonces, ¿cuál es el valor máximo posible para nuestro múltiplo de 15? Ahora ya no quedan muchas posibilidades para probar.
Una vez que has elegido un múltiplo de 15, otro número con posibilidades bastante limitadas es el de la izquierda abajo. Observa lo que sucede con los otros números mientras haces cambios allí, para acercarte a la solución correcta.

I) Parece increíble, pero aun este problema que no tiene ningún número dado, tiene una única solución correcta.
El número de tres cifras abajo a la derecha no puede ser muy grande, porque es la suma de dos números de dos cifras. Además, el segundo de estos números es la suma de dos números de una única cifra. Entonces, ese número de tres cifras no puede ser mayor a ¿cuánto?
Pero este número de tres cifras es a la vez el producto de dos números de dos cifras (la multiplicación vertical a la derecha). Ahora quedan muy pocas posibilidades para estos dos factores. Y así también las posibilidades para la división horizontal en el medio son ahora muy limitadas. Aun así necesitarás perseverancia para probar diversas posibilidades; pero ya no son tantas como parecía al inicio.

Hoja de trabajo 75.18: Operaciones incompletas 1

a), b) Aquí se pueden simplemente completar las cifras necesarias para que resulte la suma dada. No debe ser difícil porque no ocurren canjes.

c), d) Aquí hay que tomar en cuenta los canjes. Si por ejemplo en las unidades 6 + _ = 2, eso no es posible, excepto si la suma produjo adicionalmente una decena. Esto significa que tenemos que empezar con resolver por el lado de las unidades; y cuando llegamos a las decenas, tenemos que tomar en cuenta que hemos "llevado" una decena adicional.

e), f), g) Se pueden resolver de manera similar como **c)** y **d)**, tomando en cuenta los canjes. Si te parece difícil hacerlo "restando", recuerda que puedes también aplicar la operación inversa, como lo haces en la comprobación de resultados.
Acerca de **f)**: Si el resultado tiene solamente tres cifras, ¿cuántos millares tiene que haber en la segunda línea?

***h)** La clave para este problema está en lo que sucede con los millares: De un número 79_1 restamos un número de tres cifras (o sea, menor a 1000), y el resultado tiene solamente 6 millares. Entonces, ¿cuánto tenemos que restar como mínimo? Hay una sola solución que produce un resultado menor a 7000. (Recuerda que no puedes añadir cifras donde no hay puntos. Entonces no es permitido escribir un millar en la segunda línea.)

i), j), k) Aquí hay que conocer bien las tablas de multiplicación. Unos ejemplos de razonamientos que se pueden hacer:

En **i)** podemos multiplicar directamente las unidades, y con eso sabemos cuántas decenas estamos "llevando". Si el producto tiene 7 decenas, ¿cuántas decenas había allí antes de sumar lo que "llevamos"? Con esa cifra termina la multiplicación de las decenas. ¿Cuál múltiplo de 9 comienza con esa cifra? Con eso puedes descubrir cuántas decenas hay en la primera línea, y también sabes cuántas centenas estamos "llevando". – Ahora no sabemos las centenas, pero vemos que el producto tiene 5 millares. Las centenas multiplicadas por 9, más las centenas que hemos "llevado", deben dar un número que comienza con 5, o sea un número de 50 a 59. Hay una sola posibilidad para las centenas que cumple con esta condición.

En **j)** puedes hacer lo mismo. Las unidades multiplicadas por 3 dan un número que termina con 4. Entonces ¿cuántas unidades hay? – Etc...

Y de manera similar se puede resolver también el problema **k)**.

***l)** Ahora la dificultad aumenta un poco. Podemos multiplicar directamente las unidades, pero después no sabemos ni las decenas ni las centenas del primer factor. Para poder continuar, tenemos que saltar a las centenas: Las centenas multiplicadas por 8, más las centenas que se "llevan", dan 59. Entonces ¿cuántas centenas hay? ¿y cuántas centenas hemos "llevado" del canje de las decenas? – Ahora, sabiendo este número que "llevamos", podrás también completar las decenas.

m) Usa razonamientos similares a los anteriores. Para las decenas parece haber dos posibilidades, porque hay dos números de la tabla del 6 que terminan con la misma cifra. Sin embargo, cuando avanzas a las centenas, verás que solamente una de estas dos posibilidades permite que el resultado tenga 2 centenas. (Recuerda que 6 es un número par, entonces todos sus múltiplos también son números pares.)

Finalmente hay que conseguir que el resultado tenga 5 cifras, o sea, tiene que ser mayor a 10'000.

n) Aquí hay que tomar en cuenta que el resultado tiene cuatro cifras, o sea, es menor a 10'000. Sin embargo, el primer factor tiene por lo menos un millar, porque el número no puede comenzar con cero. Con eso queda una sola posibilidad para las centenas.

ñ) Aquí tenemos la misma dificultad como en **m)**: Siempre hay dos múltiplos de 4 que terminan con la cifra deseada. Pero si observas lo que sucede con las centenas, verás que una sola combinación de decenas y unidades permite que el resultado tenga 3 centenas. ¡Prueba!
Los millares puedes completar si tomas en cuenta que el resultado tiene 4 cifras, o sea, es menor a 10'000.

o) ¿Cuántos millares puede tener el resultado como máximo, si el primer factor es menor a 1000? – Con esto puedes completar el producto; y de allí puedes calcular "de regreso" para descubrir el primer factor.

p) Los millares y centenas del dividendo podemos completar inmediatamente: Les restamos un número con una única cifra. Este número tiene que ser un múltiplo de 7. ¿Qué número es entonces? ¿Y cuántas centenas tiene entonces el cociente? – El resultado de la resta es 5, entonces puedes calcular también cuántas centenas hay en el dividendo.

Pasamos ahora a las unidades. O sea, comenzamos "desde la cola". Tenemos una división entre 7, el cociente termina con 9, y no hay residuo. Entonces, ¿con qué cifra debe terminar el dividendo? ¿Y cuál es el número que restamos en la última resta del cálculo? (Piensa en lo que calcularías si hicieras la *comprobación* de esta operación.)
Esta resta ya puedes completar, porque sabes que su resultado es cero.
Ahora puedes pasar a la segunda resta (donde dividimos las decenas). Acabas de escribir el resultado de esa resta, al completar la última. ¿Cuál múltiplo de 7 podemos restar de un número que comienza con 5, para que dé este resultado? ¿Cuál es entonces este número que comienza con 5? – Con eso sabes la cifra de las decenas del dividendo, porque esa es la cifra que hemos "bajado" aquí.

q) Aquí tenemos que empezar con las unidades. Hay un residuo de 4; este residuo debe aparecer también al final del cálculo. Con eso podemos completar la última resta (la de las unidades). Pero con eso sabemos también entre cuánto estamos dividiendo, porque el cociente termina con 1.
Ahora podemos pasar a las decenas: ¿Cuál múltiplo de nuestro divisor comienza con 3? – Con esto podemos completar la resta de las decenas, porque ya sabemos su resultado.
Por último exploramos las centenas y los millares. Ya debes tener ahora suficiente práctica para completar eso sin ayuda.

r) Usa razonamientos similares a los que aplicamos en **q)** y **r)**. El divisor puedes descubrir cuando tomas en cuenta que el dividendo es menor a 1000, y el cociente es mayor a 400. ¿Entre cuánto estamos entonces dividiendo?
Observa otra curiosidad: La última resta da 0 como resultado, pero comienza con un número de tres cifras. ¿Cómo es posible eso? ¿Cuántas decenas tiene entonces el cociente? – Con eso ya debes poder ahora completarlo todo.

Hoja de trabajo 75.19: Operaciones incompletas 2

a), b), c) Estos se pueden completar de manera igual como las sumas de la hoja anterior, empezando por las unidades y siempre tomando en cuenta los canjes.
Excepto que en **c)** tenemos que pensar primero cuántos millares hemos "llevado", para poder completar las centenas; y de allí vamos a saber cuántas centenas hemos "llevado", y eso nos permite llenar las decenas.

***d)** ¡No te asustes por la estrellita! Una vez que entiendes la idea clave, va a ser fácil: ¿Cómo es posible que los 4 millares del primer sumando se conviertan en 6 millares en el resultado, si ninguno de los otros sumandos tiene millares? Piensa ... y después lo vas a poder resolver rápidamente.

e), f), g), h) En todos estos tenemos que descubrir el segundo factor. Pero siempre hay alguna propiedad que permite descubrirlo:
En **e)** tenemos arriba un número desconocido de millares, más 6 centenas. ¿Con cuánto podemos multiplicar eso para que resulten 33 centenas? Hay una sola posibilidad.
En **f)** multiplicamos 4 por algo, y el resultado termina con 8. Hay dos posibilidades para eso; pero solamente con una de ellas es posible que el resultado tenga 7 decenas.
En **g)**, el primer factor tiene 3 cifras. ¿Con qué número tenemos que multiplicarlo para que resulten más que 7000 ? – Hay más que una posibilidad; pero solamente una de ellas permite que el resultado termine con 5.
h) ¿Con cuánto podemos multiplicar un número entre 300 y 400, para que el resultado tenga 25 centenas? – Hay más que una posibilidad; pero como en el problema anterior, solo una de ellas permite que el resultado termine con 5.

***i)** ¿Qué propiedades debe tener un número con 8 centenas, para que multiplicando con 9 resulte un número mayor a 8000?

***j)** ¿Con qué número (de 1 a 9) se puede multiplicar un número que termina con 5, para que el resultado termine con tres ceros? Hay un solo número con esta propiedad, y si lo descubres, el problema está prácticamente resuelto. Si no lo descubres, inténtalo con la operación inversa...

***k)** No hay muchas multiplicaciones que terminan con 3. Sólo con una de ellas obtienes 7 decenas en el resultado. Prueba...

***l)** ¿En las cifras de unidades, cuáles combinaciones son posibles para que el resultado termine en 0? – Quizás tendrás que probar varias de estas combinaciones hasta que encuentres la que funciona. Con perseverancia llegas a la meta.

***m)** Poco a poco estamos llegando a los problemas para expertos ...

Recomiendo que te fijes primero en la segunda resta. Allí estamos restando un número de dos cifras que comienza con 8. Recuerda que este número debe ser el producto de dos números menores a 10: el divisor multiplicado por la cifra de las decenas del cociente. Existe un solo número así. Con eso sabes el divisor, y las decenas del cociente, y puedes completar la segunda resta. – ¿No? ¿No sabes el resultado de la segunda resta? Observa entonces la última resta: Un número de dos cifras menos un número de una cifra da cero. ¿Ahora sabes el resultado de la segunda resta?
Lo demás debes poder completar por ti mismo, porque si has llegado hasta acá, ya eres casi experto.

***n)** Admito que este problema es difícil. Ya lo habrás observado detenidamente. Lo único que puedes rellenar inmediatamente son los millares del dividendo: En la primera resta restamos solamente centenas, ningún millar; y sin embargo los millares desaparecen. ¿Cuántos millares hubo entonces al inicio?
- Bien, con el mismo razonamiento puedes rellenar la primera cifra de la segunda resta: Aquí también restamos un número de dos cifras menos un número de una cifra, y el resultado tiene una única cifra. Y esa primera cifra no puede ser cero – ¿por qué no?
Ahora viene el razonamiento clave; y para eso tengo que descubrir las respuestas a los razonamientos anteriores: La segunda resta tiene que comenzar con 1, porque con cualquier cifra mayor, su resultado sería mayor a 10. O sea, el residuo de las centenas es 1. Pero eso es posible solamente si la primera resta fue: 10 – 9 = 1. No hay otra manera de restar un número de dos cifras menos un número de una cifra y obtener un resultado de 1.
Estas 9 centenas que restamos aquí, tienen que ser el producto de multiplicar el divisor por las centenas del cociente. O sea, 9 es un múltiplo del divisor. Entonces el divisor tiene que ser 1, 3, ó 9. Pero no puede ser 1, porque es obvio que no estamos dividiendo entre 1. El divisor tiene que ser 3 ó 9.
Ahora puedes intentar completar la división con un divisor de 3, o con un divisor de 9. Encontrarás que funciona de ambas maneras. O sea, este problema tiene dos soluciones correctas. ¡No todos los problemas tienen una única solución!

***ñ)** Otro problema para especialistas. Aquí no podemos empezar con las unidades, porque no sabemos ni el divisor ni el residuo. Llegaremos más rápidamente a la solución si examinamos lo que sucede con los millares.

Observando la segunda resta, vemos que el residuo de los millares debe ser 0 ó 1, por el mismo razonamiento como en el problema **m)**. Exploramos ambas posibilidades:

Si es cero, entonces hemos restado 7 millares, y el divisor debe ser 7. Pero mirando las centenas, vemos que 3 multiplicado por el divisor debe dar un número de una única cifra. Entonces esta posibilidad queda descartada: el divisor no puede ser mayor a 3.

Entonces el residuo de los millares es 1; hemos restado 6 millares; y el divisor es 2 ó 3.

Miramos ahora la segunda resta, donde repartimos las centenas. Tenemos 10-y-tantas centenas para repartir. Si el divisor fuera 2, podríamos repartir 10 centenas (o más), y entonces estaríamos restando aquí un número de dos cifras, y el cociente tendría 5 o más centenas, pero sabemos que tiene 3. Por tanto, el divisor tiene que ser 3.

Con esta ayuda debes poder completar lo que falta. Usa las destrezas que has adquirido al resolver los problemas anteriores.

