Hans Ruegg

Matemática activa

para familias educadoras y escuelas alternativas

Primaria II

9 a 12 años

Parte A (Aritmética)

Hans Ruegg

Matemática activa

para familias educadoras

y escuelas alternativas

Primaria II

(de 9 a 12 años aproximadamente)

Parte A

Aritmética

Se ofrecen los siguientes libros de "Matemática Activa ...":

Pre-Matemática (4 a 6 años aprox.) - con hojas de trabajo incluidos.

Primaria I (6 a 9 años aprox.)

Primaria I, Libro de trabajo

Primaria II (9 a 12 años aprox.) Parte A: Aritmética / Parte B: Geometría, Razonamiento, y temas adicionales

Primaria II, Libro de trabajo

Secundaria I (12 a 15 años aprox.)

Secundaria II (Pre-universitario)

Matemática Divina (Complemento para educadores)

Contacto por internet para consultas:
https://educacionCristianaAlternativa.wordpress.com/libros-de-matematica-activa/

Unas demostraciones en video de los métodos de la matemática activa se encuentran en:
http://www.youtube.com/user/educadorDiferente

Índice de contenido

Introducción pedagógica ... **9**

¿Cómo usar las unidades de aprendizaje en este libro? ... **21**

Descripción de unos materiales frecuentemente usados ... **29**

Bloque I: Números y operaciones básicas (Unidades 1 a 13) ... **31**
Resumen de principios matemáticos acerca de las operaciones básicas ... 33
Unidad 1 - Números con varios miles ... 38
Unidad 2 - El sistema decimal (I) ... 45
Unidad 3 - Suma y resta mental y con material concreto ... 50
Unidad 4 - Sumar cifra por cifra ... 58
Unidad 5 - Unidades de medida ... 64
Unidad 6 - Restar cifra por cifra ... 68
Unidad 7 - Sumas y restas con unidades de medida ... 74
Unidad 8 - El sistema decimal (II) ... 78
Unidad 9 - Multiplicación mental y con material concreto ... 80
Unidad 10 - Multiplicación cifra por cifra ... 84
Unidad 11 - División mental y con material concreto ... 87
Unidad 12 - División cifra por cifra ... 91
Unidad 13 - Operaciones combinadas ... 99

Bloque II: Múltiplos y divisores (Unidades 14 a 25) ... **105**
Resumen de principios matemáticos acerca de los múltiplos y divisores ... 107
Unidad 14 - Múltiplos y divisores ... 110
Unidad 15 - Divisibilidad entre 2, 3, 5 y 9 ... 112
Unidad 16 - Factorización; números primos ... 115
Unidad 17 - Divisores comunes ... 121
Unidad 18 - El algoritmo de Euclides, y por qué funciona ... 126
Unidad 19 - Múltiplos comunes ... 129
Unidad 20 - Proporciones ... 134
Unidad 21 - Más proporciones ... 141
Unidad 22 - La regla del 9 y la ley del residuo ... 144
Unidad 23 - Divisibilidad entre números compuestos ... 148
Unidad 24 - Diagramas de divisores ... 149
Unidad 25 - Investigación: Los múltiplos de 11 ... 152

Bloque III: Cálculos con números mayores (Unidades 26 a 33) ... **157**
Unidad 26 - Números hasta un millón ... 159
Unidad 27 - Sumar y restar números grandes ... 163
Unidad 28 - Multiplicación por números de varias cifras ... 165
Unidad 29 - División entre números de varias cifras ... 173
Unidad 30 - Investigaciones relacionadas con la multiplicación y división ... 182
Unidad 31 - Conversión de unidades de medida con números grandes ... 184
Unidad 32 - Medidas de áreas ... 187
Unidad 33 - Medidas del tiempo ... 190

Bloque IV: Fracciones (Unidades 34 a 44)....193
Unidad 34 - Introducción a las fracciones.... 195
Unidad 35 - Fracciones homogéneas.... 198
Unidad 36 - Números mixtos.... 200
Unidad 37 - Las fracciones son divisiones.... 205
Unidad 38 - Multiplicación y división de fracciones con enteros.... 207
Unidad 39 - Fracciones equivalentes; amplificar y simplificar.... 213
Unidad 40 - Comparar, sumar y restar fracciones heterogéneas.... 220
Unidad 41 - Multiplicación de fracciones.... 226
Unidad 42 - División de fracciones; el valor recíproco.... 229
Unidad 43 - Proporciones y fracciones.... 235
Unidad 44 - Matemática y música.... 238

Bloque V: Números decimales (Unidades 45 a 53)....249
Unidad 45 - Conversión de unidades de medida (Repaso y ampliación).... 251
Unidad 46 - El sistema decimal (III).... 253
Unidad 47 - Números decimales y las unidades de medida.... 259
Unidad 48 - Suma y resta de números decimales.... 263
Unidad 49 - Multiplicación de números decimales.... 266
Unidad 50 - División de números decimales entre enteros.... 269
Unidad 51 - División entre números decimales.... 273
Unidad 52 - Porcentajes.... 275
Unidad 53 - Proyectos relacionados con unidades de medida.... 281

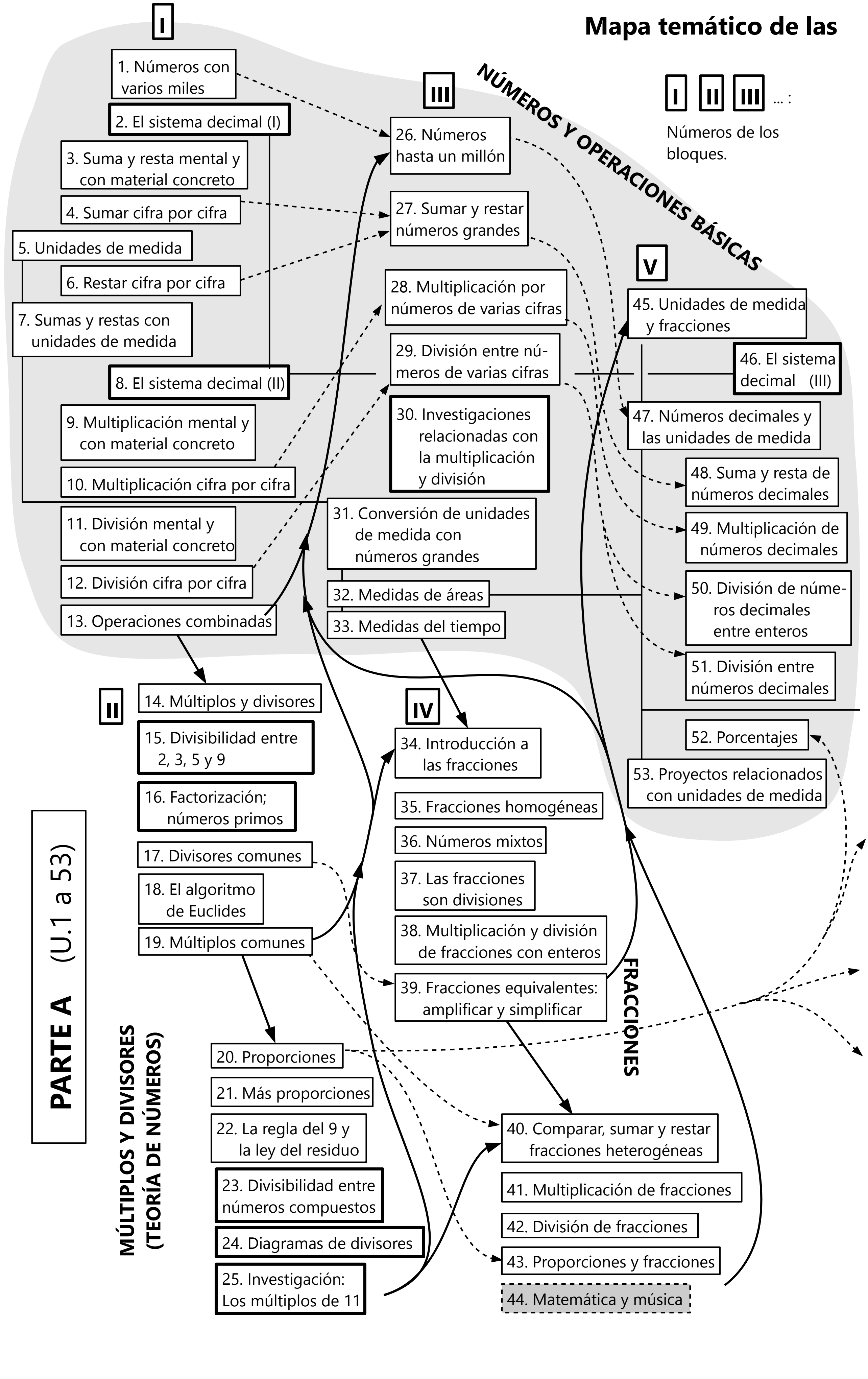
Pautas para problemas y preguntas de investigación....283
Pautas para el Bloque I.... 283
Pautas para el Bloque II.... 286
Pautas para el Bloque III.... 294
Pautas para el Bloque IV.... 298
Pautas para el Bloque V.... 304

Anexo B: Citas y notas bibliográficas....309

Anexo C: Índice de juegos....315

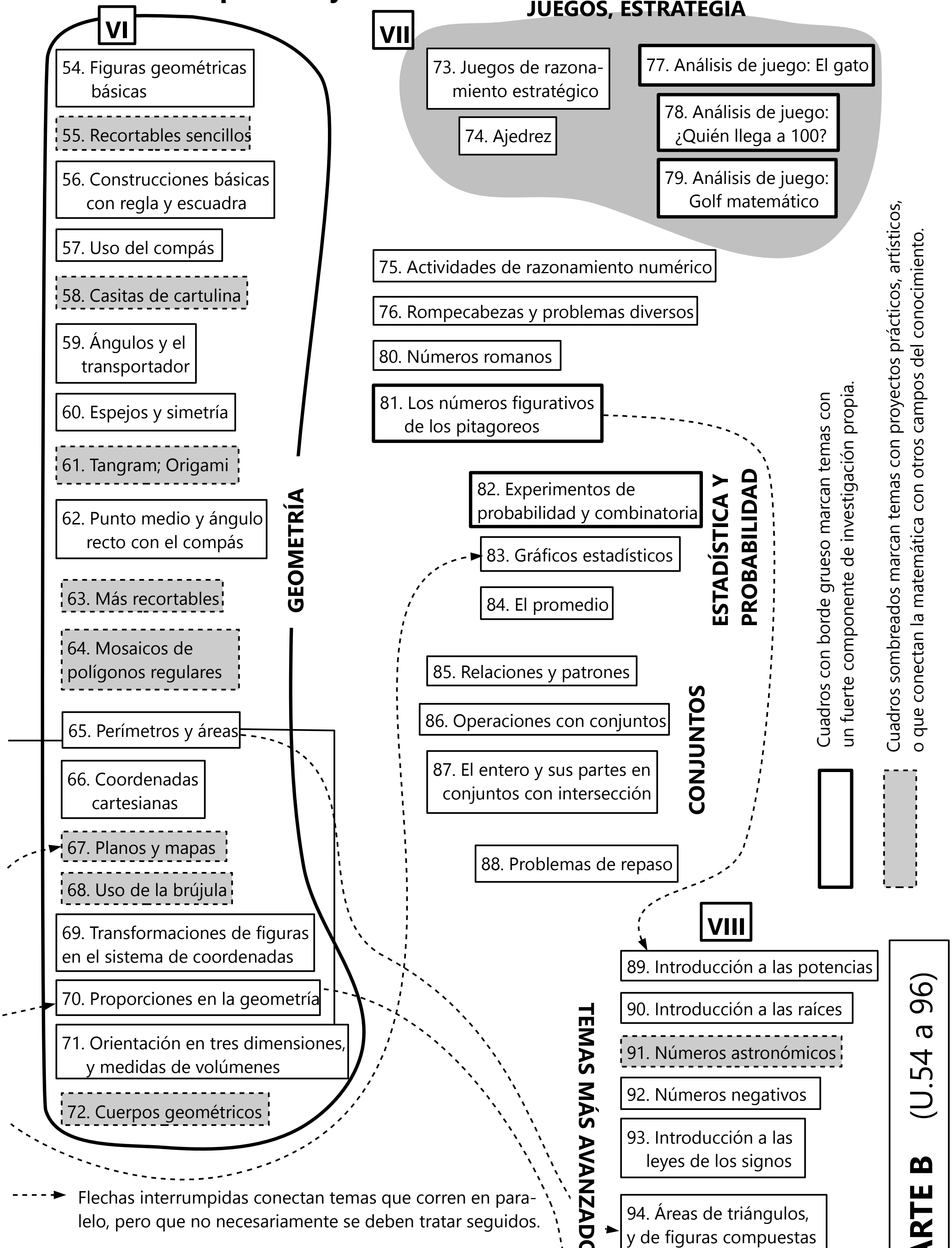
Anexo D: Índice de temas matemáticos y pedagógicos....317

Las Unidades 54 a 96 (Bloques VI a VIII) se encuentran en la Parte B.



Mapa temático de las
NÚMEROS Y OPERACIONES BÁSICAS
I II III ... :
Números de los bloques.
I
1. Números con varios miles
2. El sistema decimal (I)
3. Suma y resta mental y con material concreto
4. Sumar cifra por cifra
5. Unidades de medida
6. Restar cifra por cifra
7. Sumas y restas con unidades de medida
8. El sistema decimal (II)
9. Multiplicación mental y con material concreto
10. Multiplicación cifra por cifra
11. División mental y con material concreto
12. División cifra por cifra
13. Operaciones combinadas
III
26. Números hasta un millón
27. Sumar y restar números grandes
28. Multiplicación por números de varias cifras
29. División entre números de varias cifras
30. Investigaciones relacionadas con la multiplicación y división
31. Conversión de unidades de medida con números grandes
32. Medidas de áreas
33. Medidas del tiempo
V
45. Unidades de medida y fracciones
46. El sistema decimal (III)
47. Números decimales y las unidades de medida
48. Suma y resta de números decimales
49. Multiplicación de números decimales
50. División de números decimales entre enteros
51. División entre números decimales
52. Porcentajes
53. Proyectos relacionados con unidades de medida
II
14. Múltiplos y divisores
15. Divisibilidad entre 2, 3, 5 y 9
16. Factorización; números primos
17. Divisores comunes
18. El algoritmo de Euclides
19. Múltiplos comunes
20. Proporciones
21. Más proporciones
22. La regla del 9 y la ley del residuo
23. Divisibilidad entre números compuestos
24. Diagramas de divisores
25. Investigación: Los múltiplos de 11
IV
34. Introducción a las fracciones
35. Fracciones homogéneas
36. Números mixtos
37. Las fracciones son divisiones
38. Multiplicación y división de fracciones con enteros
39. Fracciones equivalentes: amplificar y simplificar
40. Comparar, sumar y restar fracciones heterogéneas
41. Multiplicación de fracciones
42. División de fracciones
43. Proporciones y fracciones
44. Matemática y música
FRACCIONES
MÚLTIPLOS Y DIVISORES (TEORÍA DE NÚMEROS)
PARTE A (U.1 a 53)

unidades de aprendizaje



Flechas interrumpidas conectan temas que corren en paralelo, pero que no necesariamente se deben tratar seguidos.

Flechas ininterrumpidas señalan varias opciones de un orden recomendado para avanzar entre bloques o medios bloques. *(Los temas de los Bloques VI y VII pueden tratarse intercalados con los temas de los Bloques I a V.)*

Líneas horizontales y verticales conectan los temas recurrentes del sistema decimal, y de las unidades de medida.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Dios, mi Padre celestial, por haberme dado fuerzas para la elaboración y publicación de este libro.

Agradezco a todos mis alumnos y las familias educadoras que participaron en la aplicación experimental de estos métodos y me permitieron desarrollarlos y mejorarlos.

Agradezco a los estudiantes de mis cursos a distancia, por sus comentarios y sugerencias.

Agradezco a todos los colaboradores de escuelas alternativas que me brindaron ideas, me abrieron las puertas de sus escuelas y compartieron su trabajo conmigo.

Agradezco a todos los amigos que contribuyeron a este proyecto con su apoyo económico y logístico.

Agradezco a mi esposa por todo su amor, ánimo y paciencia que me brindó durante los tiempos de trabajo intenso en este libro.

Nota lingüística:

Aprendí el idioma español en un tiempo cuando todavía se daba por sentado que un plural masculino incluye tanto a seres masculinos como femeninos, como es de hecho la regla oficial. Por tanto, para evitar complicaciones del lenguaje y para que nadie se sienta excluido, deseo aclarar desde el inicio que en este libro el plural "niños" incluye también a las niñas; el plural "padres" incluye también a las madres; el plural "educadores" incluye también a las educadoras; el plural "profesores" incluye también a las profesoras; etc; al igual como el plural femenino "personas" incluye también a los varones. Igualmente cuando se usan palabras como "el educador", "el niño", "una persona" en un sentido genérico, se incluyen tanto varones como mujeres. Algunas veces he diferenciado cuando me dirijo al lector o la lectora individual; pero por lo general he preferido ahorrarme los(las) "(os)" y "(as)" innecesarios(as), y librarme de malabares tales como: "Las y los educadores(as) buenos(as) son amigos(as) de los niños y las niñas pequeños(as)." Eso no implica menosprecio hacia nadie. La matemática no hace diferencia entre varones y mujeres; es igualmente accesible para todos.

Introducción pedagógica

¿Qué hay de especial en este libro de matemática?

Por favor tome el tiempo de leer esta introducción detenidamente. Aquí se explican los principios pedagógicos que hacen la diferencia entre este libro de matemática y otros libros. Sobre todo, si usted y sus niños quieren realmente beneficiarse de este método, ¡no use este libro como si fuera un “libro escolar” tradicional!

Aun si usted ya conoce este método desde el tomo anterior (Primaria I), no pase por alto esta introducción, porque aquí encontrará unas pautas nuevas que se aplican al nivel de Primaria II en particular.

Este libro quiere ayudarle a descubrir nuevos caminos de enseñar y aprender matemática. Si usted aprendió matemática en una escuela tradicional, intente dejar atrás sus recuerdos escolares y olvidarlos. Conviértase nuevamente en un(a) aprendedor(a) y descubridor(a). Olvídese de la rutina tediosa, de las presiones y de las humillaciones que demasiado a menudo acompañan el aprendizaje en las escuelas tradicionales. En cambio, desentierre nuevamente la curiosidad que usted tenía de niño(a) pequeño(a) por explorar un mundo fascinante alrededor de usted. Explore este mundo al lado de sus niños.

¡Atrévase a hacer matemática!

Al embarcarse a esta aventura de aprendizaje, es posible que usted como educador(a) sienta temor: "Nunca he sido bueno(a) en matemática. ¿Cómo voy a enseñarla a mis niños?" Quizás surgen recuerdos de una jungla de símbolos incomprensibles, de exámenes desaprobados y de los castigos subsiguientes... Si usted sufre de un "trauma matemático" debido a sus experiencias escolares, usted no está solo(a).

Si para usted la matemática siempre ha sido un experiencia positiva y emocionante, espero que las actividades de este libro le ayuden a transmitir su entusiasmo a sus niños. Y si no fue así, que esta nueva oportunidad de explorar la matemática junto a sus niños se convierta en un medio para usted mismo(a), de vencer el "trauma matemático". Como un primer paso hacia este fin, analicemos de dónde viene este trauma en primer lugar.

Cómo se origina el "trauma matemático"

Si un niño se queda "traumado" con la matemática, con mayor frecuencia eso se debe a métodos de enseñanza inadecuados:

La enseñanza de temas demasiado avanzados a una edad demasiado temprana.

Padres y profesores ambiciosos a menudo desean que los niños avancen rápidamente en sus conocimientos; entonces los presionan a asimilar conceptos que no están de acuerdo a su edad y su nivel de comprensión. Eso no les hace ningún bien a los niños; al contrario, tiene efectos dañinos. *(Explicaremos eso en las secciones siguientes acerca del desarrollo del niño. También se encuentran diversas citas de investigaciones al respecto, en el Anexo B.)*

Uno de esos efectos es que el niño se queda de por vida con la impresión de que "la matemática es difícil; yo no puedo comprender la matemática". Pero eso no es cierto. La matemática le pareció demasiado difícil *porque el niño era demasiado joven al aprenderla*. Si los mismos conceptos se enseñaran al niño dos o tres años más tarde, cuando su cerebro haya madurado lo suficiente, entonces los comprendería con mucho más facilidad.

Castigos por no entender.

El niño que es castigado por "no entender", se siente culpable por ello y piensa: "Soy un niño tonto y malo." Pero ¡el "no entender" no es ninguna culpa del niño! Eso no es pereza, y tampoco es maldad. Mas bien es una señal de que el educador está sobrecargando al niño, no está respetando su ritmo de desarrollo, o está usando un lenguaje que los niños no pueden comprender. Si un niño no comprende, es el educador quien debe corregirse.

Métodos demasiado abstractos de enseñanza.

Los niños de primaria todavía no piensan de manera abstracta. Enseñarles definiciones abstractas, o hacerles manipular símbolos que no pueden asociar con experiencias concretas, es como si les hiciéramos memorizar palabras en chino: En vez de hacer entender, produce confusión.

Memorización de conocimientos aislados.

En la matemática, los datos, propiedades, reglas y procedimientos no tienen sentido cuando se presentan aislados los unos de los otros. Por eso, los niños que fueron enseñados de esta manera memorística, están confundidos. (Una enseñanza *basada en principios* enmienda este error. Hablaremos de esto más abajo.)

Podríamos mencionar más ejemplos, pero éstos sean suficientes para ilustrar lo que quiero decir: El "trauma matemático" no es un defecto del niño, ni es culpa de la matemática. Es un producto de una *enseñanza inadecuada* de la matemática.

Entonces, para toda persona afectada por este problema, un primer paso para superarlo puede ser este pensamiento: Si estuve "mal en matemática", no es porque yo fuera incapaz. Tampoco es porque la matemática fuera algo horrible. Por tanto, *un nuevo comienzo es posible*.

Empoderados a hacer matemática

Pensar matemáticamente es una función fundamental de la mente humana. Por principio, toda persona humana es capaz de pensar matemáticamente. Entonces, ¡atrévase a hacerlo! Comience con temas elementales como los que se presentan en este libro y el anterior. Haga las actividades concretas junto con sus niños, y sea creativo: Intente descubrir nuevas maneras de hacerlo. Observe el "comportamiento" de los números o de los objetos, e intente descubrir patrones, regularidades, propiedades nuevas.

No se deje limitar por los procedimientos preestablecidos de un libro escolar. – Para la mayoría de las operaciones y problemas descritos en este libro, se dan varias opciones de cómo se puede hacer. Así pueden escoger la forma más conveniente o la más entendible ... o pueden inventar su propio método.

Tome tiempo para probar, experimentar, descubrir. No exija resultados inmediatos – ni de los niños ni de usted mismo. Tengan paciencia con ustedes mismos, hasta que algo haga "clic" en la mente. Entonces alégrense, celebren el descubrimiento; y después pasen al siguiente desafío.

Pónganse tampoco bajo la presión de tener que "rendir" en un examen. En la matemática, el éxito no se mide por calificaciones en un examen. Se mide por las exploraciones y razonamientos que uno realiza para descubrir algo nuevo, y por el entusiasmo que uno experimenta a lo largo de estos "viajes de exploración". *(Para una forma de evaluar los progresos sin dar calificaciones, vea "El camino de aprendizaje", p.25.)*

De hecho, el hacer matemática resulta más satisfactorio cuando no nos dejamos limitar por nada y por nadie – ni por el tiempo, ni por las exigencias de un profesor o de un currículo, ni por nuestras propias expectativas acerca de lo que deberíamos alcanzar. Lo único que nos limita son las leyes de la matemática misma. De vez en cuando, estas leyes nos harán ver que alguno de nuestros razonamientos fue equivocado, o que algún procedimiento que intentamos no nos va a llevar a la solución que buscamos. Eso no es ningún fracaso; es una parte normal del proceso de aprendizaje, y nos da la oportunidad de aprender algo nuevo.

Atrévase a hacer matemática de manera "infantil"

Si usted está acostumbrado(a) a las formas escolares de enseñar matemática, algunas actividades sugeridas en este libro pueden parecerle demasiado "infantiles". ¿De verdad se puede aprender matemática como si fuera un juego?

– Sí, la matemática es efectivamente algo como un juego de la mente. Un juego es una actividad que sigue determinadas reglas, pero que permite aplicar ideas nuevas y estrategias propias dentro del marco de estas reglas; y que no necesita tener ninguna relación con la "vida real" (aunque a veces la tiene). Todo eso se aplica a la matemática. Por eso, hay un lado de la matemática que congenia muy bien con el deseo de los niños de jugar. Descubramos juntos este aspecto lúdico de la matemática.

En este camino quizás encontramos que nosotros mismos, los padres o profesores, hemos "desaprendido" el jugar y nos sentimos un poco incómodos. ¿Será porque hemos perdido el contacto con nuestra propia niñez? Aprovechemos la oportunidad de volver a establecer este contacto, y de aprender nuevamente a jugar, juntos con nuestros niños. Si quiero comprender a los niños, tengo que reconciliarme con el niño que yo mismo una vez fui.

Algunos adultos, al pensar en su niñez, espontáneamente se identifican con los adultos quienes los educaron; y aun si sus padres y profesores los humillaron y maltrataron, dicen: "Yo he salido bien, y voy a educar a mis hijos y alumnos de la misma manera." Pero ya no pueden recordar cómo se sentían ellos de niños cuando fueron maltratados; ni pueden recordar sus deseos y ambiciones de niños, sus juegos o pasatiempos favoritos – o sea, ya no pueden conectarse con el niño que ellos una vez fueron.
Si esto sucede, eso indica que inconscientemente han reprimido los recuerdos de su niñez; un mecanismo psicológico que entra en acción para evitar que nos quedemos abrumados por recuerdos demasiado dolorosos. Pero este mecanismo que protege el bienestar emocional de la persona afectada, a la vez impide que pueda comprender a los niños. Para poder edificar una relación sana y de confianza con los niños, es necesario poder ver nuestra propia niñez desde la perspectiva del niño que fuimos, y volver a identificarnos con este nuestro "yo infantil". Eso puede implicar enfrentarnos con recuerdos dolorosos, y buscar sanidad para esas heridas del pasado. *(Más sobre este tema en el libro aparte, "Matemática divina".)*

Principios de una matemática activa

Los métodos usados en este libro se basan en los siguientes principios:

1. Aprender matemática **con la actividad propia y con operaciones concretas.**

> *"Pero sean hacedores de la palabra y no solamente oidores, con lo cual se engañarían a ustedes mismos (en el cálculo)*."*

La matemática activa requiere de diversas maneras la *actividad propia* del niño:

- Los conceptos matemáticos se experimentan *manipulando objetos concreto*s (bloques de madera, semillas, cuentas, ábaco, regletas Cuisenaire, etc.) y jugando. Estas "operaciones concretas" tienen especial importancia en el nivel de primaria.

- Muchas experiencias prácticas se pueden hacer con los *quehaceres diarios del hogar* (cocinar, limpiar, hacer compras, etc.), o con pequeñas *manualidades*. Un buen educador identificará y aprovechará las oportunidades educativas que se dan durante estas actividades, para señalar (por ejemplo) ciertos conceptos matemáticos relacionados con la experiencia.

- Se presentan suficientes oportunidades para el *movimiento físico*, sobre todo en la edad preescolar y en los grados inferiores de la primaria.

- Se dan suficientes oportunidades para que el niño haga *decisiones propias* acerca de sus actividades. Por ejemplo, le presentamos diversas opciones de materiales con que trabajar (ábaco, material Base 10, tapas de botellas con valores asignados, etc.), y permitimos que el niño decida cuál quiere usar.

A medida que aumenta la capacidad del niño de leer, podrá leer y comprender por sí mismo muchas de las instrucciones en este libro, y podrá participar en la elección de las actividades a realizar. Las actividades de este libro no son ninguna secuencia obligatoria, y es perfectamente posible adquirir los conocimientos matemáticos necesarios sin llevar a cabo todas las actividades sugeridas. (Más sobre eso en la sección "¿Cómo usar las unidades de aprendizaje en este libro?")

OJO: ¡La manipulación de "mundos virtuales" en videojuegos o programas "educativos" de computadora no tiene el mismo beneficio! Al contrario, los tiempos prolongados ante la pantalla tienen efectos dañinos en el desarrollo de los niños.1)

Carta de Santiago 1:22. La palabra griega original en este pasaje significa literalmente "calcular falsamente (para engañar a alguien)".

1) Vea Nota 1 en el Anexo B.

2. Aprender matemática **según las necesidades del niño, y su nivel de desarrollo.**

> *"Ustedes padres, no provoquen a vuestros hijos, para que no se desanimen."**

Para entender conceptos matemáticos, primero tienen que desarrollarse ciertas estructuras mentales en el niño. Eso es un proceso natural que necesita tiempo. (Vea los siguientes apartados acerca del desarrollo del niño.) Entonces **no apresuremos al niño**; no intentemos acelerarlo artificialmente. Hay que enseñarlo cuando está listo, no antes.

Los niños "acelerados" a una edad temprana, a menudo sufren problemas de aprendizaje más adelante. Han sido obligados a asimilar conceptos y conocimientos que su cerebro todavía no pudo comprender adecuadamente; en consecuencia sus estructuras cerebrales comenzaron a alterarse para adaptarse a las exigencias inadecuadas; y así dificultan en desarrollar y usar las estructuras más avanzadas que se desarrollan más tarde en la vida.2)

Cuando los niños tienen libertad de elegir entre diversas actividades, y no han sido sometidos previamente a las presiones del sistema escolar, entonces normalmente elegirán actividades que están de acuerdo a su nivel de comprensión actual. Así ejercen una autorregulación de su propio aprendizaje, inconscientemente y de manera natural.

Los niños aprenden no todos de la misma manera. Algunos se desarrollan más rápidamente, otros necesitan más tiempo.

También existen **estilos de aprendizaje** variados, por ejemplo:

- *Aprendedores visuales:* Aprenden mejor con la ayuda de gráficos, dibujos, diagramas; o resaltando datos importantes con diferentes colores; etc.

- *Aprendedores auditivos o relacionales:* Aprenden mejor cuando alguien les explica las cosas individualmente, o cuando pueden dialogar con un educador o con otros alumnos.

- *Aprendedores cinestéticos:* Aprenden mejor mediante el movimiento físico, tocando y manipulando objetos, experimentando. Esos niños a menudo se caracterizan por estar moviéndose todo el tiempo mientras uno les habla. Eso no significa que no estén atentos, al contrario: Necesitan el movimiento para poder prestar atención. (La prueba está en que podrán repetir lo que uno les dijo.)

Asimismo existen diferencias en la manera como los niños *procesan* las informaciones o tareas:

- *Aprendedores secuenciales:* Necesitan hacer las cosas en su orden, uno por uno, empezando con el primero y terminando con el último. Se confunden cuando uno los interrumpe en su actividad.

* *Pablo a los colosenses, 3:21*

2) Vea Nota 2 en el Anexo B.

- *Aprendedores aleatorios:* Hacen las cosas en cualquier orden: pueden p.ej. comenzar en el medio, saltar al final, después hacer lo del principio. Pueden hacer varias cosas a la vez.

Para tomar en consideración estas diferencias individuales, el aprendizaje activo de la matemática es **individualizado**. No sigue un currículo o cronograma normado; no obliga a los niños a hacer todos lo mismo, ni de la misma manera. Les **permite avanzar a cada uno a su propio paso.**

En una escuela alternativa, el avance individualizado no impide que se formen grupos de niños que trabajen juntos. Pero esos grupos no se forman artificialmente según la edad cronológica o el "grado" de los niños. Se forman de manera espontánea y natural por el hecho de que varios niños decidan trabajar juntos con el mismo material, o investigar y hacer preguntas acerca de los mismos temas. En cuanto al nivel de conocimientos, estos grupos pueden ser homogéneos (niños del mismo nivel que aprenden juntos los mismos conceptos), o también heterogéneos (niños de distintos niveles, donde los más avanzados ayudan y enseñan a los menos avanzados).

Los niños tienen también necesidad de **experiencias emocionales positivas**. Su aprendizaje es mucho más eficaz cuando se sienten aceptados y valorados, y cuando pueden ocuparse en temas y actividades que llaman su atención y les interesan personalmente.[3)]

Esta es una razón más por permitir que los niños elijan entre diversas alternativas en cuanto a los temas, materiales y actividades de aprendizaje.

Este aspecto influencia también la manera de evaluar los progresos de los niños. La forma tradicional de evaluar a los niños mediante exámenes normados y notas, es contraproducente para la mayoría de los niños: Los incentiva a hacerse la competencia todos contra todos, en vez de ayudarse mutuamente; desanima a los que no alcanzan una nota buena; y produce un orgullo malsano en los pocos que alcanzan buenas notas. En vez de comparar a los niños entre sí, una buena evaluación compara al niño consigo mismo y lo anima a seguir adelante. El ***"Camino de aprendizaje"*** (vea p. 25) presenta una alternativa de evaluación individualizada.

El sistema tradicional enfatiza sobre todo la ***cantidad*** de las horas académicas y de las tareas que los alumnos cumplen. Una educación alternativa, en cambio, enfatiza la ***calidad*** de sus experiencias de aprendizaje. Ha sido mi propia experiencia, y la de muchos educadores alternativos, que los niños pueden aprender mucho más, con mucho menos horas académicas, esfuerzo y estrés, cuando se les permite aprender de acuerdo a sus necesidades, sus intereses, y su nivel de desarrollo natural. La matemática activa tiene mucho menos necesidad de ejercicios rutinarios y repetitivos, pero es más eficaz.

3) Vea Nota 3 en el Anexo B.

3. Aprender matemática **basada en principios.**

> *"El Señor fundó la tierra con sabiduría; afirmó los cielos con inteligencia."**

El sistema tradicional se enfoca mayormente en los *procedimientos*, o sea en el "cómo" se hace: "Este número se escribe aquí, éste se suma con éste, y éste se escribe aquí ..." Los alumnos reproducen los procedimientos de manera mecánica. Desde el punto de vista de la matemática profesional, eso no es matemática propiamente dicho; es solamente una "técnica para calcular".

El sistema tradicional enfatiza también la memorización de propiedades matemáticas, como "trozos de conocimiento" desconectados entre sí. Eso tampoco es matemática en su sentido propio.

La matemática verdadera se enfoca en el **"por qué"** de las propiedades matemáticas. Como dijo el matemático Paul Lockhart: **"La matemática es el arte de explicar."** Mientras el sistema tradicional hace memorizar a los alumnos que "los números divisibles entre 5 terminan con 0 ó con 5", la matemática activa les permite descubrir esta propiedad por observación propia; y después se interesa en saber ***por qué*** eso es así, y cómo se relaciona esta propiedad con otras reglas de divisibilidad, y qué otras aplicaciones tiene el principio que está detrás de esa propiedad.

Toda la gran variedad de propiedades matemáticas se puede deducir desde relativamente pocos principios fundamentales. Una vez que un alumno entiende estos principios y se ha acostumbrado a razonar, puede construir desde allí una gran parte de la matemática por sí mismo. Por ejemplo, si ha entendido los principios de las cuatro operaciones básicas, ya tiene las herramientas necesarias para descubrir por sí mismo las reglas de divisibilidad, las operaciones con fracciones, etc. (Algunos de estos principios básicos son por ejemplo: El significado de la suma y de la multiplicación; la ley conmutativa, asociativa y distributiva; el principio de la operación inversa; y algunos otros.)

En eso, la matemática es distinta de todas las otras ciencias o campos del saber: En geografía o en historia, por ejemplo, dependemos de fuentes de información: Libros, profesores, viajeros ... Si vivo lejos de México y quiero saber cuáles son los principales ríos de México, no tengo posibilidad de saberlo sin que alguien me lo diga, o sin que lo pueda leer en un libro o en una página de internet. Pero las verdades de la matemática son absolutas, universales, y accesibles a todo ser humano tan solo por medio de su razonamiento. Lo único que se requiere es entender los principios fundamentales, y saber aplicarlos de manera lógica y consecuente.