Hoja de trabajo 75.20: Operaciones incompletas 3

a) El segundo factor se puede completar, usando las cifras de unidades en los productos parciales: El primer producto parcial termina con 5. ¿Con cuánto hemos multiplicado entonces el 7 para obtener este número? Eso nos da las unidades del segundo factor.
De la misma manera podemos completar las decenas del segundo factor, viendo que el segundo producto parcial termina con 1.
Ahora, para encontrar las decenas del primer factor, podemos observar *cuántas cifras* tienen los productos parciales. El primer producto parcial tiene 3 cifras, o sea, es mayor a 100. El segundo producto parcial es menor a 100. Eso funciona solamente con un único número de decenas en el primer factor. Si lo encuentras, puedes completar todo.

b) Compara el primer factor con el segundo producto parcial: Un número de dos cifras que comienza con 7, se multiplicó, y el resultado sigue menor a 100. ¿Con cuánto se multiplicó entonces? Así conoces las decenas del segundo factor. Ahora, este producto parcial termina con 7. Con eso sabes también las unidades del primer factor, y ahora puedes completar todo.

c) Las unidades del resultado final son a la vez las unidades del primer producto parcial. Pero este es el resultado de multiplicar 1 por las unidades del segundo factor; entonces sabes esa cifra también. Ahora, sabiendo que este producto parcial comienza con 6, puedes completar también las decenas del primer factor. Lo demás es fácil, si has entendido los problemas **a)** y **b)**.

d) Puedes descubrir las unidades del segundo factor como en **c)**. Solamente que ahora hay dos posibilidades. ¿Cuál es la correcta? Lo puedes descubrir si comparas el tamaño del primer factor con el tamaño del primer producto parcial.
Lo demás debes ahora poder descubrir sin ayuda, porque ya eres casi experto, y los razonamientos son similares a los que usamos en los problemas anteriores.

e) Si el producto final termina con cuatro ceros, ¿qué factores primos tiene? ¿Cómo podemos repartir estos

factores primos entre los dos factores de nuestra multiplicación? (Nota además que el segundo factor no puede terminar con cero, porque el primer producto parcial tiene 4 cifras.)
Si has entendido esto, solamente te queda probar unas cuantas posibilidades, hasta encontrar la que coincide.

f) ¿Qué condiciones tienen que cumplirse para que el primer producto parcial pueda comenzar con 8? Eso no deja muchas posibilidades para los millares del primer factor, y para las unidades del segundo factor.
¿Cuáles son las primeras dos cifras del segundo producto parcial? (menos un posible canje...) – Eso te da una pauta acerca de la proporción entre las dos cifras del segundo factor.

g) Fíjate en el segundo producto parcial: El primer factor (de 3 cifras), multiplicado por 2, da un resultado de 4 cifras. ¿Cuánto puede este producto ser, a lo máximo?
Los otros productos parciales tienen solamente 3 cifras. ¿Con cuánto se multiplicó entonces el primer factor en estos casos? – Eso te permite completar el segundo factor.
Ahora fíjate en el resultado final. Tiene una cifra adicional a la izquierda. ¿Cuánto tiene que ser el primer factor, a lo mínimo, para que el resultado salga tan grande?

***h)** Conocemos las cifras finales (unidades) de todos los productos parciales. ¿Qué puedes concluir desde allí acerca de las cifras de los factores?
Especialmente el 5 nos da unas pautas importantes. Ese producto parcial tiene 4 cifras (no 5). ¿Cuánto puede ser el primer factor, al máximo, para que este producto sea menor a 10'000?

***i)** Aplicando la operación inversa, puedes completar la última resta en el cálculo. (¿Cuántas decenas tiene el divisor, si al multiplicarlo por 6 resulta un número de dos cifras?)
Ahora, si conoces el divisor, puedes completar también la segunda resta, porque allí tenemos un producto de tres cifras. Y con eso ya está casi todo resuelto.

***j)** Observa la última resta: 9 por un número de dos cifras da un número de dos cifras. ¿Qué concluyes?
Ahora observa las otras restas. Allí tenemos cada vez un número de tres cifras menos un número de dos cifras, y el resultado tiene una única cifra. Conociendo el divisor, ¿puedes ahora completar estas restas?

***k)** El lugar obvio para comenzar es la segunda resta: De un número de tres cifras restamos un número de dos cifras que termina con 1, y el resultado tiene una única cifra. ¿Cuánto tiene que ser entonces este resultado? ¿Puedes completar esta resta?
Ahora que sabes cuánto hemos restado aquí, no quedan muchas posibilidades para el divisor, porque este número no tiene muchos factores. Para estar seguros, observamos lo que pasa con nuestro resido al continuar el cálculo: Bajamos una cifra y todavía no podemos dividir. ¿Cuánto es entonces el divisor? ¿y cuál tiene que ser la cifra que hemos bajado? – Con esto puedes saber también cuál es el producto que restamos en esta tercera resta.
Sigue con razonamientos similares, completando el cálculo "hacia arriba" y "hacia abajo".

***l)** El residuo es 133. Eso nos da un límite mínimo para el divisor. Además, el divisor multiplicado por 7 da un número de 3 cifras (segunda resta). Eso nos da un límite máximo para el divisor. Finalmente, la última cifra que hemos bajado es 2. Eso nos permite completar las unidades de la última resta, y así tenemos una pauta adicional acerca del divisor. Quedan todavía algunas posibilidades para probar...

***m)** En la primera resta, ¿con cuánto se multiplicó el divisor, para que el producto termine con 8?
Segunda resta: Un número de la forma 3_7_ es un múltiplo de un número de la forma 3_4. No hay muchas posibilidades para eso.
Al final se restó un número que termina con 6. ¿Con cuánto se multiplicó el divisor esta vez? (Aquí hay dos posibilidades, pero ya descubrirás cuál es la correcta.)

***n)** Observando las restas, vemos que las decenas del cociente son cero. El dividendo es entonces el producto de un número de la forma _00_ por un número de la forma _0_. Investiga lo que sucede con las cifras en una multiplicación de esta forma. ¿Cuáles tienen que ser esas cifras, para que el producto tenga un 8 y un 5 en los lugares indicados?

Hoja de trabajo 75.21: Crucinúmeros fáciles y medianos

Estos crucinúmeros no necesitan muchas pautas, porque cada uno de ellos tiene varios números que se pueden calcular directamente. Una vez que esos están calculados, los restantes se pueden completar fácilmente.

2) Comienza con D, E y F, entonces ya tienes todo completo y necesitas A, B y C solamente para comprobar si todo está correcto.

3) Si comienzas con E, puedes enseguida calcular A y C.

4) Aquí puede ser una dificultad encontrar la última cifra abajo a la derecha: Solamente sabemos que C es la diferencia entre B y F, y acerca de F no sabemos nada que nos ayudaría. Pero si todas las otras cifras están en su lugar, entonces hay una única posibilidad para la última cifra que cumple la condición. Puedes probar una por una, o puedes razonar matemáticamente. (Quizás el razonamiento es más fácil si usas la operación inversa: B es la *suma* de C y F.)

5) Si has calculado C, D y F, entonces puedes también calcular B. Para la última cifra que falta hay sólo dos posibilidades, ya que A es mayor a D. ¿Para cuál de estas posibilidades se cumple que E es un múltiplo de 16?

6) Aquí podemos calcular solamente B y D directamente. Ahora hay varios caminos posibles para continuar:

- Si te gusta factorizar, continúa con C. Encontrarás dos posibilidades para C, pero solamente una de ellas cumple con las demás condiciones.

- Alternativamente puedes examinar E y A. Para que E sea antecesor de A, su cifra de centenas tiene que ser igual a la de A. Si además A es la suma de B y F, podemos calcular también las centenas de F. Ahora, si F es un múltiplo de 101, ¿cuántas unidades debe tener?

Hoja de trabajo 75.22: Crucinúmeros difíciles

Para todos los crucinúmeros de esta serie:
Estos todavía no son "muy" difíciles, porque cada crucinúmero contiene un número que se puede calcular directamente. Primero hay que encontrar ese número; desde allí se pueden poco a poco descubrir los otros.

1) El número que se puede calcular directamente es D. De allí se puede calcular también B, y enseguida F. Ahora sabemos que A < D. Con eso podemos completar la cifra que falta en A. (No puede ser cero, porque entonces E comenzaría con cero, lo cual no es permitido.) Nos queda completar E de manera que sea un cuadrado perfecto.

2) Aquí podemos escribir inmediatamente el número D. Con eso está definido el número A, porque no hay muchos números que son producto de tres números consecutivos. Podemos calcularlos: 2 x 3 x 4, 3 x 4 x 5, etc, hasta llegar a un número que comienza con la cifra que ya tenemos.
Si tenemos A, podemos también calcular F, y después completar lo que falta, de manera que se cumplan las otras condiciones.

3) Comencemos con B. Quizás será necesario hacer una tabla de cuadrados perfectos para encontrar este número. Cuando tenemos B, podemos calcular también A. Ahora se pueden completar D y E. (Conocemos un divisor de E, porque ese es el número que hemos multiplicado para obtener B. Ya que este divisor es un número primo, no hay otros divisores posibles.) – La pauta para F no nos ayuda nada; entonces tenemos que usar la pauta de C para completar la última cifra que falta.

4) El número D se puede calcular inmediatamente. Con eso podemos completar también la última cifra de C. Ahora no quedan muchas posibilidades para F: Es un múltiplo de D; conocemos su última cifra; y la primera cifra debe ser par, porque A es un número par. De hecho, quedan solamente dos posibilidades; pero una de ellas se descarta, porque no permite que la suma de las cifras de B sea 8. Podemos entonces completar F y enseguida B.
Por último podemos completar E y hemos terminado.

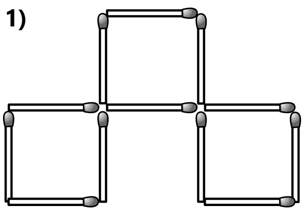
5) Aquí podemos empezar con E. Si lo factorizamos, podemos analizar sus divisores mayores a 100; uno de ellos debe ser el MCD de E y B. Con eso queda una sola posibilidad para B. Esto permite ahora completar D, y después podemos calcular C. Para la última cifra que falta, necesitamos las condiciones tanto para A como para F: A es par; y F es menor a C.

6) Comencemos con C. Esto deja una sola posibilidad para E. (Analicen la secuencia de Fibonacci. No contiene muchos números de tres cifras.)
Completemos ahora A. Sabemos que sus cifras son consecutivas; pero ¡ojo!: podrían ser ascendientes (de menor a mayor) o descendientes (de mayor a menor). Ya que F es menor a E, sabemos que el orden tiene que ser descendiente.
Alternativamente podríamos primero llenar D: Hay un solo múltiplo de 71 que tiene tres cifras y termina con la cifra que ya tenemos.
Nos falta completar B, eso es fácil ahora.

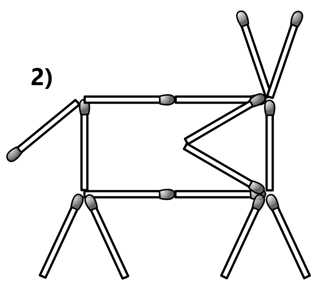
Unidad 76: Problemas diversos de razonamiento

Problemas con fósforos:

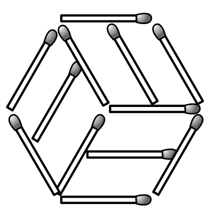
1)



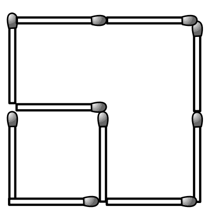
2)



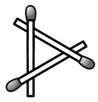
3)



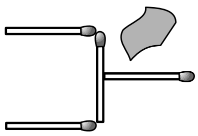
4)



5) Con *mucha* paciencia, quizás logras pararlos en forma de pirámide, de manera que sus tres cabezas se apoyen entre sí. Pero mucho más fácil es ponerlos echados en forma de triángulo, de modo que la cabeza de cada fósforo se apoya sobre la colita del siguiente.

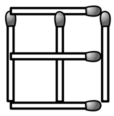


6) El fósforo vertical debe moverse por la mitad de su largo hacia abajo. Entonces se necesita mover uno solo de los fósforos horizontales para completar el recogedor por el otro lado.

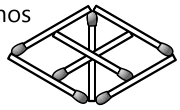


7) El nuevo rectángulo debe tener 6 fósforos de largo y 5 fósforos de ancho.

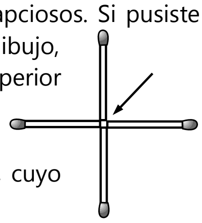
8) 4 cuadrados pequeños y uno grande.



***9)** La cuenta sale solamente si contamos *todas* las figuras que se pueden ver: 4 triángulos pequeños y 2 grandes; 4 rombos pequeños y uno grande.



***10)** Estamos ahora llegando a los capciosos. Si pusiste los fósforos *exactamente* como en el dibujo, entonces puedes mover el fósforo superior una distancia mínima hacia arriba, y se formará un cuadradito diminuto en el medio entre los cuatro fósforos, cuyo lado es igual al *grosor* de un fósforo.



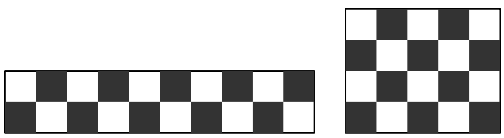
***11)** Este también es uno capcioso. Muchos intentarán usar los fósforos como "herramientas" para empujar los otros fósforos encima de ellos; pero es improbable que resulte así. Mucho más fácil: Toma los dos fósforos y ponlos *debajo de la mesa*. ¡Ahora están por debajo de los otros!

Investigación: Tetris y pentominóes

a) Puedo decirte que existen cinco tetris. Los necesitarás para la siguiente tarea.

b) ¿Lo intentaste por mucho tiempo? ¿Te parece imposible? – ¿Cómo puedes saber si realmente es imposible, o si solamente no probaste todavía todas las posibilidades?

Se puede demostrar matemáticamente, de una manera sencilla, que realmente es imposible. Coloreamos los rectángulos posibles a la manera de un tablero de ajedrez:



Cada rectángulo tiene 10 cuadrados blancos y 10 negros. Coloreamos ahora los 5 tetris de la misma manera:

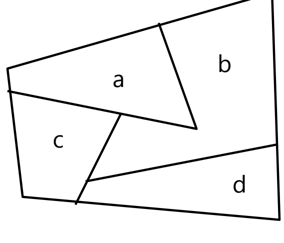
Todos los tetris tienen 2 cuadrados blancos y 2 negros – con excepción del que tiene la forma de una T. Ése tiene 3 cuadrados negros y uno blanco. Los 5 tetris juntos tienen entonces 11 cuadrados negros y 9 blancos. Por eso es imposible formar con ellos un rectángulo que tiene 10 cuadrados negros y 10 blancos.
(Podríamos colorear el último tetri al revés; pero entonces tendríamos 11 cuadrados blancos y 9 negros. De cualquier manera, sobrarán cuadrados de uno de los colores.)

c) Existen 12 pentominóes diferentes. ¿Los encontraste todos?

***e)** Seguramente no se puede formar ningún rectángulo que tenga un ancho de solamente 2 cuadraditos. (Piensa: ¿Por qué no?) Pero ¿quizás uno con un ancho de 3 cuadraditos? ¿de 4? ¿de 5? ¿de 6?
Quizás tendrás que probar por mucho tiempo hasta encontrar soluciones. Estos rompecabezas son realmente difíciles. Pero ¡para algunos de estos rectángulos existen cientas de soluciones!

g) Como en los anteriores, algunos problemas de este tipo no tendrán solución ... pero otros sí. Sigue investigando.

Conteo de figuras:



Un método práctico, mencionado en muchos libros, consiste en rotular primero cada parte del dibujo con una letra o un número. Después podemos buscar todas las combinaciones válidas y anotarlas con sus letras correspondientes, en algún orden sistemático. Por ejemplo, podemos comenzar con todos los polígonos que consisten en una sola parte: **a, b, c, d**. Después podemos anotar los que consisten en dos partes: **ab, ac, bc, bd, cd.** ("ad" sería una combinación inválida, porque consiste en dos partes separadas, eso no es un polígono.) Después los que consisten en tres partes: **abc, abd, acd, bcd.** Y finalmente las cuatro partes: **abcd**. Contando, encontramos que son 14 polígonos distintos.

Otra forma de ordenar las posibilidades consiste en comenzar con todas las que contienen la parte ***a***: **a, ab, abc, abcd, abd, ac, acd.** Después las que contienen la parte ***b*** (pero no ***a***): **b, bc, bcd, bd.** Después las que contienen ***c***, pero ni ***a*** ni ***b***: **c, cd**. Y finalmente **d**. De esta manera, las combinaciones aparecen en el mismo orden como las palabras en un diccionario.

Realmente no importa cuál sistema usamos para ordenar las combinaciones posibles. Lo importante es que lo hagamos de alguna manera sistemática, para asegurar que no estamos olvidando ninguna combinación, y que no estamos contando ninguna doblemente.

Y en el proceso tenemos que asegurar que no contemos ninguna combinación inválida. Por ejemplo, cuando se piden “triángulos”, que no anotemos por equivocación una combinación que es un cuadrilátero o un pentágono.

Nota: Una situación particular de conteo de figuras examinaremos en la Unidad 81, Sección “Ampliaciones”.

Problemas de números para razonar:

1) Si el cambio de 20.– fuera solamente unas cuantas monedas, y el vendedor puede dar cambio de 50.–, entonces podría devolver 30.– más esas mismas monedas, y con eso podría también dar el cambio de 20.– . Por tanto, el cambio de 20.– debe ser mayor a 10.–, o sea, las compras de Marta costaron menos de 10.–. Entonces el cambio de 50.– es mayor a 40.–. ¿Con cuál combinación de billetes se pueden pagar 40.–, pero no 10.– ? (Por lo demás tenemos que concluir que el valor total de las monedas menores que tiene el vendedor no alcanza para dar el cambio de 20.–.)

2) Puedes comenzar por un extremo y acercarte a la solución: Si usamos únicamente monedas de 10 centavos, ¿cuántas monedas tenemos en total? Si ahora cambiamos dos de estas monedas por una de 20, el valor total sigue siendo 10.–, pero ¿cuántas monedas tenemos? Entonces, ¿cuántas monedas de 10 tenemos que cambiar por monedas de 20, para que tengamos un total de 84 monedas?
O alternativamente podemos comenzar con 84 monedas de 10 centavos. ¿A cuánto equivale esto? Si sustituimos *una* de las monedas por una de 20, siguen siendo 84 monedas, pero ¿cómo cambia su valor total? Entonces, ¿cuántas monedas de 10 tenemos que sustituir por monedas de 20 para que el valor total sea 10.–?

3) Podemos interpretarlo como un problema de reparto proporcional: La proporción entre los precios del postre y del menú es de 1 : 3. Entonces, el precio se reparte en 4 "partes". 3 de ellas corresponden al menú, y una parte al postre.

4) No existe ninguna "fórmula" u operación directa. Es necesario encontrar una manera *sistemática* de enumerar ordenadamente las posibilidades que existen. Por ejemplo así, para la moneda de 2.–:

Comencemos con las monedas mayores, entonces la primera posibilidad es 1.– + 1.–. La siguiente posibilidad sería 1.– + –.50 + –.50. Ahora podemos mantener la moneda de 1.– y una de –.50, y enumerar las posibilidades de cambiar –.50 en monedas menores. Después podemos mantener solamente la moneda de 1.–, y cambiar todo lo demás en monedas menores (de –.20 y de –.10). Después de enumerar todas estas posibilidades, podemos pasar a las que no contienen ninguna moneda de 1.–: con 4 monedas de –.50; con 3 monedas de –.50 (y el resto en monedas menores); con 2 monedas de –.50 (allí notarán que se repiten algunas combinaciones anteriores de manera similar); con una moneda de –.50, y finalmente con ninguna moneda de –.50.

O pueden hacer algo similar, pero comenzando con las monedas menores: Primero usando solamente monedas de –.10, después combinando monedas de –.10 y de –.20, después usando también monedas de –.50, y finalmente con monedas de 1.–.

Al calcular las posibilidades para cambiar la moneda de 5.–, podrán re-usar algunos números ya conocidos de las posibilidades para el cambio de una moneda de 2.–, y de una moneda de 1.–.

5) Como en el Problema 2, podemos acercarnos a la solución desde un extremo. Por ejemplo, podemos cumplir primero la condición de que sean tres bicicletas más que carros, y podemos empezar con cero carros y 3 bicicletas; eso son 6 ruedas. Ahora, si aumentamos un carro y una bicicleta, siguen siendo 3 bicicletas más que carros. ¿Cómo cambia en este caso el número total de ruedas? Entonces, ¿cuántos carros y bicicletas tenemos que aumentar para llegar a 60 ruedas?
O alternativamente, podemos primero cumplir la condición de las 60 ruedas. Por ejemplo, comenzamos con 15 carros y ninguna bicicleta. Ahora, para que el número de ruedas siga igual, podemos remplazar un carro por dos bicicletas. ¿Cómo cambia en este caso la diferencia entre el número de carros y el número de bicicletas? Entonces, ¿cuántos carros tenemos que remplazar por bicicletas, hasta que la diferencia sea 3?

6) Si no hemos roto ningún huevo, entonces "la mitad de los huevos más medio huevo" debe ser un número entero. ¿Qué propiedad tiene entonces el número total de los huevos? – Por lógica, los 15 huevos que quedan deben representar la mitad de los huevos *menos* medio huevo. ¿Puedes ahora calcular el total?

7) Cuando compramos seis kilos de papas, el precio de un kilo se multiplica por 6. Y con tres paquetes de fideos, el precio de un paquete se multiplica por 3. ¿Qué propiedad deben tener entonces estos precios? Compara eso con los precios mencionados de 6.– y 4.80 para los otros productos. ¿Qué propiedad especial debe tener entonces la suma, si se calcula correctamente?

8) Solamente hay que descubrir en qué orden resolverlo. Sabemos el precio de las zanahorias, entonces hay que empezar con la única relación donde aparecen zanahorias: 2 kg de manzanas cuestan igual que 5 kg de zanahorias. De ahí puedes calcular el precio de las manzanas. Después buscamos dónde más aparecen manzanas; eso permite calcular el precio del siguiente producto, y así sucesivamente hasta llegar a las peras.

Si quieres hacerlo de manera más eficaz, puedes anotar primero toda la cadena de operaciones sin calcular nada todavía; y después vas a poder simplificar mucho antes de hacer el cálculo. (¿Qué operaciones hay que realizar con el precio de las zanahorias para obtener el precio de las manzanas? ¿y cómo sigue después?)

9) El enredo se resuelve cuando tomamos en cuenta que Jorge mismo no se incluye en el número de sus hermanos, y Juana no se incluye en el número de sus hermanas. Entonces, si Jorge tiene tantos hermanos como hermanas, hay *un varón más* que mujeres. Juana cuenta a todos estos varones como sus hermanos, pero tiene una hermana menos, porque no se cuenta a sí misma. (Si sigues confundido, ¡haz un dibujo de la familia!)
Entonces, ¿cuántos hermanos más que hermanas tiene Juana? ¿y cuántos tienen que ser, para que el número de sus hermanos sea el doble del número de sus hermanas?

10) Razona de manera similar como en los Problemas 2 y 5.

11) Según el primer dato, el número de fresas es un múltiplo de 8. Según el segundo dato, el número de fresas deja un residuo de 1 al dividirlo entre 7. ¿Cuántas fresas son entonces, para que el reparto funcione tal como dice?

12) Podemos razonar lo siguiente: En el segundo y tercer piso juntos hay 42 personas; en el segundo y primer piso juntos hay 48 personas. Si sumamos todo esto, tenemos una vez los habitantes del primer y del tercer piso, y dos veces los habitantes del segundo piso. Pero el número de habitantes del segundo piso es igual como el número de habitantes del primer y del tercer piso juntos. Entonces esta suma es igual a *tres veces* los habitantes del segundo piso. ¿Puedes ahora concluir el cálculo?

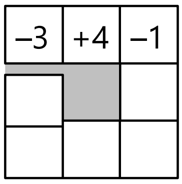
13) ¡Esta es una pregunta capciosa! Solamente mamá iba al mercado; las otras personas *vinieron a su encuentro*.

14) Una manera práctica de resolver problemas como este, consiste en escribir cada nombre en un pequeño papel. Ordena los papelitos según las indicaciones, hasta que encuentres una combinación que cumple todas las condiciones.

***15)** Se puede resolver como el no.14. – ¿No funciona? Es que aquí necesitamos adicionalmente un poco de "pensamiento lateral". Marcos no tiene ningún hermano mayor; Pablo tampoco tiene un hermano mayor. Eso es posible solamente si Marcos y Pablo tienen la misma edad; o sea, son gemelos.

16. a) Recuerda que no solamente las filas indicadas tienen que sumar 30; además el total de todos los conejos tiene que ser 99.

b) Investiga qué "operaciones" (de suma y resta) se pueden hacer con las jaulas sin alterar las sumas de las filas. Puede ser una ayuda, dibujarlas como en el dibujo. La operación dibujada deja intacta la suma de la fila superior, pero las tres jaulas a la izquierda tendrán 3 conejos menos, y las tres jaulas a la derecha tendrán un conejo menos. ¿Encuentras una operación donde disminuye el total de conejos, pero las sumas de las filas no se alteran? – Si encuentras una tal operación que permite quitar un único conejo, entonces puedes repetir esta operación para quitar más.



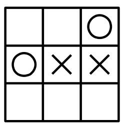
c) En b) habrás descubierto que el ladrón tuvo que robar conejos de las jaulas del medio, y en cambio tuvo que aumentar conejos en las jaulas de las esquinas. Según la descripción, la jaula que tenía 19 conejos quedó vacía; entonces los conejos en las esquinas a su lado tenían que sumar 30. Si el ladrón hizo un mínimo de cambios, entonces sacó de las jaulas adyacentes los conejos que aumentó a esas jaulas de las esquinas. Existen varias soluciones posibles.

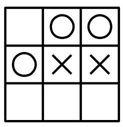
d) ¿Hasta dónde se puede continuar ese proceso de sacar conejos de las jaulas del medio, y aumentar conejos en las jaulas de las esquinas?

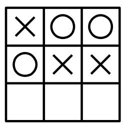
Unidad 77: Análisis de juego: El gato

La ***Pregunta 1*** no debe necesitar pautas. Si has jugado "el Gato" varias veces, ya debes haber experimentado la respuesta.

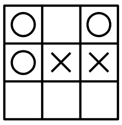
Pregunta 2: En la situación abajo *(Dibujo 1)*, yo soy el jugador del círculo, y es mi turno. Si marco así como en el *Dibujo 2*, eso no es ninguna situación ganadora, porque mi adversario puede ver que tengo dos círculos en una línea, y puede impedir que yo la complete *(Dibujo 3)*.

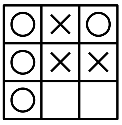

Dibujo 1

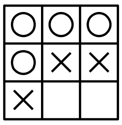

Dibujo 2


Dibujo 3

Pero si marco así como en el *Dibujo 4*, me abro *dos posibilidades a la vez* para ganar. Ahora mi oponente no puede impedirlo. Si marca arriba, yo completo la columna izquierda *(Dibujo 5)*; y si marca la esquina izquierda, yo completo la fila superior *(Dibujo 6)*.