Por tanto, la matemática activa entrena a los alumnos a razonar desde los principios. Muchas distintas propiedades matemáticas están relacionadas entre sí por los

* *Proverbios de Salomón, 3:19*

mismos principios básicos. Por eso, un alumno que entiende los principios, entenderá también el ***por qué*** de las propiedades matemáticas, y ya no tendrá necesidad de memorizarlas una por una. También entenderá el ***por qué*** de los procedimientos, y esos procedimientos adquieren sentido para él, y entonces serán mucho más fáciles de aprender.

La matemática activa invierte entonces mucho más tiempo en actividades que ayudan a entender los *principios,* y no se apresura en enseñar procedimientos mecánicos. Así tal vez los alumnos aprenderán los procedimientos más tarde que los alumnos del sistema tradicional; pero los aprenderán *con entendimiento*, y así tendrán una ventaja más adelante cuando la matemática se vuelve más compleja. Un educador de matemática activa no se impresionará mucho de un niño de seis años que ya sabe sumar números de siete cifras; le preguntará: "¿Realmente entiendes lo que haces?" Se impresionará mucho más de un niño de nueve años que es capaz de explicarle *por qué* la suma vertical funciona de la manera como funciona.

Principios, procedimientos y convenciones

La matemática escolar convencional no distingue entre principios (o leyes), procedimientos, y convenciones. Le da al alumno la impresión de que todas estas partes sean igual de importantes e igual de "absolutos". En realidad, eso no es así.

Los ***principios*** o ***leyes*** son absolutos y no se pueden cambiar. No surgen del antojo de algún matemático o profesor: son la esencia misma de la matemática. Aun si un matemático "inventa" algún nuevo objeto matemático, descubrirá después que ese objeto obedece a leyes lógicas que él, el matemático, no puede definir como quiere; solamente puede *descubrirlas*. Así se inventaron por ejemplo los números negativos; los números complejos; los conjuntos; etc. Pero apenas inventados estos objetos, los matemáticos descubrieron que su comportamiento se rige según unas leyes fijas que "siempre habían estado allí".
Por eso, el entendimiento de los principios y leyes *empodera al alumno a "hacer matemática" por sí mismo*, sin depender del dictado de un profesor.

Los ***procedimientos*** son maneras prácticas de realizar ciertas operaciones, aplicando los principios. *¡No existe un "único procedimiento correcto" para realizar una operación dada!* - Por ejemplo, la multiplicación 6 x 14 podría resolverse de una de las siguientes maneras:

"Lo multiplico cifra por cifra, tal como lo he aprendido en la escuela."

"Sé que 6 x 10 es 60, ahora tengo que aumentar todavía 4 veces el 6:
60 + 6 + 6 + 6 + 6 = 84."

"Multiplico por separado: 6 x 10 = 60, 6 x 4 = 24, ahora sumo: 60 + 24 = 84."

"6 por 10 es 60, la mitad de 60 es 30, 60 + 30 = 90, resto 6: 90 – 6 = 84."
(Sí, este procedimiento tiene un fundamento lógico. Si 6 x 10 = 60, entonces la mitad de 60 es 6 x 5. Sumando ambos, resulta 6 x 15, y si a eso restamos 6, obtenemos 6 x 14.)

"14 + 14 + 14 = 42, eso es 14 x 3, entonces el doble de eso será 14 x 6: 42 + 42 = 84."

No obliguemos entonces a los alumnos a seguir procedimientos determinados. Un alumno puede encontrar un procedimiento alternativo que para él es más práctico que el "escolar". *Todo procedimiento es válido, mientras obedece a los principios y leyes de la matemática.*

Por último, en la matemática existen ***convenciones***, o sea *acuerdos comunes entre los matemáticos*. Estos afectan sobre todo ***las definiciones, las notaciones y símbolos.*** Por ejemplo, cuando vemos escrito "3 x 2", sabemos que esto significa la multiplicación de tres por dos. Sabemos que la misma multiplicación podría escribirse también así: "3 · 2". Alguna vez los matemáticos tuvieron que ponerse de acuerdo para usar el símbolo 3 para el número tres, el símbolo 2 para el número dos, y el símbolo x (o el punto ·) para la operación de la multiplicación. No hay nada en la matemática misma que nos obligaría a usar exactamente estos símbolos. Podríamos ponernos de acuerdo para que de aquí en adelante, ⊥ significa dos, Δ significa tres, y ∟ significa multiplicar. Entonces nuestra multiplicación se escribiría así: "Δ ∟ ⊥".

Los símbolos y las notaciones no son principios matemáticos, y por tanto no son absolutos. Fueron inventados arbitrariamente, y en algún momento en la historia fueron establecidos como "normativos" mediante acuerdos entre los matemáticos. Estas notaciones cumplen entonces el mismo rol como las reglas de ortografía y gramática en el lenguaje: establecen la forma generalmente aceptada de *comunicar* la matemática. Entonces, es bueno conocer estas notaciones y usarlas correctamente para poder entender libros matemáticos, y para comunicar con otras personas acerca de la matemática. Pero las notaciones no son "la matemática en sí"; son solamente medios para expresarla.

Algo similar aplica a las ***definiciones***. Al hablar de matemática, usamos términos técnicos como "número entero", "número primo", "ángulo recto", etc. Con las definiciones aseguramos que todos entendemos lo mismo cuando usamos estas palabras. Las definiciones entonces no expresan verdades matemáticas; expresan acuerdos o convenciones de *cómo usar las palabras*.

Para aclarar la diferencia: Una verdad matemática sería, por ejemplo: "Si sumo cero a un número, el número no cambia." (Por ejemplo 7 + 0 = 7.) Esta verdad expresa una propiedad del número cero que es absoluta: vale en todas las circunstancias y por todos los tiempos.

Una definición sería: "Los números naturales son los números enteros positivos." Esta definición excluye, por ejemplo, el cero; entonces es correcto decir: "El cero no es un número natural." Pero eso no es una verdad matemática en el sentido estricto; es una *convención*. Esto significa que la definición podría cambiarse, si los matemáticos más influenciales del mundo se pusieran de acuerdo. Por ejemplo, podrían ponerse de acuerdo en incluir al cero entre los números naturales. Pero este cambio no alteraría las propiedades matemáticas del número cero. Seguiría cierto que un número más cero da el mismo número.
Entonces, en vez de decir: "El cero no es un número natural", podríamos decir más exactamente: "Los matemáticos decidieron no incluir el cero entre los números naturales". – Por el otro lado, no tendría sentido decir: "Los matemáticos decidieron que un número más cero da el mismo número." Eso no está en el poder de los matemáticos decidirlo. Ellos pueden cambiar definiciones; pero no pueden cambiar verdades matemáticas (principios, leyes).

Mantengamos clara la distinción entre principios, procedimientos y convenciones.

4. Aprender matemática **por investigación propia.**

> *"Gloria de Dios es encubrir un asunto; pero honra del rey es investigarlo."**

Hemos visto que la matemática entera se basa en relativamente pocos principios fundamentales, y en el razonamiento lógico. O sea, teoréticamente sería posible que un alumno reconstruya toda la matemática desde esos principios fundamentales, sin la ayuda de algún profesor o libro.

En la práctica eso es improbable, porque le faltaría tiempo. Por eso siempre habrá necesidad de adelantarnos al razonamiento propio del alumno, demostrándole alguna propiedad matemática que él todavía no conoce. Pero queremos también, tantas veces como sea posible, darle la oportunidad de descubrir cosas nuevas por investigación propia. Queremos mostrar a los niños que la matemática no es el patrimonio exclusivo de los profesores o de los libros de texto; es algo que ellos mismos pueden manejar. Queremos animar y empoderar a los niños para que hagan sus propias investigaciones. Por eso, este libro contiene tareas de investigación que no tienen simplemente "una respuesta correcta", sino que animan a explorar un nuevo y desconocido campo de la matemática. *(Más acerca de las tareas de investigación en la sección "Cómo usar las unidades de aprendizaje".)*

** Proverbios de Salomón, 25:2*

Desarrollo del pensamiento matemático en los niños

El psicólogo Jean Piaget, quien investigó mucho acerca del desarrollo mental de los niños, distinguió tres clases básicas de razonamiento que se desarrollan en distintas etapas de la vida: el pensamiento intuitivo, el pensamiento concreto, y el pensamiento abstracto. A grandes rasgos, estas formas de pensar corresponden a la etapa preescolar, la etapa de la primaria, y la etapa de la secundaria, respectivamente.

El **pensamiento intuitivo** es la forma de pensar de un niño pequeño que prácticamente no razona. Para él, las cosas son como a él le parecen, intuitivamente. No saca conclusiones lógicas. Por ejemplo, un niño en esa etapa, cuando ve a un niño vecino con un pantalón igual a uno de los suyos, puede decir: "Mami, ese niño se ha puesto mi pantalón." O cuando ve en un libro un dibujo de un niño echado sobre una nube, pensará que de verdad uno puede echarse sobre una nube.

El **pensamiento concreto** es la primera forma de llegar a conclusiones lógicas: se basa en la manipulación de objetos concretos. El razonamiento del niño se desarrolla mientras arma bloques de madera, corta y pega papel, ordena piedras según su tamaño, etc. Pero los niños en esta etapa todavía no pueden razonar de manera consistente mientras no pueden hacer experiencias prácticas con objetos concretos relacionados con el problema, o si por lo menos han hecho tales experiencias en el pasado.

La mayoría de los niños entran a esta **"etapa de las operaciones concretas"** aproximadamente entre los 7 y los 8 años de edad. Pero tengamos presente que existen grandes diferencias individuales entre los niños: algunos niños alcanzan esta etapa a una edad mucho más temprana que otros.

El **pensamiento abstracto** comienza a desarrollarse recién en la adolescencia, en la mayoría de los niños. Es la capacidad de imaginarse unos procesos solamente en su mente, sin haber hecho alguna experiencia concreta. También la manipulación de símbolos abstractos sin relación con ningún objeto concreto (como por ejemplo en el álgebra) requiere la capacidad de pensar de manera abstracta.

Consecuencias de las distintas etapas en el pensamiento infantil

Es importante entender que el desarrollo de estas capacidades de razonamiento es un proceso *natural* que no se puede acelerar artificialmente. Aunque es posible que un ambiente emocionalmente positivo y con oportunidades para experiencias variadas beneficie el desarrollo de estas capacidades, gran parte de este proceso es controlado genéticamente. En particular, no se puede acelerar con un adiestramiento específico en "razonamiento". Es al contrario: Podemos incentivar al niño a razonar, *una vez que las estructuras correspondientes del cerebro se han desarrollado.*

Entonces, si queremos enseñar a los niños la matemática de acuerdo a su desarrollo natural, en primer lugar debemos saber *esperar el tiempo apropiado*. No hacemos ningún beneficio al niño si lo llenamos de conocimientos que todavía no puede procesar; al contrario, así le hacemos daño. Es lo mismo como si quisiéramos a la fuerza enseñar a un bebé de tres meses que camine. El bebé no puede pararse porque su cuerpo todavía no tiene la fuerza necesaria. Entonces, si lo obligamos a hacerlo, dañamos su cuerpo. De la misma manera se daña su cerebro cuando lo obligamos a realizar procesos demasiado avanzados.

El cerebro no existe de manera aislada; es una parte del cuerpo y está unido a él. Por eso, el cerebro necesita la actividad del cuerpo entero para poder desarrollarse. Las actividades manuales, el ejercicio físico, aun las impresiones sensoriales y emocionales – todo eso contribuye al desarrollo del cerebro.4)

No pensemos entonces que los niños aprenden bien cuando están sentados de manera inmóvil y el cerebro es la única parte activa de su cuerpo. Es al revés: Los niños aprenden mejor cuando pueden manipular objetos con sus manos, dibujar, caminar, etc.

4) Vea Nota 4 en el Anexo B.

Cómo saber cuáles actividades corresponden al nivel actual de madurez del niño

Si usted tiene una relación cercana con sus niños y pasa bastante tiempo a su lado en sus actividades diarias, entonces ya tendrá una idea aproximada de su nivel de madurez. Son dos aspectos sobre todo que nos dan una impresión bastante clara:

Las reacciones del niño.
Sus preguntas y sus respuestas, su manera de hacer decisiones y de resolver situaciones de la vida diaria, todo eso nos permite ver a qué nivel está razonando. También podemos fijarnos en las situaciones y tareas que le causan estrés: Si una tarea es estresante para el niño, muy probablemente es demasiado exigente para su nivel actual.

Las actividades que el niño elige por sí mismo.
Cuando los niños tienen libertad de elegir entre diversas actividades, normalmente escogen algo que es de acuerdo a su nivel actual de madurez. Si fuera algo demasiado fácil, les parecería aburrido; y si fuera demasiado difícil, dirán: "No entiendo eso." – Así sucede, por lo menos, en niños que han podido desarrollarse de manera saludable. En alumnos del sistema escolar tradicional eso ya no es un criterio seguro, porque ellos fueron entrenados a "elegir" lo que piensan que es de acuerdo a las exigencias del profesor. Ellos necesitarán un tiempo de "desintoxicación" para volver a encontrar su equilibrio natural, y para poder apreciar sus capacidades de manera realista.

La matemática al nivel de primaria (II)

Cuando los niños llegan a este nivel, podemos esperar que dominen las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con números que se pueden representar como cantidades exactas con material concreto (o sea, hasta 1000 en el caso normal). Que sepan representar estas operaciones con material concreto y calcularlas mentalmente; que sepan aplicarlas en situaciones de la vida diaria; también que sepan leer y escribir números hasta 1000. Si un niño no cumple con estos prerrequisitos, será preferible que siga ocupándose con las actividades del nivel de Primaria I.

Tengamos presente que la etapa de Primaria II corresponde todavía a la etapa de operaciones concretas. Por tanto, debemos en lo posible representar las operaciones matemáticas mediante material manipulativo, actividades prácticas, y situaciones de la vida diaria.
Poco a poco crecerá en los niños su capacidad de resolver problemas y operaciones de manera puramente verbal o simbólica, *siempre y cuando tuvieron experiencias previas correspondientes con objetos concretos.* El razonamiento puramente abstracto es una capacidad que en esta etapa todavía no podemos esperar de los niños.

En la ***aritmética*** introducimos ahora explícitamente el concepto del valor posicional en el sistema decimal. En el nivel de Primaria I hemos ilustrado este principio con los casos específicos de las unidades, decenas y centenas; pero ahora lo *generalizamos* para números de cualquier tamaño. Esto permite ampliar el espacio numérico hasta un millón o más allá; números que ya no pueden representarse fácilmente con cantidades exactas de objetos concretos. El entendimiento del valor posicional permite también introducir las operaciones por escrito, "en vertical", con números grandes.
Efectivamente, el ***entendimiento del sistema decimal*** es un tema central en esta etapa. Tres bloques enteros de este libro están dedicados a las implicaciones de este tema: el *Bloque I* (Operaciones básicas hasta 10'000 y sus procedimientos escritos), el *Bloque III* (Operaciones básicas hasta un millón), y el *Bloque V* (Operaciones básicas con números decimales).

Introducimos también unos conceptos importantes de la ***teoría de números*** *(Bloque II)*: Números primos, factorizaciones, múltiplos y divisores, MCD y MCM. Estos conceptos son un poco difíciles de representar con material concreto, pero se basan en las operaciones conocidas de la multiplicación y división, y se pueden ilustrar con estructuras gráficas ordenadas. Estos conceptos a su vez forman la base para poder entender las ***operaciones con fracciones*** *(Bloque IV)*.

Además extendemos la numeración en el sistema decimal hacia el otro lado, introduciendo los números decimales. Se ofrecen tres caminos posibles de acceso hacia este tema: El primero, más práctico, hace uso de las experiencias que los niños ya tienen con la conversión de las unidades de medida, particularmente las medidas de longitud. Estas experiencias permiten representar decimales en la recta numérica. – Un segundo camino es por medio de las fracciones, lo que permite entender algunas leyes de las operaciones con decimales, a base de las operaciones con fracciones ya conocidas. – Un tercer camino, más abstracto pero más "poderoso", extiende el concepto del valor posicional, y generaliza los conceptos del sistema decimal que ya son conocidos para los números enteros.

La ***geometría*** *(Bloque VI)* a este nivel será preferiblemente *práctica* más que teórica. Ponemos bastante énfasis en la realización de construcciones con regla, escuadra, compás, y transportador. Estas construcciones tienen su aplicación en diversos trabajos manuales, y permiten así introducir conceptos fundamentales como paralelas, ángulos, congruencia, etc, en el contexto de proyectos prácticos. – Algunos conceptos geométricos se pueden descubrir observando las propiedades de rompecabezas geométricos, por ejemplo con polígonos regulares.

Paralelamente continuamos con ***juegos de estrategia y de razonamiento*** *(Bloque VII)*, ahora un poco más exigentes que en el nivel de Primaria I. El razonamiento estratégico permite al alumno analizar problemas, enumerar combinaciones y posibilidades, y descubrir caminos variados hacia una solución. Por eso, los juegos de estrategia son importantes para el desarrollo del pensamiento matemático.[5)]
Para los niños interesados en esta clase de razonamiento, se ofrecen unas tareas de investigación sistemática de unos juegos sencillos de esta clase, para encontrar estrategias ganadoras. Esta es una tarea más exigente que simplemente jugar; pero es un excelente entrenamiento de la mente.

Como en el nivel de Primaria I, se presentan también diversos otros desafíos de razonamiento.

Todavía no introducimos ecuaciones ni expresiones algebraicas, porque este es un tema sumamente abstracto, y por tanto pertenece al nivel de Secundaria. Las variables algebraicas son símbolos que representan números, que a su vez son símbolos que representan cantidades o medidas reales. O sea, el álgebra requiere una "abstracción de segundo nivel"; lo cual no está dentro del alcance de un típico niño de primaria.
Por la misma razón, todavía no introducimos fórmulas para el cálculo de medidas de figuras geométricas (perímetros, áreas, ángulos ...). En cambio, describimos con palabras y dibujos las operaciones requeridas. *(Unidades 65, 71, 94.)*

A padres y profesores acostumbrados al sistema convencional les puede parecer que estamos "demorando" a los niños. Pero no los estamos haciendo demorar; simplemente respetamos el desarrollo natural de su

5) Vea Nota 5 en el Anexo B.

cerebro. Tomamos el tiempo de fortalecer las conexiones que corresponden a su desarrollo *actual e inmediato*, y no intentamos anticipar lo que corresponde a un desarrollo *posterior*. Así colocamos un fundamento firme de experiencias concretas y de principios; y es precisamente este fundamento que garantiza un mejor desarrollo en el futuro. Así aprenden los niños sin presiones y sin estrés innecesario.

Puede ser difícil defender este método en un entorno donde todo el mundo intenta "acelerar" a sus hijos. Yo mismo he experimentado como mis hijos fueron considerados un poco "atrasados" durante sus años de primaria, porque se ocupaban con conceptos matemáticos más sencillos que los niños escolares de su edad. Pero a partir de los trece años, cuando despertó su razonamiento abstracto, su aprendizaje comenzó a despegar, y desde allí cubrieron en cada año los temas matemáticos de dos años escolares. Muchas otras familias que aplicaron métodos de aprendizaje natural y de acuerdo al desarrollo del niño, hicieron las mismas experiencias. Entre tanto, sus amigos de su misma edad en el sistema convencional se estancaban en la secundaria, porque sus cerebros ya estaban agotados y no podían asimilar más.

Entonces, la paciencia que invertimos ahora al esperar que nuestros niños maduren, trae sus beneficios más adelante. No solamente serán nuestros niños más felices y menos estresados; también tendrán ventajas académicas más adelante.[6)]

6) Vea Nota 6 en el Anexo B.

No usamos un currículo fijo según edades cronológicas.

Tengamos presente que nada de lo dicho debe interpretarse a la manera de un currículo fijo por edades. Por ejemplo, el hecho de que el álgebra corresponde al nivel de la secundaria, no implica que "ningún niño menor a doce años deba hacer álgebra". Quizás encontramos a un niño de diez años que ya está avanzado en su madurez mental hasta un nivel donde puede efectivamente comprender los principios matemáticos que rigen las ecuaciones, y puede aplicar estos principios entendiendo lo que hace, y sin que eso le cause estrés. Entonces no vamos a impedir que ese niño haga álgebra. Pero en este caso, ese niño ya no es un alumno de primaria. En cuanto al aprendizaje de la matemática, a pesar de su corta edad habrá que tratarlo como a un alumno de secundaria. Y eso no implica que los otros niños de diez años también tengan que hacer álgebra.

Por el otro lado, si un niño de diez años todavía no llega a comprender las operaciones del nivel de Primaria I, tampoco lo obligaremos a hacer lo que hacen los otros niños de diez años. Le permitiremos trabajar a su propio nivel; que tome el tiempo que necesita para comprender las operaciones sencillas, y después avance desde allí. No lo hacemos "repetir el grado"; pero le permitimos tomar el tiempo que necesita para completar el "segundo" o el "tercer grado". Eso es algo fundamentalmente diferente: El sistema convencional clasifica a los niños por grados, y los hace repetir el grado cuando no alcanzan las metas. Eso se basa en la idea de que todos los niños de diez años tengan que alcanzar las mismas metas, y si un niño no las alcanza, ha "fracasado". – Una educación basada en el desarrollo del niño, en cambio, está consciente de que no todos los niños de diez años tienen la misma madurez mental. Algunos de ellos reciben su mayor beneficio cuando resuelven tareas de tercer grado (según el currículo oficial), otros cuando resuelven tareas de quinto grado, y otros cuando resuelven tareas de sexto grado. Mientras cada uno de ellos avanza y está con buen ánimo, ninguno de ellos ha "fracasado". Por eso, la evaluación según el ***"Camino de aprendizaje"*** no considera grados ni edades; solamente considera el progreso individual de cada niño.

Algunas otras características de los niños de primaria

- Tienen mayor perseverancia y fuerzas.

Muchos niños pueden entre los 9 y los 12 años alcanzar un rendimiento físico igual o aun mayor que en la adolescencia. También pueden trabajar con más perseverancia. Por tanto, en esta etapa podemos desafiarlos a emprender tareas más exigentes y más prolongadas – siempre tomando en cuenta su nivel de entendimiento y sus capacidades. Algunas actividades de este libro que presentan un tal desafío a la perseverancia, son los proyectos de construir recortables propios *(Unidades 58 y 63)*; y las investigaciones un poco exigentes acerca de los múltiplos de 11 *(Unidad 25)* y acerca de los números figurativos *(Unidad 81)*.

En la matemática, la perseverancia es más importante que la rapidez. El matemático Keith Devlin, de la universidad de Stanford, dice:

> "Nosotros los matemáticos profesionales nos desesperamos por los sistemas escolares que imponen estrechos límites de tiempo sobre los exámenes de matemática, y obligan a trabajar rápidamente. ***La verdadera matemática requiere tiempo.*** "

Los concursos de decir la respuesta correcta "rápidamente", quizás incentivan la memoria, pero no incentivan el pensamiento matemático. Pensar matemáticamente implica reflexionar profundamente acerca de un problema novedoso, e intentar diversas maneras de solucionarlo, hasta encontrar una que funcione. Los matemáticos profesionales no resuelven problemas al estilo de los libros escolares. Ellos reflexionan por meses, quizás años, sobre problemas novedosos que para su solución requieren fórmulas y métodos que todavía nadie descubrió. Esto significa perseverar, y aguantar tiempos de frustración. Es importante que los niños aprendan perseverancia. Los problemas de investigación pueden contribuir a este fin.

- Les gustan las actividades grupales, y la competencia.

A partir de los 9 a 10 años, muchos niños prefieren hacer cosas juntos con sus amigos. También les gusta la competencia: quieren saber quién es el más fuerte, el más rápido, el más inteligente ...

Estas características presentan tanto oportunidades como desafíos en la educación. Es una buena etapa para incentivar la solidaridad, la colaboración, la ayuda mutua. Los niños se dejarán motivar a hacer grandes esfuerzos si al final pueden esperar alguna forma de recompensa. La recompensa no necesita ser material: puede consistir también en un elogio, un aplauso, un premio simbólico; o en la oportunidad de presentar su trabajo en algún evento ante otros niños o adultos; o simplemente en la satisfacción de haber superado un desafío. Varios matemáticos profesionales dijeron que su mayor motivación por hacer matemática es la satisfacción emocional que les produce el hecho de haber descubierto algo nuevo por sí mismos. Los niños ya pueden experimentar esta satisfacción, si les damos unos desafíos de acuerdo a sus capacidades.

Por el otro lado, algunos niños desarrollan una tendencia de formar grupitos exclusivos; entonces limitan su solidaridad a sus amigos cercanos y marginan a los que no son de "su grupo". Ellos tendrán que aprender que el verdadero amor al prójimo no se limita a los que "me caen bien".
En algunos, las competencias producen un afán malsano de "ganar" a los demás, y desarrollan actitudes de orgullo, de menosprecio hacia los más débiles, o de envidia hacia los más fuertes. Tendrán que aprender que el tener un talento particular no es un mérito, ni hace de mí una persona más valiosa; pero debe infundirme gratitud por el talento que recibí, y me impone la responsabilidad de invertir este talento para el bien, y ayudar a los demás.
No hace daño que los niños de esta edad "midan sus fuerzas" de vez en cuando, aun en la resolución de problemas matemáticos. Este libro contiene algunas ideas para competencias entre niños individuales o equipos. Pero debemos cuidar contra las actitudes negativas arriba mencionadas. También se recomienda proveer para *cada* niño una oportunidad de "ganar" en algo. No hay niño que no tenga algún talento o alguna capacidad particular. Algunos niños quizás nunca van a sobresalir en la matemática, ni en las ciencias, ni en el deporte ... pero quizás tienen un talento artístico, o tienen la capacidad de comprender y animar a otros, o hasta una habilidad especial de contar chistes. Que cada niño reciba una oportunidad de "sobresalir" en algo que sabe hacer bien.

Los problemas de investigación matemática son ideales para practicar la colaboración y ayuda mutua en un grupo pequeño. También algunos otros proyectos de este libro pueden realizarse en grupos. – Otra forma de trabajo en equipo se practica con aquellas actividades donde un niño propone tareas o problemas para que otro(s) niño(s) los resuelva(n), y después se intercambian los papeles. Toda actividad que pide encontrar ejemplos propios se puede organizar de esta manera.

Juegos de competencia individual (como damas o ajedrez) pueden presentarse también bajo el aspecto del "entrenamiento en equipo", para no sobreenfatizar el aspecto de "ganar" o "perder". Que los niños aprendan a actuar con integridad, sea ganando o sea perdiendo, y a sobrellevar la frustración al perder.

En esta etapa, muchos niños ya podrán presentarse ante un grupo, por ejemplo para mostrar un trabajo que realizaron, o para explicar los resultados de su equipo de investigación. Eso se puede hacer tanto en una escuela, como también en familia ante los hermanos y padres, o en reuniones de varias familias. Animemos a los niños a vencer su timidez y a practicar esta forma de compartir sus ideas con los demás; pero respetando la negativa de un niño que quizás todavía no alcanzó la madurez necesaria para enfrentar este desafío. Y debe ser una regla fija en tales presentaciones que no se permiten burlas o comentarios despectivos acerca de los niños que están exponiendo.

- Cada niño es diferente. Aunque podemos ver las características descritas en muchos niños de nueve a doce años, no podemos generalizarlo todo, ni mucho menos normar el desarrollo del niño por edades. No existe el "niño promedio". Por tanto debemos respetar los intereses, talentos y características individuales de cada niño, y permitirle aprender a su manera y a su paso. No hay necesidad ni provecho en querer "nivelar" el aprendizaje de todos los niños de un grupo.

¿Qué hacer con niños que vienen desde el sistema tradicional?

Si un niño ha sido enseñado con métodos tradicionales, y recién en el nivel de Primaria II cambia a un método activo, pueden surgir diversos problemas, porque el niño necesita "desaprender" varios aspectos de su método acostumbrado. No tengo soluciones definitivas para todos estos problemas, pero deseo por lo menos señalar unas posibilidades.

Dele un tiempo de "desintoxicación".

En el área de matemática, eso significa que permitimos al niño por algún tiempo no hacer nada de matemática, excepto si el niño por sí mismo lo desea. Eso es particularmente importante para niños que sufrieron alguna forma de "trauma matemático", y asocian la matemática con experiencias dolorosas o de fracaso.
Como regla general, se dice que se necesita aproximadamente un mes de "desintoxicación" por cada año que uno pasó dentro de un sistema inadecuado. Eso significa, por ejemplo, si un niño ha pasado dos años de preescolar y cuatro años de primaria en el sistema convencional, que necesitará aproximadamente seis meses hasta que podrá asimilar los métodos nuevos.
El niño puede aprovechar este tiempo de "desintoxicación" para hacer cosas que le gustan y que en el sistema convencional no se valoran mucho, tales como trabajos manuales y artísticos, deportes, aprender nuevos juegos, actividades que fomentan el compañerismo con otros niños, acompañar a personas adultas en sus trabajos, etc. Así recuperará su desarrollo en algunas áreas que se descuidaron anteriormente. Es posible que algunos niños necesiten bastante tiempo hasta que logren descubrir sus intereses y talentos genuinos.

Desaprender para volver a aprender

Cuando notamos que un niño en "desintoxicación" está listo y animado para hacer matemática nuevamente, entonces tendrá que empezar a "desaprender" ciertas costumbres que obstaculizan el razonamiento, para poder adquirir nuevas costumbres que son más de acuerdo a la esencia de la matemática. Los alumnos del sistema convencional normalmente tienen muchos procedimientos memorizados y saben aplicarlos mecánicamente, pero no entienden su significado. Si les pedimos representar una de esas operaciones con material concreto, no sabrán hacerlo, y les parece "complicado". Los niños pueden reaccionar de diferentes maneras ante este desafío:

- Algunos pronto se dan cuenta de que en realidad no entienden lo que están haciendo, y entonces están dispuestos a volver a aprenderlo "entendiendo".
Con estos niños es fácil trabajar: se puede repasar con ellos los conceptos fundamentales, usando material concreto y preguntas de investigación. Habrá que empezar algo por debajo del nivel que el niño actualmente maneja; pero normalmente volverá a alcanzar y a superar pronto su nivel anterior, pero ahora "entendiendo".

- Algunos aceptan los métodos "nuevos" y se esfuerzan por seguirlos, pero no porque fueran realmente convencidos de ello, sino porque están acostumbrados a hacer con una actitud sumisa todo lo que un profesor les exige. El problema allí es que exteriormente siguen nuestro ejemplo, pero interiormente les falta el ingrediente más importante de una matemática activa: el razonamiento propio. Sus manos están activas, pero su mente sigue pasiva.
Con estos niños podemos intentar desafiarlos poco a poco con tareas que deben resolverse independientemente, sin poder seguir un ejemplo dado. Por ejemplo: "¿Cómo puedes construir una torre más alta con estas regletas?" – O: "¿Puedes descubrir una manera de medir la altura de nuestra casa?" – O: "¿Cuántas sumas diferentes puedes encontrar que dan 8 como resultado?" – Varios de los problemas de razonamiento y de investigación en este libro son buenos para este propósito.

- Algunos insistirán en seguir haciendo las cosas a su manera acostumbrada de antes, porque los métodos activos les parecen "extraños" o "demasiado complicados".
Opino que en este caso, lo mejor es permitirles que lo hagan así, pero de vez en cuando confrontarlos con un desafío donde llegan a sus límites con los procedimientos acostumbrados. Muchos de estos niños cometen errores en situaciones que no se ajustan exactamente al esquema: por ejemplo en restas que requieren varios canjes sucesivos (ejemplo **a** abajo); o en divisiones donde una de las cifras del resultado es cero (ejemplo **b**; vea *Unidad 12*). Que hagan la comprobación con la operación inversa para darse cuenta de su error; y así quizás despertará en ellos un deseo de adquirir un entendimiento más profundo de estas operaciones. Entonces podemos explicarles el "por qué" de los procedimientos, ilustrando principios matemáticos (el canje; el valor posicional) con material concreto.

```
a) 30000    b) 32264÷4    c) 54783    d) 313
  -   86                    - 3676       939
                            -12993
                            - 8475
```

Otros niños quizás no cometen esta clase de errores, pero son incapaces de "ampliar" el procedimiento a nuevas situaciones desconocidas: Saben restar un número de otro, pero no saben cómo hacer para restar dos o tres números a la vez (ejemplo **c**). O saben simplificar fracciones con divisores comunes "fáciles" (2, 3, ó 5), pero no pueden detectar cuando el denominador es p.ej. el triple del numerador (ejemplo **d**). Si los confrontamos repetidamente y con mucha paciencia con desafíos como estos, quizás con el tiempo llegarán a ver que la matemática es más que reproducir procedimientos mecánicamente.

Fomentar el compañerismo

Otro problema de los alumnos del sistema convencional es que muchos de ellos están acostumbrados a hacerse la competencia unos a otros, y a trabajar solamente bajo presión. Para muchos de ellos será un alivio cuando descubren que ya no necesitan "ganar" a los demás, y que nadie se ríe de ellos cuando un problema matemático les sale mal. Pero también puede suceder que entonces se relajan demasiado y piensan: "Puedo hacer lo que quiero, entonces no hago nada." En este caso habrá que ayudarles a encontrar unas metas personales que realmente valen el esfuerzo de alcanzarlas. Probablemente eso funcione mejor si al inicio los animamos a juntarse con algunos otros niños que ya están trabajando en algún proyecto, y ayudamos a que los niños con ánimo para el proyecto contagien con su ánimo al niño "desganado", y que no suceda al revés. Así, con el ejemplo de los otros niños, podemos esperar que con el tiempo el niño "nuevo" aprenda también a ponerse metas propias.

Aquellos niños que estaban entre los "mejores" en su escuela, pueden tener el problema opuesto: se sienten desanimados o rechazados cuando ya no tienen la oportunidad de "brillar" ante sus compañeros por sus conocimientos superiores. Habrá que trabajar con ellos y junto con los otros niños, para que descubran que la ayuda mutua es más satisfactoria que la competencia de todos contra todos. Quizás el niño "nuevo" puede asumir algún papel definido en un grupo de proyecto. Por ejemplo, si le gusta la matemática y participa en un grupo que construye una casita para jugar, puede ser el "ingeniero" del grupo que calcula las medidas de la casita y elabora los planos.

En el caso de una familia que está desescolarizando a niños un poco mayores, se pueden aplicar estrategias similares; solamente que en este caso puede ser más difícil encontrar a otros niños acostumbrados a los métodos activos para que sean "compañeros" de sus hijos. Quizás los encuentran en otra familia educadora con más experiencia; o de otro modo, los mismos padres tendrán que asumir este rol de "ejemplos".

¿Cómo usar las unidades de aprendizaje en este libro?

Ya que los niños no se desarrollan todos al mismo paso, **no se indican edades** para las actividades de este libro. Observe a sus niños, para que pueda entender cuáles actividades están apropiadas para el nivel de desarrollo donde se encuentra cada uno de ellos.

Esto significa que la secuencia de las unidades en este libro **no es obligatoria**. Usted y sus niños pueden hacer las actividades en el orden que desean, según los intereses y necesidades de los niños. Tampoco es obligatorio hacer "todas" las actividades o resolver "todos" los ejercicios en este libro. **Que cada niño haga lo que necesita.**

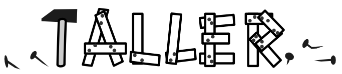
Para ayudar a evitar "saltos ilógicos", las unidades indican los prerrequisitos necesarios para entenderlas. Entonces, si un niño todavía no entiende esos temas, puede hacer primero las unidades indicadas en los prerrequisitos.