Dibujo 4


Dibujo 5


Dibujo 6

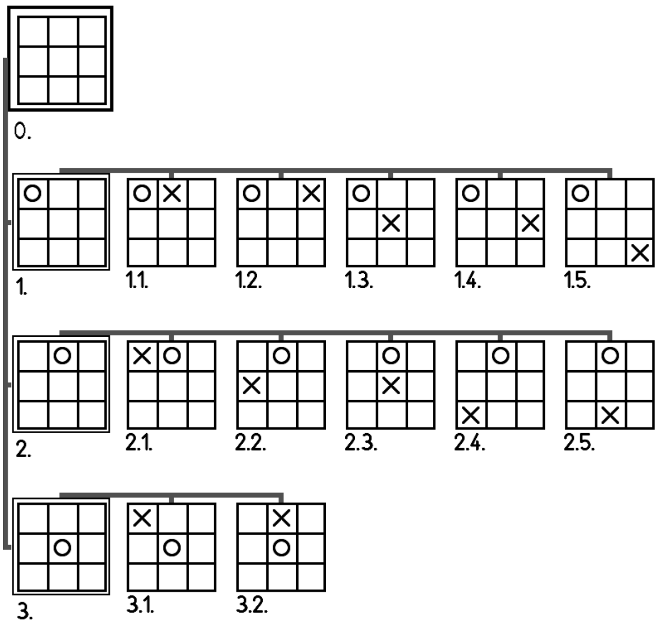
Entonces, si mi oponente es lo suficientemente inteligente para no dejarme ganar así no más, yo puedo ganar solamente si puedo crear simultáneamente *dos* posibilidades para ganar.

Pregunta 3: Piensa cómo debe verse la configuración *inmediatamente antes* de crear una situación ganadora como en la Pregunta 2. En esta configuración anterior, ambas posibilidades para ganar deben todavía estar "abiertas", o sea sin la posibilidad de completarlas enseguida; porque si una de ellas se podría completar inmediatamente, el oponente se daría cuenta de ello y lo impediría. Pero entonces no tendría sentido armar la segunda oportunidad de ganar, porque la primera ya estaría malograda.

O sea, se debe crear una situación como arriba en el Dibujo 1, donde no existe ninguna línea con dos círculos, pero con una única jugada se pueden crear dos de esas líneas. ¿Encuentras otras situaciones donde eso es posible?

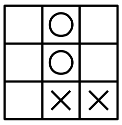
Como oponente, impedir que se forme esta "configuración anterior", ya es más difícil. Habría que prever dónde podría formarse una tal configuración, y entonces ocupar una de las casillas necesarias para ello. O puedo también yo mismo crear una línea con dos símbolos míos; entonces el otro jugador está obligado a ocupar una casilla específica para impedir que yo gane.

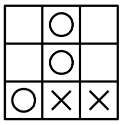
*** Pregunta 4:*** Para un tal análisis completo, la forma más ordenada es un diagrama de árbol. Las primeras o principales ramas son las 3 jugadas posibles del primer jugador. De allí proceden las ramas para todas las posibles respuestas del segundo jugador. Después se sigue ramificando, hasta que cada rama termina en una situación donde es previsible quién gana. Este sería el comienzo de este árbol:



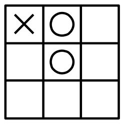
Una hoja no alcanzará para el árbol completo. Necesitarás varias páginas si deseas completar este trabajo.

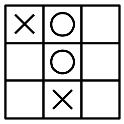
Si asumimos que ambos jugadores pueden prever por lo menos un movimiento de su oponente, entonces no necesitamos dibujar aquellas ramas del árbol que contienen errores obvios. Por ejemplo, si llegamos a la siguiente situación *(Dibujo 7)* y es el turno de O, la única respuesta que tenemos que considerar en el árbol es la del *Dibujo 8*.

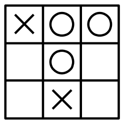

Dibujo 7

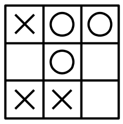

Dibujo 8

Pregunta 5: En realidad, esta pregunta no se puede responder de manera concluyente, porque la respuesta depende de lo que asumimos acerca de los jugadores. Si asumimos que ambos son capaces de predecir el juego completo, entonces no hay ninguna "jugada mejor" para el primer jugador. No importa como comienza, el segundo jugador puede impedir que el primero gane. (Esto responde a la vez a la ***Pregunta 8:*** Si ambos juegan con una estrategia perfecta, el juego termina siempre en empate. Investiga tú mismo para verificarlo.)


Dibujo 9

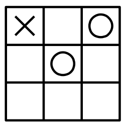

Dibujo 10


Dibujo 11

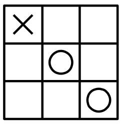

Dibujo 12

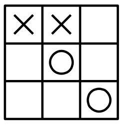
Tomamos como ejemplo que el primer jugador marca el centro. El segundo marca una esquina. Ahora, como primer jugador tengo 4 posibilidades distintas. Si marco como en el *Dibujo 9*, la X necesariamente tiene que marcar abajo porque no me va a dejar ganar *(Dibujo 10)*. Ahora, si yo marco arriba *(Dibujo 11)*, la X va a marcar según el *Dibujo 12,* y con eso tiene una situación ganadora. Entonces, en este caso la X va a ganar. – Pero hemos asumido que ambos jugadores pueden predecir todo lo que sucederá, entonces yo sé que eso va a suceder, y por eso no voy a marcar esa esquina. Todos los otros cuadros que puedo marcar en la situación del *Dibujo 10*, necesariamente llevan a un empate. Lo pueden verificar ustedes mismos.

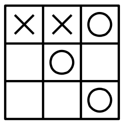
Volvamos a la situación anterior. Si yo marco la esquina superior *(Dibujo 13)*, las siguientes jugadas son prácticamente determinadas y llevan a un empate. – Lo mismo sucede si marco en el borde derecho. Ustedes mismos pueden desarrollar estos partidos hasta su final.

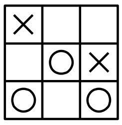

Dibujo 13

Me queda todavía la posibilidad de marcar la esquina inferior *(Dibujo 14)*. Las otras casillas que quedan son equivalentes a las que ya hemos analizado. Ahora, si X marca arriba *(Dibujo 15)*, prácticamente me obliga a ganar, porque yo tengo que marcar la esquina superior *(Dibujo 16)*, y esta es ahora una situación ganadora para mí.


Dibujo 14

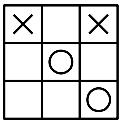

Dibujo 15


Dibujo 16


Dibujo 17

Si X marca el borde derecho, también puedo crear una situación ganadora para mí *(Dibujo 17)*. Entonces, marcar esta esquina inferior sería realmente la mejor jugada para mí.

Pero hemos asumido que ambos jugadores saben predecir el juego perfectamente. Entonces X sabe lo que va a pasar, y por tanto no va a hacer ninguna de las jugadas anteriores. Va a marcar la esquina *(Dibujo 18)*, y esto lleva nuevamente a un empate.


Dibujo 18

Por tanto, si yo comienzo en el centro, el segundo jugador siempre puede forzar un empate si marca una esquina. Tú mismo puedes averiguar qué sucede si el segundo jugador marca el borde.

De la misma manera, si el primer jugador comienza en una esquina o en el borde, el segundo jugador puede también forzar un empate. Descubre tú cómo. (Ya sabes ahora cómo seguir analizando para obtener respuestas completas a las ***Preguntas 6 y 7***.)

Pero podemos también asumir que los dos jugadores son sólo "medianamente inteligentes". O sea, que son capaces de predecir un turno, pero no dos. En este caso existe una jugada que es claramente la mejor para el primer jugador, porque presenta una mayor probabilidad de que el segundo jugador escoja una respuesta que permite al primer jugador ganar. Sigue investigando...

Unidad 78: Análisis de juego: ¿Quién llega a 100?

Preguntas 1 a 4: Observa el siguiente juego entre Óscar y Priscila:

Priscila comienza con 10.
Óscar aumenta 10, da 20.
Priscila aumenta 10, da 30.
Óscar aumenta 10, da 40.
Priscila aumenta 10, da 50.
Óscar aumenta 10, da 60.
Priscila aumenta 10, da 70.
Óscar aumenta 10, da 80.
Priscila se da cuenta de que Óscar va a ganar si siguen así. Entonces decide aumentar 9, da 89.
Óscar se pone a pensar: Si aumento 1, tenemos 90. Priscila va a aumentar 10 y va a ganar. – Si aumento 2, tenemos 91. Priscila va a aumentar 9 y también va a ganar. – Si aumento 3, Priscila puede aumentar 8 y también gana. – ... y así sucesivamente. Aun si aumento 10, Priscila va a ganar, porque tendremos 99 y ella aumenta 1. Entonces Óscar se rinde: "No importa lo que yo haga, ¡ya ganaste!"

De allí concluimos que el que logra alcanzar 89, ya ha asegurado la victoria. ¿Entiendes por qué? – Podríamos entonces llamar el juego "¿Quién llega a 89?", porque da lo mismo.

Pero entonces, ¿no habría otro "número mágico" anterior que te puede asegurar la victoria en el juego de llegar a 89? ¿Y no podríamos así retroceder a otros números anteriores, hasta llegar al inicio del juego? Y entonces sabríamos exactamente lo que se debe hacer al inicio del juego, para tener la victoria asegurada hasta 89, y finalmente hasta 100.

Si descubres esto, ya tienes las respuestas a todas las preguntas 1 a 4.

Pregunta 5: Si no hay regletas de 10, ¿cuál es en este caso el "número mágico" al que hay que llegar para asegurarse de llegar a 100? – ¿Qué consecuencias tiene eso para la estrategia de los "números anteriores"? – ¿Y cuál de los jugadores puede en este caso asegurarse la victoria desde el inicio?

Pregunta 6: Puedes razonar de manera similar como en la Pregunta 5. Pero hay una dificultad adicional aquí: Supongamos que llegamos a 97. Ahora nadie puede ganar, porque hay que aumentar un mínimo de 4, y con eso es imposible alcanzar exactamente 100. O sea, en esta variación hay también la posibilidad de un empate, donde nadie gana. ¿Puede en este juego uno de los jugadores asegurarse la victoria? – O si eso no es posible, ¿puede el que está en peligro de perder por lo menos forzar un empate?

Pregunta 7: Aquí tenemos otro problema inesperado. Si sumamos sucesivamente números impares, ¿qué propiedades tienen las sumas que resultan, respecto a par o impar? – ¿Qué significa esto para las posibilidades de ganar? – ¿Y existe en este caso también la posibilidad de un empate?

Pregunta 8: ¡Sé creativo! Existen otras posibilidades interesantes. Quién sabe, quizás haces un descubrimiento matemático novedoso.

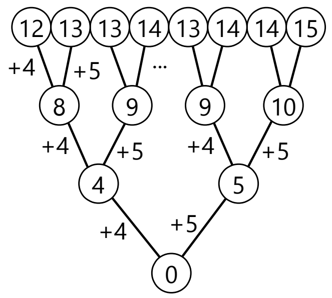
Unidad 79: Análisis de juego: Golf matemático

Pregunta 1: Algunos principiantes piensan que la mejor estrategia consiste en elegir la "pala" más larga (o sea, el número mayor) tantas veces como sea posible, para alcanzar la meta con un mínimo de jugadas. Pero si has jugado varias veces, habrás notado que eso no funciona siempre: A menudo esta estrategia lo hace imposible llegar a la meta *exactamente*.
Entonces, ¿cómo puedes descubrir cuántas veces usar la "pala" más larga, sin perder la oportunidad de llegar después exactamente a la meta con la "pala" corta?

Si todavía no encuentras ningún método lógico, aquí una pauta adicional: Recuerda que una suma repetida (como 3+3+3+3+3) se puede escribir como multiplicación (en este caso 3x5).

Pregunta 2: Para anotar las metas posibles sistemáticamente, podrías usar una tabla, o un diagrama de árbol:

+	4	8	12	16	20	24	...
5	9	13	17	21	25	29	...
10	14	18	22	26	30	34	...
15	19	23	27	31	35	39	...
20	24	28	32	36	40	44	...
...	...	...	...	...	...	...	...



La tabla parece más "eficaz", porque en el árbol aparecen diversas posibilidades repetidas veces. Por ejemplo 4+4+5 = 4+5+4 = 5+4+4 = 13. Por eso, el número 13 aparece tres veces en el árbol. Pero ¿quizás encuentras una manera de simplificar el árbol? De otro modo, será más recomendable usar la tabla. ¿Cuáles son los números que no aparecen en la tabla? ¿Encuentras algún orden sistemático en esos números?

Pregunta 3: Inténtalo con dos números pares, por ejemplo +4 y +6. ¿Puedes llegar a 15 con estos números? ¿a 37? ¿a 49? ¿Por qué no? – Inténtalo con +6 y +9 ¿Qué tienen en común todos los números que puedes alcanzar con estos? ¿Qué concluyes?
Compara esta situación con la combinación de +3 y +4. Encontrarás que allí el 5 es la última "meta imposible"; después todas las metas se pueden alcanzar. ¿Qué es diferente aquí, en comparación con los casos anteriores?

Examina las siguientes combinaciones: (+3, +4); (+4, +5); (+5, +6); etc. Todas estas tienen una "última meta imposible". ¿Encuentras una relación matemática entre la "última meta imposible" y las regletas permitidas? – ¿Puedes ahora modificar y aplicar este resultado también para combinaciones donde la diferencia no es 1, como por ejemplo (+3, +5); (+3, +7); (+3, +8) ?

*** *Pregunta 4:*** Un método posible podría consistir en elegir alguna combinación de regletas, y examinar para esta combinación todas las metas que se pueden alcanzar con un número determinado de jugadas; por ejemplo usando 6 regletas. Pero tendrás que limitarte a aquellos casos donde eso es realmente la solución más "corta". Encontrarás una regularidad en estos números. Esta regularidad te puede ayudar a encontrar *otras* combinaciones de regletas que permiten alcanzar *una* de las metas encontradas con el mismo número de jugadas.

Unidad 81: Los números figurativos de los pitagoreos

1. Rectángulos y números primos:

b) Sólo para controlar: Entre los números indicados al final hay cuatro primos; los demás son compuestos.

c) Examina los números que indican el *ancho*, resp. el *largo*, de estos rectángulos especiales. ¿Cómo se distinguen del ancho y largo en el caso de aquellos números que se pueden representar *de una única manera* como rectángulo?

d) A estas alturas ya debe ser obvio que un rectángulo representa una multiplicación. O sea, se trata de encontrar una multiplicación que tiene como resultado el número dado. Si no encuentras inmediatamente una tal multiplicación, puedes intentarlo con "multiplicaciones al revés" – ¿qué operación sería eso?

***e)** En realidad, esta pregunta sigue manteniendo ocupados a muchos matemáticos profesionales y especialistas de computadoras aun hoy en día; porque los métodos conocidos pueden seguir mejorándose. Pero por ahora nos contentaremos con un método que requiere solamente divisiones normales.
Se trata de analizar si el número dado tiene *divisores* – aparte del 1, que es divisor de todo número. Eso lo descubrimos solamente si efectivamente *dividimos* el número, y observamos si queda un residuo o no. (Excepto para aquellos divisores especiales donde conocemos reglas más fáciles de divisibilidad.) La pregunta es ahora, con cuáles divisores posibles tenemos que hacer el intento, y dónde podemos detenernos.

Para descubrir dónde detenerte, usa una vez más tus piedritas. Intenta formar un rectángulo de (por ejemplo)

43 piedritas, y hazlo de manera sistemática: Primero un rectángulo con un ancho de 2 piedritas, después de 3, después de 4, ... ¿Hasta dónde tienes que probar hasta estar seguro de que no funciona?

Además, ya antes de llegar a este límite hay otros divisores con los que no necesitamos intentarlo. Para descubrir eso, la respuesta a la pregunta c) puede darte una pauta.

2. Cuadrados perfectos

b) Si no entiendes la idea, entonces forma por ejemplo un cuadrado de 5 x 5, y *quita* de esta figura un cuadrado de 4 x 4. Así verás enseguida qué figura sobra.

Los antiguos griegos llamaban a esa figura "gnomon". Anota el número de piedritas en cada "gnomon", siempre de un cuadrado al siguiente. Verás que se trata de los números impares. Por eso, los números impares se llamaban también "números gnomon".
Ahora seguramente puedes ver también cómo se relaciona el número de piedritas en un "gnomon" con el lado del cuadrado menor, y con el lado del cuadrado mayor.

Con la ayuda de esta observación puedes descubrir una nueva manera de calcular cuadrados perfectos. Esta es útil sobre todo al calcular varios cuadrados sucesivos. Por ejemplo, si ya sabes cuánto es 100 al cuadrado, ¿cuánto es entonces 101 al cuadrado? ¿y 99 al cuadrado?

c) Puedes observar lo siguiente: En la sucesión de los dígitos finales, ¿encuentras repeticiones? ¿Simetrías? ¿Aparecen todas las cifras de 0 a 9 como dígitos finales? – ¿Qué conclusión sacas entonces para el número 79468?

d) Aquí tienes la oportunidad de plantear y resolver problemas novedosos. No se pueden dar pautas específicas para esos ...

3. Números triangulares

a), b) Las respuestas a estas dos preguntas están conectadas. En las diferencias entre números triangulares (Pregunta b) hay una regularidad muy fácil de ver. Así ya tienes un método de calcularlos, usando siempre los números triangulares anteriores. En cambio, calcular un número triangular *directamente* es más difícil. Eso no lo podrás hacer, a menos que conozcas unas propiedades un poco más avanzadas (Preguntas e), f).

c) Las propiedades de "par o impar" se pueden explicar mediante la construcción de los números triangulares, sumando números sucesivos. (¿Conoces las leyes que rigen la suma de números pares, de números impares, y de un número par con un número impar? Investiga ...) – Tú mismo puedes describir e investigar otras propiedades.

d) Escribe la sucesión de estas sumas: 1, 4, 9, ... ¿Esta sucesión te hace recordar algo conocido? – Cuando intentas reproducir esta propiedad con figuras de piedritas, usa tu creatividad. Los triángulos pueden arreglarse también en una forma un poco diferente de la que se muestra en el gráfico.

e) Concéntrate primero en aquellos números triangulares que se pueden escribir de una *única* manera como multiplicación: 6, 10, 15, 21, 55, etc. Así puedes quizás ver ya una regularidad. Después busca para los números 28, 36, 45, 66, ... aquella forma de multiplicación que encaja en esta regularidad.
Si no encuentras nada que tenga sentido, quizás te ayudan las figuras de piedritas de la pregunta d) para encontrar una respuesta. Si no, continúa a la pregunta f).

***f)** Si encontraste en la pregunta e) una regla que realmente aplica en *cada* caso, entonces ya tienes prácticamente la respuesta. Solamente falta formularla claramente como una "regla de cálculo". – Si no encontraste nada, entonces haz otra vez unas figuras de piedritas como para la pregunta d), pero ahora para el *doble* de cada número triangular. ¡Observa bien!

Finalmente una pequeña historia:

Hace muchos años, un profesor dio a sus alumnos una tarea para mantenerlos ocupados por un buen tiempo: "¡Sumen todos los números de 1 a 100!" – Pero para el asombro del profesor, dentro de pocos momentos apareció un alumno ante su escritorio y le presentó el resultado correcto: 5050. "¿Cómo hiciste eso?", preguntó el profesor. – "Fácil", respondió el niño. "Sumo 1 + 100, da 101. Sumo 2 + 99, da también 101. 3 + 98 también da 101. Así continúo hasta 50 + 51. Entonces tengo 50 sumas que todas dan 101. Eso es 50 x 101 = 5050."
Esta historia es verdadera, y aquel niño se convirtió ya en su juventud en un matemático famoso. Su nombre fue Carl Friedrich Gauss.

Ahora, tú mismo puedes descubrir qué tiene que ver esta historia con el cálculo de los números triangulares.

4. Otros números figurativos

a) Puede ser complicado descubrir directamente las propiedades matemáticas de estos números. Pero ¿notaste que los pentágonos están de cierta manera compuestos de triángulos?

b) ¡Aquí depende todo de tu creatividad!

5. Números figurativos tridimensionales

a) ¡Factores primos! Eso es la clave para casi todo.

Acerca del número de divisores: Si conoces los factores primos, ¿cómo puedes desde allí sacar conclusiones acerca del número de divisores? *(Vea Unidad 24.)* Entonces, cuánto es el *mínimo* de divisores que tiene un "número ladrillo"? – Piensa si este mínimo aplica a *todos* los "ladrillos", o si quizás hay excepciones.

b) Quizás no encuentras un orden fácil de entender en las diferencias entre los cubos perfectos. Pero ¿qué tal si sacas nuevamente las diferencias entre estas diferencias?

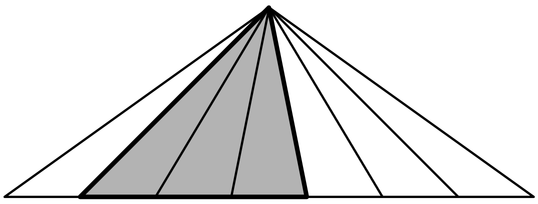
c) Es difícil encontrar una regla para calcular "números de pirámides" directamente. (Lo haremos en el nivel de Secundaria cuando tengas conocimientos del álgebra.) Pero los genios y "casi-genios" pueden descubrirlo si encuentran una manera "genial" de descomponer estos números en factores, de la manera como lo hiciste en la tarea 3.e) con los números triangulares.

d) Obviamente, los "números tetraedros" son parientes de los números triangulares. Este parentesco te puede ayudar para descubrir algunas de sus propiedades; y quién sabe, ¿quizás aun una regla para calcularlos directamente?

Ampliaciones: Problemas con números triángulos y cuadrados

1) Podemos contar los triángulos ordenadamente según el siguiente sistema:

- Los triángulos simples, son 7.
- Los compuestos de dos triángulos adyacentes, son 6.
- Los compuestos de tres triángulos adyacentes, son 5.



(El dibujo muestra un ejemplo de un triángulo compuesto de tres triángulos adyacentes.)

Continuando así, vemos que cada vez el número de posibilidades disminuye en 1. Hasta que llegando a los triángulos compuestos de siete triángulos adyacentes tendremos uno solo, que es el dibujo entero. Entonces el total es 7+6+5+4+3+2+1, o sea el número triangular que corresponde a un triángulo de lado 7.

2) Comparando la sucesión de los cuadrados perfectos con la sucesión de los números triangulares, veremos que hay un número que aparece en ambas sucesiones. ¿Cuál es?
- Matemáticamente, este problema no tiene una única solución, sino infinitamente muchas. Pero casi todas estas soluciones requieren números inmensos. Un número todavía no tan grande, que es a la vez triangular y cuadrado perfecto, es 1225. Pero es poco probable que Sebastián tenga tantas figuras de juego; entonces nos quedaremos con la primera solución (que debes haber encontrado comparando tus tablas de números que hiciste con la investigación).

3) Podríamos simplemente contarlo ... pero un razonamiento más sistemático sería este:
Podemos usar las cifras de 1 a 9 para formar nuestros números. Tenemos entonces 9 posibilidades para la cifra de las decenas. *Cada una* de estas posibilidades se combina con las 9 posibilidades para las unidades. Entonces el número total de posibilidades es 9 x 9, ó 9 al cuadrado.

4) Como en el problema anterior, para la cifra de las decenas tenemos 9 posibilidades. Pero las posibilidades que quedan para la segunda cifra, dependen ahora de la primera:
- Si el número comienza con 1, hay una sola posibilidad para la segunda cifra (el 0).
- Si comienza con 2, hay 2 posibilidades (0 y 1).
- Si comienza con 3, hay 3 posibilidades (0, 1, 2)
.... y así sucesivamente hasta los números que comienzan con 9, donde hay 9 posibilidades (de 0 a 8).
Vemos que la suma total es un número triangular: 1 + 2 + 3 + ... + 9.

5) Este problema está relacionado con lo que pasa con el área de una figura al ampliarla (vea *Unidad 70*). Supongamos que el área del modelo fuera un simple rectángulo: Si multiplicamos su ancho por 25, y su largo también por 25, ¿por cuánto se multiplica su área? – La misma proporción se aplica a áreas de cualquier forma (porque podríamos dividirlas en rectángulos pequeños). Razona, o hazlo con el dibujo de un rectángulo. Verás que este problema está relacionado con los "números cuadrados".

6) Indicamos los seis libros con las letras A, B, C, D, E, F. Para elegir su primer libro, Ana tiene 6 posibilidades. Ahora, para elegir el segundo libro de entre los restantes, podemos pensar que quedan 5 posibilidades para cada una de las primeras 6 posibilidades. Eso serían 6 x 5 = 30 posibilidades.

Pero con eso no estamos tomando en cuenta que el orden de los libros no importa: Si Ana elige primero el libro B y después el libro E, eso es la misma elección como elegir primero E y después B. Pero con nuestro primer razonamiento estaríamos contando esta elección doblemente. Entonces podemos introducir como regla adicional que el "segundo" libro es el que viene *después* en el abecedario. Así tenemos:

- Primer libro A: 5 posibilidades para el segundo libro (B, C, D, E, F).
- Primer libro B: 4 posibilidades para el segundo libro (C, D, E, F). En este caso no se puede elegir A como "segundo" libro, porque A no viene *después* de B. Dicho de otra manera: No contamos la elección BA, porque es lo mismo como AB, que ya hemos contado en el paso anterior.
- Primer libro C: 3 posibilidades para el segundo libro (D, E, F). ... etc.

Así tenemos en total el "número triangular" de 5: 5 + 4 + 3 + 2 + 1.

Nota: Si lo calculas, verás que es exactamente la mitad del número que salió con el primer razonamiento (30). Eso es porque con el primer razonamiento hemos contado cada posibilidad doblemente. O sea, podríamos también calcular así: (6 x 5) ÷ 2.

7) Este problema está relacionado con los números de *permutaciones* (vea *Unidad 82, Experimento 3*). Lo podemos analizar de esta manera:
Si fueran solamente dos piezas, A y B, se podrían ordenar solamente de dos maneras: AB y BA.
Si se añade una tercera pieza C, se puede ubicar: al inicio; en el medio; o al final; o sea, hay 3 posiciones posibles, pero *para cada una* de las dos posibilidades anteriores. Entonces para tres piezas hay 2 x 3 = 6 secuencias posibles: CAB, ACB, ABC, CBA, BCA, BAC.
Si se añade una cuarta pieza D, se puede ubicar en una de 4 posiciones posibles, *para cada una* de las 6 posibilidades anteriores; entonces tenemos 6 x 4 secuencias posibles.
Ahora puedes continuar este razonamiento de manera lógica para una quinta pieza, y obtendrás el número total de posibilidades. Como ves, este problema no está relacionado con los números triangulares ni con los cuadrados perfectos.

8) El número de dólares que cuesta un tomo, es igual al número de tomos. Por ejemplo si fueran 5 tomos, cada tomo costaría 5 dólares, y el precio total sería 5 x 5 = 25 dólares. O sea, el precio total es el número de tomos "al cuadrado". Ahora solamente necesitas consultar tu tabla de cuadrados perfectos para ver cuál número "al cuadrado" da el precio total de la enciclopedia.

9) Aquí tenemos una situación similar al problema 6: Escoger a dos jugadores para un partido de ajedrez, es muy similar a escoger dos libros de entre 6 diferentes. Si enumeramos a los jugadores desde el 1 hasta el último, el no.1 tiene que jugar contra todos los demás, o sea *uno menos* que el total de jugadores (porque no va a jugar contra sí mismo). Ahora, el jugador no.2 ya ha jugado contra el no.1; entonces le queda jugar contra los demás, que son el total *menos dos*. De la misma manera, el no.3 ahora tiene que jugar contra el total *menos tres*, porque ya jugó contra el no.1 y el no.2 (y no juega contra sí mismo). Y así sucesivamente hasta el penúltimo jugador que tiene que jugar todavía un único partido, contra el último. O sea, el número total de partidos es 1 + 2 + 3 + ... , sumando hasta el número que es uno menos que el total de jugadores. Entonces tenemos que averiguar hasta dónde tenemos que sumar para llegar a 120. Vemos que este problema, como el problema no.6, está relacionado con los números triangulares.