Los niños aprenden muchas cosas no en lecciones formales, sino de manera informal y natural: en el transcurso de los quehaceres diarios del hogar, al conversar durante las comidas, o al jugar. Por eso, las unidades de aprendizaje contienen también actividades que se pueden realizar de esta manera informal en la vida diaria de la familia, o durante un tiempo de actividad libre en una escuela alternativa.

Desde lo concreto hacia lo abstracto

Para corresponder a las características de los niños de primaria, introducimos cada nueva propiedad matemática mediante actividades prácticas con material concreto, siempre y cuando sea factible. Desde allí procedemos poco a poco a la formulación abstracta y simbólica. Este camino desde lo concreto hacia lo abstracto puede seguir aproximadamente los siguientes pasos:

1. Manipulación de objetos concretos. Por ejemplo al introducir la suma "llevando", el niño ubicará piezas del material Base 10 o de un material de "canje" en un tablero posicional, o practicará sumas en el ábaco.



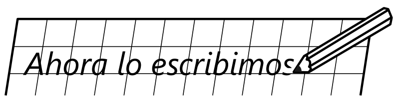
Cada unidad contiene sugerencias para actividades prácticas en la sección titulada **"Taller"**. ¡Dé suficiente tiempo para estas actividades! Las descripciones pueden ser cortas; pero realmente hacerlo consumirá bastante tiempo. No piense que es tiempo perdido si los niños "juegan" por horas con los materiales. ¡Es allí donde sucede la mayor parte de su aprendizaje!

Usted puede ampliar los talleres con sus propias ideas, y con las ideas de los niños. Y aun más importante: **Adáptelos a las necesidades de los niños.** No todos los niños necesitan hacer lo mismo. Ellos tienen distintos ritmos de desarrollo, distintos estilos de aprendizaje, distintos intereses, talentos, fortalezas y debilidades.

No hay necesidad de "dirigir" todas las actividades de los niños. Al contrario, hemos visto en los "Principios de una matemática activa" que mucha "actividad" sucede cuando los niños tienen bastante libertad de elegir sus propias actividades. Siempre se presentarán oportunidades para relacionar estas actividades de los niños con alguno de los temas matemáticos presentados en este libro.
Siguiendo este método, usted se sorprenderá de cuán poca enseñanza formal necesitan los niños para comprender los conceptos matemáticos.

2. Formular la operación. Después de hacer estas actividades prácticas por un tiempo, podemos introducir unos términos matemáticos, y expresar con palabras lo que hace el niño: "Sumamos unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas. Juntamos las piezas que tienen el mismo *valor posicional*." El niño aprende a usar estas expresiones, mientras sigue practicando las operaciones concretas.

3. Leer y escribir las operaciones realizadas con material concreto. Un próximo paso consiste en introducir los símbolos que se usan para escribir la operación, por si fueran nuevos. Pero los símbolos están todavía relacionados con la operación con el material concreto que el niño tiene delante de sí, mientras lee o escribe estos símbolos. Por ejemplo, podemos dar al niño una operación escrita en una tarjetita, y pedirle que la represente con el material Base 10 o en el ábaco. O representamos una operación con el material concreto, y pedimos al niño que la escriba.



De este paso se ocupa la sección **"Ahora lo escribimos"**, que aparece en muchas Unidades. También algunas de las **hojas de trabajo** se relacionan con esta etapa. Recuerde dar este paso siempre en conexión con el material concreto; no debe ser pura teoría.

Algunos problemas o tareas están marcados con un asterisco *. Esto significa que son tareas un poco más difíciles, para niños a quienes les gusta un desafío más fuerte.

4. Realizar las operaciones sin el material concreto. Si el niño domina todos los pasos hasta aquí, entonces puede dar el último paso, donde llega a la capacidad de realizar la operación sin usar el material concreto. Eso puede suceder por escrito, o de manera puramente mental. Por ejemplo, el niño puede calcular mentalmente las operaciones que tiene escritas en tarjetas. O puede resolver una hoja de trabajo sin la ayuda de material concreto.

El trabajo escrito en el cuaderno o con hojas de trabajo pertenece entonces a este último paso. El trabajo escrito **no es donde sucede el aprendizaje.** Mas bien, el trabajo escrito sirve para recordar y afianzar un aprendizaje que *ya sucedió antes*, mediante las experiencias concretas.

Fíjese en no dar este último paso prematuramente. Por ejemplo, si un niño constantemente se confunde con los numeritos que "lleva" al sumar, es un indicio de que todavía necesita un material concreto. Entonces, que siga usándolo.

La importancia del cálculo mental

Hoy en día, muchas escuelas descuidan el cálculo mental. Pero el cálculo mental es un paso intermedio importante entre la actividad concreta y los símbolos abstractos: Primero, el niño practica manipular los números con sus manos. Cuando ha entendido como funciona, puede hacer lo mismo en su mente. Así adquiere *sentido numérico*. Y finalmente traslada al papel lo que hace en su mente.

"Cálculo mental" no significa reproducir en la mente la operación escrita. Al contrario, es un proceso que debe *preceder* el aprendizaje de operaciones escritas. Calcular mentalmente implica formarse una imagen mental de las *cantidades* (¡no necesariamente de los números escritos!), y manipular estas cantidades en la mente, de la misma manera como se manipulan bloques de construcción o regletas Cuisenaire con las manos.

Por ejemplo, un niño que sabe sumar mentalmente números de tres cifras, no lo hará de la misma manera como al "sumar llevando" por escrito. El niño que suma "llevando", solamente ve cifras abstractas. Pero el niño que tiene sentido numérico y suma mentalmente, percibe que las centenas son muy distintas de las decenas, y éstas son distintas de las unidades. Las imágenes mentales que usan los niños van a diferir de un niño a otro; pero de alguna manera van a percibir una centena como algo mucho más "pesado" o "voluminoso" que una decena. El trabajo con material concreto prepara la formación de tales imágenes mentales.

El cálculo mental incentiva también el proceso de "comprimir" las operaciones; o sea, la capacidad de resumir varios pasos similares, elementales, en forma de un único paso de un nivel superior. (Vea en la *Unidad 3*, sección *"Para los educadores"*, acerca de este tema.) Esta es una capacidad esencial para poder llegar a niveles más avanzados en la matemática.

Un libro para padres, profesores y niños

Para los educadores

Al inicio serán sobre todo los educadores quienes hacen uso del libro e instruyen a los niños en las actividades presentadas. En los apartados **"Para los educadores"** se dan explicaciones pedagógicas adicionales para padres y profesores.

Principios matemáticos

Las secciones **"Principios matemáticos"** también se dirigen a los educadores, dando una perspectiva matemática un poco más profunda. Las secciones de **"Taller"**, en cambio, pueden también ser usadas directamente por los niños. A medida que ellos maduran, ellos mismos podrán leer y practicar las instrucciones. Así el libro se convertirá poco a poco en un "guía de viaje" para niños y adultos juntos, en sus exploraciones compartidas en el país de la matemática.

En los tomos de Primaria, las instrucciones que se dirigen directamente a los niños están escritas en un tipo de letra más grande. Pero eso no debe entenderse como una distinción estricta: Algunos niños más maduros se interesarán también por las explicaciones que se dan a los educadores, y podrán leer esas también. Por el otro lado, unos niños con menor comprensión de lectura podrán necesitar que los educadores leamos y expliquemos las instrucciones para ellos.

Matemática divina

Las secciones de **"Matemática divina"** son un intento de presentar de vez en cuando una perspectiva espiritual y bíblica acerca de ciertos temas de la matemática. Esta es la perspectiva que a mí personalmente me ayudó más a entender el propósito y significado más profundo de la matemática. Encontré que efectivamente, la matemática tiene mucha afinidad con los valores bíblicos. Eso ya se evidencia en la actitud de los grandes pensadores que colocaron las bases de la ciencia y matemática moderna: Kepler, Newton, Leibniz, Napier, Pascal, Euler, aun Descartes (a pesar de su escepticismo filosófico) – todos ellos se refieren en sus escritos explícitamente al Dios de la Biblia, al universo como su creación, y a la matemática como una expresión del orden divino del universo.

Deseo aclarar que con eso no me refiero a la tradición de ninguna iglesia en particular. Mi punto de referencia es el testimonio de los relatos originales en la Biblia; no lo que los hombres hicieron de ello posteriormente.

No todos los lectores compartirán esta perspectiva. La expongo para aquellos que la encuentren útil. Lectores interesados encontrarán más detalles en el volumen "Matemática divina" que acompaña esta serie de libros y se dirige a los educadores.

¿A dónde vamos desde aquí?

Al final de algunas unidades se encuentra un pequeño apartado titulado **"Adónde vamos desde aquí?"** Ya que la secuencia de las unidades no es fija ni obligatoria, doy allí unas sugerencias de otras unidades que continúan o amplían el tema de la unidad respectiva, por si desean continuar allí.

¿Cuánto tiempo debe durar una unidad?

Tanto tiempo como se mantenga el interés de los niños. Eso depende de muchos factores: la cantidad de contenido y la dificultad de la unidad; la madurez de los niños; los estilos de aprendizaje de los niños; la rapidez con que los niños comprenden los contenidos; etc. Así puede una unidad durar desde pocos días hasta varias semanas; y un niño puede ocuparse con una actividad desde pocos minutos hasta una hora o más, dependiendo de su interés y perseverancia. No nos hagamos esclavos de un cronograma; dejémonos guiar por las necesidades de los niños. En realidad no existe fundamentación pedagógica para establecer cronogramas fijos y currículos normados. Esos obedecen únicamente a necesidades administrativas, pero no pedagógicas.

Organización de las unidades por bloques

Para facilitar la ubicación de temas determinados, las unidades están estructuradas en ocho bloques grandes.

El Bloque I, "Números y operaciones básicas", amplía el espacio numérico hasta 10'000, e introduce los ***procedimientos escritos para las operaciones básicas*** de la suma, resta, multiplicación y división.

El Bloque II, "***Múltiplos y divisores***", introduce conceptos básicos relacionados con divisibilidad, factorización, números primos, MCD y MCM, etc.

El Bloque III es paralelo al Bloque I, pero el espacio numérico se extiende ahora ***hasta un millón***. Además amplía algunos temas relacionados con las unidades de medida.

El Bloque IV introduce las operaciones con ***fracciones***.

El Bloque V es nuevamente paralelo al Bloque I, pero las operaciones se aplican ahora a los ***números decimales***. Además se introduce el tema de los ***porcentajes***.

El Bloque VI se ocupa de la ***geometría***. Estos temas se pueden trabajar paralelamente a los temas de los otros bloques, esparcidos sobre el período entero.

El Bloque VII presenta diversos desafíos de ***razonamiento***. Este bloque contiene además unos "temas sueltos" que no encajaron bien en los bloques anteriores, como ***Estadística, Conjuntos***, y algunos otros.

El Bloque VIII es opcional a este nivel. Contiene unos ***temas más avanzados*** que son más apropiados para alumnos de secundaria, pero que algunos alumnos de primaria pueden tener el deseo o la necesidad de conocerlos.

(Los Bloques VI a VIII se encuentran en la Parte B.)

En realidad no es posible separar los temas tan claramente, porque existen numerosas interrelaciones entre los temas de bloques diferentes. Algunas de estas interrelaciones se indican en el Mapa Temático al inicio del libro, y en las secciones "Prerrequisitos" y "¿Adónde vamos desde aquí?" de cada Unidad.

Por ejemplo, la medición de longitudes y de áreas está relacionada tanto con el cálculo numérico como con la geometría. Por eso aparece en conexión con ambos temas. – Las coordenadas cartesianas se tratan mayormente en relación con la geometría, pero tienen también aplicaciones en la estadística.

La organización por bloques no significa que se deban trabajar los bloques estrictamente el uno después del otro. Al contrario, después de trabajar unos temas de cálculo numérico, es recomendable intercalar un tema de geometría o de razonamiento. La mayoría de las actividades de razonamiento en el Bloque VII se pueden hacer en cualquier momento del período, y se prestan para ofrecerlas como actividades "relajantes" de elección libre.

Dentro de cada uno de los bloques I a V (cálculo numérico), los temas edifican sobre los temas anteriores del mismo bloque. Se recomienda entonces mantener el orden dentro del bloque, pero se puede "saltar" sobre Unidades opcionales.

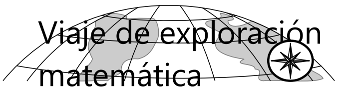
Por el otro lado, los bloques II, III y IV se pueden de cierta manera llevar paralelamente. Por ejemplo, para la primera mitad del Bloque IV (fracciones), la primera mitad del Bloque II es suficiente como prerrequisito; entonces se podría anticipar el Bloque IV y dejar el Bloque III para después.

Los bloques II y IV tienen una mitad "fácil" y una mitad "difícil". Las mitades "difíciles" se dejan de preferencia para la última etapa del período (cerca de los 12 años), paralelamente con el bloque V.

El bloque VI (Geometría) tiene también un orden aproximado según dificultad; pero en este bloque el orden no es tan estricto como dentro de los bloques I a V.

La receta más segura para la planificación de las actividades es que haga uso de su sentido común y de su comprensión por las necesidades de los niños. Mientras dure el interés de un niño por un tema específico, no lo interrumpa. Cuando una actividad se vuelve tediosa, ofrezca otra en su lugar. Si un niño siempre va por lo más fácil, desafíelo a intentar algo un poco más difícil. Si un niño se sobrecarga a sí mismo con ambiciones demasiado exigentes, ayúdele a relajarse y a ser más realista en la estimación de sus capacidades.

Los viajes de exploración matemática y las investigaciones



Un "viaje de exploración matemática" es una Unidad de aprendizaje que se enfoca más profundamente en un tema específico, y desafía al alumno a explorar este tema haciendo sus propias observaciones e investigaciones. Algunos de estos "viajes" incluyen relatos históricos acerca de matemáticos famosos del pasado, y siguen los razonamientos de ellos.

Este libro contiene dos de estos "viajes": "El sistema decimal" *(Unidades 2, 8, 46)*, y "Los números figurativos de los pitagoreos" *(Unidad 81)*. A estos viajes se aplican las mismas pautas generales como a las investigaciones *(vea abajo)*.

Algunas unidades contienen adicionalmente unas preguntas de investigación para explorar algún asunto de esta misma manera. La meta es que los niños descubran propiedades matemáticas *por sí mismos, mediante su razonamiento propio*.

Unas pautas generales acerca de la investigación matemática:

El propósito de una tarea de investigación se cumplirá solamente si permitimos al niño *buscar su propio camino hacia la solución*. Esto implica lo siguiente:

- **No dé instrucciones cerradas** como "así y así se hace".

- De todos modos, puede haber tareas donde usted como padre, madre o profesor(a) tampoco sabe "cómo se hace". Eso está perfectamente bien. **Conviértanse en co-exploradores al lado de los niños.**

- "Investigación matemática" significa **acercarse a la solución *mediante el razonamiento propio*,** no buscar soluciones que otros ya encontraron. Entonces, no trate de encontrar "la fórmula" en alguna otra fuente de información. Eso solamente les quitaría la oportunidad de descubrir algo por ustedes mismos. El conocimiento más profundo y duradero es el que uno descubre por sí mismo.

- No se rindan si cometen errores, o si no encuentran la solución en el primer intento. **"Investigación matemática" significa también aguantar tiempos de frustración, practicar perseverancia, y seguir probando caminos nuevos.** Esto es *lo contrario* de la matemática escolar que se enfoca solamente en encontrar una respuesta lo más rápido posible. Los matemáticos profesionales que trabajan en investigación dicen que pasan la mayor parte del tiempo equivocándose y persiguiendo ideas que al fin terminan en un callejón sin salida. Pero siguen probando ideas nuevas (¡eso requiere creatividad!), hasta que por fin encuentran aquella que lleva a la solución. A veces es necesario ocuparse de una pregunta matemática por algún tiempo cada día, durante varios días – y después "llega" la solución en el momento menos esperado: por la noche entre sueños, al lavar los servicios, o en la bañera.

- Por el otro lado, "buscar el camino propio" no significa que no puedan **trabajar en equipo.** De todos modos, animen a los niños a investigar juntos en pequeños grupos; intercambien ideas entre niños mayores y niños menores, entre adultos y niños, entre padres y profesores. Junten sugerencias diversas, y animen a los que están en peligro de rendirse.

- Pero **si usted como educador ya sabe las respuestas,**

no las "enseñe". Eso le quitaría el misterio y el encanto a la investigación. En cambio, intente animar y guiar a los demás mediante preguntas que hacen *reflexionar*. Solamente cuando los "investigadores" han agotado sus posibilidades, llega el momento de revelar los misterios.

El ***Anexo A*** contiene pautas adicionales (pero normalmente no soluciones completas) para aquellos problemas que pueden ser un poco difíciles aun para adultos. Pero es mejor aguantar primero la tensión de no saber cómo resolverlo, y de intentar diversas ideas, antes de mirar las pautas. La investigación matemática necesita perseverancia.

*(Vea también las notas acerca del concepto de **"Razonamiento"**, en la introducción al Bloque VII.)*

Deseo al respecto citar un consejo muy bueno que encontré en el foro de discusión de un curso de matemática por internet. Se trata de una respuesta a una estudiante que se sintió desanimada porque no pudo encontrar las soluciones de diversos problemas, y dijo que tenía ganas de tirar el lápiz por la ventana y rendirse. Ella recibió el siguiente consejo:

"En tu lugar yo tiraría el lápiz por la ventana después de trabajar en un problema durante, digamos, una hora (o más, si te parece necesario). Pero al día siguiente yo iría afuera, recogería el lápiz, y lo intentaría otra vez. Yo haría esto durante tres días por lo menos. Entonces estarás totalmente enganchada al problema. Te concentras en él durante esa hora diaria; pero estarás pensando en el problema constantemente (mientras caminas en la calle, mientras intentas dormir, ...). Entonces llegará el momento donde o descubres la respuesta, o te das cuenta de que realmente no podrás solucionarlo. Si es lo último, en ese punto lo sabrás. Y en ese punto, leer la solución será algo bueno y no algo malo. Es que si llegas a ese punto, habrás pasado tanto tiempo pensando en el problema que la solución será muy significativa para ti, y nunca la olvidarás."

(Paul Reiners, colaborador del curso "Introduction to Mathematical Thinking" por Keith Devlin.)

La evaluación según el "Camino de aprendizaje"

En el Libro de trabajo, al inicio de cada bloque se encuentra una hoja titulada "Camino de aprendizaje". Esta hoja enumera las capacidades que se esperan adquirir mediante las unidades contenidas en el bloque respectivo, y las representa gráficamente en forma de cuadros o "estaciones" a lo largo de un camino. Cada cuadro indica en paréntesis el número de la unidad relacionada con la capacidad respectiva. Generalmente se representan al lado izquierdo del camino las capacidades "técnicas" tales como leer, escribir y resolver operaciones; y al lado derecho las capacidades relacionadas con la comprensión de los principios matemáticos. Los cuadros sombreados indican capacidades "opcionales", o sea que en este momento no son requeridas para poder progresar en el camino.

Estas hojas pueden quedarse en el poder del educador, o también pueden pegarse en un lugar visible en la pared. Cada vez que el niño demuestra que domina una de las capacidades mencionadas en el camino, el educador dibuja una cara feliz o pone un estíquer en el cuadro correspondiente. Si desea, puede también añadir la fecha. Así pueden ambos, educador y niño, observar su progreso.

La diferencia esencial con la evaluación convencional consiste en que en este sistema no hay niños "desaprobados". Todos los niños aprueban; solamente que no todos trabajan los mismos temas al mismo tiempo. Eso evita mucha frustración en los niños.

Para que este sistema funcione realmente como incentivo y no para desanimar, se recomienda tomar en cuenta los siguientes puntos:

El camino no está cronogramado. Cada niño demuestra sus capacidades individualmente cuando está listo, y *es el niño quien decide cuándo está listo*. Así permitimos a cada niño avanzar a su paso personal.

Entonces, si por ejemplo un niño ha practicado la multiplicación larga y piensa que la domina, puede decirnos: "Creo que ya sé eso". La evaluación puede consistir en un pequeño examen formal (oral, escrito, o práctico), o también en una observación informal de cómo resultan las tareas del niño cuando las hace sin ayuda. Si domina el tema, recibe su "carita feliz" y puede proceder a otro tema. Si no lo domina, no ha "desaprobado"; simplemente sigue practicando, y recibe otra oportunidad cuando lo pide.

Como educadores podemos preguntar a un niño: "¿Crees que ya puedes eso?"; o animarle: "Me parece que ya puedes hacerlo"; pero si el niño responde que todavía no está listo, respetamos su decisión y le damos más tiempo para practicar.

Las capacidades "técnicas" (del lado izquierdo del camino) son las más fáciles de evaluar: se observa si el niño es capaz de resolver ejercicios correspondientes sin ayuda (sea con material concreto o con hojas de trabajo). Las capacidades de comprensión (del lado derecho del camino) pueden evaluarse mientras el niño resuelve ejercicios, haciéndole preguntas del estilo *¿Por qué ...?, ¿Qué pasa si ...?*, etc.

Cada niño se compara solamente consigo mismo, no con otros niños. Muchos niños se desaniman cuando los comparamos entre sí: "Este es mejor; este está atrasado; este está en primer lugar; este en último lugar ..." – El "Camino de aprendizaje" compara a cada niño solamente con su propio nivel anterior. Entonces, cada vez que un niño demuestra una nueva capacidad, es un éxito, independientemente de los logros de los otros niños; porque el niño ha superado su propio nivel anterior.

Si las hojas del "Camino de aprendizaje" están en un lugar visible para todos los niños, hay que evitar que hagan comentarios despectivos como: "¿Todavía no has avanzado más?" Es más fácil evitar eso cuando los niños no están separados por grados, porque entonces no están formando esa idea de que deba existir una relación fija entre la edad cronológica y los progresos en la matemática. Si aun así surge una competencia malsana entre los niños, es preferible que no tengan acceso a los "Caminos de aprendizaje" de otros niños; o sea que no se exhiban públicamente.

El camino no es siempre lineal. En muchas partes del camino existen desvíos y alternativas; no existe una única secuencia para avanzar. Por supuesto que ciertos temas deben seguirse en un orden específico: no tiene sentido calcular hasta un millón, antes de saber calcular hasta mil. Pero muchos temas permiten caminos variados. Por ejemplo, los cálculos y mediciones de áreas pueden introducirse inmediatamente después de saber multiplicar, o también mucho más tarde. Las construcciones geométricas pueden aprenderse independientemente del cálculo numérico. Algunos temas son completamente opcionales. Por ejemplo, el saber jugar ajedrez o resolver sudokus ayuda a desarrollar la capacidad de razonar; pero no es necesario para seguir progresando en la matemática.

Esta variabilidad permite que los niños escojan su camino individualmente. Así estarán también menos propensos a compararse entre sí de manera desfavorable.

Nota: Si el estado exige calificaciones con notas (como en el caso de escuelas alternativas sujetas a las autoridades estatales), éstas pueden elaborarse sin problema a base de los logros documentados en el "Camino de aprendizaje". Estas calificaciones no necesitan servir para otro fin que la documentación frente al estado; no es necesario que los niños se enteren de ellas.

Si el estado exige que los niños den exámenes estandarizados (como en el caso de las familias educadoras en algunos países), se recomienda buscar un arreglo de tal manera que el niño dé su examen al nivel que corresponde a sus conocimientos actuales. Normalmente existe cierta tolerancia en cuanto a la edad normada para cada grado.

¿Y la disciplina?

Escribo esto especialmente para aquellos profesores que desean aplicar estos métodos en su salón de clases, pero que desde un trasfondo de escuela tradicional temen que estos métodos quebrantarían la disciplina en la clase: "¿Cómo podré mantener la disciplina si permito a los niños moverse y desplazarse como quieren? ¿Cómo puede una clase ser disciplinada si cada niño puede escoger sus propias actividades?"

La escuela tradicional cree que la disciplina se puede mantener solamente cuando todos los niños hacen lo mismo al mismo tiempo y de la misma manera, y todos están sentados en silencio. Una educación activa, en cambio, enfatiza otros aspectos de la disciplina: La *concentración* del niño en su propia actividad, y su *respeto* por las actividades de los otros niños.

Así es perfectamente posible que dentro de un salón de clases dos niños jueguen juntos con un ábaco, mientras algunos otros pinten sus dibujos, y otro grupito construya un castillo de bloques de madera. Mientras cada niño está concentrado en su actividad y no molesta a los demás en sus respectivas actividades, no existe ningún problema disciplinario.

Es asombroso ver la capacidad de concentración de un niño, si ha encontrado una actividad que le interesa y que requiere toda su atención. En este caso, un niño puede mantenerse ocupado hasta por horas, con muy poca necesidad de supervisión adulta.

– "Pero así no se pueden dictar clases", dirá el profesor de escuela tradicional. Cierto; pero los niños de primaria todavía no tienen mucha necesidad de "clases". Mucho más aprenden mediante su *actividad propia*, y también mediante la *atención individual* que les brindamos.

Entonces, durante el tiempo de actividades libres, un buen educador irá de un niño a otro, observando lo que hace; tratando de entender cuáles son los pasos de desarrollo que el niño está dando en este momento; explicándole individualmente o a un grupo pequeño el uso de un material nuevo; brindando ayuda o ideas adicionales donde fuera necesario; ayudando a aquellos niños que todavía no pudieron decidirse por una actividad, a que encuentren algo conforme a sus intereses y necesidades; y ayudando a solucionar conflictos entre los niños donde fuera necesario.

En el transcurso de la primaria aumenta poco a poco la necesidad (¡y también el beneficio!) de reunir de vez en cuando a todos los niños para explicarles algo en conjunto, o para dialogar acerca de algún tema con el grupo entero. Se observará que los niños responden mucho mejor a esos momentos, si por lo demás tuvieron suficientes oportunidades para el movimiento físico y para elegir actividades según sus intereses y necesidades.

Las "clases" necesarias se pueden dar también a grupos de niños que se forman espontáneamente alrededor de un interés común: por ejemplo quieren saber qué se puede hacer con los bloques lógicos; o quieren aprender a diseñar casitas de cartulina. No hay problema con que otros niños se "pierdan" estas clases: ellos se interesarán por el tema en algún otro momento.

No es cierto que los niños sean "indisciplinados" por naturaleza. La mayoría de los problemas disciplinarios en las escuelas tradicionales se deben a que ese sistema no toma en cuenta las necesidades naturales de los niños; sobre todo su necesidad de movimiento físico, y su necesidad de poder aprender de acuerdo a su nivel actual de desarrollo y comprensión. Cuando estas dos necesidades son satisfechas, además de brindar un ambiente emocional positivo, los problemas disciplinarios se reducen grandemente.

Es cierto que las escuelas alternativas en su mayoría tienen clases más pequeñas, de entre 7 a 15 alumnos por educador (dependiendo de la edad de los alumnos), para poder implementar mejor una pedagogía individualizada y activa. Pero se pueden también encontrar soluciones alternativas para números más grandes de alumnos; por ejemplo encargando a algunos alumnos mayores como "tutores" para alumnos menores.

Me limito a estas pocas pautas, porque no es posible en el marco de este libro dar una descripción extensa de pedagogías alternativas. Recomiendo a profesores interesados, visitar escuelas alternativas o leer literatura correspondiente; p.ej. "El método Montessori" por María Montessori, o "Educar para ser" por Rebeca Wild. – Padres educadores podrán interesarse por la "Fórmula Moore" desarrollada por Raymond y Dorothy Moore. (Descripciones y pautas en inglés se pueden encontrar en *http://www.moorefoundation.com* y en los libros de los Moore. Al idioma español fue traducido únicamente su libro "Mejor tarde que temprano".)

¿Por qué el contenido de tres años juntos en un solo libro?

Los libros tradicionales que avanzan por grados, contienen muchas repeticiones. Cada año repiten los mismos temas, solamente a un nivel un poco más avanzado. Estas repeticiones son necesarias cuando los temas se introducen a una edad demasiado temprana: La primera y la segunda vez el alumno todavía no entiende el tema, porque no tiene la madurez mental necesaria; por eso necesita que el tema se repita una tercera y una cuarta vez para que (quizás) lo pueda entender.

La obra presente se basa en un enfoque diferente: Esperamos hasta que el cerebro del alumno haya madurado lo suficiente para poder entender el tema. A menudo ese es el momento cuando también despierta su interés propio por el tema. Entonces se lo enseñamos a fondo, y mediante actividades prácticas y concretas. Así lo aprende bien, y en un contexto emocional positivo, y eso hace que los conocimientos sean mucho más duraderos que los que se adquieren en el sistema convencional. Por tanto, ya no hay necesidad de repetirlos tantas veces, y los alumnos alcanzan el mismo aprendizaje con mucho menos horas académicas.

Aquella repetición que es necesaria para no olvidar un conocimiento ya adquirido, se da de manera *implícita* al proceder a temas más avanzados: En la matemática, cada tema avanzado se basa sobre varios temas anteriores. Por ejemplo, los conceptos del MCD y MCM vuelven a usarse al simplificar y homogenizar fracciones, al resolver problemas con proporciones, y en otros contextos. Así el alumno los repite sin necesidad de una repetición explícita.

Los libros tradicionales contienen también muchos contenidos y terminología innecesarios, lo cual solamente infla el volumen de los libros, y hace que el aprendizaje se vuelva tedioso. Aquí, como en muchos aspectos de la vida y de la pedagogía, "menos es más". Deseamos limitarnos a lo que es realmente necesario para entender los principios matemáticos; pero ofrecer una variedad de actividades concretas relacionadas con estos temas, para que los alumnos tengan opciones de elegir.

Por estas razones, el contenido de Primaria II se ha repartido por temas en una Parte A *(Aritmética)* y una Parte B *(Geometría, Razonamiento, y temas adicionales)*, pero no se divide por grados. El avance es continuo, al paso individual de cada niño, y sin una secuenciación artificial por grados.

Los únicos temas que se repiten explícitamente en la obra presente, son aquellos que se encuentran en el límite entre los contenidos de un tomo y otro. Así por ejemplo, al final del nivel Primaria I se dio una introducción a los múltiplos y divisores, un tema que se amplía en Primaria II. Al final del nivel Primaria II se introducen brevemente las potencias y raíces, temas que se desarrollarán extensamente en el nivel Secundaria I.

Otra razón por juntar tres años en un tomo, es que a menudo resulta ventajoso dejar que niños de diferentes edades trabajen juntos, en vez de separarlos artificialmente por grados. (Un hecho señalado ya por María Montessori, y otros después de ella.) En este caso es práctico que puedan juntos usar el mismo material, aunque no necesariamente trabajando todos al mismo nivel de dificultad.

¿Por qué no hay clave de respuestas?

En primer lugar, porque no deseo fomentar el concepto tradicional de “un libro para el profesor y otro libro para el alumno”. Ese concepto da lugar a la idea de que el profesor tiene acceso a cierta información exclusiva, ”secreta”, que le provee de ciertas ventajas sobre el alumno. En la matemática, eso no debe ser así. La matemática como verdad universal debe ser accesible para profesores y alumnos por igual. Por eso, este libro es tanto para alumnos como para padres y profesores. Contiene instrucciones para los alumnos y también pautas pedagógicas para padres y profesores; y no hará daño si a un alumno le interesan también las partes para educadores.

La ventaja del educador no debe crearse artificialmente mediante el acceso exclusivo a ciertos recursos que son ”prohibidos” para los alumnos. Su ventaja debe basarse en lo que realmente le distingue del alumno: su madurez, sus conocimientos, su experiencia. Si un educador posee estas calidades, no debería necesitar una clave de respuestas – por lo menos no al nivel de la primaria donde la matemática es todavía elemental.

Algunos materiales, por ejemplo las tarjetitas con operaciones, incluyen sus respuestas, y así permiten al alumno comprobar sus propios resultados. Unas cuantas tareas en las hojas de trabajo permiten el autocontrol mediante el patrón o dibujo que resulta si la tarea se resuelve correctamente. (Por ejemplo las Hojas 15.1, 57.1, y otras.) También se enseñan métodos matemáticos de comprobar resultados (por ejemplo mediante la operación inversa). Así puede el alumno por sí mismo verificar si sus respuestas son correctas, y aprende que la verificación se basa en principios matemáticos, no en una misteriosa ”clave de respuestas”.

Para algunos problemas o tareas de investigación un poco difíciles, se encuentran pautas adicionales en el ***Anexo A***. Consulten este anexo si intentaron por mucho tiempo resolver un problema y no progresan. (Acerca del uso de las tareas de investigación y las pautas, vea también arriba bajo el título "Los viajes de exploración y las investigaciones".)

¿Por qué no hay preguntas de selección múltiple?

Las preguntas de selección múltiple fueron inventadas para la conveniencia del profesor o administrador que califica las tareas; pero tienen muy poca utilidad pedagógica. En la matemática, las preguntas de selección múltiple inducen al alumno a adivinar las respuestas sin emplear un razonamiento matemáticamente correcto. En la matemática se deben evaluar no solamente las respuestas, sino también el *camino* que el alumno tomó para llegar a las respuestas; o sea, su forma de razonar. Las preguntas de selección múltiple no toman en cuenta este aspecto.

En cuanto al autocontrol de las respuestas por el alumno, aplica lo dicho en el apartado anterior acerca de la comprobación de resultados.

Si un niño necesita practicar la resolución de preguntas de selección múltiple como preparación para algún examen oficial que tiene que dar, puede hacerlo mediante muestras obtenidas de libros escolares convencionales. Se trata en ese caso del entrenamiento de una destreza técnica, no matemática; por tanto no me pareció necesario incluirla en un libro de matemática.

Descripción de unos materiales frecuentemente usados

Existen algunos materiales manipulables que han sido usados con mucho éxito para introducir a los niños a la matemática. Los estaremos usando con mucha frecuencia en el nivel de primaria:

El ábaco

Es un instrumento muy útil para practicar las operaciones básicas. El modelo más frecuentemente usado tiene 10 hileras de 10 cuentas cada una.

Si no tiene la posibilidad de conseguir un ábaco, puede fabricar uno de manera casera con una caja de cartón grueso, cuerdas o alambres, y cuentas grandes.

Las regletas Cuisenaire

Son regletas que representan los números de 1 a 10, y se pueden encontrar en algunas tiendas de juegos y material didáctico. Si no puede conseguirlos, puede también encargar a un carpintero o ebanista con fabricarlas. Su grosor es de 1 x 1 cm, y la longitud corresponde al número que representa (1 = 1 cm, 2 = 2 cm, 3 = 3 cm, etc, hasta 10 = 10 cm.)

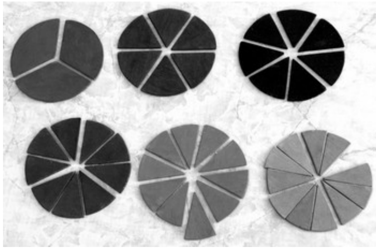
Su esquema de colores original, según su inventor Georges Cuisenaire, refleja unos principios matemáticos, y es el siguiente:

1 – blanco o madera natural sin pintar	6 – verde oscuro
2 – rojo	7 – negro
3 – verde claro	8 – marrón
4 – lila	9 – azul
5 – amarillo	10 – anaranjado.

El material Base 10

Es una ampliación de las regletas Cuisenaire que contiene adicionalmente centenas (cuadrados de 10 x 10 x 1 cm) y millares (cubos de 10 x 10 x 10 cm).

En su lugar se puede usar "material de canje" como p.ej. tapas de botellas o "monedas" de cartulina en diferentes colores, a las que asignamos arbitrariamente los valores posicionales de 1, 10, 100, 1000, etc.



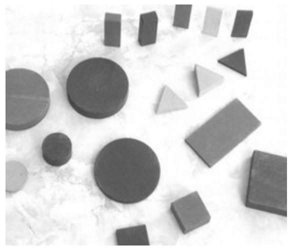
Las fracciones circulares

Son círculos partidos en sectores que representan fracciones del círculo entero. Un círculo es partido en mitades, otro en tercios, otro en cuartos, etc, hasta los duodécimos (dozavos).

Por si desean fabricarlos ustedes mismos, la *Unidad 59* contiene instrucciones de cómo construir los sectores con exactitud.

Para mantener la correspondencia con las regletas Cuisenaire, se puede pintar cada círculo con el color de la regleta correspondiente: las mitades de rojo, los tercios de verde claro, los cuartos de lila, etc.

Los bloques lógicos



Es un juego de bloques de madera de diferentes formas, tamaños, y otras características. Sirve para entrenar capacidades de razonamiento, clasificación de objetos, conceptos de la teoría de conjuntos y combinatoria, etc.

El juego estándar consiste en todas las combinaciones posibles entre las siguientes características:

Forma:	Círculo, cuadrado, rectángulo, triángulo.
Color:	Rojo, azul, amarillo.
Tamaño:	Grande, pequeño.
Grosor:	Grueso, delgado.

Eso da un total de 4 x 3 x 2 x 2 = 48 bloques, porque cada combinación posible debe estar representada. Así tienen que existir por ejemplo cuatro cuadrados rojos: 1) uno grande grueso, 2) uno grande delgado, 3) uno pequeño grueso, y 4) uno pequeño delgado. Y lo mismo para todos los otros colores y formas.

Para poder realizar las actividades de la manera correcta, será esencial tener el juego completo.
Desafortunadamente, en algunas tiendas se venden juegos bajo el nombre de "bloques lógicos", pero que no cumplen con las características requeridas. Por eso se recomienda verificar los juegos que se venden, o fabricarlo uno mismo.

Este material se puede fabricar fácilmente, cortando las figuras de madera contrachapada (triplay) y pintándolas. O se puede encargar a un carpintero con hacerlo. Se necesitará una madera gruesa y otra delgada.

Bloque I: Números y operaciones básicas (Unidades 1 a 13)

Este bloque amplía el espacio numérico hasta 10'000, profundiza en el entendimiento del sistema decimal, presenta actividades relacionadas con las unidades de medidas y su conversión, e introduce los procedimientos de la suma, resta, multiplicación y división cifra por cifra.

Para poder trabajar este bloque, es necesario entender los temas del Bloque V del nivel de Primaria I: Números hasta 1000, unidades básicas de longitudes y pesos, y el dominio del cálculo mental con las cuatro operaciones básicas.

Resumen de principios matemáticos acerca de las operaciones básicas

Para los educadores

Los principios descritos abajo fueron introducidos en el nivel de Primaria I, mediante ilustraciones con material concreto. Su entendimiento práctico es un prerrequisito para poder entender los temas de cálculo numérico del nivel de Primaria II.

Por el otro lado, todavía no es necesario que los niños conozcan los términos técnicos, tales como "ley conmutativa". Ellos pueden aprender estos términos de manera informal en el transcurso del período de Primaria II, mientras aplicamos estos principios a situaciones nuevas.

Algunos aspectos un poco avanzados de estos principios se explicaron formalmente solamente en las secciones "Principios matemáticos" o "Para los educadores" del nivel Primaria I, por lo cual se repasarán en este libro.

Principios matemáticos

La transitividad

El principio de la transitividad se aplica, por ejemplo, al realizar seriaciones: Ordenar objetos por tamaño; ordenar números de menor a mayor o vice versa; etc. Este principio nos dice que si A < B y B < C, entonces A < C. Igualmente, si A > B y B > C, entonces A > C. Esto se hace inmediatamente evidente al efectuar una seriación con objetos concretos.

La transitividad de estas operaciones es un *axioma*; o sea, una ley tan fundamental que no se puede demostrar lógicamente a partir de otras leyes. Los axiomas se aceptan "por fe" porque son evidentes, y/o porque se reconoce su necesidad como fundamento de la estructura lógica de la matemática.

La relación de la *igualdad* también es transitiva: si A = B y B = C, entonces A = C. Esto se presupone silenciosamente cada vez que sustituimos una expresión por otra igual. Por ejemplo, podemos transformar la multiplicación 5 x 14 en otra multiplicación, sabiendo que 14 = 2 x 7 y 5 x 2 = 10:

5 x 14 = 5 x (2x7) = (5x2) x 7 = 10 x 7,
por tanto 5 x 14 = 10 x 7.

En el segundo paso de esta transformación hemos usado la ley asociativa *(vea más abajo)*; pero para afirmar que el razonamiento entero tiene validez, hemos aplicado implícitamente el axioma de la transitividad.

La operación inversa

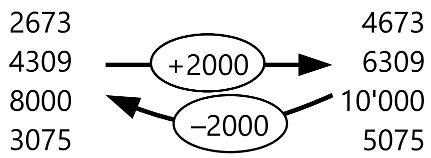
Casi todas las operaciones matemáticas se pueden invertir, o sea, se pueden recorrer "en el sentido opuesto". Así por ejemplo, la sustracción (resta) es la operación inversa de la adición (suma), y vice versa:

12 + 6 = 18, entonces 18 – 6 = 12.

Lo mismo aplica a la multiplicación y división:

4 x 7 = 28, entonces 28 ÷ 7 = 4.

Para los niños ilustramos este principio, representando las operaciones como "máquinas" que podemos hacer correr en ambos sentidos.



En el nivel de Primaria I hemos usado tubos vacíos de papel higiénico como "máquinas", o los niños mismos representaron "máquinas" al jugar a la "computadora viviente". Si los niños hicieron esas experiencias concretas, ahora deberían ser capaces de una abstracción un poco más avanzada: representamos ahora las "máquinas" como simples flechas o líneas con operadores matemáticos. Si dificultan con eso, podemos volver por un tiempo a las representaciones anteriores.

En la suma y resta, el principio puede ilustrarse también mediante "viajes de ida y vuelta" en la recta numérica.

El principio de la operación inversa puede usarse para resolver operaciones que serían más complicadas de resolver de manera directa. Por ejemplo, en vez de preguntar "¿Cuánto es 66 entre 7?", puedo preguntar: "¿ 7 por cuánto es 66?".
(Esto es fácil si sabemos las tablas de multiplicación. Para hacerlo de manera directa, tendríamos que repartir 66 objetos en 7 partes iguales; o tendríamos que empezar con el número 66 y restar 7 sucesivamente tantas veces como se puede, y después contar cuántas restas hemos hecho.)

La operación inversa se puede usar también para ***comprobar*** si el resultado de una operación es correcta:

Hemos calculado que 307 + 67 = 374. Si esto es correcto, entonces 374 – 67 debe ser igual a 307.

Hemos calculado que 472 ÷ 4 = 118. Si esto es correcto, entonces 118 x 4 debe ser igual a 472.

En la división con residuo: Hemos calculado que 88 ÷ 9 = 9 R.7. Si esto es correcto, entonces (9 x 9) + 7 debe ser igual a 88. Observando la figura que resulta cuando efectuamos una división con material concreto, podemos ver fácilmente que funciona de esta manera.

Una operación junto con su inverso se anulan:

23 + 369 – 369 = 23   846 ÷ 9 x 9 = 846

Representaciones concretas de las operaciones básicas

La adición podemos representar *juntando* o *añadiendo* objetos; o caminando "*hacia adelante*" en la recta numérica.

La sustracción corresponde al *quitar* objetos, o al caminar "*hacia atrás*" en la recta numérica.

La multiplicación se representa preferiblemente en forma de un *rectángulo*, por ejemplo en papel cuadriculado: El número de cuadraditos que contiene el rectángulo es el producto del número de cuadraditos que contienen sus lados.

Dividir es repartir en partes iguales. Se pueden repartir objetos entre un número determinado de personas, por ejemplo repartir 30 uvas entre 6 niños. O se pueden formar grupos que contienen una cantidad determinada: Tenemos 28 piedritas y formamos grupos de 4, ¿cuántos grupos salen?

Estas representaciones no son "leyes matemáticas" en su sentido propio. Son ilustraciones prácticas y concretas que ayudan a los niños a *experimentar* algunas propiedades de las operaciones aritméticas, a un nivel que ellos pueden comprender.

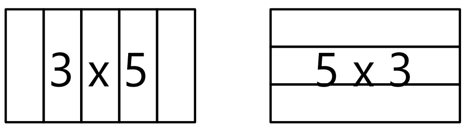
La ley conmutativa

Esta ley nos dice que en una operación podemos intercambiar los operandos, y el resultado sigue siendo el mismo. La adición y la multiplicación son conmutativas:

5 + 8 = 8 + 5   3 x 4 = 4 x 3

2 + 17 + 8 = 8 + 2 + 17   7 x 2 x 5 = 5 x 2 x 7

En la *suma* podemos verlo al juntar dos regletas Cuisenaire y después intercambiar su orden. En la *multiplicación* podemos ilustrarlo con las dos formas que existen para rellenar un rectángulo con regletas iguales:

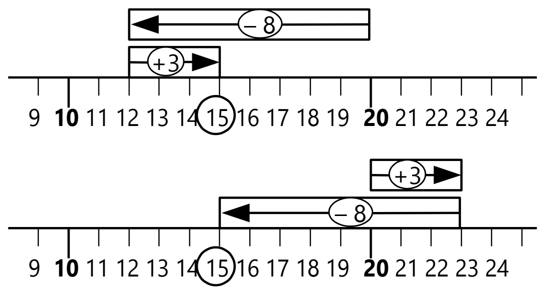


Existe también una conmutatividad de sumas y restas combinadas, y de la misma manera para multiplicaciones y divisiones combinadas, *siempre y cuando cada número se mantiene junto a su signo:*

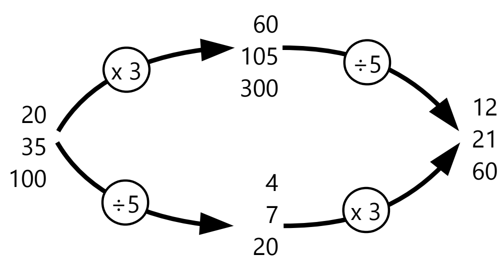
20 –8 +3 = 20 +3 –8

18 x5 ÷6 = 18 ÷6 x5

En el caso de la suma y resta, eso se puede ilustrar con flechas que representan las etapas de un "viaje" en la recta numérica. El orden de las flechas se puede intercambiar sin que eso afecte el resultado final, mientras no cambiamos la dirección de ninguna flecha:



En el caso de la multiplicación y división es más difícil encontrar una ilustración concreta; pero se puede experimentar con varias "máquinas" sucesivas:



Para que los niños entiendan este principio correctamente, es indispensable mantener la convención de que *los signos se escriben delante del número al que pertenecen.* El signo pertenece siempre al número que le sigue, nunca al número anterior.

~~234+~~ ~~419~~ ~~765 –~~ ~~378~~

Por tanto, estos ejemplos de operaciones están mal escritos. No solamente están los signos escritos *detrás* de los números (en vez de escribirlos adelante); están además asociados con los números equivocados. En la suma, el número que se aumenta es 419, no 234. Por tanto, es el 419 que debe llevar el signo. Igualmente en la resta, el número que se quita es 378, no 765. Por tanto, es el 378 que debe asociarse con el signo negativo. La manera correcta de escribir estas operaciones es la que figura a la derecha.

$$\begin{array}{r} 234 \\ \underline{+419} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 765 \\ \underline{-\ 378} \end{array}$$

Cuidar estos detalles es importante, no por un formalismo burocrático, sino porque queremos que los niños aprendan los principios correctos desde el inicio. Si los niños se acostumbran a ver sumas y restas mal escritas, entonces en el nivel de Secundaria tendrán dificultades para entender las leyes de los signos. Tomemos como ejemplo la siguiente expresión:

3a + 4b + 7c – 8b – 15a

Si los alumnos fueron acostumbrados a ver los signos detrás de los números, entonces en su mente asociarán los signos de la siguiente manera:

(3a +) (4b +) (7c –) (8b –) (15a)

Con eso serán incapaces de evaluar la expresión correctamente. Posiblemente harán algo como esto:

(3a +) (15a)(¿+?) (4b +) (8b –) (7c –)

o sea,

3a + 15a + 4b + 8b – 7c ,

lo que es obviamente equivocado.

La ley asociativa

Esta ley nos dice que podemos "asociar" los operandos como queremos, sin que eso afecte el resultado final. La adición y la multiplicación son asociativas:

(17 + 26) + 4 = 17 + (26 + 4)

(7 x 5) x 2 = 7 x (5 x 2)

Esta ley, junto con la ley conmutativa, a menudo ayuda para simplificar el cálculo de operaciones con varios números. Por ejemplo:

64 + 13 + 36 + 9 + 7

= 64 + 36 + 13 + 7 + 9 *(Ley conmutativa)*

= (64 + 36) + (13 + 7) + 9 *(Ley asociativa)*

= 100 + 20 + 9

= 129.

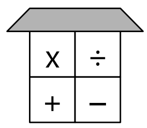
Cuando intervienen sustracciones junto con las adiciones, la ley asociativa asume la forma de las *leyes de signos*, que examinaremos en un momento posterior. *(Vea Unidad 93.)*
Una ley análoga aplica a las combinaciones de multiplicaciones con divisiones.

Razonamiento aditivo o multiplicativo – "La casa de dos pisos"

Es importante saber distinguir entre "situaciones aditivas" (que requieren las operaciones de adición y sustracción), y "situaciones multiplicativas" (que requieren las operaciones de multiplicación y división). Por ejemplo:
Juan tiene 8 lápices, Sara tiene 12 lápices, y Martina tiene 11. ¿Cuántos lápices tienen juntos? – Esta es una situación aditiva: Las cantidades de lápices "se juntan", o sea, forman una *suma*.
El panadero usa 40 g de harina para hacer un panecillo. ¿Cuántos panecillos puede hacer con 1 kg de harina? – Esta es una situación multiplicativa. *Cada* pan contiene 40 g de harina; entonces la cantidad total de harina es 40 g *multiplicado* por el número de panes.

Para resolver esta clase de problemas, hay que analizar además cuál es "el entero", y cuáles son sus "partes" *(vea el siguiente principio)*.

En diversas ocasiones hemos usado la "casa de dos pisos" para ilustrar ciertas propiedades de las operaciones. En el primer piso vive la suma y su inverso, la resta. En el segundo piso, encima de la suma vive la multiplicación, que podemos interpretar como "muchas sumas". A su lado vive su inverso, la división. Hemos visto en los principios antes descritos (operación inversa, ley conmutativa y asociativa) que se aplican de la misma manera a las operaciones de ambos pisos.



La diferencia entre razonamiento aditivo y multiplicativo no es una "ley matemática" en su sentido propio. Es un principio de la *aplicación* de la matemática a situaciones concretas; o quizás mejor dicho, un principio de cómo "traducir" situaciones concretas al lenguaje de la matemática, y cómo entender el orden inherente de esas situaciones. Para desarrollar esta clase de razonamiento, es esencial que los niños hayan tenido suficientes oportunidades de experimentar operaciones aritméticas manipulando materiales concretos, y en el contexto de las situaciones de la vida diaria.

El entero y sus partes – El producto y sus factores

Este es otro principio importante para entender la "estructura matemática" de las situaciones de la vida diaria. Euclides lo formuló así: "*El entero es mayor que su parte*". En las situaciones aditivas podemos formularlo más exactamente: "El entero es la *suma* de sus partes." Si entendemos cuál es "el entero", entonces sabemos dónde sumar y dónde restar. Para obtener el entero, hay que sumar sus partes. Para obtener una parte, hay que comenzar con el entero y restarle las otras partes.
En el ejemplo de los lápices *(vea en el apartado anterior)*, los lápices que tienen juntos es "el entero", la suma de los lápices que tiene cada uno. – Otro ejemplo:
Tenemos 14 panes; 11 hemos comprado hoy. ¿Cuántos panes son de ayer? – En este caso, los panes que tenemos son "el entero", y los que compramos hoy son una parte de ellos. Entonces, para obtener la otra parte (los de ayer), tenemos que restar 14 – 11.

En las situaciones multiplicativas, el entero es el *producto* de las partes. En el ejemplo del panadero *(vea en el apartado anterior),* "el entero" es la cantidad total de harina. Sus factores son el número de panes, y la cantidad de harina que se usa para cada pan (40 g). En este caso, el producto es conocido (1 kg), y se busca uno de sus factores (el número de panes). Por tanto, tenemos que *dividir* el producto entre el otro factor: 1000 g ÷ 40 g = 25.

En estas situaciones, a menudo ayuda hacer un *dibujo* para entender mejor la situación. Por ejemplo, podríamos dibujar unos panecillos y escribir el número 40 en cada uno de ellos. ¿Dónde está en el dibujo la cantidad total de harina? – Es sumando 40 + 40 + 40 + ..., tantas veces como tenemos panes. O sea, es el número de panes multiplicado por 40. Por tanto, si este producto es conocido y queremos saber el número de panes, tenemos que usar la operación inversa, la división.

Elemento neutro

Cada operación aritmética tiene su elemento neutro; o sea, un número que no altera el número inicial cuando lo usamos con la operación respectiva.
El elemento neutro de las operaciones del "primer piso" es el cero: Si sumamos o restamos cero a un número, el número no cambia. Por ejemplo 7 + 0 = 7, 7 – 0 = 7.
El elemento neutro de las operaciones del "segundo piso" es el 1: Si multiplicamos o dividimos un número por 1, el número no cambia.
Por ejemplo 7 x 1 = 7, 7 ÷ 1 = 7.

Una consecuencia de este hecho es, que si combinamos una operación con su operación inversa, su efecto combinado es la operación con el elemento neutro:

23 + 7 – 7 = 23 + 0 = 23 – 0

23 x 7 ÷ 7 = 23 x 1 = 23 ÷ 1

Esto es importante entender por ejemplo al simplificar fracciones *(Bloque IV)*: Cuando "se anulan" o "desaparecen" todos los factores en una parte de la fracción, lo que queda no es cero, es 1, porque se trata de operaciones del "segundo piso".

$$\frac{\cancel{5}^{\,1}}{\cancel{15}_{\,3}}$$

(5 ÷ 5 = 1)
(15 ÷ 5 = 3)

Orden de las operaciones

Lo siguiente no son "leyes matemáticas" en su sentido propio; son *convenciones* acerca de cómo escribir e interpretar operaciones combinadas. Para entender mejor estas convenciones, usamos la ilustración de la "casa de dos pisos" *(vea más arriba)*. Estas convenciones son las siguientes:

1. Las operaciones ***entre paréntesis*** se resuelven ***primero***.

Ejemplo: En 20 x (3 + 5) se resuelve primero (3 + 5).

20 x (3 + 5) = 20 x 8 = **160**.

2. Cuando se combinan ***operaciones "del mismo piso"*** sin paréntesis, se resuelven ***en su orden, de izquierda a derecha***.

Ejemplo: 23 + 25 – 18 + 10 se resuelve en su orden:

23 + 25 – 18 + 10
= 48 – 18 + 10
= 30 + 10 = **40**

Lo mismo en una combinación de multiplicaciones y divisiones.

3. Cuando se combinan operaciones de diferentes "pisos" sin paréntesis, ***las operaciones del piso superior se resuelven primero.***

Ejemplo: En 100 – 72 ÷ 8 x 10 + 7 se resuelven primero las multiplicaciones y divisiones, o sea (72 ÷ 8 x 10). Estas dos operaciones se resuelven en orden porque son operaciones del mismo piso (Regla 2).

100 – 72 ÷ 8 x 10 + 7
= 100 – (9 x 10) + 7
= 100 – 90 + 7 (y ahora también en orden)
= 10 + 7 = **17**.

Ciertas leyes matemáticas, como las leyes conmutativa, asociativa y distributiva, permiten cambiar el orden de las operaciones en los casos donde se pueden aplicar.

La ley distributiva

La ley distributiva se puede aplicar cuando se efectúa una operación del "segundo piso" sobre una operación del "primer piso". En este caso, la operación del "segundo piso" (multiplicación o división) se "distribuye" sobre todos los miembros de la operación del "primer piso". Esta ley es la base para las multiplicaciones y divisiones con números grandes.

Ejemplos:

$$(60 + 7) \times 4 = (60 \times 4) + (7 \times 4)$$

$$(300 + 40 - 1) \times 7 = (300x7) + (40x7) - (1x7)$$

$$(600 + 480 + 36) \div 6 = (600\div6) + (480\div6) + (36\div6)$$

$$(900 - 45) \div 9 = (900\div9) - (45\div9)$$

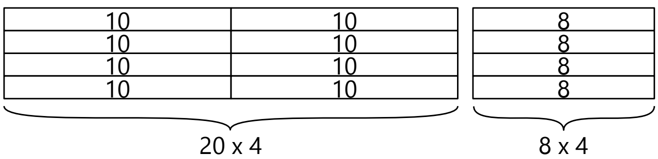
(Nota: Según las convenciones mencionadas en el apartado anterior, en el lado derecho de estos ejemplos no habría necesidad de paréntesis; pero se añadieron para mayor claridad.)

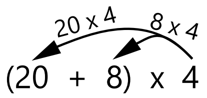
Sin embargo, la ley distributiva no se aplica al dividir entre una suma o entre una diferencia:

$$480 \div (30 + 5) = ¿?$$

$$480 \div (40 - 5) = ¿?$$

La ley distributiva se puede ilustrar de manera concreta con rectángulos formados de regletas Cuisenaire:





Vocabulario matemático

Las partes de una suma se llaman con los siguientes nombres:

Sumando + Sumando = Suma.

Por ejemplo, en 3 + 4 = 7, el 3 y el 4 son *sumandos*, el 7 es la *suma*.

La operación de sumar se llama también **adición**.

Diferencia: El resultado de una resta.

La operación de restar se llama también **sustracción**.

Nota: En algunos libros podemos encontrar las palabras "minuendo" y "sustraendo" para las partes de una resta. Estas palabras no son usuales afuera del ámbito escolar; pero si los niños tienen que dar exámenes formales, tal vez tendrán que aprenderlas. Pero más adelante, al entender los números negativos, se tratarán las partes de una resta como "sumandos", tomando en cuenta que un sumando puede ser positivo o también negativo.

Las partes de una multiplicación se llaman:

Factor x Factor = Producto

Nota: En algunos libros podemos encontrar en vez de "factores" las palabras "multiplicando" y "multiplicador". Estas palabras son poco usuales y pueden causar confusión, porque dan la impresión de que el orden de los factores sea esencial, mientras en realidad se pueden intercambiar según la ley conmutativa.

Las partes de una división se llaman:

Dividendo ÷ Divisor = Cociente (más **residuo**)

Nota: La palabra "dividendo" no es tan usual. El concepto de "divisor", en cambio, se volverá importante en otro contexto; vea en el Bloque II.

Unidad 1 - Números con varios miles

Prerrequisitos:

- Números hasta 1000.

Materiales necesarios:

- Material Base 10, inclusive varios cubos de millares.
- Tapas de botellas en diferentes colores, o fichas de cartulina.
- Ábaco.
- Tarjetitas de cartulina.
- Una cartulina grande (para el tablero posicional grande).

Para los educadores

En esta Unidad y en las siguientes retomamos diversas actividades ya conocidas desde el nivel de Primaria I: Conteo, representación de números, sumas y restas con diversos "materiales de canje" en el sistema decimal. Si las descripciones en el Taller le parecen insuficientes, consulte el libro de Primaria I (Unidades 27, 44, 45).

En el "Taller" se presentan tres formas de representar los números: con material Base 10, con tapas de botellas (o fichas de cartulina), y con el ábaco. Las mismas actividades se pueden hacer con cada uno de estos materiales. Así cada niño puede elegir el material que prefiere.

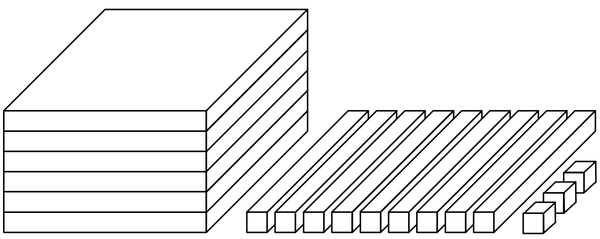
En cuanto al tema de millares, centenas, decenas y unidades, no usamos los excesivos formalismos de escribir "codificaciones" o "descomposiciones de números" de diversas maneras sofisticadas. En su lugar, realizamos estas operaciones con material concreto, y así guiamos a los niños a una comprensión funcional de la lectura y escritura de números en el sistema decimal. Nuestra meta es que los niños adquieran sentido numérico; que sean capaces de relacionar los números escritos con cantidades reales de objetos concretos y de formar imágenes mentales correspondientes; y que adquieran experiencia práctica en cuanto al "comportamiento" de los números.

TALLER

Contar con material de canje

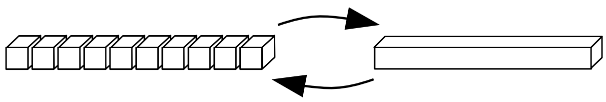
Hagan unas actividades de conteo con el material Base 10 para repasar y practicar el concepto del canje. Un niño puede ser el "cajero" que guarda en el "banco" el material que no estamos usando, y que efectúa los canjes que le pedimos. Por ejemplo:

Representamos el número 693 con el material.

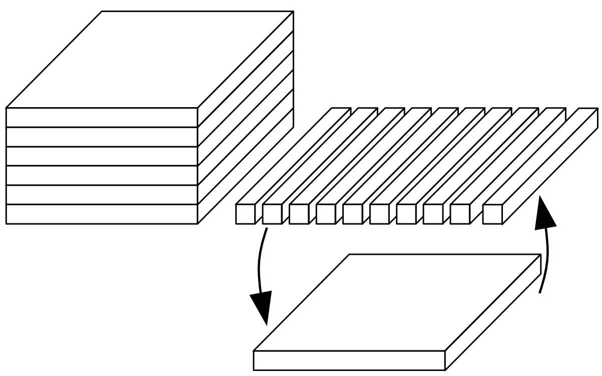


Añadimos unidades y contamos: 694, 695, 696... hasta 699.

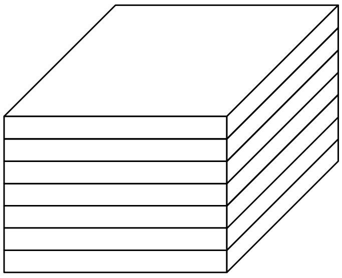
Ahora, si añadimos una unidad más, tenemos 10 unidades. En nuestro sistema decimal, eso significa que debemos canjearlas por una decena (o sea, una regleta de 10). Llevamos las 10 unidades al "banco", y el "cajero" nos da en su lugar una regleta de 10.



Pero ahora tenemos 10 decenas. Esto significa que tenemos que hacer otro canje: Los canjeamos por una centena.



Ahora tenemos la forma correcta de nuestro número, 700:



Podemos seguir añadiendo unidades y contando: 701, 702, 703... hasta donde queremos.

Hagan una actividad similar, pero *retrocediendo*. Por ejemplo, comenzamos en 914 y *quitamos* unidades: 913, 912, 911, 910 – ahora ya no hay unidades para quitar. Tenemos que canjear una decena por 10 unidades, y ahora podemos seguir quitando: 909, 908, ... hasta 900. Otra vez no hay unidades; pero ahora tampoco hay decenas para canjear. Tenemos que canjear una centena por 10 decenas, y después canjeamos una de las decenas por 10 unidades. Ahora podemos continuar: 899, 898, ...

Hasta aquí hemos repetido actividades que ya hemos hecho en el nivel de Primaria I. Pero ahora nos atrevemos a sobrepasar la frontera del 1000: Comenzamos por ejemplo en 997, contamos hasta 1000 (entonces tenemos que canjear hasta obtener un cubo de millar), y seguimos aumentando unidades. ¿Cómo se llaman los números que siguen? ...

Representen unos números arbitrarios más allá del 1000: 1053, 1300, 1648, etc. Hágalo primero solamente *diciendo* los números para que los niños coloquen el material correspondiente. O represente un número con el material, y que los niños digan cómo se llama. Después, los niños pueden hacer lo mismo entre ellos, en grupitos de dos.

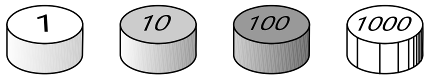
Después, si desean, pueden saltar a la sección "*Ahora lo escribimos*" para practicar la lectura y escritura de estos números. O pueden continuar con las siguientes actividades de manera oral.

Representen un número cercano a 2000 (por ejemplo 1988) y cuenten añadiendo unidades desde allí, hasta sobrepasar el 2000. (Ahora tenemos dos cubos de millar.) Hagan lo mismo con algunas otras "fronteras de millares": Cuenten desde 3995 hasta 4012; desde 7983 hasta 8005; etc.

Hagan lo mismo retrocediendo: Desde 6016 hasta 5994; desde 9003 hasta 8986; etc.

Practiquen también representar números arbitrarios con varios millares: 6400, 8030, 4204, 5055, 7485, 9999, ...

En vez de usar el material Base 10, pueden fabricar un material de canje "de definición propia". Por ejemplo, coleccionen tapas de botellas de diferentes colores. Pueden definir por ejemplo que las tapas rojas son unidades, las tapas azules valen 10 rojas (o sea, una decena), las amarillas valen 10 azules (o sea, 10 x 10 = una centena), las verdes valen 10 amarillas (10 x 100 = un millar), ... Pueden escribir con plumón indeleble el valor correspondiente sobre cada tapa.



En lugar de usar tapas de botellas, pueden también cortar fichas de cartulina de diferentes colores. Si plastifican la cartulina antes de cortar, las fichas les durarán más tiempo.

Con este material pueden hacer las mismas actividades como con el material Base 10. Este material es un poco más "abstracto", porque ya no hay una relación directa entre el tamaño de las piezas y el valor numérico que les asignamos.

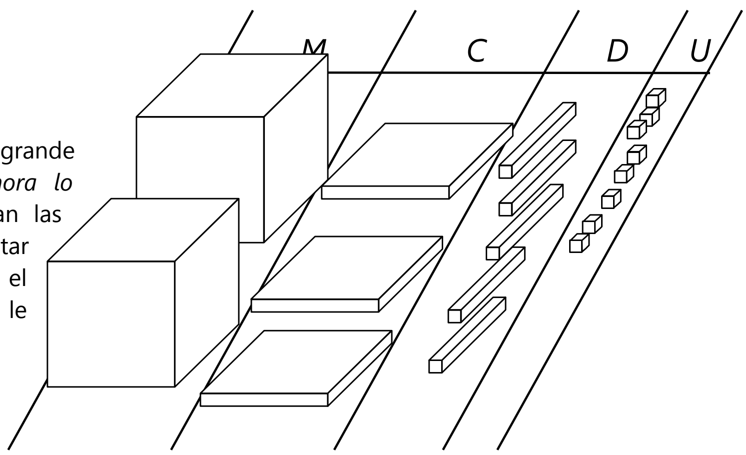
(Si les gusta usar las tapas de botellas, ¡sigan coleccionando! Más adelante habrá actividades que requieren un mayor número de ellas.)

Buscar números grandes

Que los niños busquen dónde pueden encontrar números "grandes" como los que acabamos de aprender: en avisos comerciales o catálogos (precios de muebles, computadoras, etc), en los medidores de electricidad y de agua, en el cuentakilómetros de un carro, en cuadros estadísticos en el periódico, etc.

Tablero posicional grande

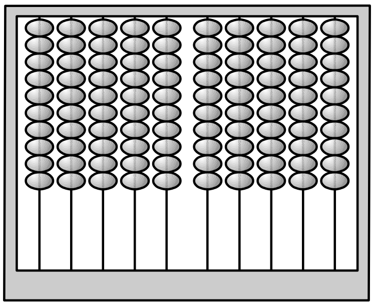
Dibujen en una cartulina un tablero posicional grande con cuatro columnas. *(Vea en la sección "Ahora lo escribimos" acerca del tablero posicional.)* Hagan las mismas actividades como antes para representar números; pero ahora coloquen el material sobre el tablero posicional, cada pieza en la columna que le corresponde.



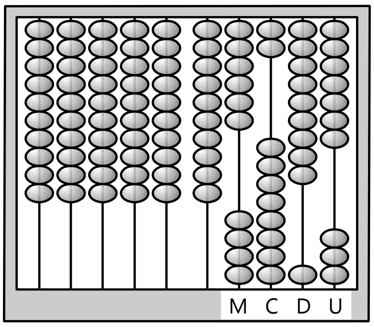
El ábaco decimal

En el nivel de Primaria I hemos usado el ábaco de la manera que cada cuenta valía una unidad. Ahora lo usaremos de una manera más profesional para representar números mayores. En Japón y en China usan el ábaco de esta manera, y quienes tienen práctica, pueden calcular con él más rápidamente que con una calculadora.

Colocamos el ábaco horizontalmente sobre la mesa, como en el dibujo. Usamos sus columnas como las columnas del tablero posicional: A la derecha tenemos las unidades, la siguiente columna son las decenas, después las centenas, y después los millares. Para poner el ábaco en cero, lo levantamos por el lado que está más cerca de nosotros, y lo apoyamos con el otro lado sobre la mesa, de manera que todas las cuentas se deslizan hacia abajo, o sea, alejándonos de nosotros. Esta es la posición del cero.



Para representar un número, jalamos el número correspondiente de cuentas hacia nosotros. Al inicio podemos pegar una tira de papel sobre el borde del ábaco para indicar el significado de las columnas con las letras M, C, D, U. Pero con el tiempo ya no tendremos necesidad de esta ayuda. El ábaco en el siguiente dibujo representa el número 4813:



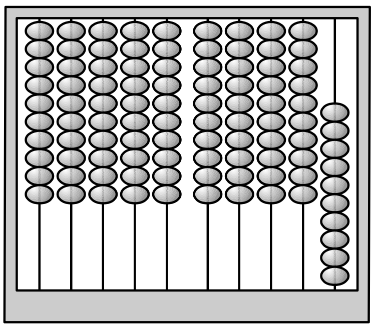
Practiquen representar diversos números en el ábaco de esta manera. Hagan también unas actividades de conteo como las antes descritas, con el ábaco.

Pregunta capciosa:

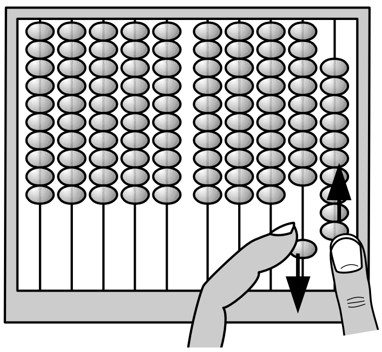
¿Cuál es el número que no se puede contar?

Canje en el ábaco

Ponemos el ábaco en cero y contamos hasta 10, aumentando unidades. Ahora el ábaco se ve así como abajo.



Las 10 unidades valen igual como una decena. Entonces hacemos un canje: Quitamos las 10 unidades, y en su lugar aumentamos una decena. Hagámoslo simultáneamente, para tener claro que esta es una sola operación: Con la mano derecha empujamos las 10 unidades "hacia arriba" (alejándolas de nosotros), y *al mismo tiempo* jalamos con la mano izquierda una cuenta de la columna de las decenas "hacia abajo" (hacia nosotros).



Practíquenlo con números mayores, como lo hicimos con el material Base 10. Por ejemplo, estamos en 3999 y aumentamos una unidad. Ahora tenemos que hacer tres canjes sucesivos: Canjeamos las 10 unidades por una decena, ahora tenemos 10 decenas. Las canjeamos por una centena, ahora tenemos 10 centenas. Canjeamos estas por un millar, ahora tenemos 4 millares, o sea 4000.

De la misma manera podemos contar retrocediendo. Cuando ya no hay unidades para quitar, hacemos el canje necesario. Por ejemplo, estamos en 5200 y queremos quitar una unidad. Canjeamos primero una centena por 10 decenas: Con la mano izquierda empujamos una cuenta en la columna de las centenas "hacia arriba", y simultáneamente jalamos con la mano derecha 10 cuentas de la columna de las decenas "hacia abajo". Después repetimos el mismo procedimiento para canjear una decena por 10 unidades. Ahora podemos seguir quitando: Quitamos una unidad (o sea, la empujamos "hacia arriba"), y tenemos 5199.