Unidad 82: Experimentos de probabilidad y combinatoria

Experimento 1:

Si calcularon correctamente, se debe observar que cuánto mayor es el número de intentos, más se acercan los porcentajes de los 6 números unos a otros. Con 30 intentos puede todavía haber ciertos números que aparecen con una frecuencia mucho mayor que otros. Pero con 200 intentos, los porcentajes ya deben ser bastante similares. Podemos asumir que con un millón de intentos, todos los porcentajes estarán bastante cercanos a $^1/_6$ = 16.666...%.

Esto es porque en un dado bien fabricado, cada número debe aparecer con la misma probabilidad. Esto significa que en un número muy grande de intentos, es de esperar que a cada número le corresponde $^1/_6$ de los intentos.

Esto es lo que en el cálculo de probabilidades se conoce como "la ley de los números grandes": Cuánto mayor es el número de intentos, más se deben acercar las frecuencias observadas a las probabilidades teoréticas. En un número pequeño de intentos, en cambio, las frecuencias reales pueden diferir bastante de la probabilidad teorética.
O sea, la probabilidad teorética no sirve para predecir eventos concretos. Si la probabilidad para cada número es $^1/_6$, eso no significa que con 6 intentos deba aparecer exactamente una vez el 1, una vez el 2, una vez el 3, etc. Sabemos que normalmente eso no es así. La probabilidad teorética solamente puede predecir *aproximadamente* las frecuencias que son de esperar si se hace un *gran número* de intentos.

Por el otro lado, con un número muy grande de intentos se podría probar si un dado está bien fabricado, o sea si no tiene ningún número "preferido". Si por ejemplo después de muchos miles de intentos, el porcentaje para el número 5 se acerca a 20% en vez de acercarse a 16.666...%, entonces podemos quizás asumir que posiblemente este dado tiene una irregularidad que favorece al número 5. – Pero si hacemos esta observación después de solamente 100 intentos, todavía no podemos sacar tal conclusión, porque ese todavía no es un número "muy grande" de intentos, y las variaciones pueden ser por azar.

Experimento 2:

a) Aquí tenemos la misma situación como en el Experimento 1. Con 6 x 10 = 60 tarjetas tenemos todavía un número relativamente pequeño de intentos; entonces pueden suceder variaciones bastante grandes. Si por ejemplo la pila del 3 se acabó primero, y en la pila del 4 sobran todavía tres tarjetas, no podemos concluir que eso será siempre así. Quizás en una repetición del experimento será la pila del 4 que se acaba primero. Con varias repeticiones del experimento, mas bien se debería observar que cada pila tiene aproximadamente la misma probabilidad de acabarse primero. Eso es porque cada número del dado aparece con la misma probabilidad.

b) Aunque el número de intentos es pequeño, en este experimento debe observarse una marcada tendencia distinta de la situación ***a)***, y es que las pilas del medio (6, 7, 8) normalmente se acaban mucho más rápidamente que las de los extremos (1 y 12). – De hecho, de la pila del 1 nunca se sacará ni una única tarjeta; ¿puedes explicar por qué?

Efectivamente, cuando se suman los números de dos dados, es mucho más probable que salga uno de los números del medio, que uno de los extremos. ¿A qué se debe eso? Por ejemplo, ¿qué debe suceder para que la suma sea 12? ¿y qué debe suceder para que la suma sea 7? ¿Puedes desde allí explicar por qué los números del medio aparecen con mayor frecuencia?

Todavía hay mucho que investigar en estos temas. Pero al nivel de Primaria todavía no hacemos cálculo de probabilidades formalmente. Es suficiente que los alumnos comiencen a razonar acerca de estos conceptos fundamentales; la teoría detallada dejamos para el nivel de Secundaria.

Experimento 3:

a) Para que no tengas que escribir demasiado, es recomendable abreviar los objetos. Por ejemplo P = plato, T = tenedor, Co = cuchillo, Ca = cuchara. Entonces puedes anotar las diferentes posibilidades así: PTCoCa, PCoCaT, TCoPCa, ... pero intenta hacerlo de una manera más sistemática. Si usas números en vez de letras, quizás descubres más rápidamente una manera de sistematizar las posibilidades.

b), c) Imagínate que ya tienes puestas en la mesa todas las posibilidades que existen con 4 objetos. (¡Necesitarías muchos cubiertos para hacer eso en realidad!) – Entonces añades a cada una de estas posibilidades una cucharita. Para cada una de las posibilidades que ya tienes, ¿cuántas posiciones existen donde podrías colocar la cucharita? En total, ¿cuántas permutaciones se producen de esta manera?

Unidad 84: El promedio

Problemas con promedios:

1) La pregunta b) no está claramente definida, porque normalmente no se trabaja todos los días del mes. Tendríamos que definir primero si queremos calcular el promedio de todos los días (aunque en algunos de ellos no se vendieron naranjas en absoluto), o solamente de los días laborables.

3) Sabemos el promedio requerido, y sabemos cuántos exámenes son. Eso nos permite calcular la *suma total de notas* que se requiere. Ya que sabemos tres de las cuatro notas, podemos ahora calcular la última nota necesaria.

***4)** Este problema no tiene ningún resultado definido. Lo único que se puede decir con seguridad, es que los otros 9 hogares (aparte de la familia Alva) tienen *juntos* 9 hijos. Podríamos entonces suponer que cada uno de ellos tiene un(a) único(a) hijo(a). Pero eso no es seguro: Algunos hogares podrían no tener hijos en absoluto, y otros hogares podrían tener varios hijos. En el caso extremo, un hogar podría tener 9 hijos, y los otros 8 hogares ninguno.

Recuerda: El promedio no nos da ninguna información acerca de la distribución efectiva de los datos.

***5)** Podríamos descubrirlo probando: ¿Cuántas veces tenemos que sumar 5, más una vez 17, para que el promedio sea 7?

Pero más rápidamente lo descubrimos con un razonamiento como el siguiente:
El promedio nos dice que si todos hubieran hecho el mismo número de tarjetas, cada uno hubiera hecho 7. Pero todos los amigos, con excepción de Víctor, hicieron 2 tarjetas "de menos". Todas estas tarjetas, Víctor las hizo "de más". El total de tarjetas que Víctor hizo "de más", es 17 – 7 = 10. Este 10 consiste en 2 tarjetas por cada amigo que hizo "de menos", y así podemos saber cuántos amigos son.

Otro experimento con dados:

Al tirar el dado muchas veces, es de esperar que el promedio se acercará al promedio de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6. Eso es porque en un dado bien fabricado, cada uno de estos números aparecerá con la misma probabilidad. Si 1/6 de todos los puntajes es 1, otro sexto es 2, otro sexto es 3, y así sucesivamente, entonces el promedio será el mismo como si hubiéramos tirado cada uno de estos números una única vez.

Con pocos intentos, el promedio puede todavía estar bastante lejos de este valor esperado. Pero cuánto más intentos hacemos, más probable es que el promedio se acerque al valor esperado. Eso corresponde a la "ley de los números grandes" que hemos examinado en la *Unidad 82*.

Unidad 85: Relaciones y patrones

Exploramos el árbol genealógico

***8)** La abuela Teodora no puede ser la mamá de la mamá de Marta, porque entonces sería también la mamá de Enrique, y a la vez su suegra, lo cual no puede ser. Por tanto, Teodora es la mamá del *papá* de Marta, y Jaime es el papá de la mamá de Marta. Si Teodora es suegra de Enrique, entonces Enrique se casó con la hija de Teodora, o sea con la hermana del papá de Marta. – Con esta ayuda debe ahora ser posible ubicar a todas las personas en su lugar correcto.

Pregunta capciosa: Sara. (¿Por qué? – ¡Vuelve a leer la pregunta desde el inicio!)

Hoja de trabajo 85.1 – Completa las flechas:

***6)** Primeramente notamos que se trata de una relación simétrica. Como pauta adicional, puedo descubrir que tiene algo que ver con divisores. Pero obviamente no es "*es divisor de*", porque esa relación no sería simétrica; y tampoco coincide con los números en la hoja. Compara los divisores de 24 con los divisores de los números a los que señala una flecha, y con los divisores de aquellos números a los que no señala ninguna flecha.

Hoja de trabajo 85.2 – Completa los números:

***3)** Piensa cómo se vería el diagrama si lo dibujarías con los números dados: ¿Cuántas flechas saldrían del 1? ¿del 2? ¿del 3? – ¿Cuántas flechas llegarían al 1? ¿al 2? ... etc. Así ya podrás identificar una buena parte de los números. Para los que no puedes descubrir con seguridad de esta manera, usa sus relaciones con aquéllos que ya descubriste.

***5)** El significado de las flechas tiene algo que ver con la "prueba del 9" *(Unidad 22)*.

Relaciones entre más que dos números – Hoja de trabajo 85.3

Los problemas 1) a 5) se basan en operaciones sencillas de suma, diferencia, producto o cociente. En los siguientes, las operaciones pueden ser un poco más complejas.

6) Aquí, a una operación sencilla se añade una constante.

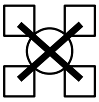
7) En cada "torre", observa los pasos que se dan para llegar de un número al siguiente.

8) Tiene algo que ver con proporcionalidades. – O compara en cada cuadrado el par de números opuestos horizontalmente, con el par de números opuestos verticalmente.

9) Siempre dos círculos sumados dan el siguiente; tanto horizontal como verticalmente.

10) Observa los "pasos" que se dan de un círculo al siguiente, en cada una de las direcciones posibles.

11) Observa la relación de cada círculo con los cuadrados adyacentes diagonalmente.



Hoja de trabajo 85.4 – Sucesiones de números

- En las sucesiones 3) y 8) se necesita una combinación de dos operaciones para llegar de un número al siguiente. Alternativamente, las diferencias de un número al siguiente pueden también darnos una pauta.

- En las sucesiones 11), 13), 14), 15), fíjate en las diferencias de un número al siguiente. Hay un orden particular en las diferencias, pero este orden es diferente en cada una de las secuencias.

***16)** Homogeniza todas las fracciones, y la regla se hará obvia.

***17)** La regla de esta sucesión no tiene que ver con la matemática. Cada número es el número de letras del anterior, escrito en palabras: "ciento veinticinco" = 17 letras; "diecisiete" = 10 letras; etc.

***18)** Aquí la regla tiene que ver con la suma de las cifras, con la cual se efectúa otra operación más.

***19)** Como la sucesión 17), ésta es una de la categoría "capciosas". Se debe enumerar sucesivamente la cantidad de cifras iguales que contiene un número, para obtener el siguiente. De la siguiente manera:

1 = "un uno", entonces el siguiente número es 1-1 = 11.
11 = "dos unos", entonces 2-1 = 21.
21 = "un dos, un uno", entonces 1-2, 1-1 = 1211.
1211 = "un uno, un dos, dos unos", entonces 1-1, 1-2, 2-1 = 111221.
Etc...

Investigación: Sucesiones diagonales en la tabla de multiplicación

b) Por si no entendiste lo que es una "sucesión diagonal": En esta tabla hay dos ejemplos marcados. Una

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

de las sucesiones va desde la izquierda-arriba hacia la derecha-abajo (0, 4, 10, 18, 28, 40, 54, ...), la otra desde la izquierda-abajo hacia la derecha-arriba (0, 5, 8, 9, 8, 5, 0).

Las diferencias entre números sucesivos de las sucesiones puedes anotar así:

0 4 10 18 28 40 ...
4 6 8 10 12 ...

resp:

0 5 8 9 8 5 0
5 3 1 –1 –3 –5

(o lo mismo en orden vertical.)

¡Observa, investiga, y saca conclusiones!

c) Haz ahora lo mismo con varios otros ejemplos, hasta que descubras lo que tienen en común.

Hoja de trabajo 85.5 – Completa los patrones

7) Según la forma exterior de las casas, aparecen tres formas distintas. Podemos asumir que cada fila y cada columna debe contener cada forma de casa exactamente una vez.
También tenemos tres formas distintas de la distribución de puertas y ventanas. Podemos asumir que éstas también deben aparecer exactamente una vez en cada fila, y en cada columna.
Con eso, los diseños de las casas están definidos. Por ejemplo, la casa de la esquina inferior izquierda debe tener techo plano y tres ventanas; porque estos son los diseños que faltan en la columna izquierda. (Esta es la misma lógica como en los problemas no.1 y 4.)
Finalmente, observamos que las casas de la fila del medio tienen techos grises, y las casas de la última fila tienen techos negros.

8) Vemos que dentro de una fila, la figura inferior de las cuatro es siempre la misma: En la primera fila, el palo delgado está siempre abajo. En la segunda fila, el rectángulo siempre está abajo. Entonces en la tercera fila, todas las figuras deben tener el triángulo abajo.
Dentro de una fila, al avanzar desde la izquierda hacia la derecha, vemos que las tres figuras restantes intercambian sus lugares de una manera determinada: Cada vez, la figura inferior de las tres salta a la punta, y las otras se mueven una posición hacia abajo. Eso es lo que tenemos que hacer también en la segunda y en la tercera fila.

9) Los mismos círculos de la primera fila vuelven a aparecer en la segunda y en la tercera fila, solamente girados. En la segunda fila están girados por 45° hacia la izquierda; en la tercera fila por 90°.

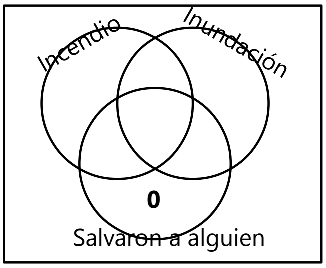
10) Entre dos figuras aparece siempre la combinación de ambos: En el cuadro entre el círculo y el cuadrado tenemos el círculo combinado con el cuadrado. En el cuadro entre el círculo y la raya diagonal tenemos el círculo combinado con la raya diagonal. Entonces, el cuadro vacío a la derecha debe contener el cuadrado combinado con la raya vertical. Y el cuadro del medio ... ¡la combinación de las cuatro figuras!