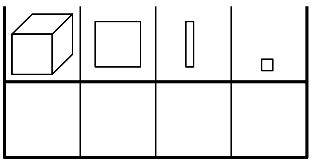
Hagan varias actividades de conteo para practicar esta forma del "canje".

Ahora lo escribimos

Después de contar y representar números con material concreto, pregunte a los niños: "¿Qué piensan, cómo se escribirá por ejemplo 'mil siete'?" – Quizás lo descubren por sí mismos. Si no, entonces habrá que mostrarles que tenemos que escribir una cifra por cada "especie" de material que tenemos: 1 millar, 0 centenas, 0 decenas, 7 unidades.

El tablero posicional

El tablero posicional es una forma de ilustrar los valores posicionales de las cifras. Normalmente, las columnas del tablero se rotulan con las abreviaciones U (Unidades), D (Decenas), C (Centenas), M (Millares), etc. Pero para comenzar, es más fácil para los niños si usamos símbolos que representan el material concreto. Por ejemplo, los siguientes símbolos representan las piezas correspondientes del material Base 10:



Representen unos números con el material, y después escríbanlos en un tablero posicional con estos símbolos. O vice versa: Escriban un número en el tablero, y después represéntenlo con el material. Los niños pueden hacer esta actividad entre ellos, en grupitos de dos.

Cuando hayan entendido cómo funciona, podrán cambiar a un tablero posicional con las abreviaciones usuales:

M	C	D	U

En vez de "miles" o "millares", algunos prefieren decir "*unidades* de millares", y en consecuencia usan la abreviación "UM" en el tablero posicional. Pero en el punto donde estamos ahora, eso puede confundir a los niños: "Ya tenemos unidades, ¿y ahora otra vez unidades?" Por ahora solamente conocemos "miles" o "millares", entonces todavía no es necesario especificar que son "unidades" de millares. Podemos empezar a usar esta distinción cuando introducimos los números hasta un millón *(Unidad 26);* allí va a hacer sentido para los niños.

El juego de las tarjetas

Prepare unas tarjetas con números de 4 cifras. Los niños pueden jugar en grupitos de dos: Un niño saca una tarjeta; el otro niño representa el número con uno de los materiales que tenemos a disposición.

Escribir números

Después lo hacemos al revés: Un niño representa un número con material concreto; el otro niño escribe el número.

Nota acerca del separador de miles:
Al escribir números grandes, algunos prefieren indicar con alguna marca dónde terminan los miles. En números de 4 cifras, eso todavía no es tan necesario; pero en números mayores, eso facilita la lectura del número. El problema es que existen diversas convenciones contradictorias acerca del símbolo que se usa como separador de miles.
En los Estados Unidos y algunos otros países, se usa la coma para separar los miles, y el punto para separar los decimales. En esos países, 12,000 significa "doce mil", y 12.000 significa "doce punto cero", o sea 12 unidades.

Pero en otros países se usa la coma en vez del punto decimal, entonces en esos países 12,000 significa "doce coma cero" (12 unidades). Como separador de miles se usa en este caso el apóstrofo (12'000), o un simple espacio
(12 000). Sin embargo, usar un espacio también puede conducir a malentendidos, porque uno podría pensar que se trata de dos números separados.
En este libro, para minimizar las ambigüedades, usamos como separador de miles el apóstrofo (**12'000 = "doce mil"**), y como separador de decimales el punto (**12.000 = "doce punto cero"**). Si esto contradice las costumbres de su país, tome la libertad de adaptar la notación.

Escribir antecesores y sucesores

Con las actividades de conteo hemos a la vez practicado encontrar el sucesor y el antecesor de un número. Eso también lo podemos ahora hacer por escrito, en grupitos de dos: Un niño escribe un número; el otro escribe a la izquierda del número su antecesor, y a la derecha del número su sucesor.

Hoja de trabajo 1.1. *(arriba, a la izquierda):* Llena la tabla con los antecesores y sucesores de los números indicados.

Ampliaciones

Contar por decenas, por centenas y por millares

En vez de contar sucesivamente, podemos también contar en pasos de 10 ó de 100. Eso se puede hacer con cualquiera de los "materiales de canje": el material Base 10; el material de las tapas de botellas; u otro. Representen un número que no tenga unidades, p.ej. 3470. Aumenten decenas y cuenten: 3480, 3490, – ahora tenemos 10 decenas y tenemos que canjearlas por una centena: 3500, 3510, 3520, etc. – Lo mismo retrocediendo: 5220, 5210, 5200, 5190, 5180, ... Aquí también, al llegar a 5200 tenemos que canjear una centena por decenas para poder seguir quitando decenas.
Podemos seguir retrocediendo hasta 5000. Para continuar, tenemos que canjear primero un millar por centenas, y después una de las centenas por decenas. Después podemos seguir quitando decenas: 4990, 4980, ...

De la misma manera podemos contar por centenas: 3600, 3700, 3800, 3900, 4000 (canjeamos las 10 centenas por un millar).

Ahora podemos hacer lo mismo con números que contienen unidades. Por ejemplo, comenzamos con 8267 y aumentamos decenas: 8277, 8287, 8297, 8307, 8317, ... – Es fácil de ver que el dígito de las unidades es siempre el mismo, porque no cambiamos nada en las unidades.

Así también podemos retroceder por decenas; y podemos avanzar y retroceder por centenas: 6831, 6931, 7031, 7131, ...

Si desean, pueden escribir algunas de las sucesiones que resultan. O pueden practicarlo en la ...

Hoja de trabajo 1.1: *Cuenta por decenas / Cuenta por centenas:*

Llena la tablas. En las tablas de arriba ("Cuenta por decenas"), el paso de un número al siguiente siempre es 10. Puede ser avanzando o retrocediendo.
En las tablas del medio ("Cuenta por centenas"), el paso siempre es 100.

Comparar y ordenar números

Usen las tarjetas con números de 4 cifras que ya hemos usado anteriormente en el Taller ("El juego de las tarjetas"). Preparen además unas tarjetas con los signos <, =, >. Jueguen entre dos personas: Saca dos de las tarjetas y ponlas sobre la mesa. La otra persona coloca el signo correcto entre las dos tarjetas.

O saquen varias tarjetas a la vez, pueden ser cinco o seis, y ordénenlas de menor a mayor, o vice versa.

Hoja de trabajo 1.1. *(en el medio, a la derecha): Escribe los signos correctos:*

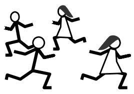
Compara los números entre sí. Indica con los signos si el primer número es menor, igual o mayor que el segundo.
Recuerda: El signo está "abierto" (o "grande") por el lado donde se encuentra el número más grande.

Hoja de trabajo 1.1. *(abajo): Une los puntos:*

Une los puntos según el orden de los números, de menor a mayor.
Para que el dibujo salga correcto, los puntos deben unirse con líneas *rectas*, ¡no dando vueltas alrededor de otros puntos o números que pueden encontrarse en el camino!

Estimar y medir

Si desean, pueden en este momento anticipar unas actividades de "Estimar y medir" de la *Unidad 5*.



Jugar con una recta numérica grande

Inventen unos juegos que pueden jugar con una recta numérica grande, dibujada en un papelote, o con tiza en el piso. En un papelote puesto sobre la mesa pueden mover figuras de juego. En una recta grande dibujada en el suelo, los niños mismos pueden pararse sobre los números indicados.

Para comenzar, se recomienda usar un segmento de la recta numérica que indica cada número, en pasos de 1 a 1, pero en un rango numérico de varios miles, por ejemplo desde 5675 hasta 5710.

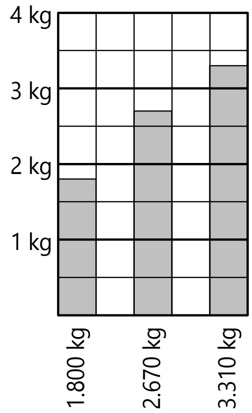
- Ubicarse en el número correcto. Una persona dirige el juego y anuncia el número donde hay que ubicarse: "5692" – "5679" – "5707" – etc. Los niños se paran en el número anunciado, o colocan sus figuras de juego allí.

- Viajes con dado. Los niños se ubican en el primer número dibujado en la recta (5675 en nuestro ejemplo). Por turnos, tiran un dado y avanzan el número indicado de pasos.
- Lo mismo se puede hacer con pasos "adelante y atrás". Se define un número del medio como inicio (por

ejemplo 5690 en nuestro ejemplo). Los niños tiran un dado por turnos. En el primer turno, todos avanzan según el número que tiraron. En el siguiente turno *retroceden* el número de pasos que tiraron. Así siguen alternando, avanzando y retrocediendo. Quien tiene que sobrepasar uno de los extremos de la recta dibujada, queda fuera del juego.

Después pueden jugar juegos similares con otra recta numérica que indica los números solamente de 10 en 10. Ahora tenemos que *estimar* la posición exacta de los números: Si la recta marca por ejemplo los números 3240, 3250, 3260, 3270, etc, ¿dónde exactamente se encuentra el 3252 en esta recta? (Tenemos que imaginarnos 10 pasos pequeños entre cada decena y la siguiente.)

Gráficos de barras, aproximar números



La aproximación de números se puede practicar también al elaborar unos gráficos de barras. Por ejemplo, recojan unas piedras que pesan entre 1 y 10 kilos. Pésenlas, anoten sus pesos, ordénenlas por peso, y grafiquen sus pesos en un gráfico de barras. Pueden usar una escala donde 1 kg de peso corresponde a 1 cm en el gráfico. ¿Dónde se ubicaría en esta escala un peso de 2.380 kg? – No cae en un milímetro exacto. Pero 2.380 kg se encuentra entre 2.300 y 2.400 kg, más cerca de 2.400 que de 2.300. Entonces, en el gráfico lo dibujaremos cerca de los 2.4 cm.

Hagan más actividades similares con objetos de la vida diaria.

(Vea en la *Unidad 5* para más detalles acerca de la conversión de unidades de medida.)

Hoja de trabajo 1.2: *Ubicar y aproximar números en la recta numérica:*

La mayoría de estos ejercicios no permiten ubicar los números indicados *exactamente*. Entonces hay que aproximarlos, y se debe permitir cierto margen de error. Sin embargo, los niños deben ser capaces por lo menos de identificar la decena resp. centena más cercana. Por ejemplo, al ubicar el número 2877, deben ser capaces de entender que 2877 es más cercano a 2880 que a 2870; y que es más cercano a 2900 que a 2800.

Igualmente al identificar y escribir números: En la última recta numérica ya no será posible identificar los números *exactamente*. Pero se pueden aproximar: Por ejemplo el segundo número en esta última recta está entre 7600 y 7700, pero mucho más cerca de 7600. Entonces por ejemplo 7610 ó 7615 serían buenas aproximaciones.

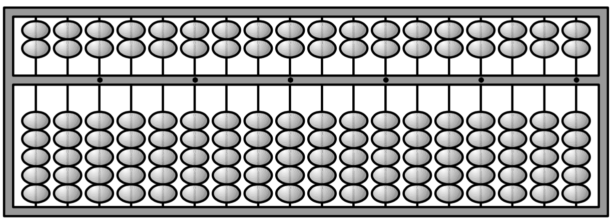
Contar pasos

¡Esta es una actividad para niños perseverantes! En alguna caminata, o al ir a algún lugar en la ciudad, cuenten cuántos pasos mide un tramo determinado: ¿Cuántos pasos son de la casa hasta el mercado? ¿Cuántos pasos mide la subida al cerro? Etc.
Se necesita buena concentración para no perder la cuenta. Pueden ayudarse, por ejemplo, cogiendo una piedrita en la mano para cada centena; así tienen que contar solamente las decenas y unidades: "Tengo 23 piedritas, y he contado 74 pasos desde la última piedrita; son 2374 pasos." O pueden inventar otra "señal" distinta para los millares.

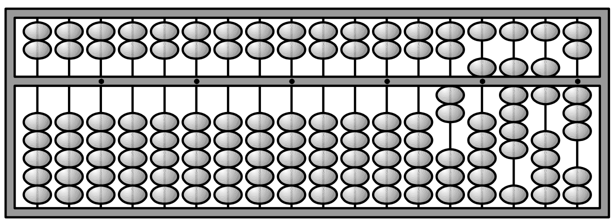
Ábaco chino y japonés

En China y en Japón, mucha gente usa un ábaco para calcular. Con un poco de práctica, pueden calcular con su ábaco más rápidamente que nosotros con una calculadora. Sus ábacos se ven un poco diferentes de los nuestros, y tienen más columnas de cuentas. Son divididos por una barra horizontal, de manera que cada columna tiene dos partes separadas.

El ábaco chino, o *suanpan*, tiene dos cuentas en la parte superior de cada columna, y cinco en la parte inferior.

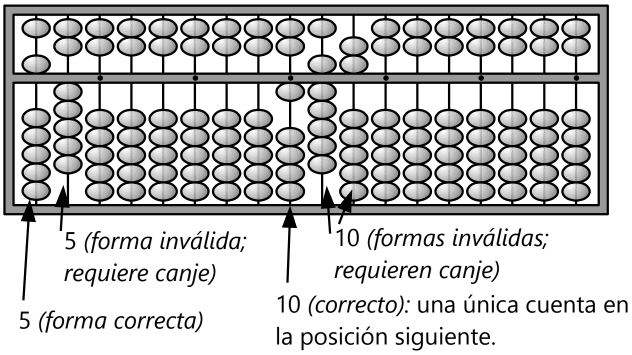


Las cuentas de la parte inferior valen según su valor posicional, como en nuestro ábaco. Las cuentas de la parte superior valen 5, 50, 500, etc. (según su posición). Las cuentas "valen" cuando se encuentran juntas a la barra del medio. Entonces el ábaco de la primera imagen está puesto en cero, porque todas las cuentas están alejadas de la barra. El ábaco de la siguiente imagen muestra el número 25'963:



En este tipo de ábaco tenemos que hacer un canje no solamente cuando sobrepasamos el 10, el 100, el 1000, etc; tenemos que canjear también los "cincos". La ventaja es que necesitamos contar y mover menos cuentas a la vez. Las personas entrenadas mueven con un solo movimiento las cuentas superiores (con el índice) y las inferiores (con el pulgar).

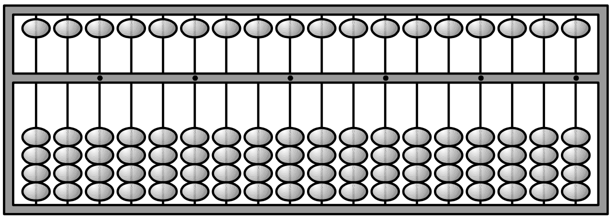
Cuando hay 5 cuentas en la parte inferior, se deben canjear por una cuenta en la parte superior. Cuando hay dos cuentas en la parte superior, valen 10 y deben canjearse por una cuenta de la columna siguiente. Compara las siguientes formas: Las que se indican como "inválidas", se usan solamente de manera provisional durante un canje. *(Vea imagen siguiente.)*



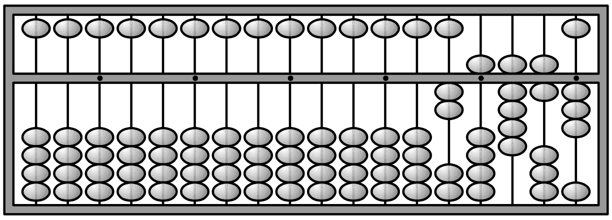
El ábaco tiene muchas columnas, para que se puedan representar en él varios números a la vez. Cuando lleguemos a la multiplicación y la división larga, veremos que puede ser útil, tener simultáneamente hasta tres números en el ábaco: por ejemplo los dos factores de una multiplicación, y el producto que estamos construyendo.

Los puntos negros en la barra del medio ayudan para no perder la cuenta de los valores posicionales: Sirven para marcar las unidades, millares, y millones; o los milésimos y millonésimos, si calculamos con decimales.

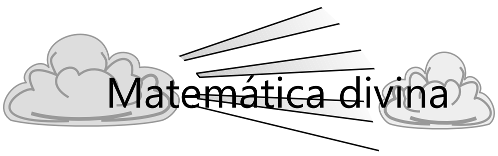
El ábaco japonés, o *soroban*, se ve como el chino, pero tiene una única cuenta en la parte superior, y cuatro en la parte inferior de cada columna. Así no se pueden representar las formas inválidas del 5 y del 10 que vimos arriba. Puesto en cero, el *soroban* se ve así:



Y así se representa el número 25'963:



En este libro no trataremos más de las técnicas para manejar este tipo de ábacos. Si les interesa, pueden conseguir o fabricarse uno y practicar por su cuenta, o pueden buscar más informaciones en internet.



La grandeza de Dios

Toda ampliación del espacio numérico brinda una nueva oportunidad para admirar la grandeza de la creación de Dios. Muchos objetos de la naturaleza requieren millares para poder expresar su cantidad: el número de las estrellas visibles en el cielo; el número de hojas en un árbol; el número de hormigas en un hormiguero; etc. Y la grandeza de la creación señala a su vez hacia la grandeza del Creador.

Si los niños están interesados en conocer números mayores, entonces podrían en este momento hacer la *Unidad 26*, "Números hasta un millón". De otro modo, que avancen normalmente a la *Unidad 2*.

Unidad 2 - El sistema decimal (I)

Viaje de exploración matemática

Prerrequisitos:
- Números hasta 1000. *(Los números mayores a 1000 se pueden introducir en el transcurso de esta unidad, para aquellos niños que no hicieron la Unidad 1.)*

Materiales necesarios:
- *(Opcional)* Material Base 10

Para los educadores

Este "viaje" provee un entendimiento fundamental del sistema decimal, y de los principios en los que se basa. Esto es indispensable para poder dominar después las operaciones aritméticas con números grandes.
Esta Unidad no usa materiales concretos. Nuestros "objetos de investigación" son los números mismos, y su comportamiento dentro del tablero posicional. Pero si desean, pueden representar todos estos ejemplos con material Base 10.

Este "viaje" continuará en la *Unidad 8*, donde exploramos unas aplicaciones para la multiplicación; y en la *Unidad 46*, donde introducimos los números decimales.

Si dificultan en encontrar las respuestas a algunas preguntas, aun después de pensarlo por mucho tiempo, entonces consulten las pautas en el *Anexo A*.

Otra vía de acceso a un entendimiento del sistema decimal consiste en examinar las conversiones de las unidades de medida *(Unidad 5)*.

Investigación

El invento del sistema decimal

¿Te parece difícil escribir números grandes con cifras? – Por ejemplo: cinco mil cuatrocientos cincuenta y siete? – Si eso te parece difícil, recuerda que sería aun más difícil calcular con palabras en vez de cifras. Por ejemplo, mira esta suma:

cuatro mil seiscientos veintitrés más ochocientos ocho

son cuatro mil catorcecientos (¿?) veintionce (¿?)

son cinco mil cuatrocientos treinta y uno.

Tarea 1. Escribe esta suma con cifras, ¡y verás que es más sencillo!

Pero regresemos dos mil años al pasado. En aquel tiempo no existía nuestra manera de escribir los números. Cierto, los hombres usaban signos para escribir números desde tiempos muy antiguos. Ya entendían que los signos son más fáciles de manejar que las palabras. Pero sus formas de escribir números eran mucho más complicadas que nuestro sistema decimal.

Los antiguos griegos por ejemplo usaban letras para representar números. En nuestro alfabeto español, eso se hubiera visto así:

1 = A	10 = J	100 = R
2 = B	20 = K	200 = S
3 = C	30 = L	300 = T
4 = D	40 = M	400 = U
5 = E	50 = N	500 = V
6 = F	60 = Ñ	600 = W
7 = G	70 = O	700 = X
8 = H	80 = P	800 = Y
9 = I	90 = Q	900 = Z

Así por ejemplo el número **654** se escribiría **WND**. ¿Puedes en este sistema sumar VMG + TQF? Inténtalo. – Bastante complicado, ¿no cierto?

Tarea 2. ¿Y qué otro problema grande tendríamos con esta forma de escribir los números?

Los antiguos romanos tenían un sistema similar. Pero ellos descubrieron que se necesitan menos signos distintos si se permite *repetir* algunos signos. Quizás conoces los números romanos: 1=I, 2=II, 3=III – pero después, la cosa se vuelve un poco más complicada. Para no repetir demasiados unos, hay un nuevo signo para 5: 5=V. Y el 4 se escribe IV, pero el 6 es VI. O sea: Cuando el uno está a la izquierda del 5, se resta; pero cuando está a la derecha del 5, se suma. *(Vea Unidad 80).*

Eso tampoco es práctico para calcular. ¡Intenta una vez multiplicar XLIX por VIII en números romanos! – De hecho, en aquel tiempo solamente los matemáticos, los contadores, y otros "calculadores profesionales" sabían multiplicar.

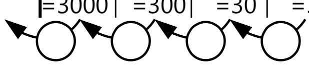
Solamente varios siglos más tarde, en la India, se inventó el sistema decimal que usamos hoy. Nadie sabe quién lo inventó, ni cuándo sucedió. Con seguridad se sabe solamente que en el siglo 9 se usaba el sistema decimal en la India, y quizás ya desde el siglo 6.

Ya antes de eso, en algunos lugares se había descubierto que se podía usar un mismo signo para cantidades distintas, según su posición dentro de un número. Así por ejemplo el signo 2 puede significar 2 unidades cuando está al final de un número; pero si se encuentra una posición más a la izquierda, puede significar 2 decenas: 22 = dos decenas y dos unidades. Otra vez una posición más a la izquierda significaría centenas: 222 = dos centenas, dos decenas y dos unidades.
Quizás conoces la expresión "*valor posicional*": La cifra 2 tiene un *valor* distinto, según su *posición* dentro de un número.

Tarea 3. Para reflexionar: Los romanos ya habían usado el mismo signo repetidas veces. Sin embargo, el número III en números romanos no significa lo mismo como el número 111 en el sistema decimal hindú. ¿Por qué no? ¿Qué hacían los hindúes de otra manera que los romanos?

Tarea 4. Vamos a examinar lo que significa el valor posicional en nuestro sistema decimal. Mira el número 3333: Por debajo hemos escrito lo que "vale" cada cifra. ¿Qué sucede con el valor posicional, cada vez que damos un paso hacia la izquierda? – Copia el gráfico y completa las flechas con operadores: ¿Con cuál operación llegamos del 3 al 30? ¿Del 30 al 300? ... ¿Cómo continuaría eso, si después del 3000 iríamos aun más hacia la izquierda?

M	C	D	U
3	3	3	3
=3000	=300	=30	=3



Vocabulario matemático

Valor posicional: El valor de una cifra, dependiendo de su posición dentro de un número. Por ejemplo en el número 32, la cifra 3 por su posición vale 30.

Unidad: Una cantidad de uno.

Decena: Una cantidad de diez.

Centena: Una cantidad de cien.

Millar: Una cantidad de mil.

El nombre de "sistema *decimal*" viene de la palabra "*diez*". Una cifra a la derecha de un número significa unidades; pero una cifra en la segunda posición desde la derecha significa *decenas*, o sea *diez* veces su valor normal. Si completaste la Tarea 4, entonces habrás visto que cada vez aparece el número diez. Las centenas son 10 x 10, los millares son 10 x 100.

Decimos: El número diez es la *base* de nuestro sistema numérico.

Pero ¿necesariamente tiene que ser el número diez? En vez de calcular con decenas, podríamos también calcular con "setenas" o con "docenas". El sistema del valor posicional puede funcionar igualmente con una base distinta. (En el nivel de Secundaria exploraremos este tema.) Por ejemplo, las computadoras y las calculadoras calculan internamente en el sistema binario, o sea un sistema de valor posicional con la base 2. Solamente para mostrar el resultado en la pantalla, los números se convierten al sistema decimal.

Tarea 5. ¿Qué piensas, por qué escogieron los hindúes el número diez como base? ¿Encuentras una explicación sencilla?

Pero a los antiguos sistemas de valor posicional les faltaba todavía algo importante: El número "doscientos dos" tiene 2 centenas y 2 unidades. Entonces, eso se escribiría como 22. ¿Cómo se podía distinguir entre "veintidós" y "doscientos dos"?

Seguramente aprendiste que "doscientos dos" se escribe 202. O sea, tú escribes no solamente "dos centenas y dos unidades". Tú escribes "dos centenas, *cero decenas* y dos unidades." ¿Pero qué es "cero"? Cero significa "nada". Por eso, durante mucho tiempo a nadie se le ocurría escribir esa "nada". ¿Por qué representar una "nada" por un "algo"? Fue un progreso muy grande en la matemática cuando la gente comenzó a usar un símbolo escrito que significa "nada".

Nuestro sistema decimal es entonces la combinación de dos inventos revolucionarios: el valor posicional, y el signo de "cero".

Teoréticamente, el sistema decimal podría funcionar sin usar el cero, si indicamos por separado el valor posicional de cada cifra. Por ejemplo así:

M	C	D	U
6		8	

Aquí podemos ver inmediatamente que este número significa 6080. No es necesario insertar los ceros en la tabla para ver eso. Claro que es más trabajoso dibujar la tabla entera, en vez de escribir simplemente dos ceros. Pero para las tareas siguientes usaremos de vez en cuando este tablero posicional.

Los europeos no llegaron a conocer el sistema decimal hasta mucho tiempo después de su invento: recién en el siglo 13. Los matemáticos y mercaderes árabes lo habían conocido en la India, y de allí lo trajeron al norte de África. Allí lo conocieron unos comerciantes europeos. El comerciante Leonardo de Pisa (conocido también como Fibonacci) se impresionó mucho con este nuevo sistema. Él escribió un libro grueso acerca del uso de esos "números árabes", como él los llamó. Pero como hemos visto, sería más correcto llamarlos "números hindúes".

Aprovechamos las propiedades del sistema decimal

El número diez es la base de nuestro sistema decimal. Por eso es muy fácil hacer cálculos que involucran el número diez. Por ejemplo multiplicar por 10. Comencemos con cualquier número, digamos 8. Lo multiplicamos por diez, el resultado lo multiplicamos otra vez por diez, y así sucesivamente. Anotamos los resultados en la siguiente tabla: *(Copia y completa. No escribas en el libro.)*

	M	C	D	U
				8
8 x 10 =				
x 10 =				
x 10 =				

Tarea 6.

a) Observa: ¿Qué sucede con la cifra 8, cada vez que multiplicamos por 10?

b) ¿En qué se convierten las unidades cuando las multiplicamos por 10? – ¿En qué se convierten las decenas? ¿las centenas?

c) En la tercera fila tenemos el número 8 multiplicado por 10, y el resultado otra vez por 10. Al llegar allí, en total ¿por cuánto hemos multiplicado el 8?

d) ¿Cuántas veces sucesivas tenemos que multiplicar un número por 10 hasta que lo hayamos multiplicado por 1000? (Compruébalo con la ayuda del tablero posicional.)

Escribimos ahora las mismas multiplicaciones en la notación normal: *(Copia y completa)*

8 x 1 = ...

8 x 10 = ...

8 x 100 = ...

8 x 1000 = ...

Al escribirlo así, *parece* que estuviéramos "añadiendo ceros" al número 8. Pero si comparas con el tablero posicional arriba, verás que en realidad las cifras "se desplazan hacia la izquierda" por una o varias posiciones. (Los ceros sirven solamente para rellenar los vacíos en el tablero posicional.) Eso debes tener presente para que entiendas más tarde cómo se comportan los números decimales.

6.e) Escribe como ejemplos algunas multiplicaciones por 10, por 100, y por 1000, y calcúlalas.

Tarea 7.

a) Haz ahora este procedimiento al revés. Si empezamos con el número 80, ¿con cuál operación puedes convertirlo en 8?

b) Comienza con un número que termina con varios ceros, y haz esta "operación al revés" varias veces sucesivamente, tantas veces como puedes. Anota los resultados en un tablero posicional y también como números normales. ¿Qué regla encuentras entonces para dividir rápidamente entre 10, entre 100, y entre 1000?

Tarea 8.

a) Copia este tablero posicional y escribe en él los números 300, 400, y la suma de ambos. No necesitas escribir los ceros.

	M	C	D	U
300				
400				
300 + 400 =				

¿Qué observas? ¿Cómo se pueden fácilmente sumar centenas?

b) Copia este tablero posicional y escribe en él los números 9000, 2000, y la diferencia de ambos. No necesitas escribir los ceros.

	M	C	D	U
9000				
2000				
9000 – 2000 =				

¿Qué observas? ¿Cómo se pueden fácilmente restar millares?

En el sistema decimal es fácil calcular con números que tienen solamente centenas, o solamente millares. Cuando tenemos que calcular con números más complicados, podemos descomponerlos en tales "números fáciles". En las siguientes Unidades practica-remos eso.

Nota: ¿Te acuerdas de la ley distributiva? Las sumas de centenas y de millares obedecen a la ley distributiva. Observa:

200 + 500 = (2x100) + (5x100)
= (2+5) x 100 = 7 x 100 = 700.

Matemática divina

Manejar y administrar cantidades grandes

El sistema decimal es un invento del hombre, pero hecho con la ayuda de las capacidades mentales que le dio el Creador. Es una expresión de las facultades que Dios dio al hombre para administrar sabiamente los recursos de la creación y cuidarlos, como él había encargado a los primeros hombres (Génesis 2:15). Manejar números grandes es necesario para planificar una agricultura a gran escala, para hacer negocios, para construir casas, y para muchas otras actividades que tienen que ver con una administración responsable de los recursos naturales. Desde tiempos muy antiguos, los hombres usaban su inteligencia dada por Dios para inventar sistemas numéricos ingeniosos para este fin. (Vea en la *Unidad 80* acerca de algunos sistemas numéricos antiguos.)

¿A dónde vamos desde aquí?

Con las bases puestas acerca del valor posicional, podrán continuar a las siguientes Unidades donde se practican procedimientos de suma y resta.

Si en su lugar desean profundizar en las propiedades del sistema decimal, pueden continuar este "Viaje de exploración" en la *Unidad 8*.

Unidad 3 - Suma y resta mental y con material concreto

Prerrequisitos:
- Números hasta 10'000 *(Unidad 1 ó 2)*.
- Suma y resta mental hasta 1000.
- Entendimiento del concepto del "canje" en el sistema decimal *(Unidad 1)*.
- Entendimiento del principio del entero y sus partes (para los problemas de texto).

Materiales necesarios:
- Material de canje (Base 10; tapas de botellas, o similares).
- Ábaco.

Para los educadores

Antes de introducir los procedimientos escritos, repasamos las técnicas de ***suma y resta mental y con material concreto*** que practicamos en el nivel de Primaria I. Así damos a los niños la oportunidad de manejar con sus manos los números con millares, y de formarse una imagen mental de estos números, antes de pasar al procedimiento abstracto *(Unidad 4)*.

Además, en la sección de "Ampliaciones", introducimos un procedimiento nuevo, el de ***anotar resultados parciales***. No es "obligatorio" usar este procedimiento; pero para algunos niños puede ser útil como un paso intermedio entre las operaciones mentales y con material concreto (donde tomamos en cuenta el valor efectivo de las cifras), y la operación escrita cifra por cifra (donde su valor efectivo ya no es obvio).

El propósito de este procedimiento consiste en facilitar la ***"compresión mental"*** de la operación más adelante. Un niño logra "comprimir" una operación cuando descubre que varios pasos individuales se pueden juntar en un solo paso, y así la operación se resuelve de una manera más eficaz. En el caso de las sumas largas, hasta ahora no hemos usado ningún procedimiento escrito. Para sumas "difíciles" de resolver mentalmente, tales como 3685 + 2969, la única alternativa consistía en efectuarlas con el material concreto. Si usamos el material Base 10, el paso de sumar decenas aparece como algo cualitativamente diferente del paso de sumar centenas, porque las centenas se ven diferentes de las decenas. Para sumar 80 + 60 mentalmente, el niño tiene que recordar que son decenas; tiene que darse cuenta de que esta suma es "igual" como 8 + 6 si fueran unidades; y después trasladar el resultado de esta operación nuevamente al nivel de las decenas. Y para sumar 600 + 900, tiene que hacer la operación correspondiente con centenas. Esto es necesario para el principio, porque el niño necesita entender lo que significan las cifras de un número. Pero si queremos dar el paso al procedimiento escrito, el niño necesita descubrir que puede efectuar todos estos pasos "como si fueran unidades"; y además tiene que entender cómo expresar estas operaciones por escrito. Algunos niños pueden dar este paso inmediatamente; pero para otros puede ser una ayuda, aprender como etapa intermedia un procedimiento escrito que todavía respeta los valores efectivos de las cifras.

Otra herramienta que puede facilitar este paso de "comprimir" la operación, es el ábaco; porque en el ábaco efectivamente todas las filas se ven iguales (unidades, decenas, centenas y millares). Así, el niño puede hacer el descubrimiento de que "es cada vez lo mismo; ***¡eso es fácil!***"

Podríamos preguntar entonces por qué no introducimos de frente el procedimiento escrito cifra por cifra. Pero *la "compresión" funciona solamente si el niño ha entendido primero el* ***por qué*** *de los pasos individuales, "lentos"*. El niño necesita primero ver y experimentar qué es una decena, qué es un millar, etc. Si introducimos de frente el procedimiento "comprimido", el niño quizás aprende a aplicarlo mecánicamente, pero no entiende los principios detrás del procedimiento, y así no le encuentra sentido; le parece algo misterioso e inexplicable. Por ejemplo, los niños introducidos prematuramente a este procedimiento, dificultan en entender por qué deben escribir las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc; entonces si deben sumar 3758 + 622, no entienden por qué no deben escribir el 6 debajo del 3. Un niño que hizo primero las experiencias con el material concreto, no tendrá esta dificultad, porque entiende que una centena es algo muy diferente de un millar.

- En la suma y resta *mental* usamos ejemplos donde algunas posiciones de los sumandos contienen un cero: 5200 + 386, 3070 + 560, 4853 – 103, 6888 – 4040, etc. Para muchos niños sería exigir demasiado que sumen o resten mentalmente números con los cuatro dígitos "ocupados", tales como 4956 + 2382 ó 9491 – 3385. Pero pueden efectuar tales operaciones con el material concreto, o con el método de anotar resultados parciales.

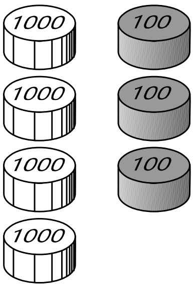
Esta Unidad sugiere una diversidad de métodos, usando diversos materiales. Eso no significa que cada niño tenga que practicar cada método. Que cada uno descubra individualmente cuáles métodos le ayudan más para entender los procesos. Por ejemplo, para algunos niños el ábaco puede ser una gran ayuda. Otros, en cambio, pueden sentirse confundidos por el ábaco, y prefieren trabajar con el material Base 10, o directamente con números escritos en papel. Demos libertad en la elección de los materiales.

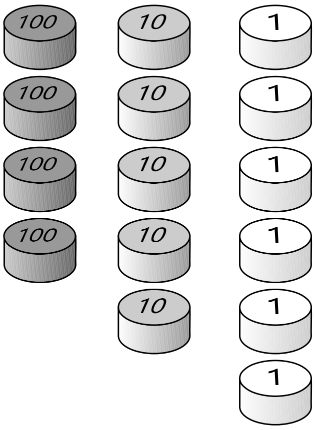
TALLER

Sumas y restas con "material de canje"

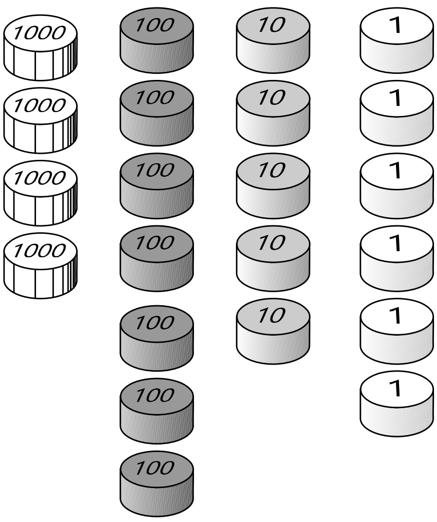
Las actividades siguientes se pueden realizar con el material Base 10, o con el material de las tapas de botellas *(vea Unidad 1)*.

Representen unas sumas con el material, y anótenlas con sus resultados. Por ejemplo, queremos sumar 4300 + 456. Representamos los dos números:





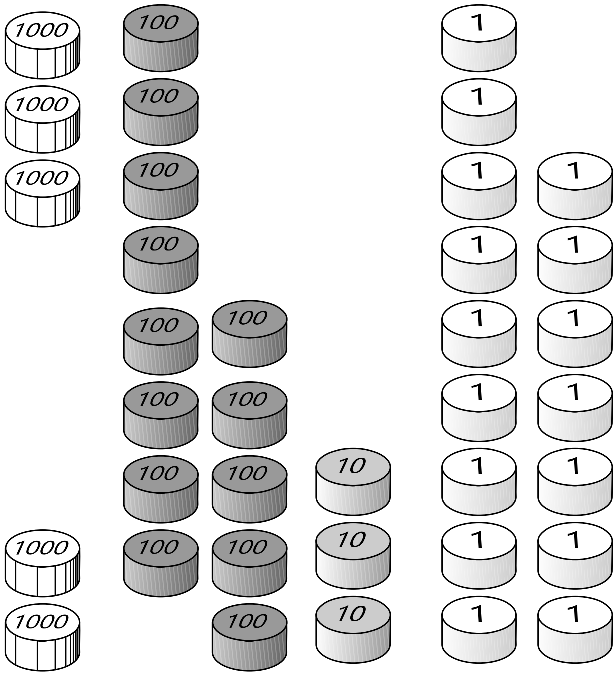
Juntamos las centenas (en las otras posiciones no hay nada para juntar), y queda así:



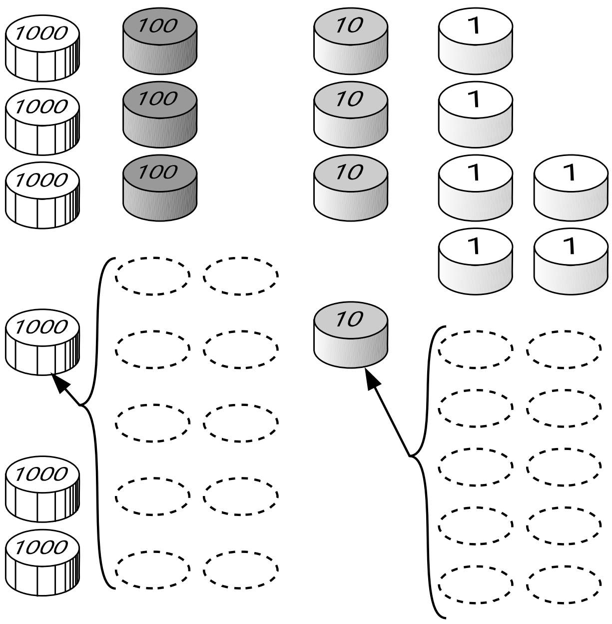
Vemos que este número es 4756. Entonces podemos escribir: 4300 + 456 = 4756.

Hagan varios ejemplos de esta clase. Los niños pueden inventar sus propias sumas, y pueden intercambiarlas entre ellos.

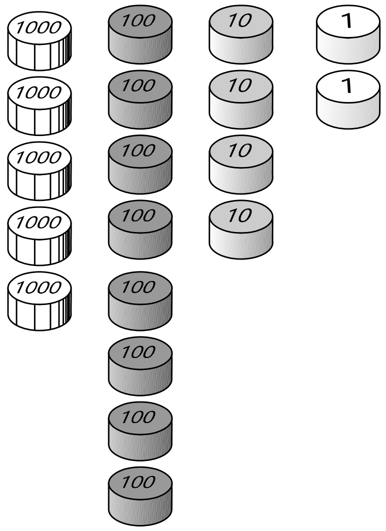
Si en una posición obtenemos 10 ó más piezas, tenemos que hacer un canje. Por ejemplo en 3809 + 2537:

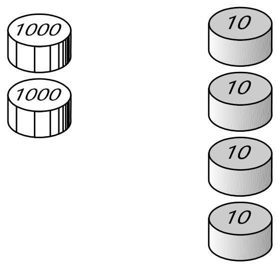


Tenemos 13 centenas y tenemos que canjear 10 de ellas por un millar. Y tenemos 16 unidades, de esas tenemos que canjear 10 por una decena. Entonces queda así:



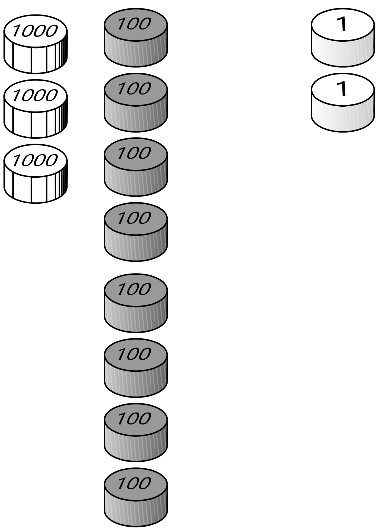
Después hagan lo mismo con restas. Por ejemplo 5842 – 2040: Representamos 5842 con el material, por ejemplo con tapas de botella. Podemos representar también el 2040 si queremos, para recordarnos cuánto tenemos que quitar:





En vez de representar el 2040, podemos también mantenerlo en la memoria o tenerlo escrito en un papel, para que los niños no piensen que ese 2040 es también parte del resultado.

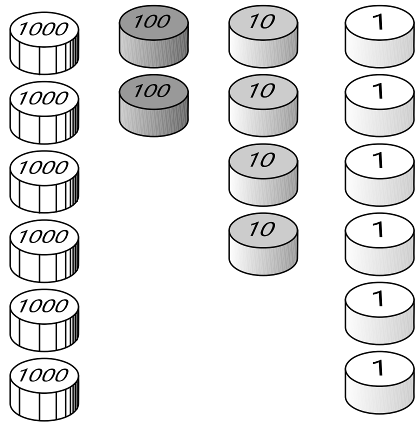
Quitamos 2040, o sea 2 millares y 4 decenas, de los 5842. Si hemos representado el 2040 con el material, entonces tenemos que quitarlo también, porque ya hemos efectuado la operación que representa este número. Entonces queda así:



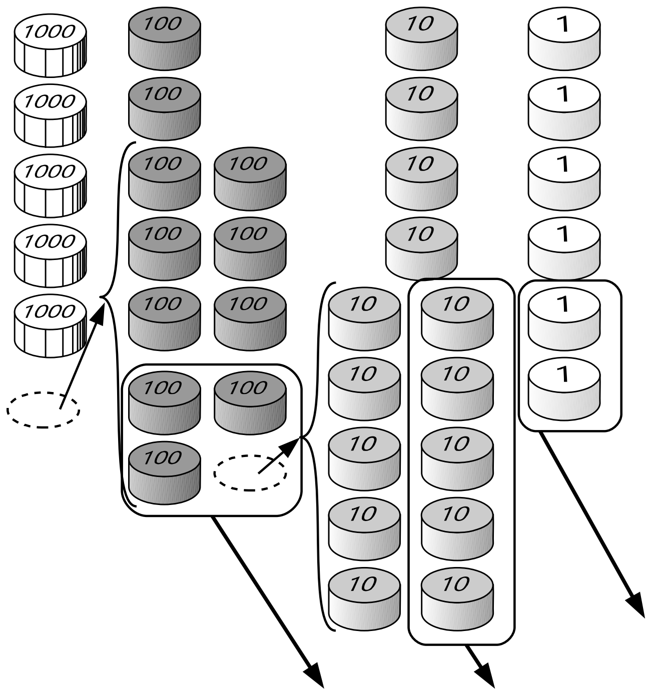
Podemos ver que el resultado es 3802. Entonces lo escribimos.

Hagan otros ejemplos, y que los niños inventen sus propias restas.

En las restas tenemos que hacer un canje cuando no hay suficiente material para quitar. Por ejemplo en 6246 – 352:

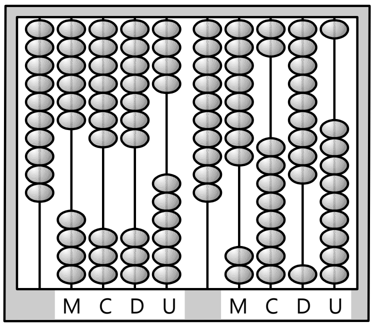


No hay 3 centenas para quitar. Tenemos que tomar uno de los millares y canjearlo por 10 centenas. Tampoco hay suficientes decenas para quitar. Tenemos que canjear una centena por 10 decenas. Ahora podemos quitar 352:



Sumas en el ábaco

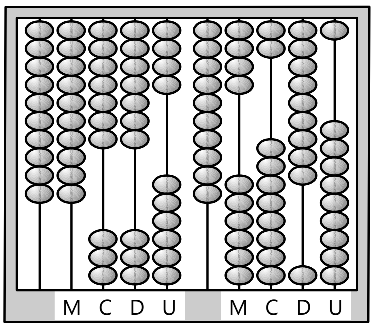
Hagan ejemplos como los anteriores en el ábaco. Para una *suma* representamos el primer sumando como estamos acostumbrados. El segundo sumando se puede representar en la mitad izquierda del ábaco, para que no lo olvidemos. Para eso definimos en este lado del ábaco nuevamente una columna de unidades, una de decenas, una de centenas y una de millares. Así por ejemplo se representaría 2819 + 4336 (notamos que el 2819 está a la derecha y el 4336 a la izquierda):



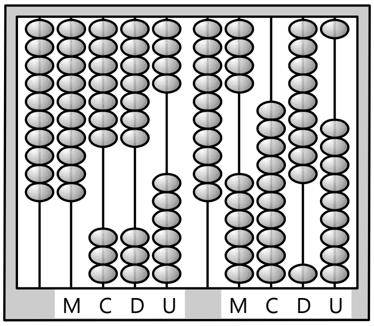
Podemos hacer esto mientras nuestros números no tengan más de 5 cifras, o con números mayores si tenemos un ábaco con más columnas. De otro modo habrá que escribir el segundo sumando en un papel, o mantenerlo en la memoria.

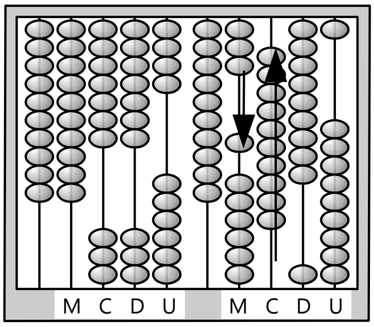
Ahora comenzamos con sumar los millares.
(Según el uso normal, al calcular en el ábaco se comienza por el lado del valor posicional mayor; o sea por el lado izquierdo. Al sumar o restar podríamos también comenzar con las unidades; pero en la multiplicación veremos que el resultado puede salir mal si se comienza con las unidades.
Por ahora podemos dejar a los niños en la libertad de empezar por el lado que quieren. Cuando pasemos al procedimiento escrito, en las Unidades 4 y 6, tendrán que acostumbrarse a comenzar con las unidades. Y cuando lleguemos a la multiplicación, tendremos que ayudarles a entender las diferencias entre el procedimiento en el ábaco y el procedimiento escrito.)

A los 2 millares de nuestro número 2819 tenemos que aumentar 4 millares. Entonces, en la columna de los millares jalamos 4 cuentas "hacia abajo" (hacia nosotros). Si desean, pueden al mismo tiempo "eliminar" los 4 millares en el número 4336, para señalar que esos ya los hemos procesado:

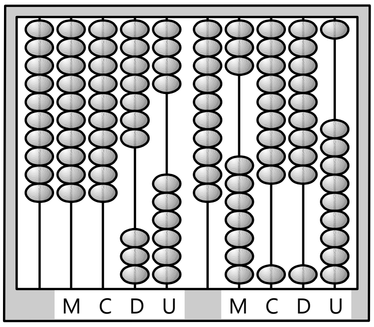


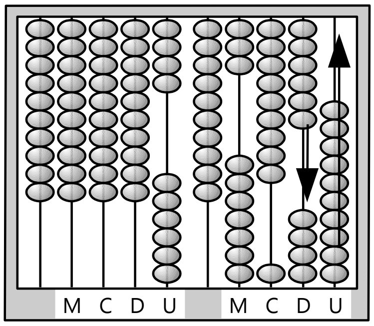
Después aumentamos las centenas: Tenemos que aumentar 3 centenas a las 8 que ya están aquí. Pero podemos aumentar solamente 2 centenas; ahora la columna de las centenas está llena. Tenemos que canjear las 10 centenas por un millar adicional:





En la operación del canje no hemos aumentado ni quitado nada; solamente hemos intercambiado dos cantidades del mismo valor. Seguimos entonces en la misma situación como antes del canje: hemos aumentado 2 centenas hasta aquí. Aumentamos una centena más: ahora hemos aumentado 3 centenas en total.
Aquí también, si desean, pueden ahora quitar las 3 centenas del 4336. *(Dibujo izquierdo)*



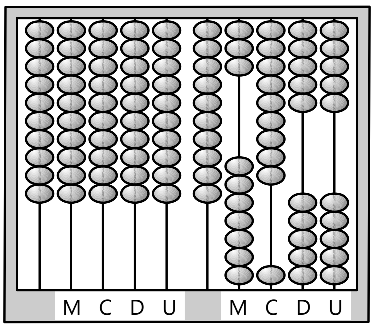


Pasamos a las decenas: aumentamos 3 decenas, y no hay canje.

En la columna de las unidades podemos aumentar una sola unidad, y ya tenemos que hacer el canje *(Dibujo a la derecha)*.

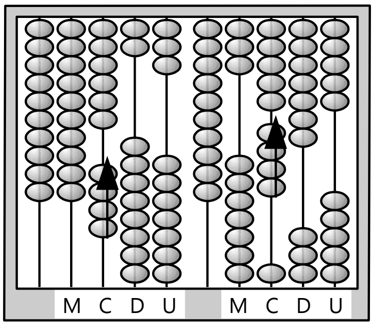
Después del canje seguimos aumentando unidades hasta que hayamos aumentado un total de 6. Podemos contarlas: 2, 3, 4, 5, 6.

Ahora tenemos el resultado, que es 7155:

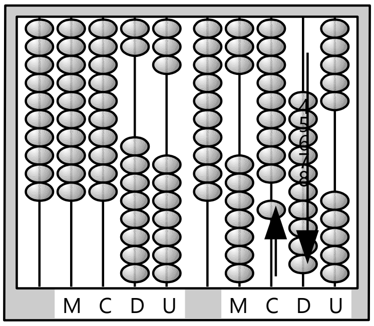


Restas en el ábaco

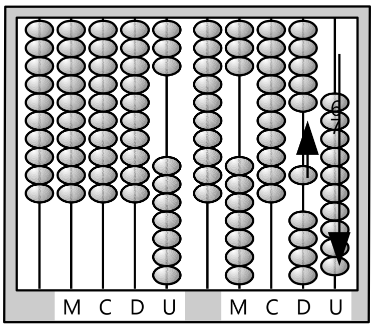
Las restas se hacen de manera similar. En este caso tenemos que hacer un canje cuando no hay suficiente para quitar. Por ejemplo 7535 – 487: Representamos el 7535 en el lado *derecho* del ábaco, y el 487 en el lado izquierdo (o lo anotamos y no lo representamos). Primero tenemos que quitar 4 centenas; eso lo podemos hacer todavía sin canje.



Ahora tenemos que quitar 8 decenas, pero hay solamente 3. Quitamos primero las 3 decenas que están aquí. Después hacemos el canje: Canjeamos una centena por 10 decenas. Ahora podemos seguir quitando: 4, 5, 6, 7, 8.



Pasamos a las unidades. Tenemos que quitar 7, pero hay solamente 5. Quitamos las que hay, y después hacemos el canje. Ahora seguimos quitando: 6, 7.



Vemos en el ábaco que el resultado es 7048.

A veces tenemos que hacer varios canjes sucesivos. Por ejemplo si queremos restar 4003 – 8, no hay suficientes unidades para quitar; pero tampoco hay decenas para canjear. Quitamos las 3 unidades que hay, y después tenemos que ir hasta los millares para encontrar "algo" que se puede canjear. Canjeamos un millar por 10 centenas, después una centena por 10 decenas, y finalmente una decena por 10 unidades. Ahora recién podemos seguir quitando, y queda 3995.

Este proceso es muy similar al que usamos al contar retrocediendo, cuando sobrepasamos la "frontera" de un millar.

Sumas y restas mentales

¿Pueden ahora calcular unas sumas y restas en la mente, sin usar el material? Practiquen con las tarjetas de la ***Hoja de trabajo 3.1***. Si todavía no pueden hacerlo mentalmente, vuelvan a practicar con material concreto hasta que puedan.

Restas imposibles

Al inventar restas propias, quizás los niños ya se encontraron con una situación como esta: 4603 – 4870. Si eso no sucedió, entonces démosles este ejemplo ahora. Que lo representen con un "material de canje" o en el ábaco, e intenten resolverlo. ¿Qué es lo que pasa aquí? ¿Y por qué sucede eso? Que lo piensen e intenten encontrar una respuesta. ¿Y cómo podríamos ver de antemano que una resta es imposible de resolver?

(Más tarde aprenderemos que sí hay una posibilidad de expresar el resultado de una resta como esta: con números negativos. Vea en la Unidad 92.)

Pregunta capciosa:

Un barco antiguo está hecho de 5013 tablas de madera.

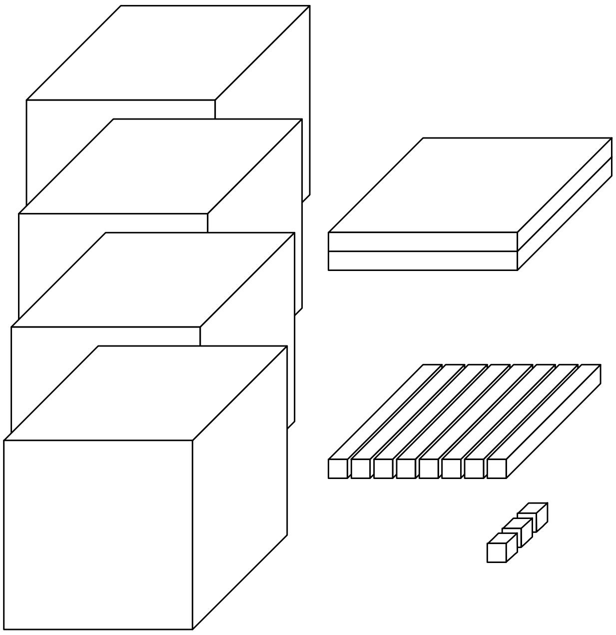
¿Cuál es el resultado si les restas 13?

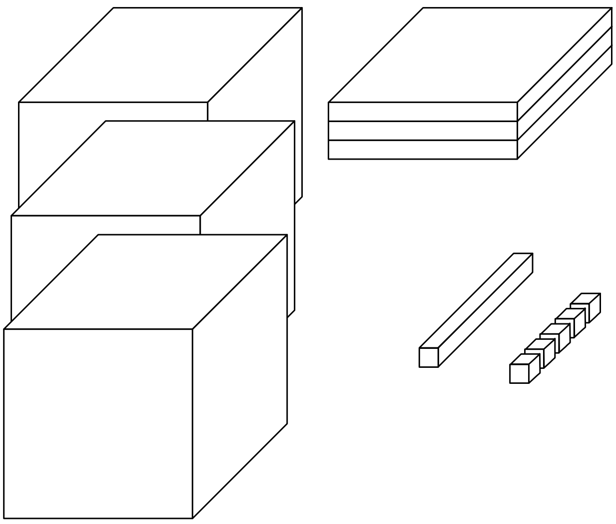
Ampliaciones

Anotar resultados parciales

(Este es un procedimiento opcional para anotar sumas y restas "difíciles". Si te ayuda, apréndelo; si no, puedes pasar a la siguiente unidad.)

Sumas sin canje:
Haremos algunas sumas y restas "difíciles" con el material Base 10 o en el ábaco, y después las escribimos. Por ejemplo 4283 + 3315:





A) Comenzamos por el lado de los millares. Aumentamos los 3 millares al número inicial, y tenemos 4283 + 3000 = 7283.

Después las centenas: 7283 + 300 = 7583.

Después las decenas: 7583 + 10 = 7593.

Finalmente las unidades: 7593 + 5 = 7598.

De forma abreviada podemos anotarlo así:

4283 + 3315 = 7598
7283
7583
7593
7598

B) Otra posibilidad es hacer lo mismo, pero empezando con las unidades. Hazlo primero tú mismo, después compara tu operación con la que sigue:

4283 + 3315 = 7598
4288
4298
4598
7598

Practica con las siguientes sumas:

a) 1724 + 7125 b) 8366 + 623 c) 3414 + 4562

Restas sin canje:
Hacemos lo mismo con restas.
Por ejemplo 5748 – 2236:

A) Empezando con los millares: Primero quitamos los 2 millares del número inicial:

5748 – 2000 = 3748

Después las centenas: 3748 – 200 = 3548.

Después las decenas: 3548 – 30 = 3518.

Finalmente las unidades: 3518 – 6 = 3512.

De forma abreviada:

5748 – 2236 = 3512
3748
3548
3518
3512

B) Haz lo mismo, pero empezando desde las unidades. Hazlo con el material; anótalo; y finalmente escríbelo. Después compara con la operación siguiente:

5748 – 2236 = 3512
5742
5712
5512
3512

Practica con las siguientes operaciones:

a) 7365 – 2341 b) 4897 – 615 c) 9436 – 3325

Sumas con canje:
Ahora hacemos una suma que requiere canjes: 3578 + 3626.

A) Aumentamos los millares primero: 3578 + 3000 = 6578. Aquí no hay ningún problema.

Ahora las centenas: 6578 + 600. Tenemos que canjear 10 centenas por un millar.

Si sabes calcular esto en la cabeza, puedes anotar directamente el siguiente resultado parcial. Si no, entonces puedes anotar la operación en dos pasos, haciendo "escala" en el siguiente millar:

6578 + 600 (*Primero sumamos solamente 500 para llegar al siguiente millar):*
7078 + 100 *(Ya que hemos sumado 500 de los 600, nos quedan todavía 100 para sumar.)*
7178

Continuamos ahora con las decenas:
7178 + 20 = 7198, no hay canje aquí.

Finalmente las unidades: 7198 + 6, eso requiere un canje. Quizás puedes calcularlo directamente. Si no, hazlo en dos pasos como arriba:

7198 + 6 *(Primero sumamos solamente 2 para llegar a la siguiente decena):*
7200 + 4 *(Hemos sumado 2 de los 6; nos quedan 4 para sumar.)*
7204

Entonces la operación queda así, de la manera más corta:

3578 + 3626 = 7204
6578
7178
7198
7204

O si anotamos las "escalas" en los canjes:

3578 + 3626 = 7204
6578 + 600
7078 + 100
7178 (+ 20)
7198 + 6
7200 + 4
7204

Nota: No hay una "única manera correcta" de anotar estas operaciones. Estamos simplemente usando el papel para ayudar a nuestra memoria, para que no tengamos que mantener todos estos números en la mente. En la siguiente Unidad aprenderemos una manera más breve de anotarlo.

B) Descubre tú mismo cómo puedes anotar esta operación si comienzas con las unidades.

Practica con las siguientes operaciones:

a) 5848 + 1312 b) 2593 + 561

c) 6823 + 3177 d) 4567 + 3456

e) 989 + 4322 f) 2768 + 2768

Restas con canje:
Ahora hacemos lo mismo con una resta:
5257 – 2739.

B) Hagámoslo esta vez primero empezando con las unidades.

5257 – 9, para esto tenemos que canjear una de las decenas por 10 unidades. Si puedes hacerlo en la cabeza, anota directamente el resultado. Si no, anótalo con "escala":

5257 – 9
5250 – 2 *(Hemos restado 7; nos quedan 2 por restar.)*
5248

Ahora las decenas, aquí no hay canje:
5248 – 30 = 5218.

Para restar 7 centenas tenemos que hacer nuevamente un canje. Hazlo primero con el material. ¿Puedes hacerlo también en la cabeza? Si no, anótalo en dos pasos:

5218 – 700
5018 – 500 *(Hemos restado 200; tenemos que restar todavía 500.)*
4518

Los millares se pueden restar sin canje:
4518 – 2000 = 2518.

Entonces la operación entera se ve así, de la manera más corta:

<u>5257 – 2739 = 2518</u>
5248
5218
4518
2518

O anotando las "escalas":

<u>5257 – 2739 = 2518</u>
5257 – 9
5250 – 2
5248 (–30)
5218 – 700
5018 – 500
4518 (–2000)
2518

A) ¿Cómo se ve esta operación si comenzamos por los millares? Descúbrelo tú y anótalo.

Después practica con las siguientes:

a) 5572 – 3815 b) 10'000 – 738

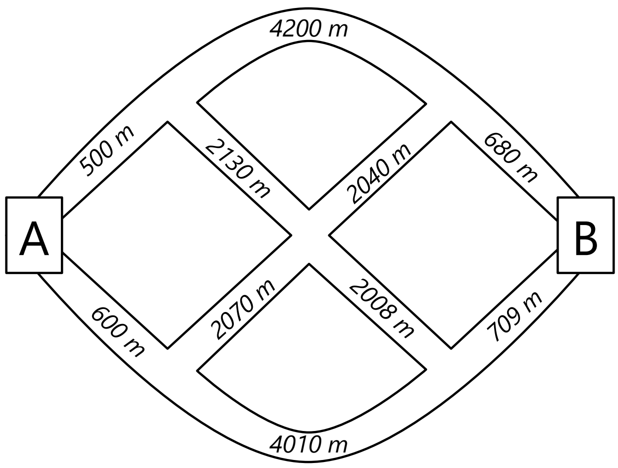
c) 7042 – 3147 d) 6725 – 1438

e) 8515 – 816 f) 4101 – 3955

Dos problemas:

1. Un camión lleva 9600 kg de carga. Se descargan 3700 kg. El camión con su carga pesa ahora 8100 kg. ¿Cuánto pesa el camión vacío?

2. En el dibujo a la derecha se indican las distancias de un cruce al siguiente. Encuentra el camino más corto de A a B.



Unidad 4 - Sumar cifra por cifra

Prerrequisitos:

- Entendimiento del sistema decimal *(Unidad 2)*.
- Suma y resta mental hasta 10'000 *(Unidad 3)*.

Materiales necesarios:

- Material de canje del sistema decimal (Base 10; tapas de botellas, dinero de juego, o similares).
- Ábaco.
- Pizarra.
- Tablero posicional grande (de la *Unidad 1*).
- Dados.

Principios matemáticos

El material concreto nos hace entender el significado

Si han trabajado las unidades anteriores, entonces los niños deben ahora tener suficientes experiencias con el material concreto para poder entender el procedimiento escrito. Introducimos este procedimiento *en conexión con el material concreto:* Efectuamos sumas con el material, y paralelamente anotamos en el cuaderno lo que hacemos con el material. De esta manera, los niños pueden entender el significado de cada paso en el procedimiento escrito:

¿Por qué escribimos las cifras exactamente en estos lugares? – Porque tenemos que sumar "partes iguales": unidades con unidades, decenas con decenas, etc.

– ¿Por qué tenemos que "llevar" algo? – Porque este es el resultado del canje que hacemos cuando tenemos más de lo que se puede escribir con una sola cifra de 0 a 9.

– ¿Y por qué tenemos que escribir en la siguiente columna lo que "llevamos"? – Porque el resultado del canje nos da siempre una pieza mayor que las que canjeamos, por eso pertenece a la columna siguiente.

Así los niños aprenden el procedimiento escrito, *entendiendo lo que hacen*, y así es menos probable que lo olviden o que se equivoquen.

Escribir el signo por el lado correcto

Al escribir operaciones matemáticas, es una convención importante que *los signos se escriben a la izquierda* del número correspondiente. O sea, *el signo se aplica al número que le sigue*; pero no al número que le precede. Por ejemplo en 4 – 7 + 6, el signo "–" pertenece al número 7; no al 4 ni al 6. El signo y el número juntos representan una única operación o "instrucción": "Quita 7 objetos", o "Camina 7 pasos hacia atrás".

Esta convención es importante para evitar malentendidos. No es un principio matemático; el principio es que el número no debe separarse de su signo, y podríamos escribir el signo donde queremos. Pero si queremos comunicarnos claramente con otros alumnos, padres, profesores, autores, matemáticos, etc, entonces debemos hacerlo todos de la misma manera.

Enfatizo este punto porque he visto incontables libros escolares con sumas y restas mal escritas, operaciones como las que figuran a la derecha:

$$\cancel{\begin{array}{r}234+\\ \underline{419}\end{array}} \qquad \cancel{\begin{array}{r}765-\\ \underline{378}\end{array}}$$

Tales operaciones causan confusión, porque asocian el signo con el número equivocado. En el primer ejemplo, el número que se suma es 419 y no 234, entonces es el 419 que debe llevar el signo "+". Igualmente en el segundo ejemplo, es el 378 que se resta, entonces el 378 debe llevar el signo "–" y no el 765. La manera correcta de escribir estas operaciones es la que figura aquí a la izquierda.

$$\begin{array}{r}234\\ \underline{+419}\end{array} \qquad \begin{array}{r}765\\ \underline{-\ 378}\end{array}$$

No siempre es necesario usar el procedimiento escrito

Ahora que los niños aprenden el procedimiento escrito, no debemos dar la impresión de que desde ahora deben usar siempre este procedimiento. En muchas operaciones fáciles, el cálculo mental es más rápido y más eficaz que el procedimiento escrito. Ayude a los niños a distinguir entre operaciones "fáciles", que pueden calcular en su mente, y operaciones "difíciles", que requieren el procedimiento escrito.

Por ejemplo 4070 + 600 es una operación "fácil": Podemos decir a simple vista que el resultado es 4670, porque las 6 centenas simplemente se meten dentro del espacio vacío que hay en las centenas del 4070.

5236 + 50 también es "fácil", porque solamente necesitamos sumar las decenas, y ni siquiera es necesario hacer un canje.

5236 + 80 es un poco más difícil, porque requiere un canje; pero muchos niños van a poder resolver también esta suma mentalmente.

Una operación como 5236 + 608 es quizás un "caso

límite", donde algunos niños serán capaces de calcularlo mentalmente, y otros necesitan resolverlo por escrito para no confundirse.
En una operación como 5236 + 3458 – 3058, el procedimiento escrito será necesario si queremos resolverla paso por paso, tal como está escrita. Pero observando bien los números, podemos ver que 3458 – 3058 = 400, y ahora la operación se vuelve "fácil": 5236 + 400 = 5636. Así, muchas veces es ventajoso observar bien los números, para encontrar la manera más fácil de resolver una operación.

Para los educadores

Como en la *Unidad 3*, también en esta Unidad se presenta una diversidad de métodos y materiales. Demos libertad a los niños para que ellos elijan individualmente el material con que quieren trabajar: el material Base 10, otros "materiales de canje", el ábaco, o directamente escribiéndolo en papel.

Acerca del uso de la calculadora

A medida que los cálculos se vuelven más complicados, se plantea la pregunta de si debemos permitir a los niños el uso de una calculadora. Algunos niños quizás preguntarán para qué siquiera deben aprender a calcular, si existen calculadoras.

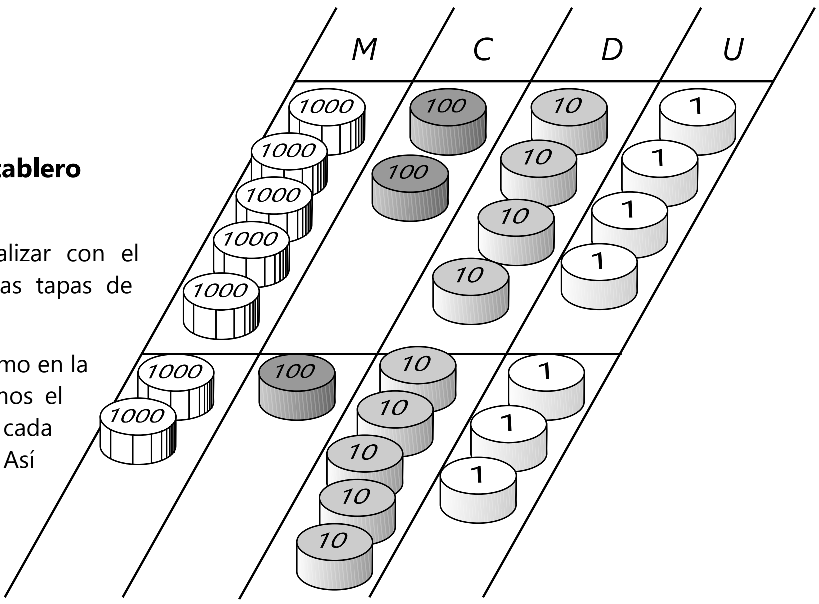
No pretendo tener la "única respuesta correcta" a esta pregunta, pero mi opinión personal es la siguiente:
No veo problema en que los niños usen una calculadora para *verificar sus propios cálculos* que realizaron mentalmente o por escrito. En este caso, la calculadora es un medio adicional de comprobación, como lo es el uso de la operación inversa, la "regla del 9", y otros métodos de comprobación de resultados.
A algunos niños les gusta usar la calculadora para "curiosear" acerca de los resultados de operaciones que ellos todavía no saben calcular. Eso también puede ser una experiencia educativa, *si es que los niños se ponen a razonar* acerca del "por qué" y del significado matemático de los resultados que obtienen.
Por el otro lado, el uso de la calculadora *no debe sustituir el aprendizaje de los procesos de calcular.* El proceso de calcular una operación nos permite ver, de una manera más o menos transparente, "de dónde viene" cada cifra del resultado. Así, estos procesos enseñan leyes y propiedades matemáticas. La calculadora no nos permite ver estas conexiones. Muchos niños, cuando usan una calculadora, tienden a confiar ciegamente en sus resultados, y ni siquiera se ponen a pensar si los resultados son realistas, o matemáticamente razonables. Cuando esto sucede, la calculadora se convierte en un obstáculo contra el aprendizaje de la matemática y contra el razonamiento propio del niño. (En realidad, muchos niños sacan resultados equivocados con sus calculadoras, por errores de tipeo, confusión de las funciones de la calculadora, y otros errores.)
En los niveles superiores, a menudo la calculadora o computadora puede ahorrarnos tiempo y esfuerzos, porque permite efectuar operaciones que de otro modo serían muy tediosas y complejas: multiplicaciones muy largas; raíces; funciones trigonométricas; etc. Pero un uso razonable de la calculadora requiere que el alumno haya aprendido y comprendido anteriormente el significado de estas operaciones, y las leyes matemáticas que las rigen. Así que las calculadoras y computadoras no nos libran de la necesidad de aprender matemática. Al contrario: hay que saber matemática para saber usar estas herramientas de manera sensata.

TALLER

Sumas con "material de canje" en el tablero posicional grande

Las actividades siguientes se pueden realizar con el material Base 10, o con el material de las tapas de botellas *(vea Unidad 1)*.

Representen unas sumas con el material, como en la Unidad anterior (3). Pero esta vez colocamos el material sobre el tablero posicional grande, cada pieza en la columna donde corresponde. Así por ejemplo la suma 5244 + 2153 se ve así:



Hagan algunos ejemplos de sumas de esta manera.