***11)** Las mismas caras de la primera fila vuelven a aparecer en la segunda y en la tercera fila, pero con una "alteración progresiva": La primera cara recibe primero un ojo blanco, después dos ojos blancos. La segunda cara se gira primero por 45°, después por 90°. La tercera cara recibe primero una raya en la frente ... entonces en el último cuadro, esta misma cara debe aparecer con *dos rayas* en la frente.

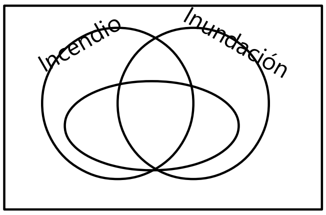
Unidad 87: El entero y sus partes en conjuntos con intersección

***11)** Este problema se puede resolver igual como los anteriores. Solamente que se requiere un diagrama con tres conjuntos, y eso hace que la situación se vuelva mucho más compleja. En particular, hay que tener presente que los 24 que saben contabilidad y mecanografía, incluyen a los 3 que dominan los tres campos; igualmente los 7 que saben contabilidad y diseño gráfico. O sea, señalando los conjuntos con M, C y D, la intersección M ∩ C incluye la intersección de los tres conjuntos; y lo mismo para C ∩ D.

***12)** Un detalle aquí es que las oportunidades de salvar la vida a alguien ocurren solamente al combatir un incendio o una inundación. O sea, no hay ningún bombero que salvó la vida a alguien sin haber combatido un incendio o una inundación. Eso significa que el campo respectivo en el diagrama queda vacío, resp. tiene cero elementos. Con eso se tienen suficientes datos para completar la solución.



resp:



Unidad 88: Gran repaso

Operaciones con números

1) Recuerda que la división es una operación del “segundo piso”; se resuelve antes de la resta.

4) ¡Aplica la ley distributiva, y se volverá muy fácil!

5) Usa la ley conmutativa. Las operaciones pueden agruparse de una manera más conveniente.

7) Usa la ley distributiva. Quizás puedes verlo mejor, si escribes la operación así: $\frac{1553}{17} + \frac{147}{17}$

8) ¿Recuerdas lo que significa “porcientos de”, y “una fracción de”? Si no, repasa las *Unidades 38, 41, y 52*.

9) Recuerda que las fracciones con decimales se pueden amplificar *(Unidad 51)* – y después quizás se pueden simplificar otra vez, para ahorrarte trabajo. – Recuerda que una fracción doble es una división de fracciones. Pero primero debes tener arriba y abajo una única fracción; no puedes dividir bien mientras tienes una suma o resta de fracciones.

10) Para poder sumar, necesitamos todos los sumandos o en decimales, o como fracciones homogéneas. Piensa cuál de los dos es más conveniente, y después convierte los sumandos a la forma que necesitas.

Problemas con números

1, 2, 3) Problemas de este tipo pueden resolverse, dibujando todas las operaciones mencionadas como una "cadena de máquinas". Ya que sabemos lo que salió al final, podemos retroceder desde allí, haciendo correr todas las máquinas "al revés". O sea, usamos el principio de la operación inversa para retroceder desde el final hasta el inicio. Así vamos a saber cuál fue el número que inicialmente entró a la primera máquina.

2) Espero que pudiste resolverlo solo. Ahora, si comparas el resultado de Rebeca con su número inicial, verás que su número inicial está "escondido" dentro del resultado. Si comienzas con un número de 3 cifras y haces el proceso que indica Sara, siempre obtendrás el número original, con un 7 por delante y un 4 por detrás. Por eso, Sara pudo decir muy rápidamente cuál fue el número de Rebeca. ¿Quieres verificarlo?

3) El problema no es difícil, pero algunos niños pensarán que se equivocaron en el cálculo, porque la respuesta no es un número entero. Pero ¡el problema no dice que el número inicial fue entero! Tenemos que expresarlo como fracción, o como número mixto.

4) Recomiendo encontrar primero una *única* operación que se puede usar en vez de las tres multiplicaciones que se efectúan con el número original. Tomando en cuenta esa operación, ¿qué propiedad particular debe tener el resultado? (Nota que aquí, a diferencia del no.3, se especifica que el número inicial fue *entero.*) ¿Puedes ahora encontrar el número entre 10'690 y 10'800 que tiene esa propiedad?

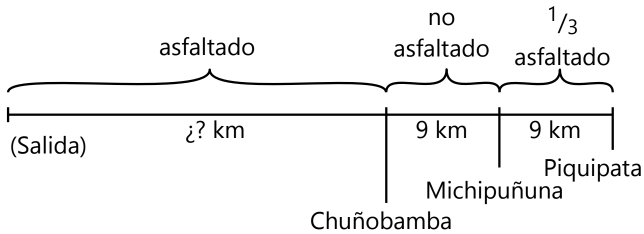
5) Se puede encontrar probando todas las posibilidades. Pero es más rápido hacer unos razonamientos primero:
- Examinando las cifras de las unidades, al multiplicar dos números sucesivos, vemos que solamente con 2 x 3 y con 7 x 8 el producto termina con 6. Entonces tenemos que examinar solamente las multiplicaciones 12 x 13, 17 x 18, 22 x 23, y 27 x 28. La siguiente, 32 x 33, ya es mayor a 1000.
- Si la suma de las cifras del producto es 18, entonces es un múltiplo de 9. Entonces el 9 ya debe estar como factor dentro de los factores sucesivos. Quedan solamente 17 x 18 y 27 x 28 para examinar.
*) El razonamiento anterior nos permite encontrar también rápidamente los números de 4 cifras con la misma propiedad: Los factores tienen que terminar con _2 x _3 ó con _7 x _8, y uno de ellos tiene que ser un múltiplo de 9. Encontrarás dos soluciones.

6) Si los apoyos coinciden al inicio y al final del puente, entonces la longitud del puente es un múltiplo de ambos espacios entre apoyos. ¿A qué concepto matemático nos lleva eso?

***7)** Este problema tiene una estrella, no porque el cálculo fuera difícil, pero porque es difícil encontrar el razonamiento que nos permite resolverlo. Si intentamos calcular por separado cada tramo que recorre el perro, se vuelve muy complicado y nunca terminaremos. Todo se vuelve mucho más fácil si notamos que Mario y el perro están en movimiento *durante el mismo tiempo*. Por tanto, la dirección en la que corre el perro es irrelevante. Lo único que importa es la proporción entre las dos velocidades.
Los datos nos permiten concluir que la velocidad del perro es cuatro veces la velocidad de Mario. Entonces, el perro recorrió cuatro veces la distancia que caminó Mario, o sea 600m x 4.

8) Los porcentajes se pueden convertir en fracciones. Cuando usamos fracciones de un entero, entonces el entero es 1. (Lógico...) Eso nos permite expresar también el número de personas que hablan retorromano, como fracción del entero. Y con eso podremos calcular a cuántas personas corresponde "el entero", o sea la población total.

9) Como siempre en los problemas con fracciones, debemos tener claro cuál es el "entero" al que se refieren las fracciones. 1/3 "de esa parte" estaba asfaltado, eso se refiere al último tramo de 9 km. Y sabemos que otros 9 km de la carretera no estaban asfaltados ("la misma distancia" como de Chuñobamba a Michipuñuna). Con eso podemos calcular el total de los tramos que no están asfaltados.
Si 5/6 de la carretera total están asfaltados, entonces la parte no asfaltada corresponde a 1/6 del total. Con eso podemos calcular el total.



11) Sabemos que los problemas con tiempos y velocidades nos conducen a proporciones: Si Aloisia avanza 3.6 m en un minuto, ¿cuántos minutos necesita para 50 metros? (O quizás te resulta más fácil si lo conviertes en segundos.) – Entonces, ¿cuántos metros avanzó Barbaravance en ese mismo tiempo? – Habrá que calcular con fracciones, porque algunas divisiones no salen exactas.

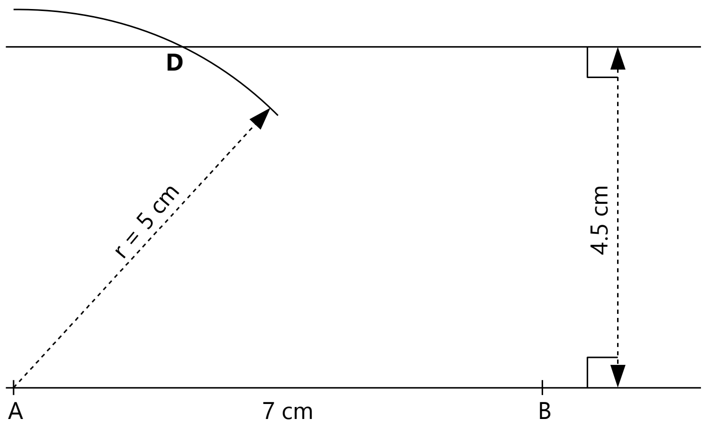
***13)** Como en el no.11, es necesario calcular con proporciones: Conocemos las distancias que recorrió el atleta, y sabemos los tiempos que empleó para ellas. Solamente falta convertirlo todo en segundos. Entonces podemos establecer una proporción que nos permite calcular la distancia que recorrió en una hora (=3600 segundos). Eso nos dará su velocidad en kilómetros por hora.
Este principio no es complicado. Lo que es complicado en este problema, son los números. No son números "arreglados" como en los problemas escolares usuales; son los números de la vida real. Por eso, resultarán multiplicaciones y divisiones muy largas, y las divisiones no salen exactas. Eso requiere:
- Perseverancia para calcular las operaciones largas,
- y un buen juicio para saber cómo redondear; porque no podremos calcular todos los decimales de los resultados. Entonces tenemos que redondearlos a una precisión sensata.

Construcciones geométricas

3) La diagonal, junto con dos lados del rectángulo, forma un triángulo. ¿Qué sabes acerca de los lados y ángulos de ese triángulo? ¿Puedes construirlo? Después es fácil completar el rectángulo.

4) ¿Qué sabes acerca de las diagonales de un cuadrado? ¿Puedes construir ambas, en la ubicación correcta? Con eso ya tienes los cuatro vértices del cuadrado.

5) Aplica el mismo razonamiento como en el no.3.



***6)** La altura del trapecio es la distancia entre sus dos lados paralelos. Entonces comenzamos construyendo dos paralelas que tienen esta distancia. Medimos y marcamos un segmento de 7 cm en la paralela inferior; ésa será la base AB del trapecio.

Ahora, para que el lado izquierdo mida 5 cm, su vértice superior D debe estar a una distancia de 5 cm de A. Eso logramos, dibujando con el compás un arco de 5 cm de radio, con centro en A. Su intersección con la paralela superior nos da el vértice D. (Notarás que hay dos intersecciones; eso significa que hay dos soluciones correctas.) Y de manera similar hallamos el vértice C.

7, 8) Repasa las *Unidades 69 y 70*.

Cálculos geométricos

1) Un *heptágono* tiene 7 lados. Si es regular, todos los lados miden igual, o sea 6.3m en este caso.

***5)** En el fondo, se trata de un problema de proporciones. La vuelta entera mide 360º. El horario la recorre en 12 horas, entonces ¿cuántos grados recorre en una hora? – El minutero la recorre en 60 minutos, entonces ¿cuántos grados recorre en un minuto?
Además tenemos que tomar en cuenta que a las 5:10h, el horario ya no se encuentra exactamente en el número 5, porque avanzó por 10 minutos más. ¿Cuántos grados avanza el horario en 10 minutos? – Con eso podemos ahora expresar la posición de ambas agujas en grados, y la diferencia entre estas dos posiciones es el ángulo que buscamos.

6) Repasa la *Unidad 83*.

***9)** Ya que el centro de la ampliación no está en el origen, no podemos simplemente multiplicar las coordenadas por 28. Con los conocimientos que tenemos hasta ahora, tampoco podemos calcular directamente los lados de los triángulos. Pero eso no es necesario: Ya que la figura entera se amplia por un factor de 28, también *las diferencias de las coordenadas* se multiplican por 28, tanto en lo horizontal como en lo vertical.
Por ejemplo, para llegar de A a B, tenemos que avanzar horizontalmente por 0.5 unidades (14.25 – 13.75 = 0.5). Entonces, de A_1 a B_1 son 14 unidades (0.5 x 28 = 14) en dirección horizontal, y la coordenada horizontal de B_1 es 125 + 14 = 139.
De la misma manera podemos calcular la coordenada vertical de B_1, y las coordenadas de C_1.

Pautas para el Bloque VIII

Unidad 92: Números negativos

Ampliaciones: Problemas sencillos con números negativos

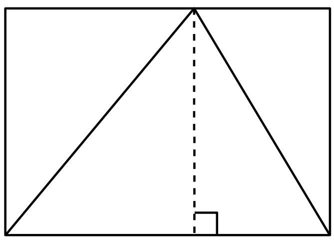
8) Con añadir el globo, el peso se redujo en 6g, entonces el peso del globo es de –6g. Eso levanta la pregunta: ¿Existen pesos negativos? – Sí, porque el peso de un cuerpo es la fuerza con la cual "presiona" hacia abajo. Pero la fuerza de un globo de helio actúa en la dirección opuesta: jala hacia arriba. Por eso es correcto decir que su peso es negativo.

9) Tomando en cuenta solamente los números mencionados en el problema, la cuenta no sale así. Las dos explicaciones más probables serían: a) en la tienda calcularon mal; o b) yo tenía una deuda anterior que no se menciona en el problema. (En este caso, ¿cuánto fue la deuda anterior?)

Unidad 94: Áreas de triángulos, y de figuras compuestas de triángulos

Áreas de triángulos:

El dibujo muestra la línea adicional que resuelve el problema. Esta línea, perpendicular a la base, se llama la *altura* del triángulo. La altura parte el rectángulo en dos partes, y también parte el triángulo en dos partes. En cada uno de los rectángulos pequeños tenemos ahora la misma situación como en la primera pregunta de la investigación: un triángulo que es la mitad del rectángulo. Por eso, también el triángulo entero es la mitad del rectángulo entero.