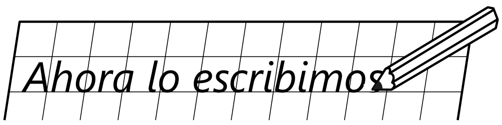
Después damos a los niños unas sumas escritas en un tablero posicional, y ellos las representan con material concreto. Por ejemplo:

M	C	D	U
3	1	8	2
+ 5	4	1	3

M	C	D	U
5	1	3	7
+ 1	7	2	2

Representar en el ábaco lo que está escrito

La última actividad mencionada se puede hacer también con el ábaco: Damos a los niños una operación escrita en un tablero posicional como los ejemplos de arriba. El niño representa y calcula la operación en el ábaco. Pueden usar los ejemplos de arriba o inventar otros, pero que todavía no requieran canjes.



Escribir lo que representamos en el tablero posicional

Ahora hacemos la actividad anterior "al revés": Representamos primero una suma con material concreto, y después la escribimos en un tablero posicional. Eso se puede hacer de diversas maneras. Por ejemplo:

- Dibujamos un tablero posicional en la pizarra, y los niños escriben allí los números que corresponden a la operación representada con el material.

- Lo mismo, pero colocamos la pizarra horizontalmente sobre la mesa, y colocamos el material sobre el tablero posicional dibujado en la pizarra. Después escribimos los números en el lugar donde está el material.

- Cada niño dibuja en una hoja o en su cuaderno un tablero posicional, y escribe los números allí.

Después de efectuar la operación con el material, escribimos también en el tablero posicional las cifras del resultado debajo de la operación.
Hagan primero unos ejemplos que no requieren canje. Por ejemplo:

3032 + 5416, 6324 + 363, 1744 + 4205, ...

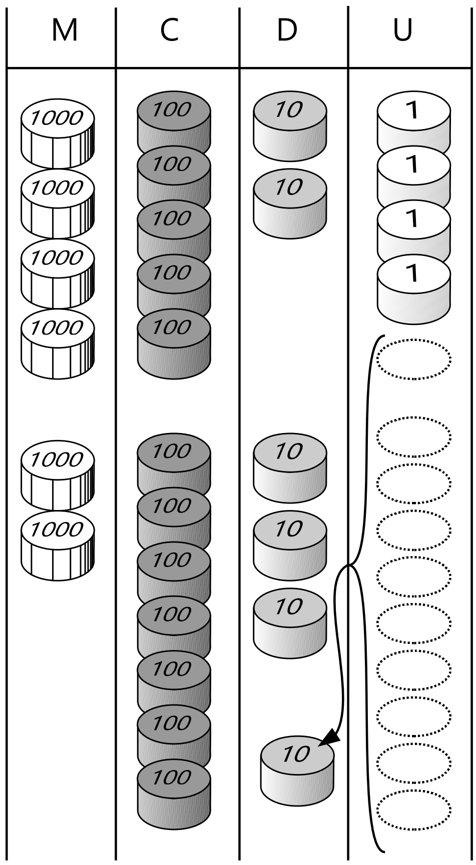
Que los niños observen lo que sucede en estas operaciones. Comparando lo que sucede con el material, y lo que sucede con las cifras que anotamos, ellos mismos pueden descubrir que en el tablero posicional se puede sumar cifra por cifra.

Escribir lo que representamos en el ábaco

La misma actividad se puede hacer con el ábaco. Solamente tenemos que anotar en el tablero posicional las cifras que corresponden a cada columna del ábaco. Pueden hacer los mismos ejemplos como arriba, o inventar otros (pero todavía sin canje).

Cómo escribir el canje en la suma

Hagamos ahora un ejemplo con canje: 4525 + 2739. Que los niños lo representen con material concreto en el tablero grande, o en el ábaco; y que lo escriban también en un tablero posicional en papel. Efectuamos la operación con el material, y simultáneamente escribimos también en el tablero posicional lo que hacemos.
Tenemos que explicar a los niños que para este procedimiento tenemos que comenzar por el lado de las unidades para que nos salga bien. (Aunque en algunos países, por ejemplo en la India, lo hacen de izquierda a derecha; pero así tienen que corregir las cifras que ya están escritas, cuando hay un canje.)



Comenzamos entonces con las unidades: juntamos las 5 + 9 unidades y tenemos 14.
De eso tenemos que canjear 10 unidades por una decena, y así tenemos 4 unidades y una decena adicional.

Anotamos las 4 unidades en la columna de las unidades.
La decena adicional tenemos que anotar en la columna de las decenas. Escribimos allí un pequeño número 1, porque tenemos que sumar esta decena adicional con las decenas que ya están allí.

M	C	D	U
4	5	2	5
+ 2	7	3	9
		1	
			4

Esto significa que la suma de las decenas es ahora 2 + 3 ***+ 1***. Podemos verlo claramente si estamos haciendo la operación con el material concreto. Tenemos un total de 6 decenas, y anotamos eso en la columna de las decenas.

Pasamos ahora a las centenas. Su suma es 5 + 7 = 12. Canjeamos, y tenemos un millar y 2 centenas. Anotamos 2 en la columna de las centenas, y un pequeño 1 en la columna de los millares para el millar adicional.

Finalmente sumamos los millares: 4 + 2 ***+ 1*** = 7.

Los pequeños números que "llevamos" (en nuestro caso siempre 1), los podemos anotar arriba, en el medio, o abajo, eso no importa. Lo que importa es que estén *en la columna correcta:* las decenas en la columna de las decenas, las centenas en la columna de las centenas, etc. Entonces, los siguientes ejemplos son ambos correctos:

M	C	D	U
4	5	2	5
+ 2	7	3	9
		1	
1			
7	2	6	4

M	C	D	U
		1	
4	5	2	5
1			
+ 2	7	3	9
7	2	6	4

Personalmente prefiero anotar lo que se "lleva" *abajo*, justo por encima del resultado, pero no dentro del área del resultado, como en el ejemplo a la izquierda. Por dos razones: Así se puede "ver" todavía el número de dos cifras que fue el resultado original de la suma, antes de hacer el canje. En nuestro ejemplo podemos "ver" todavía el 14 (de las 14 unidades) y el 12 (de las 12 centenas). – La otra razón veremos cuando introducimos el procedimiento de la multiplicación *(Unidad 9)*: allí evitamos errores si anotamos estas cifras abajo y no arriba. – Pero no es ningún error, escribirlas más arriba o en el medio.

M	C	D	U
4	5	2	5
+ 2	7	3	9
	1		1
7	2	6	4

En cambio, lo siguiente sí es equivocado:

Eso está escrito como si tuviéramos una *unidad* adicional (en vez de una decena), y una *centena* adicional (en vez de un millar). Los números que llevamos están en columnas equivocadas. Eso causa confusiones y errores en el cálculo.

M	C	D	U
4	5	2	5
+ 2	7	3	9
	1		1
7	2	6	4

Escribir una cifra más arriba o más abajo, no cambia su valor posicional, y por eso se puede dar libertad en este respecto. Pero escribir una cifra en una columna más a la derecha o más a la izquierda, eso sí cambia su valor posicional, y por eso tenemos que considerarlo como equivocado.

Hagan algunos ejemplos de esta manera, efectuando la operación con material concreto y simultáneamente anotando en un tablero posicional. Por ejemplo:

6471 + 1563, 447 + 4473, 6777 + 3223

Hoja de trabajo 4.1: *Escribir sumas en el tablero posicional*

Esta hoja contiene varios ejercicios de sumas para resolver en el tablero posicional. Los ejemplos de la primera mitad ya están escritos. En la segunda mitad, las sumas indicadas deben escribirse de la manera correcta en el tablero posicional.
Mientras los niños tienen necesidad del material concreto, que lo usen para representar estas operaciones. Cada niño debe darse cuenta por sí mismo cuando llega al punto de poder resolver las sumas puramente por escrito. Permitamos también que cada niño descubra por sí mismo cuántos ejercicios necesita hasta entender cómo funciona. Algunos niños lo encontrarán fácil después de muy pocos ejercicios, entonces no necesitan hacer más. Otros tendrán necesidad de resolver la hoja entera.

Escribirlo sin el tablero posicional

Como último paso, nos ahorramos el trabajo de dibujar un tablero posicional, y escribimos las operaciones directamente en el cuaderno. De preferencia usamos un cuaderno cuadriculado, así las líneas de las cuadrículas nos sirven en vez de las columnas del tablero posicional. Para evitar errores, escribimos los números ordenadamente, cada cifra en su columna.

	4	5	2	5
+	2	7	3	9
		1		1
	7	2	6	4

Escribe las siguientes sumas ordenadamente de manera vertical (como en el ejemplo arriba) y resuélvelas. Haz las operaciones con material concreto o con el ábaco, mientras lo necesitas. Cuando ya no necesites el material, haz algunas sumas puramente por escrito.

a) 5087 + 2745
b) 4919 + 3969
c) 684 + 6844
d) 8306 + 995
e) 1784 + 1549
f) 4566 + 4566
g) 854 + 7146
h) 2641+ 7359
i) 74 + 6958
j) 3773 + 1528

Ampliaciones

Dos problemas:

1. La tercera frontera más larga que existe entre dos países, está entre Argentina y Chile, y mide 5150 km. La frontera entre Kazajstán y Rusia mide 1696 km más. ¿Cuánto mide entonces?

2. La frontera entre Estados Unidos y Canadá es la más larga del mundo. Mide 2047 km más que la frontera entre Kazajstán y Rusia. ¿Cuánto mide?

Sumas con varios sumandos

Hagan algunas sumas como las siguientes:

328 + 5179 + 885

2807 + 683 + 3620

3186 + 2045 + 4869

2994 + 2995 + 2996

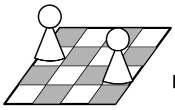
1256 + 885 + 2431 + 3098

Que cada niño decida de qué manera quiere hacerlo. Algunos necesitarán hacerlo primero con el material concreto o el ábaco; otros lo harán anotando en el tablero posicional; y otros podrán hacerlo de frente escribiendo en el cuaderno.

Se darán cuenta de que en estas sumas ya no es siempre un 1 que "llevamos". La suma de las unidades podría ser 26 ó 31, y en estos casos obtenemos 2 resp. 3 decenas adicionales cuando hacemos el canje. Y lo mismo en las sumas de las decenas y en las centenas.

Hoja de trabajo 4.2: *Escribe sumas con varios sumandos en el tablero posicional.*

Esta Hoja de trabajo contiene ejercicios de sumas con varios sumandos. Como en la hoja anterior, que cada niño haga la cantidad de ejercicios que necesita para entender cómo funciona. Después pueden hacer unos ejercicios similares en el cuaderno, sin dibujar un tablero posicional.



Juego: ¿Quién llega más cerca a mil?

Este juego se juega con tres dados. Por turnos, cada jugador tira los dados, y los coloca en el orden que desea, para formar un número de 3 cifras. Por ejemplo, si los dados muestran los puntajes 2, 6, y 3, se puede formar con ellos uno de los números 263, 236, 326, 362, 623 ó 632. De los números posibles, el jugador anota el que eligió, y pasa los dados al siguiente jugador.
Esto se repite una segunda y una tercera vez. Entonces cada jugador tiene tres números anotados. Los suma, y gana quien está más cerca de 1000 con su suma. No importa si las sumas están por encima o por debajo de 1000; lo que cuenta es su *diferencia* con 1000. Así por ejemplo, si un jugador tiene como suma 976, y otro jugador tiene 1037, entonces gana el 976, porque la diferencia entre 976 y 1000 (24) es menor que la diferencia entre 1037 y 1000 (37).

Se trata entonces de elegir sabiamente entre los números posibles, cuál de ellos ofrecerá las mejores posibilidades de alcanzar una suma final cercana a 1000.

Matemática divina

No hacer mezcla de cosas diferentes

En la ley de Dios para el pueblo de Israel era importante no hacer mezclas:

"No sembrarás tu viña con varias semillas (diferentes) ...
No ararás con buey y con asno juntamente.
No te vestirás de una mezcla de lana y lino juntamente."

(Deuteronomio 22:9-11)

En esto vemos que para Dios el orden es importante.

Así también la matemática refleja el orden que Dios puso en su creación. Por ejemplo, al sumar números grandes, tenemos que sumar unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas. No hay que hacer una mezcla de unidades con decenas, o de millares con centenas. Cuando juntamos cada cosa con lo que corresponde, los resultados salen correctos.

Principios matemáticos

¿Por qué es permitido sumar cifra por cifra?

Las actividades con el material concreto ya visualizan la explicación: La suma de centenas, por ejemplo, "funciona" de la misma manera como la suma de unidades: 2 centenas más 3 centenas son 5 centenas; etc. Por eso, si los niños han hecho las actividades con el material concreto, normalmente no se plantea esta pregunta.

Pero si queremos ser "matemáticamente correctos", entonces debemos analizar los principios matemáticos detrás de este procedimiento. No necesitamos hacer eso con los niños; pero lo hacemos aquí entre adultos (y para los niños interesados en este tema):

Tomamos como ejemplo la suma 462 + 336. La escritura de estos números significa lo siguiente, según las reglas del sistema decimal:

$$462 = (4 \times 100) + (6 \times 10) + (2 \times 1)$$

$$336 = (3 \times 100) + (3 \times 10) + (6 \times 1)$$

Los paréntesis no son necesarios, pero los colocamos para mayor claridad. Así vemos que la suma de estos dos números consiste en seis sumandos. La *ley conmutativa* nos permite colocarlos en el siguiente orden:

$$(4\times100 + 3\times100) + (6\times10 + 3\times10) + (2\times1 + 6\times1)$$

Además, la *ley asociativa* nos permite agruparlos de la manera como indican los paréntesis. O sea, podemos sumar las centenas aparte, las decenas aparte y las unidades aparte, y al final sumar los resultados de estas tres sumas.

Ahora aplicamos dentro de cada paréntesis la *ley distributiva:*

$$(\mathbf{(3+4)} \times 100) + (\mathbf{(6+3)} \times 10) + (\mathbf{(2+6)} \times 1)$$

Aquí vemos como aparecen en la operación las sumas de las cifras (los paréntesis en negrita). Y las multiplicaciones nos muestran el valor posicional que tenemos que asignar a cada una de estas sumas. Así hemos demostrado que efectivamente podemos sumar las cifras de las centenas aparte, y escribir el resultado como centenas; y lo mismo para las decenas y para las unidades:

$$7 \times 100 + 9 \times 10 + 8 \times 1 = 798.$$

Todavía nos faltaría demostrar que también el procedimiento del canje es correcto. Pero eso lo dejaremos como tarea para los aficionados a la matemática.

¿A dónde vamos desde aquí?

La siguiente Unidad repasa el tema de las unidades de medida y del dinero, y aplica la suma cifra por cifra a este tema. Pueden hacer eso ahora; o pueden dejar este tema para más tarde, e ir de frente al procedimiento de la resta *(Unidad 6)*.

Ahora los niños podrán también intentar los problemas de sumas en las operaciones incompletas *(Unidad 75)*.

Unidad 5 - Unidades de medida

Prerrequisitos:
- Conversión de medidas (m, cm, mm; centavos).
- Números de 4 cifras *(Unidad 1 ó 2)*.
- Sumar cifra por cifra *(Unidad 4)*.

Materiales necesarios:
- Objetos de la casa.
- Una balanza que pesa en kilogramos y gramos.
- Cinta métrica.
- *(Opcional):* Cordel de medir largo.
- Litrera.

Para los educadores

Esta Unidad repasa las operaciones con unidades de medida que practicamos en el nivel de Primaria I: las operaciones básicas, y la conversión de metros en centímetros, centímetros en milímetros, y de la moneda entera en centavos; y vice versa.

Con el espacio numérico ampliado más allá del 1000, podemos ahora también realizar conversiones entre kilogramos y gramos, kilómetros y metros, litros y mililitros. Las conversiones de medidas pueden servir como una vía de acceso alternativa al entendimiento de las propiedades del sistema decimal, en lugar de la *Unidad 2*.
Además aplicamos el procedimiento de la suma cifra por cifra, que hemos aprendido en la *Unidad 4*, a las unidades de medida.

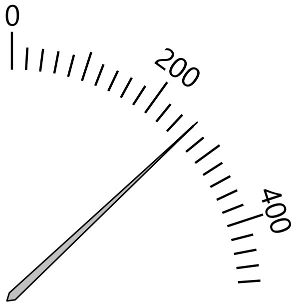
TALLER

Estimar y medir con números mayores

Hagan unas actividades de estimar y medir como en el nivel de Primaria I, pero ahora con números mayores. Tal vez no contando objetos, porque será mucho trabajo contar varios miles. Pero pueden estimar pesos o longitudes.

Nota: Leer correctamente los instrumentos de medición

A veces se necesita algún razonamiento adicional para leer correctamente lo que indica la balanza, la litrera, o algún otro instrumento de medición. Es que las divisiones de la escala no siempre significan "unidades". Por ejemplo, una balanza muestra la siguiente lectura:



Algunos niños pueden pensar que las rayitas equivalen a gramos. Ya que la balanza indica "200g más tres rayitas", piensan que eso significa 203g. Otros quizás piensan que cada rayita es 200g, entonces llegan a 800g. Hay que observar la escala más detenidamente. El primer número indicado después del cero es 200. Hay una rayita un poco más larga en el medio entre 0 y 200, eso debe ser 100g, porque 100 está en el medio entre 0 y 200. El espacio entre el 0 y el 100 está dividido en 5 espacios pequeños. Entonces cada espacio pequeño vale 100 ÷ 5 = 20g. En la lectura de nuestra balanza, los tres espacios después del 200 significan 20 x 3 = 60g, entonces el objeto pesa 260g.
(Llegamos al mismo resultado si contamos todos los espacios entre el 0 y el 200: son 10 espacios, entonces un espacio equivale a 200 ÷ 10 = 20g.)

Estimar pesos

Pueden estimar los pesos de objetos que pesan de 1 a 10 kg, y que se pueden pesar en una balanza que indica también los gramos: una piña, una sandía, un paquete de papeles, una caja de libros, una piedra grande, una silla, una mesa, un gato, etc...
Primero cada persona que participa, dice o escribe el peso que estima. Después pesen el objeto para verificar quién está más cerca con su estimación.

Recuerden que los pesos y medidas se pueden escribir de diferentes maneras. Por ejemplo, si el gato pesa 3 kilos y 350 gramos, se puede escribir así:

En kg y g: 3 kg 350 g
Todo en g: 3350 g
Todo en kg: 3.350 kg

La última forma (3.350 kg) significa que son 3 kg (el número delante del punto) y un poco más. Detrás del punto escribimos los gramos, que en total son menos que un kilo.

Nota 1: Si queremos escribir 2 kg 60 g en kilos, se escribe 2.060 kg *(no 2.60 kg)*, porque un kilo tiene 1000 gramos, entonces tenemos que usar tres dígitos para los gramos: centenas, decenas y unidades. Si no hay centenas de gramos, entonces tenemos que escribir un cero en la posición de las centenas.

Nota 2: Cuando no hay kilos, se escribe un cero en el lugar de los kilos. Por ejemplo si queremos escribir 640 g en kilos, se escribe 0.640 kg.

Para practicar, usen las tres formas para escribir los pesos de los objetos que pesaron.

Estimar longitudes en centímetros y milímetros

Hagan lo mismo con unas longitudes y distancias. Pero para practicar, digan o anoten sus estimaciones en centímetros, o en milímetros. Por ejemplo:

¿Cuántos milímetros de largo tiene nuestra sala?

¿Cuántos milímetros de alto tiene?

¿Cuántos centímetros son desde aquí hasta la esquina de la calle?

¿Cuántos centímetros mide el patio?

...

Escriban estas distancias en metros, y también en centímetros o milímetros.

Unidades de medida importantes

Kilómetro: km	Tonelada: t	Litro: *l*
Metro: m	Kilogramo: kg	Mililitro: m*l*
Centímetro: cm	Gramo: g	
Milímetro: mm		
1 km = 1000 m	1 t = 1000 kg	1 *l* = 1000 m*l*
1 m = 100 cm	1 kg = 1000 g	
1 cm = 10 mm		

OJO: Las abreviaciones de las unidades de medida se escriben *con minúsculas, y sin punto final* (a no ser que se trate del punto que finaliza la oración).
No se les aumenta ninguna "s" al final, por más que estén en plural. Por ejemplo:

Incorrecto: 15 kgs Correcto: 15 kg

Después pueden también estimar y medir unas distancias más largas en kilómetros y metros. (Escríbanlas de las tres formas que mencionamos antes.) Por ejemplo:

¿Cuántos metros son desde aquí al mercado?

¿Cuántos metros son desde aquí hasta la plaza?

... igualmente: hasta la casa de personas que conocen; o hasta cualquier lugar interesante en su ciudad.

Aquí unas sugerencias de cómo medir estas distancias:

- Consigan un plano de la ciudad, y pidan la ayuda de alguien que sabe medir y calcular distancias en un mapa. *(Vea Unidad 67.)*

- Pidan la ayuda de alguien que tiene un carro o una moto con cuentakilómetros, que recorra el trayecto y observe la cuenta de los kilómetros.

- ¿Pueden hacer pasos grandes, de un metro de largo? Entonces pueden caminar así hasta el lugar y contar los pasos. (Eso no saldrá exacto, pero por lo menos aproximado.)

- Si tienen perseverancia, pueden también medir algunas de estas distancias con un cordel de medir: una pita o cordel largo en el cual han marcado los metros.

Nota: Para la escritura de las medidas en kilómetros se aplica lo mismo como en las notas acerca de los kilogramos y gramos:

6 km 75 m = 6.075 km
90 m = 0.090 km

Estimar y medir volúmenes

Hagan también estimaciones y mediciones como las siguientes, en litros y mililitros:

¿Cuánto de agua cabe en la olla más grande que tenemos?

¿y en la olla más pequeña?

¿y en un vaso de beber?

¿y en un dedal?

¿y en la bañera?

(etc.)

La cinta multi-métrica (Hoja de trabajo 5.1)

Corta la hoja en cuatro tiras, a lo largo de las líneas gruesas. Pégalas en orden por sus extremos para obtener una única tira larga con una escala milimétrica continua. Completa la numeración en milímetros, centímetros, decímetros y metros. Si deseas, puedes plastificar la cinta para que sea más resistente. Ahora puedes usarla para medir simultáneamente en milímetros, centímetros, decímetros y metros. Mide algunos objetos y anota sus medidas en cada una de estas unidades.

Jugamos a la tienda

¿Tienen su tienda para jugar? con sus productos para vender, su caja, su dinero de juego ... Fijen los precios de los productos y jueguen al comprar y vender. Háganlo con exactitud: Cada vez que alguien hace compras, calculen el precio total; también calculen el cambio para darlo correctamente. Incluso pueden llevar un libro de caja para anotar las ventas del día.

(En la *Unidad 7* volveremos a este tema, cuando hablaremos de administrar un negocio propio.)

¿Cómo sumar montos de dinero por escrito?

En la *Unidad 4* hemos aprendido cómo sumar números por escrito cuando es demasiado complicado hacerlo en la cabeza. Tenemos que sumar unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas ... De la misma manera tenemos que hacerlo con el dinero: Sumamos centavos con centavos, unidades con unidades, etc.

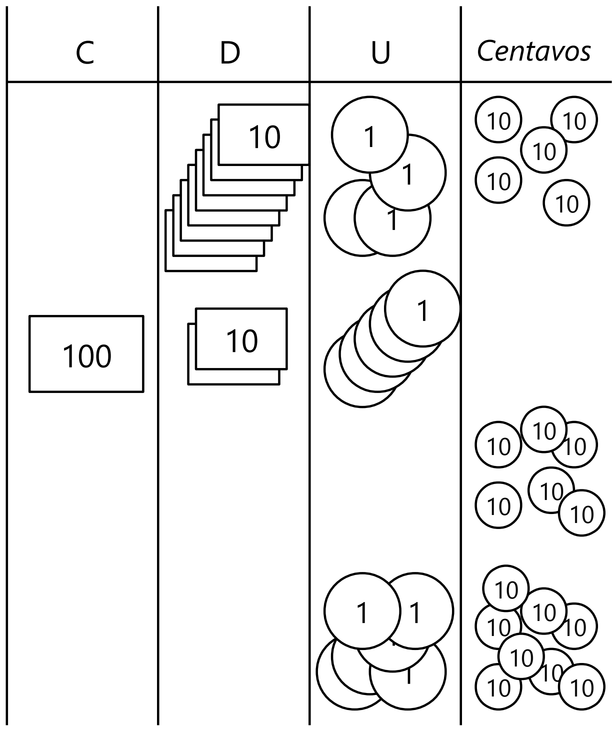
Un ejemplo: Queremos sumar 84.50 + 125.– + –.60 + 6.80. Eso tenemos que escribir así:

		8	4.	5	0
+	1	2	5.	–	
+			–.	6	0
+			6.	8	0

Después podemos sumarlo como los números normales.

En otras palabras, tenemos que anotarlo de tal manera que los puntos que separan los centavos estén uno debajo del otro, en la misma columna. Así aseguramos que los centavos estén juntos, las unidades juntas, las decenas juntas, etc.

Si eso es difícil de entender, hazlo en un tablero posicional grande en cartulina: A la derecha de las unidades añadimos otra columna para los centavos. Pon las monedas y billetes del dinero de juego sobre el tablero como corresponde a la suma escrita. Después júntalos, todo en su columna como corresponde, y haz los canjes necesarios. Realmente funciona igual como con los números normales.



¿Cuánto es diez mil?

¿Pueden imaginarse cuánto es diez mil? – Busquen unos objetos de los que podrán conseguir esta cantidad. Hay objetos que se venden en cajas de 100, de 500, de 1000, o incluso de varios miles: clips para papel, chinches, grapas, etc. Pueden comprar 10'000 de esos, y así podrán ver cuánto es.

Con otros objetos habrá que hacerlo contando y pesando. Por ejemplo granos de arroz, de trigo o de maíz. ¿Tienen paciencia para contar hasta 10'000? – Si son 10 personas, pueden repartirse el trabajo: cada uno cuenta mil.
Pero pueden hacerlo también de una manera más fácil: Cuenten por ejemplo 100 granos de maíz y pésenlos. Después multipliquen este peso por 100 y pesen esa cantidad de maíz, y tendrán aproximadamente 10'000 granos. Así no sale completamente exacto; pero podrán imaginarse más o menos cuánto es 10'000.

Ampliaciones

Problemas con medidas

Calcula estos problemas con los procedimientos de tu elección. Para saber dónde sumar y dónde restar, recuerda el principio del entero y sus partes; o haz un dibujo.

1. Una caja pesa 543 gramos, y se echan 4.475 kg de arena adentro. ¿Cuánto pesa la caja con la arena?

2. En la cocina hay 6 kg de harina. Mamá usa 600 g para hacer pan, y 250 g para una torta. ¿Cuánto queda?

3. Juan camina 643 metros al mercado, de allí 1.323 km donde su amigo Pedro, después 789 m a la biblioteca, y finalmente 1.160 km de regreso a casa. ¿Cuántos kilómetros y metros caminó en total?

4. De un alambre se cortó un pedazo de 678 cm de largo, después uno de 244 cm, y finalmente uno de 328 cm. Quedaron 3.50 metros. ¿Cuánto midió el alambre entero?

5. En un molino se llevó la cuenta de la cantidad de trigo molido durante una semana:

Lunes	2078 kg
Martes	1412 kg
Miércoles	978 kg
Jueves	1155 kg
Viernes	1847 kg

a) ¿Cuántas toneladas y kilos de trigo se molieron en la semana entera?

b) ¿En cuál día se molió la mayor cantidad de trigo? ¿En cuál día la menor cantidad? – Calcula la diferencia entre estas dos cantidades.

¿A dónde vamos desde aquí?

El tema de los cálculos con dinero se retoma en la *Unidad 7*, donde se sugiere como proyecto la administración de un pequeño negocio propio. Pero para ese proyecto puede ser necesario dominar también la operación de la *resta* cifra por cifra, la cual se introduce en la siguiente Unidad *(6)*.

Unidad 6 - Restar cifra por cifra

Prerrequisitos:

- Entendimiento del sistema decimal *(Unidad 2)*.
- Suma y resta mental hasta 10'000 *(Unidad 3)*.

Materiales necesarios:

- Material de canje del sistema decimal (Material Base 10, tapas de botellas, dinero de juego, o similares).
- Ábaco.
- Pizarra.
- Tablero posicional grande (de la *Unidad 1*).

Para los educadores

Como en la suma, también en la resta introducimos el procedimiento escrito *en conexión con el material concreto*, anotando en el cuaderno lo que hacemos con el material. Vea la sección "Para los educadores" en la *Unidad 4*.

Nota acerca de los problemas con dinero:

El valor de la moneda nacional varía mucho entre un país y otro, y también varía a lo largo del tiempo. Por tanto no fue posible asegurar que los precios mencionados en los problemas sean realistas. Tome la libertad de adaptar los montos mencionados, y/o las situaciones, a la realidad de su país.

TALLER

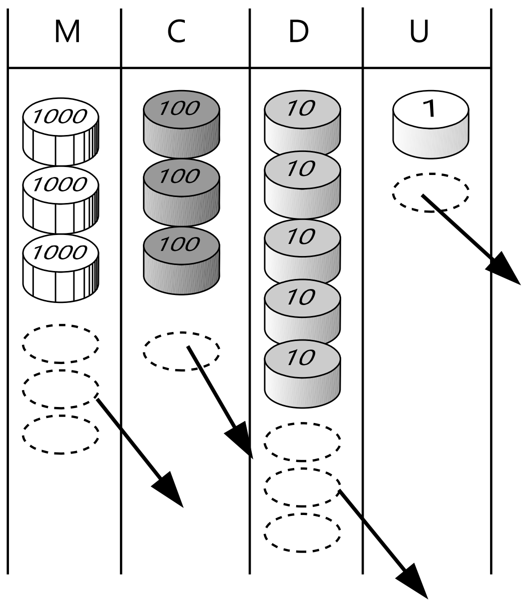
Hacemos las mismas actividades como en la *Unidad 4*, pero ahora con restas.

Restas con "material de canje" en el tablero posicional grande

Representen unas restas con material Base 10, o con las tapas de botellas, o materiales similares, en un tablero posicional grande en una cartulina.

Para representar por ejemplo 6482 – 3131, pongan 6482 sobre el tablero. El 3131 no lo representamos, porque es la cantidad que vamos a *quitar*. Podemos tener anotado este número, o mantenerlo en la mente.
Entonces empezamos a quitar, comenzando desde las unidades: Quitamos 1 unidad, queda 1. Quitamos 3 decenas, quedan 5. Quitamos 1 centena, quedan 3. Quitamos 3 millares, quedan 3. Vemos que el resultado es 3351. *(Dibujo a la derecha.)*

Hagan algunos otros ejemplos de esta manera; todavía sin canje.



Después damos a los niños unas restas escritas en un tablero posicional, y ellos las representan con material concreto. Por ejemplo *(vea página siguiente)*:

M	C	D	U
9	3	5	8
– 5	2	3	6

M	C	D	U
7	7	7	7
– 5	7	3	6

Representar en el ábaco lo que está escrito

Hagamos lo mismo con el ábaco: Damos a los niños una operación escrita en un tablero posicional como los ejemplos de arriba. El niño representa y calcula la operación en el ábaco. (Vea las instrucciones en la *Unidad 3*.) Pueden usar los ejemplos de arriba o inventar otros, pero que todavía no requieran canjes.

Ahora lo escribimos

Escribir lo que representamos en el tablero posicional

Ahora hacemos la actividad anterior "al revés": Representamos primero una resta con material concreto, y después la escribimos en un tablero posicional. Eso se puede hacer de diversas maneras. Por ejemplo:

- Dibujamos un tablero posicional en la pizarra, y los niños escriben allí los números que corresponden a la operación representada con el material.

- Lo mismo, pero colocamos la pizarra horizontalmente sobre la mesa, y colocamos el material sobre el tablero posicional dibujado en la pizarra. Después escribimos los números en el lugar donde está el material.

- Cada niño dibuja en una hoja o en su cuaderno un tablero posicional y escribe los números allí.

Después de efectuar la operación con el material, escribimos también en el tablero posicional las cifras del resultado debajo de la operación.
Hagan primero unos ejemplos que no requieren canje. Por ejemplo:

6744 – 5442,   3398 – 363, 7563 – 4051,   9999 – 3572, ...

Que los niños observen lo que sucede en estas operaciones. Comparando lo que sucede con el material, y lo que sucede con las cifras que anotamos, ellos mismos pueden descubrir que en el tablero posicional se puede restar cifra por cifra.

Escribir lo que representamos en el ábaco

La misma actividad se puede hacer con el ábaco. Solamente tenemos que anotar en el tablero posicional las cifras que corresponden a cada columna del ábaco. Pueden hacer los mismos ejemplos como arriba, o inventar otros (pero todavía sin canje).

Cómo escribir el canje en la resta

Hagamos ahora un ejemplo con canje: 4352 – 1725. Que los niños lo representen con material concreto en el tablero grande, o en el ábaco; y que lo escriban también en un tablero posicional en papel. Efectuamos la operación con el material, y simultáneamente escribimos también en el tablero posicional lo que hacemos.

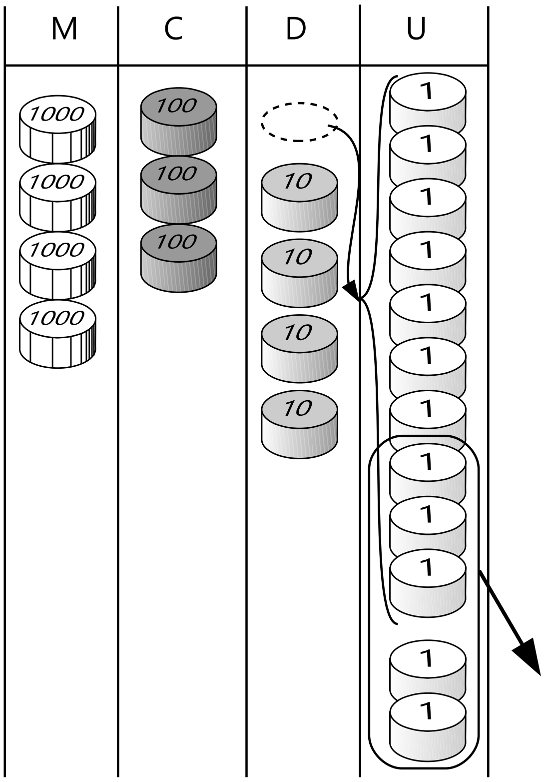
Lo explicaré aquí de acuerdo al procedimiento escolar usual en muchos países de habla hispana. En la sección "*Ampliaciones*" veremos que existe un procedimiento ligeramente diferente, que es más práctico en diversas situaciones.

Comenzamos con las unidades: tenemos que quitar 5 unidades, pero hay solamente 2. Tenemos que "prestarnos" una decena y canjearla por unidades. Con eso tenemos 12 unidades; quitamos 5 y nos quedan 7. (En el ábaco quitamos 2, después hacemos el canje, y después seguimos quitando.) Este 7 podemos anotar como resultado.

M	C	D	U
4	3	-1 5	2
– 1	7	2	5
			7

Pero tenemos ahora una decena menos; eso lo tenemos que anotar también. Escribimos entonces un pequeño "–1" en la columna de las decenas.

Igual como en la suma, no es tan importante a qué altura escribimos este "–1", con tal que sea en la columna de las decenas. *(Vea las notas al respecto en la Unidad 4.)* De la manera como lo practicamos aquí, sería más lógico escribirlo arriba, porque es del número de arriba donde hemos quitado la decena que canjeamos. Pero el caso es diferente en el procedimiento que introduciremos en la sección "*Ampliaciones*", porque allí se emplea un razonamiento distinto.



Ahora pasamos a las decenas. El "–1" nos hace recordar que tenemos una decena menos de lo que está escrito. Lo mismo podemos ver en el material: Tenemos 5 – 1 = 4 decenas. De estas quitamos 2; nos quedan 4 – 2 = 2 decenas como resultado.

En las centenas tenemos 3, pero tenemos que quitar 7. Necesitamos nuevamente un canje: Convertimos un millar en 10 centenas. 13 – 7 = 6, nos sobran como resultado 6 centenas; y tenemos que anotar que nos hemos "prestado" un millar.