Con eso podemos ahora calcular el área de cualquier triángulo. Con un pequeño inconveniente: necesitamos saber su altura. (Existe también una forma de calcular el área a partir de los tres lados del triángulo, pero eso es bastante más complicado. Lo aprenderemos en el nivel de Secundaria.)

Todo polígono consiste en triángulos – Desafío adicional:

Un nonágono *regular* se puede partir en 9 triángulos iguales, desde el centro del círculo. Entonces necesitas construir uno solo de estos triángulos, con su altura, medir y calcular su área, y multiplicarla por 9.

(Acerca de la construcción de polígonos regulares, vea la *Unidad 59*.)

Área de un paralelogramo: Si quitamos del paralelogramo el triángulo sombreado a la derecha, y lo colocamos al lado izquierdo, entonces hemos convertido el paralelogramo en un rectángulo. Este rectángulo tiene la misma área como el paralelogramo, porque no hemos aumentado ni quitado nada. Pero el rectángulo tiene también la misma base y la misma altura como el paralelogramo. Entonces, con estos datos podemos calcular el área: es igual al área de un rectángulo con estas medidas.

Área de un rombo: Un cuarto del rombo se ha complementado hacia afuera para formar un rectángulo. Ya que el rombo es simétrico, podemos hacer lo mismo por todos los 4 lados.
Los lados de estos rectángulos son las *diagonales medias* del rombo. Entonces, para calcular el área necesitamos las medidas de las diagonales.
Un poco más fácil es el cálculo si en vez de considerar los 4 rectángulos pequeños, notamos que forman juntos un único rectángulo grande. Los lados de este rectángulo son ahora las diagonales *enteras*.

Nota: Cada rombo es a la vez un paralelogramo. Entonces, alternativamente se puede calcular su área también desde su lado y su altura, como lo hicimos para los paralelogramos.

Para investigadores aficionados: Dos desafíos adicionales

Lo siento, aquí no doy pautas. Ten paciencia hasta el nivel de Secundaria I ... ¡tienen que quedar todavía unos misterios para resolver más tarde!

Unidad 95: Propiedades de ángulos

Problemas de construcción:

1, 2, 3) Construcciones como éstas hemos practicado ya en la *Unidades 58 y 59*.

4) Un rombo es una figura simétrica en dos direcciones. Por eso, las diagonales de un rombo tienen dos propiedades particulares. Estas te permiten construirlas, y con eso tienes los vértices del rombo.

5) Si tenemos la base del rectángulo, ¿qué más podemos construir inmediatamente, todavía sin tomar en cuenta la diagonal? (Piensa cómo procederías para construir un rectángulo de manera "normal".) – Ahora, si la diagonal mide 8 cm, esto significa que la distancia entre dos vértices opuestos mide 8 cm. ¿Dónde se encuentran todos los puntos que tienen una distancia de 8 cm de un punto dado? Uno de ellos tiene que encontrarse en una de las líneas que ya hemos construido; y con eso debes poder ubicarlo.
Otra manera de verlo es esta: Una diagonal divide el rectángulo en dos triángulos. Entonces podemos formular el problema de esta otra forma: Construye un triángulo con un lado de 6.5 cm, un lado de 8 cm, y un ángulo recto opuesto al lado de 8 cm. ¿Puedes construir este triángulo? Después complétalo para tener el rectángulo.

6) La diagonal del rombo, junto con dos de sus lados, forma un triángulo. ¿Puedes construir este triángulo? Después complétalo para obtener el rombo.

7) Aquí también ayuda pensar en una mitad del paralelogramo, que es un triángulo.

8) Es suficiente saber cómo construir un segmento de 6 cm que une las dos paralelas. (Fija un punto cualquiera en una de las rectas. ¿Dónde se encuentran todos los puntos que tienen una distancia de 6 cm de este punto?)

En realidad no importa si el triángulo es isósceles o no. De la misma manera podríamos construir por ejemplo un triángulo con AB = 6 cm y BC = 9 cm.

9) Aquí no podemos proceder como en el problema anterior, porque no sabemos los lados del triángulo. Pero sabemos algo acerca de los *ángulos* en un triángulo equilátero. ¿Puedes construir estos ángulos?

10) Este problema es otra vez similar al problema no.8. Así como podemos hacer encajar un segmento entre dos paralelas, podemos también hacerlo encajar en una circunferencia: Encuentra un punto de la circunferencia que se encuentra a una distancia de 5 cm de A. Ese será el vértice B. Desde allí puedes continuar al vértice C.

11) Aquí es práctico hacer primero unos cálculos, antes de dibujar. ¿Qué sabemos acerca de las diagonales y los ángulos en un rectángulo?
Nota 1: Las diagonales de un rectángulo se cortan por la mitad. Entonces, si dibujamos *ambas* diagonales, dividen el rectángulo en cuatro triángulos *isósceles*.
Nota 2: Este problema tiene dos soluciones distintas (no congruentes). ¿Encuentras ambas?

Hoja de trabajo 95.1:

12) Para que sea un rectángulo, tiene que haber un ángulo recto en B. Entonces, ¿puedes construir el lado BC? Después solamente falta completarlo.

13) Sabemos cuánto debe medir el lado A_1B_1 (¡igual a AB!). Ya sabes cómo ubicar los puntos que están a una distancia determinada de B_1 (¿o no? Entonces repasa los problemas 5, 8 y 10.) Ya que A_1 tiene que estar sobre la recta ***a***, puedes construir este vértice A_1. Desde allí puedes completar el triángulo, "copiando" sus otros lados con el compás.
¿Cuántas ubicaciones posibles hay para A_1? – Y desde cada una de estas ubicaciones, ¿cuántas posibilidades existen para completar un triángulo con los lados dados? (En total hay *más que dos* soluciones. Recuerda que una figura reflejada "en espejo" también es congruente.)

14) Si quisiéramos construir un triángulo isósceles "cualquiera" sobre AC, ¿qué construiríamos primero? Respectivamente, ¿en cuál línea tiene que encontrarse el vértice B necesariamente? – Después tenemos otra condición para la ubicación de B, que es su distancia de D. ¿Cómo encuentras un punto que tiene una distancia de 3 cm de D, y que pertenece a la línea que construiste primero? Con eso ya tienes todo lo que necesitas. (¿Cuántas soluciones hay?)

15) La construcción no debe ser difícil. Lo interesante es la observación. Compara por ejemplo:
- los ángulos del triángulo grande con los ángulos del triángulo original.
- la longitud de cada lado del triángulo original, con la longitud de su paralela respectiva.

16) Habrá que comenzar con el lado AC, porque conocemos su longitud. (Recuerda el problema 10.) Después tenemos que construir un triángulo isósceles sobre el segmento AC. Para eso, recuerda el problema no.14.
- Aquí es también una pregunta interesante cuántas soluciones existen. (Puedo decirte que existen por lo menos dos soluciones que no son congruentes; y además hay soluciones congruentes.)

Problemas de calcular ángulos:

1) Dos ángulos adyacentes en una recta son *suplementarios*, o sea, juntos suman un ángulo llano.

2, 3) Sabemos algo acerca de la suma de los ángulos en un triángulo...

4) Aquí también podemos calcular el tercer ángulo del triángulo. El ángulo A es suplementario a ese tercer ángulo. (Un ángulo en esta posición se llama un *ángulo exterior* del triángulo.)
Una pregunta después de calcularlo: ¿Notas una propiedad particular del ángulo A, respecto a los dos ángulos que son dados?

5, 6) Aplica lo que sabes acerca de los ángulos en paralelas (repetidas veces, si es necesario).

7) Calcula primero los ángulos del triángulo que contiene el ángulo de 35º. Después puedes aplicar las propiedades de los ángulos en paralelas.

8) Similar al problema 7, pero "al revés": Primero busca dónde hay otros ángulos de 28º. Después puedes calcular ángulos en triángulos y así descubrir A.

9) ¿Qué sabes acerca de los ángulos en un triángulo isósceles? Eso te permite calcular los tres ángulos del triángulo.

10) Casi igual al problema 9. Solamente que ahora los dos ángulos iguales son desconocidos. Pero podemos calcular cuánto debe ser su *suma*; y entonces podrás calcular también cuánto mide uno solo de ellos.

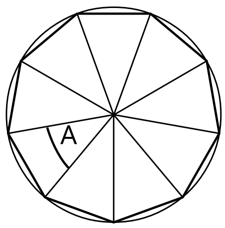
11) No debe necesitar pauta: Todo lo que tienes que hacer aquí, lo aplicaste ya en problemas anteriores.

12) Busca ángulos en paralelas. Después podrás calcular los ángulos del triángulo donde se encuentra A.

13) No te dejes confundir por los muchos ángulos. En la figura hay un triángulo donde conoces dos ángulos, entonces puedes calcular el tercero. Desde allí puedes pasar a los ángulos restantes en los otros triángulos

14, 15) Combina lo que sabes acerca de los ángulos en paralelas, con lo que sabes acerca de los ángulos en un triángulo isósceles.

16) Cada polígono regular se puede dividir en triángulos desde su centro. Estos triángulos son *isósceles*, o sea, tienen dos lados iguales, porque son los radios del círculo que dibujamos para construir el polígono. Y dentro de un mismo polígono, todos estos triángulos son congruentes.



Ahora podemos calcular el ángulo (A) que cada uno de estos triángulos tiene en el *centro*. (Vea *Unidad 59*.) Y eso a su vez nos permite calcular los otros ángulos de los triángulos. Con eso ya tenemos la solución.

Unidad 96: Aplicaciones adicionales de la semejanza geométrica

Descubre cómo calcular los siguientes problemas:

La clave siempre son los triángulos semejantes.

1) Esta es la figura que usamos para explicar el teorema de Thales. Prolonga los segmentos EA y FB hasta que las rectas se crucen, y tienes triángulos semejantes. O aplica directamente el teorema de Thales.

2) Si observas lo que sucede con los ángulos, verás que los triángulos ABC y CDE son semejantes. O puedes aplicar directamente el teorema de Thales. (Imagínate una tercera paralela que pasa por C.)
Solamente toma en cuenta que para la proporción necesitas CE, no AE. Eso es fácil: CE = AE – AC.

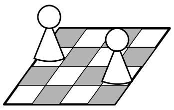
3) Aquí tenemos los triángulos semejantes directamente en la figura. Todos los lados del triángulo OAB son proporcionales a los lados correspondientes de OCD.

4) Es una ampliación de la figura 3). Tenemos ahora *dos* pares de triángulos semejantes. Los lados OB resp. OE pertenecen a ambos. Por tanto, el factor de proporcionalidad es el mismo en ambos pares de triángulos. Entonces es también AB : DE = BC : EF. (Eso es un corolario importante del teorema de Thales.)

Dividir un segmento de manera proporcional – Para pensar:

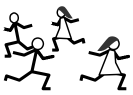
Recuerda cómo funciona el reparto proporcional. Si queremos una proporción de 1:2:4, el primer segmento mide una "parte", el siguiente 2 "partes", y el último 4 "partes". Entonces, ¿en cuántas partes iguales hay que partir el segmento? – Eso lo puedes hacer con la construcción anterior. Entonces solamente falta asignar a cada segmento el número correspondiente de "partes".

Anexo C: Índice de juegos



Juegos de mesa

Juegos en círculo



Juegos movidos

Anexo D:
Índice de temas matemáticos y pedagógicos

Nota: Este índice intenta enumerar todos los temas matemáticos significativos que intervienen de alguna manera en las Unidades de aprendizaje. Pero eso no significa que los niños tengan que aprender todos los temas o conceptos que figuran en este índice. Por ejemplo, si aparece la "Congruencia modular" como un tema en la Unidad 22, eso no implica que los niños tengan que aprender este término explícitamente; allí se lo menciona solamente para dar un poco de trasfondo a los educadores.

¿Cómo aprenden los niños la matemática?

Los métodos de la matemática activa, con éxito comprobado en la práctica, se orientan en las necesidades y características de los niños para un aprendizaje óptimo: Actividades lúdicas, movimiento físico, la representación de los principios matemáticos mediante materiales concretos, la conexión con la vida cotidiana, y todo eso en un ambiente alentador sin estrés.

Estos métodos son ideales para la educación en el hogar ("homeschooling") porque permiten adaptarse individualmente al desarrollo mental natural de cada niño. Usted no necesita conocimientos especiales en matemática; las explicaciones del libro le guiarán paso por paso.
Igualmente los alumnos y educadores de escuelas alternativas encontrarán aquí muchas ideas que enriquecerán su práctica.

Sumérjase con sus niños en una aventura de aprendizaje que les permitirá ver la matemática desde una perspectiva nueva.

Los tomos de Primaria II, para niños de 9 a 12 años aproximadamente, cubren las cuatro operaciones básicas con números grandes, con fracciones y con números decimales; los conceptos de múltiplos y divisores; construcciones geométricas en el contexto de proyectos prácticos; cálculos con unidades de medida; conceptos de la teoría de conjuntos; diversas habilidades de razonamiento que se entrenan mediante juegos de estrategia, rompecabezas de matemática recreativa, y desafíos de investigación matemática; y otros temas. Algunos capítulos relacionan la matemática con otros campos del saber, tales como la arquitectura, el arte, la música, la astronomía, y otros.

La serie completa de "Matemática Activa" consiste en los siguientes tomos:

- Pre-Matemática (4 a 6 años aprox.)
- Primaria I (6 a 9 años aprox.)
- Primaria I - Hojas de trabajo
- Primaria II (9 a 12 años aprox.)
- Primaria II - Hojas de trabajo
- Secundaria I (12 a 15 años aprox.)
- Secundaria II (Pre-Universitario)
- Matemática divina (Tomo complementario)

Hans Ruegg tiene más de 20 años de experiencia educando a niños y adolescentes, y desarrollando alternativas pedagógicas. Ofrece asesoramiento a familias y escuelas. Sus cursos por internet han inspirado a cientos de participantes. Junto con su esposa educaron a sus dos hijos en casa, desde los primeros pasos hasta el ingreso a la universidad.