M	C	D	U
-1		-1	
4	3	5	2
– 1	7	2	5
2	6	2	7

Finalmente calculamos los millares: Hay 4 – 1 = 3 millares, y de estos tenemos que quitar 1 millar, sobran 3 – 1 = 2 millares.

Si queremos hacer la comprobación con la operación inversa, sumamos 2627 + 1725. Si hemos calculado correctamente, la suma debe ser 4352.

Hagan algunos ejemplos de esta manera, efectuando la operación con material concreto y simultáneamente anotando en un tablero posicional. Por ejemplo:

6471 – 4565, 4047 – 2353, 3777 – 878

Para algunos alumnos puede ser difícil entender cómo escribir una resta que requiere varios canjes sucesivos, como por ejemplo 5005 – 9. No hay suficientes unidades para quitar, y tendríamos que "prestarnos" una decena; pero no hay decenas. Con el material concreto vemos que tenemos que ir hasta los millares para obtener algo que podemos canjear. Nos "prestamos" un millar y lo canjeamos por 10 centenas; una de las centenas se canjea por 10 decenas, y una de estas decenas se canjea por 10 unidades. Este proceso de canjes nos deja entonces con 4 millares, 9 centenas, 9 decenas, y 15 unidades. En el procedimiento escrito podemos representar esto, corrigiendo todos los números:

M	C	D	U
4	9	9	
~~5~~	~~0~~	~~0~~	5
–			9
4	9	9	6

En este momento, esta será la forma más fácil de entender. Más adelante podríamos también en este caso proceder cifra por cifra: Escribimos un "–1" en las decenas como en el primer ejemplo, aunque en realidad no podemos "prestarnos" ninguna decena. Cuando ahora pasamos a las decenas, vemos allí la operación 0 – 1. Entonces sabemos que tenemos que "prestarnos" una centena. Escribimos un "–1" en las centenas y calculamos con 10 decenas: 10 – 1 = 9, como si hubiéramos canjeado una centena (aunque en realidad no había ninguna). Con las centenas hacemos lo mismo. Por fin llegamos a los millares, donde la operación es 5 – 1, y eso lo podemos calcular ahora sin problema.

M	C	D	U
...	-1	-1	
5	0	0	5
–			9
...	...	9	6

Pero puede ser difícil para los niños, calcular de esta manera con cantidades inexistentes. Si no llegan a entenderlo, se equivocarán en el procedimiento. En la sección "*Ampliaciones*" veremos que el procedimiento presentado allí salva esta dificultad de una manera más elegante.

Hoja de trabajo 6.1: *Restas en el tablero posicional*

Esta hoja funciona igual como la ***Hoja 4.1***, vea las instrucciones allí.

Escribirlo sin el tablero posicional

Como último paso, nos ahorramos el trabajo de dibujar un tablero posicional, y escribimos las operaciones directamente en el cuaderno. Como en la suma, usamos las cuadrículas del cuaderno como columnas de un tablero posicional. Escribimos los números ordenadamente, cada cifra en su columna.

	−1			
	4	5	8	6
–		7	3	2
	3	8	5	4

Escribe las siguientes restas ordenadamente de manera vertical (como en el ejemplo arriba) y resuélvelas. Haz las operaciones con material concreto o con el ábaco mientras lo necesitas.

Cuando ya no necesites el material, haz algunas restas puramente por escrito.

Alternativamente, puedes primero pasar a la sección "*Ampliaciones*" y aprender el procedimiento descrito allí, y después puedes resolver las operaciones con ese procedimiento.

a) 5087 – 2745 f) 7000 – 4271

b) 4994 – 996 g) 3854 – 3787

c) 8183 – 7823 h) 4067 – 79

d) 6305 – 787 i) 8848 – 3877

e) 2752 – 1661 j) 5938 – 4873

Ampliaciones

El procedimiento suizo o procedimiento de Euler para la resta

El siguiente procedimiento, un poco diferente, fue descrito por el matemático suizo Leonardo Euler en el siglo 18, en su libro de texto para los principiantes de la Academia de San Petersburgo. *(En aquellos tiempos no se les enseñaba matemática a los niños en la escuela. Normalmente tenían su primer encuentro con la matemática al comenzar su educación superior. Las edades de los ingresantes a la Academia donde enseñaba Euler fluctuaban entre los 10 a 19 años.)* En las escuelas suizas se sigue enseñando el procedimiento de Euler hasta hoy.

Para entender este procedimiento, tenemos que pensar en *complementar* en vez de restar. O sea, cuando nos toca restar 8 – 6, hacemos la operación 6 + ¿? = 8. Eso es una gran ventaja cuando tenemos que restar varios números a la vez, como en este ejemplo:

```
 7503
–1396
–  785
–  948
–2877
```

Si intentamos resolver esto con el procedimiento escolar, fácilmente perderemos la cuenta de cuántas decenas o centenas ya hemos canjeado. Calculando las unidades de este ejemplo: 13 – 6 = 7 (eso fue un canje), 7 – 5 = 2 (aquí no hay canje), 12 – 8 = 4 (un canje), 14 – 7 = 7 (otro canje) – ¿cuántas decenas hemos canjeado?

Euler lo hace desde abajo hacia arriba, *sumando* primero todos los números que deben restarse. Después busca el complemento: 7 + 8 + 5 + 6 + ¿? = 3. Calculando la suma, tenemos: 26 + ¿? = 3. Inmediatamente vemos que tenemos que "prestarnos" 3 decenas para que esto funcione: 26 + **7** = 33.

Otra diferencia en el procedimiento de Euler consiste en la manera de representar el canje. En vez de *restar* las decenas prestadas, él las *suma* a los números que debemos restar:

7	5	0	3
– 1	3	9	6
–	7	8	5
–	9	4	8
– 2	8	7	7
		3	
			7

Representándolo con material concreto: Tendríamos que *quitar* 3 decenas de 7503. (En este caso no se puede hacer eso, porque no hay decenas.) En lugar de eso, *aumentamos* 3 decenas a los números que tenemos que restar.

Esto puede parecer ilógico, pero tiene el mismo efecto sobre el resultado: Restamos 3 decenas más; o sea, *disminuimos* el resultado en 3 decenas. Y si lo hacemos así, nos libramos de la dificultad de tener que "canjear decenas que no están allí".

(Recordarán que en el nivel de Primaria I hicimos una pequeña tarea de investigación acerca de este tema. Allí hemos visto que si restamos *más*, el resultado es *menos*.)

La operación con las decenas es entonces así: *3* + 7 + 4 + 8 + 9 + ¿? = 0. Sumamos, y tenemos 31 + ¿? = 0. Tenemos que prestarnos 4 centenas para que esto funcione: 31 + **9** = 40. El resultado de las decenas es 9, y aumentamos 4 a las centenas que restamos:

7	5	0	3
– 1	3	9	6
–	7	8	5
–	9	4	8
– 2	8	7	7
	4	3	
		9	7

Ahora la operación con las centenas:
4 + 8 + 9 + 7 + 3 + ¿? = 5. Esto llega a ser 31 + **4** = 35. O sea, el resultado de las centenas es 4, y nos "prestamos" 3 millares.

7	5	0	3
– 1	3	9	6
–	7	8	5
–	9	4	8
– 2	8	7	7
3	*4*	*3*	
1	4	9	7

Los millares dan entonces *3* + 2 + 1 + **1** = 7; el resultado de los millares es 1.

Se necesita algún tiempo para acostumbrarse a este procedimiento; pero una vez que se han acostumbrado, verán que tiene varias ventajas:

- Permite restar varios números con una sola operación, y sin perder la cuenta de lo que se "presta" o canjea.

- Evita el problema de tener que "prestarse" algo de donde no hay.

- Usa casi únicamente la operación de la *suma*, la cual es un poco más fácil de manejar que la resta.

Hoja de trabajo 6.2: *Restar varios números a la vez*

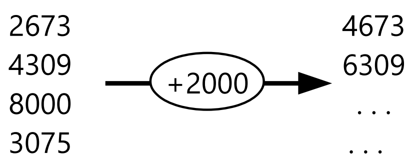
Que cada niño decida cómo quiere resolver estos ejercicios: con material concreto o solamente por escrito; con el procedimiento "usual" o con el procedimiento de Euler que acabamos de introducir.

En esta hoja hay una resta que "no se puede" (o sea, que resultaría en un número negativo). Que los niños se den cuenta de ello por sí mismos.

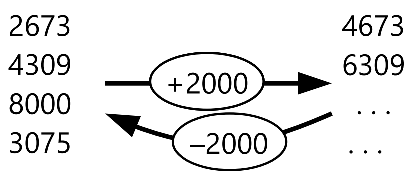
Hoja de trabajo 6.3: *Máquinas de suma y resta*

Esta actividad es conocida desde el nivel de Primaria I, donde hemos representado las operaciones y su operación inversa mediante "máquinas", las que podemos hacer correr "hacia adelante" y "hacia atrás". Ahora que los niños ya tienen una capacidad de abstracción un poco mayor, las hojas de trabajo ya no contienen dibujos de máquinas concretas; las representamos solamente mediante un operador y una flecha.

En el siguiente ejemplo tenemos una máquina que suma 2000. Todo número que entra a la máquina (desde la izquierda), será aumentado en 2000.



Si hacemos correr esta máquina "al revés" (desde la derecha hacia la izquierda), se convierte en una máquina que *resta* 2000, porque la resta es la operación inversa de la suma. Por ejemplo, si el número 4673 entra a la máquina desde la derecha, entonces por la izquierda sale el número 2673.



En las operaciones de esta hoja, que los niños decidan por sí mismos si quieren resolverlas mentalmente o por escrito. Algunas se pueden calcular mentalmente sin dificultad; otras pueden requerir el procedimiento escrito.

Hoja de trabajo 6.4: *Cuadrículas de suma y resta*

Esta actividad amplía el tema de las "máquinas". Tenemos que imaginarnos que al pasar de un cuadro al siguiente, el número del cuadro tiene que pasar por una "máquina" que equivale a una operación determinada. Esta operación depende de la *dirección* en la que nos movemos. Por ejemplo en la cuadrícula **a)**, un paso a la derecha significa que al número se le suma 378, según lo indicado en la "máquina". Esta misma operación debe efectuarse *cada vez* que damos un paso hacia la derecha. Entonces, la fila inferior de esta cuadrícula debe completarse así:

1280	1658	2036	2414

$\xrightarrow{+378}$

De un número al siguiente siempre se aumenta 378.

De manera similar, cada vez que damos un paso hacia arriba tenemos que sumar 293.

El número 3000 en la esquina superior derecha es para comprobar la operación: Si todas las operaciones se hicieron correctamente, en este cuadro se debe llegar a 3000.

En la cuadrícula **b)** tenemos que dar también pasos hacia la izquierda y hacia abajo. Para saber las operaciones que corresponden a estos pasos, tenemos que usar las máquinas "al revés": Si un paso hacia la derecha significa "+155", un paso hacia la izquierda significa la operación inversa, o sea "–155". (Compruébalo. Si calculamos así y ponemos los números, efectivamente un paso hacia la derecha aumentará 155 al número a la izquierda.)

En la cuadrícula **c)** se quiere saber adicionalmente el significado de las "máquinas" dibujadas a la derecha: ¿Qué operación se efectúa al dar un paso hacia la izquierda? ¿Y al dar un paso diagonalmente hacia la izquierda y arriba? Etc.

Hay dos maneras de descubrir estas operaciones:
- Podemos comparar los números de la cuadrícula, y desde allí deducir las operaciones. Si el 6801 está a la izquierda del 5601, ¿con qué operación llegamos del 5601 al 6801? Esta es la operación que corresponde a un paso hacia la izquierda. Y lo mismo para los pasos diagonales.
- Podemos razonar cómo se componen los pasos diagonales a partir de los pasos rectos. Por ejemplo, dar un paso diagonalmente hacia la izquierda y arriba es lo mismo como dar primero un paso hacia la izquierda, y después un paso hacia arriba. (O primero hacia arriba y después hacia la izquierda, da lo mismo.) ¿Cuál operación corresponde a la combinación de estas dos operaciones?

En la cuadrícula **d)** no sabemos lo que hacen las "máquinas", pero tenemos varios números dados dentro de la cuadrícula. Estos números nos permiten, con unos razonamientos, descubrir las operaciones correspondientes. Como en la cuadrícula **c)**, aquí también queremos saber el significado de los pasos en otras direcciones.

La cuadrícula ***e)** es un poco más difícil, porque sabemos solamente las operaciones que corresponden al dar dos pasos a la vez: Subir *dos* cuadros equivale a restar 900. ¿Cuánto tenemos que restar entonces al subir un único cuadro? – Y con un razonamiento similar podemos descubrir también el significado de un paso horizontal.

Problemas de suma y resta

1. El señor Fabián compró un carro por 8247.–. Después de usarlo por algún tiempo, lo vendió por 6899.–. ¿Con cuánto de pérdida lo vendió?

2. Un negocio compra lavadoras en cantidad, a 2472.– cada una. Las vende a 2797.–. ¿Cuánto es su ganancia por cada lavadora vendida?

3. El pico más alto de América es el Aconcagua (6961 m.s.n.m). El cerro más alto del mundo, el monte Everest, mide 1887 metros más. ¿Cuál es entonces su altura?

4. El río más largo del mundo, el Amazonas, mide 7062 km. El río Nilo mide 209 km menos. ¿Cuánto mide entonces?

5. La señora Monsón compró una lavadora a 2797.– y pagó con 3 billetes de mil. ¿Cuánto de cambio debe recibir?

6. Al fin del día hubo 3543.– en la caja de una tienda. Los ingresos del día eran de 1686.–. ¿Cuánto había en la caja en la mañana?

Investigación

Sumar y restar 999

Escribe un número de 4 cifras y súmale 999. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 2682 \\ \underline{+\ 999} \end{array}$$

Haz lo mismo con algunos otros números de 4 cifras. Observa los resultados. ¿Qué propiedad interesante puedes ver? ¿Puedes explicar ***por qué*** sale así?

Calcula ahora unas restas con 999. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 3754 \\ \underline{-\ 999} \end{array}$$

Haz lo mismo con algunos otros números de 4 cifras. Observa los resultados. ¿Qué propiedad interesante puedes ver? ¿Puedes explicar ***por qué*** sale así?

(Si lo has pensado durante varios días y no encuentras ninguna explicación, consulta las pautas en el *Anexo A*.)

¿A dónde vamos desde aquí?

Ahora los niños podrán también intentar los problemas de restas en las operaciones incompletas *(Unidad 75).*

Unidad 7 - Sumas y restas con unidades de medida

Prerrequisitos:

- Suma y resta cifra por cifra *(Unidades 4, 6)*.
- Conversión de medidas en el sistema decimal.

Materiales necesarios:

- Cinta métrica.
- Balanza.
- Litrera.

Para los educadores

Las actividades de esta Unidad amplían las aplicaciones de la suma y resta en vertical, cifra por cifra. Al combinar este procedimiento con la conversión de medidas en el sistema decimal, ya estamos haciendo una primera preparación para el cálculo con decimales; pero todavía no introducimos este tema formalmente.

TALLER

Sumas y restas en la vida diaria

Busque una situación donde es necesario sumar o restar medidas que contienen metros con centímetros, kilogramos con gramos, o litros con mililitros. Por ejemplo si queremos medir el largo de la casa por dentro (puede ser que la pared exterior no sea accesible), y tenemos que medir dos habitaciones adyacentes con sus paredes, podrían salir las siguientes medidas:

Grosor de la pared exterior 30 cm, sala 6 m 56 cm, pared interior 22 cm, cocina 3 m 88 cm, pared exterior 30 cm.

¿Cómo sumamos todas estas medidas de manera práctica?

Podríamos sumarlo mentalmente, metros aparte y centímetros aparte. Pero con estos números, eso es bastante complicado. Ya que sabemos ahora sumar en vertical, cifra por cifra, ¿podemos aplicar este procedimiento a estas medidas?

Una primera sugerencia consistiría en convertir todo en centímetros. Así podemos sumar todo como números "normales" y no necesitamos preocuparnos por las unidades de medida. Después lo convertimos de regreso a metros y centímetros.

Pero la misma suma se puede realizar también en metros, si escribimos las medidas así:
0.30 m + 6.56 m + 0.22 m + 3.88 m + 0.30 m.

Solamente tenemos que fijarnos que estemos siempre sumando unidades con unidades, decenas con decenas, etc; y centímetros con centímetros. Esto significa que tenemos que escribir los números de tal manera que los puntos separadores estén todos en la misma columna. Podemos hacer un tablero posicional que contiene los metros y los centímetros. Si comparamos este procedimiento con el otro (convirtiendo en centímetros), vemos que efectivamente es lo mismo:

Metros		*cm*	
D	U	D	U
		3	0
+	6.	5	6
+		2	2
+	3.	8	8
+		3	0
1	2	1	
1	1.	2	6

Centímetros			
M	C	D	U
		3	0
+	6	5	6
+		2	2
+	3	8	8
+		3	0
1	2	1	
1	1	2	6

Esto nos muestra cuán práctico es el sistema métrico a la hora de realizar cálculos en el sistema decimal. Nos permite convertir unidades de medida muy fácilmente, usando el tablero posicional. También nos permite efectuar muchas operaciones sin la necesidad de hacer ninguna conversión de las medidas. Una centena de centímetros es igual a una unidad de metros. Por eso podemos escribir las mismas cifras en las mismas posiciones del tablero. Solamente el significado de las columnas cambia, dependiendo de si queremos calcular en metros o en centímetros.

Podemos aplicar cálculos como estos en situaciones como las siguientes:

a) Una olla pesa 640 g. Echamos leche a la olla hasta que su peso total sea de 2 kg. ¿Cuánto de leche contiene la olla ahora? (Háganlo con sus propias ollas y sus propias medidas.)

b) Una receta de torta pide los siguientes ingredientes: 450 g de harina, medio kilo de chocolate, 800 g de azúcar, 370 g de mantequilla, 4 huevos. ¿Qué cantidad de torta va a salir? – Hagan esto la próxima vez que preparan una torta, con las medidas de la receta que están usando. (Antes de poder calcular, tendremos que pesar los huevos...)

c) Queremos llenar tres termos con agua caliente: uno de 1.800 litros y dos de 1.250 litros. ¿Qué cantidad de agua tenemos que calentar?

d) Al ir de compras, podemos calcular la suma de los precios y el cambio, calculando en unidades y centavos.

Busquen más situaciones similares y hagan los cálculos correspondientes.

Llevar la cuenta de ingresos y egresos

Es bueno mantener el control sobre tu dinero, para saber cuánto tienes y en qué lo estás gastando. Una contabilidad muy sencilla consiste en anotar tus ingresos y tus egresos (gastos) en columnas separadas. Alista una hoja cuadriculada, o una página de un cuaderno. Haz columnas para "Fecha", "Concepto", "Ingresos" y "Egresos", como en el ejemplo. Al final de la hoja deja dos líneas para "Total" y "Saldo". Cada vez que recibes o gastas dinero, anótalo. El dinero que recibes se anota en la columna "Ingresos", y el dinero que gastas se anota en "Egresos".

Fecha	Concepto	Ingresos	Egresos
01-08	Venta de galletas	12.45	
06-08	Lápiz		1.20
06-08	Canicas		2.50
08-08	Por cortar el césped	5.–	
12-08	Ofrenda		4.–
13-08	Regalo para Elena		5.80
15-08	Venta de galletas	14.20	
18-08	Parque de juegos		6.75
		1	2
TOTAL		31.65	20.25

En la fila "Total" escribimos las sumas de los montos en las dos columnas. Para poder sumarlo bien, los puntos que separan los centavos deben estar exactamente uno debajo del otro. Así puedes sumar verticalmente centavos con centavos, unidades con unidades, etc. Si tienes que hacer un "canje" de centavos a unidades, eso funciona como siempre. En el ejemplo arriba, las decenas de centavos en los egresos suman 22 (o sea, 220 centavos). 200 centavos se canjean por 2 unidades; esos se anotan en la columna de las unidades. (Si eso no te convence, hazlo con monedas en un tablero posicional grande. Tendrás que añadir dos columnas para centavos a la derecha de las unidades.)

Nota: Si la moneda de su país no usa centavos, se puede practicar el mismo principio sumando medidas en metros y centímetros: Sumen verticalmente por ejemplo 4.55 m + 3.75 m. Las decenas de centímetros sumarán 13, o sea 130 cm. De eso, 100 cm se convierten en un metro, así que se escribe el 1 que se "lleva" en la columna de los metros. O sea, si las cifras están escritas en su lugar correcto, los canjes funcionan igual como al sumar o restar números "normales".

Calcular y controlar el saldo:

El saldo es lo que te queda de tu dinero después de todos los gastos. Entonces, el saldo es la diferencia entre los ingresos y los egresos. En el caso normal y si eres honesto, no puedes tener más egresos que ingresos, porque no puedes haber gastado dinero que no es tuyo. Entonces: Ingresos – Egresos = Saldo.

	31.65
–	20.25
Saldo:	11.40

Cuando continúas a la siguiente página, escribes en la primera fila en "Ingresos" el saldo de la página anterior. Eso es como si empezaras con una caja vacía, y en este momento pones dentro de la caja el dinero que tienes; por eso se anota como "Ingreso". *(Vea página siguiente.)*

Fecha	Concepto	Ingresos	Egresos
20-08	Saldo anterior	11.40	

En el momento de calcular el saldo, éste debe ser igual a la cantidad de dinero que tienes. Haz entonces un control si tu contabilidad es correcta: Cuenta el dinero que tienes. Si no es igual al saldo que has calculado, entonces hay un error. Quizás has calculado mal. O quizás había algún ingreso o egreso que olvidaste anotar, o que has anotado mal. Por ejemplo, si alguna vez te compraste chicles por 50 centavos y no lo anotaste, entonces tendrás 50 centavos menos que el saldo que calculaste.

Ampliaciones

Administrar un negocio propio

En vez de dar propinas a los niños, es una experiencia mucho más valiosa si les ayudamos a levantar un pequeño negocio para generar sus propios ingresos. Así ellos aprenden que hay una relación entre su propio esfuerzo y las ganancias que hacen; o sea, que "el obrero es digno de su sueldo". Administrando un negocio pueden aprender a ser responsables, diligentes, honestos; a hacer contactos y comunicar con clientes; también a valorar el trabajo de otras personas.

Por ejemplo, los niños podrían fabricar y vender galletas, postres, pulseras, adornos, tarjetas, cajitas de regalo, o algún otro trabajito manual que saben hacer.
También podrían ofrecer pequeños servicios a los vecinos, a cambio de una propina, según lo que saben hacer: pasear el perro de alguien, regar plantas, etc.
Si ustedes como padres tienen un negocio propio, quizás hay allí algún trabajo pequeño que podrían encargar a los niños, a cambio de un pequeño sueldo.
Puede ser necesario probar diversas alternativas, hasta encontrar una que resulte bien para sus niños.

Obviamente, se debe dar a los niños la libertad de administrar ellos mismos las ganancias que logran con sus negocios, y de decidir en qué lo usarán; pero también es bueno animarlos a compartir con personas necesitadas que puedan conocer.

Para no incentivar la codicia, enseñe a los niños también a ser generosos, y a realizar servicios sin pago por amor al prójimo, por ejemplo si tienen vecinos enfermos o necesitados. También las responsabilidades normales del hogar, tales como ayudar en la limpieza y el orden de la casa, o atender a los animales domésticos, no deben tener pago, para no incentivar una mentalidad codiciosa en los niños. – Por el otro lado, podemos ofrecer un pago a los niños por realizar servicios "extra" en la casa, que no son parte de sus responsabilidades diarias normales.

Llevar la contabilidad del negocio

Para tu negocio puedes llevar una contabilidad, de la misma manera como para tus gastos personales. En los "Ingresos" anotas todo lo que ganas por la venta de tus productos, o como pago por tus servicios. En "Egresos" anotas todos los gastos por lo que necesitas para el negocio. (Por ejemplo si fabricas galletas, tienes que comprar los ingredientes.) En el caso de un negocio, el saldo que queda es tu *ganancia*.

Hacer un presupuesto

Un presupuesto es una estimación que haces de antemano, acerca de los ingresos y gastos que vas a tener. Por ejemplo, Juana va a vender galletas. Este es su presupuesto:

Presupuesto para 1 kg de galletas

	Ingresos	Egresos
Harina 400g		2.20
Mantequilla 200g		3.–
Azúcar 250g		1.–
2 huevos		–.80
Condimentos		–.20
Energía para hornear		–.70
Ingresos de la venta	14.–	
TOTAL	14.–	7.90
Ganancia	6.10	

Pregunta capciosa:

¿Cuánto son mil gramos más cien centímetros?

El presupuesto te ayuda a fijar un precio razonable para tus productos: que no sea demasiado caro, pero que te permita hacer ganancia.

Matemática divina

El administrador de un negocio tiene que ser fiel y honesto. Tiene que llevar correctamente la cuenta del dinero y de los productos que hay.

Todos somos administradores de las propiedades de Dios, porque él es el verdadero propietario de todo lo que existe. Algún día tendremos que rendirle cuentas de lo que hicimos con sus propiedades que él puso en nuestras manos.

¿A dónde vamos desde aquí?

La *Unidad 13* continúa con ideas y problemas acerca de los cálculos necesarios para administrar un pequeño negocio. Pero muchos de esos ejemplos requieren el dominio de la multiplicación y división con números mayores.

Unidad 8 - El sistema decimal (II)

Viaje de exploración matemática

Prerrequisitos:

- La primera parte de este viaje de exploración *(Unidad 2)*.
- Sumas verticales, cifra por cifra *(Unidad 4)*.
- Es ventajoso si los alumnos ya tienen entendimiento de la ley distributiva. De otro modo, habrá que introducirla con este "viaje".

Materiales necesarios:

- Material "de canje" en el sistema decimal (Material Base 10; las tapas de botellas; o similares).

Investigación

Multiplicaciones en el sistema decimal

En la primera parte de este viaje hemos visto que es fácil multiplicar por 10, por 100 y por 1000. ¿Lo recuerdas? ¿Puedes rápidamente decir o escribir los resultados de estas multiplicaciones?

6 x 100, 1000 x 7, 256 x 10, 100 x 84

Si te parece difícil, repasa la *Unidad 2, Tarea 6*.

Tarea 1. ¿Cómo puedes usar las leyes que encontraste, para multiplicar fácilmente por números como 60, 300, 2000?
Por ejemplo 5 x 300, 2000 x 4, 800 x 7, ...
Inventa y calcula algunos otros ejemplos.

Vamos a ver ahora cómo podemos usar el sistema decimal para multiplicaciones más complicadas. Por ejemplo 3 x 3213. Representa el número 3213 con un material concreto. Multiplícalo por 3. O sea, pones 3 veces la cantidad de todo lo que tienes. ¿Cuánto es el resultado?

Observa ahora cada parte por separado: las unidades aparte, las decenas aparte, etc. Podemos escribir el número 3213 como una suma: 3213 = 3000 + 200 + 10 + 3.

Escribimos estas partes por separado en un tablero posicional, y multiplicamos cada línea por 3:

M	C	D	U		M	C	D	U
3	0	0	0		9	0	0	0
+	2	0	0	**x 3 =**	+	6	0	0
+		1	0		+		3	0
+			3		+			9

Observa cada línea. Ves que cada línea contiene una multiplicación "fácil", como las que ya conoces: 3000 x 3 = 9000, 200 x 3 = 600, etc.

Al final solamente tenemos que sumar todo: 9000 + 600 + 30 + 9 = 9639.

Nota: La *ley distributiva* nos dice que podemos multiplicar estos números grandes parte por parte:

(3000+200+10+3) x 3

= (3000x3) + (200x3) + (10x3) + (3x3).

Cada parte del material se ha multiplicado por 3: Los millares se multiplicaron por 3, las centenas se multiplicaron por 3, también las decenas y las unidades. Al final lo sumamos todo.

Tarea 2.
a) Examina, representa y escribe de la misma manera la multiplicación 1624 x 4. Al momento de decir cuánto es el resultado, encontrarás una dificultad adicional que no tuvimos en el ejemplo anterior. ¿Cuál es esa dificultad? ¿Cómo la resuelves?

b) Inventa unos ejemplos propios de multiplicaciones, y resuélvelas de la misma manera.

Tarea 3.
a) Representa el número 1600 con centenas (sin usar un millar). Reparte estas centenas en 4 partes iguales. ¿Cuánto vale cada parte? Escribe la operación que hiciste.

b) ¿Cómo puedes resolver fácilmente estas divisiones?
5400 ÷ 6, 6000 ÷ 3, 3200 ÷ 8, 3000 ÷ 5 ?

c) ¿Puedes calcular 3700 ÷ 7 de la misma manera "fácil"? ¿Cómo tienen que ser los números para que la división sea "fácil", como las de la pregunta b)? ¿Qué condición debe cumplirse?

Divisiones en el sistema decimal

¿Recuerdas también cómo puedes fácilmente dividir entre 10, entre 100 y entre 1000? Pruébalo con las siguientes:

300 ÷ 100, 4570 ÷ 10, 6000 ÷ 1000, 5200 ÷ 100.

Si te parece difícil, repasa la *Unidad 2, Tareas 6 y 7*.

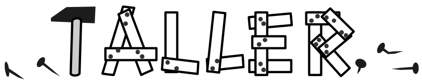
Tarea 4. ¿Cómo puedes usar las leyes que encontraste, para dividir fácilmente entre números como 40, 200, 3000?
Por ejemplo: 1600 ÷ 200, 9000 ÷ 3000, 8000 ÷ 400, etc.

Inventa y calcula algunos otros ejemplos.

Unidad 9 - Multiplicación mental y con material concreto

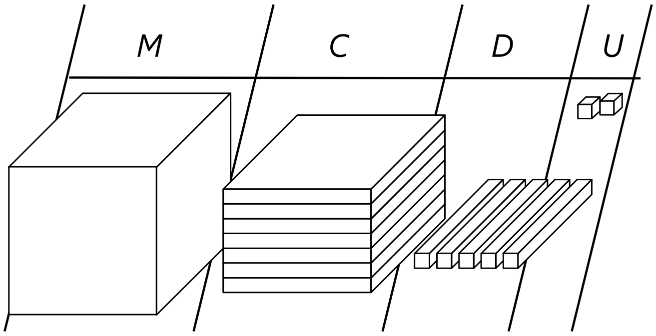
Prerrequisitos:
- Números hasta 10'000.
- Ley distributiva.
- Es ventajoso entender las propiedades del sistema decimal en cuanto a la multiplicación *(Unidad 8)*.

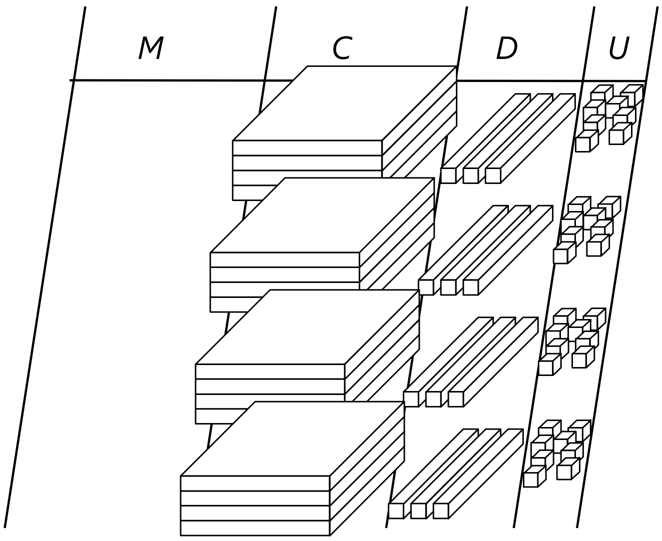
Materiales necesarios:
- Material de canje para el sistema decimal (Material Base 10; tapas de botellas; o similares).
- Tablero posicional grande en cartulina.
- Ábaco.



Multiplicación con material Base 10

Representen con material Base 10 un número, por ejemplo 438. Multiplicamos este número por 4. Esto significa que tenemos que colocar 4 veces la cantidad de todo lo que hay: 4 veces 4 centenas, 4 veces 3 decenas, 4 veces 8 unidades. Háganlo de preferencia en un tablero posicional grande, para que todo sea



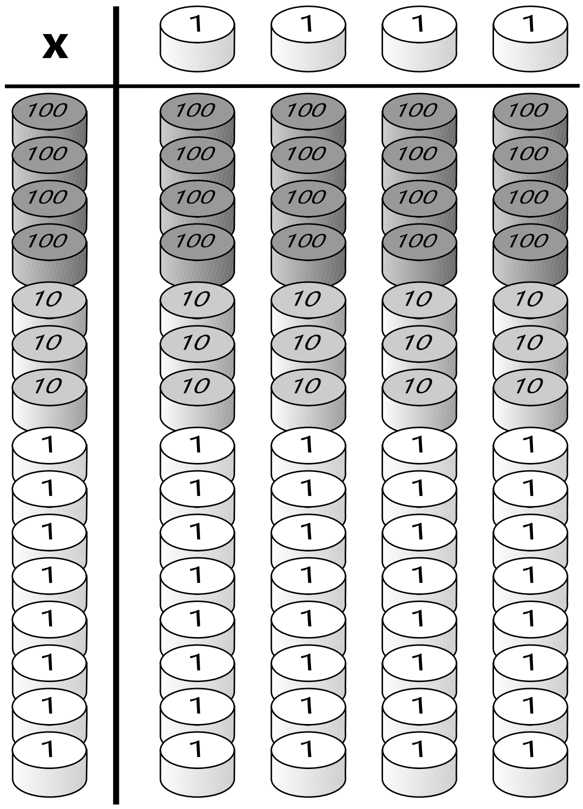


Ahora, si queremos saber cuánto vale este resultado, tenemos que hacer unos canjes. Tenemos 32 unidades; 30 de estas podemos canjear por decenas. Tenemos ahora 12 + 3 = 15 decenas. 10 de estas podemos canjear por una centena. Tenemos 16 + 1 = 17 centenas; 10 de estas se convierten en un millar. *(Vea imagen siguiente.)*

Ahora podemos ver que el resultado es 1752.

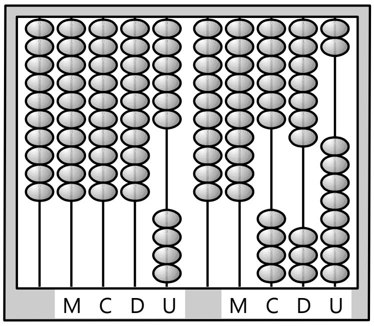
Inventen otros ejemplos de este tipo.

Lo mismo podemos hacer con las tapas de botellas. Representamos la multiplicación en forma de un rectángulo. Afuera de las líneas gruesas están los factores; adentro está el rectángulo que representa el producto. Aquí también, si queremos saber cuánto vale el resultado, tenemos que hacer los canjes correspondientes.

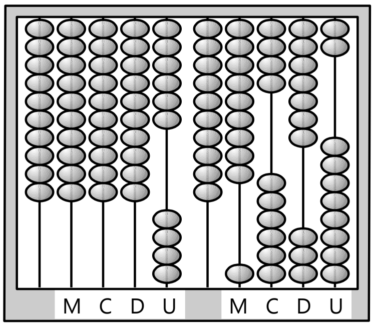


Multiplicación en el ábaco

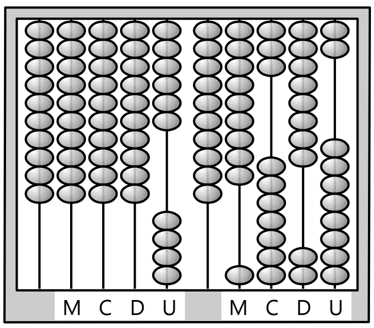
Hacemos lo mismo en el ábaco: Representamos el número 438. Como ayuda para la memoria, podemos también representar el otro factor (4) en la mitad izquierda del ábaco.



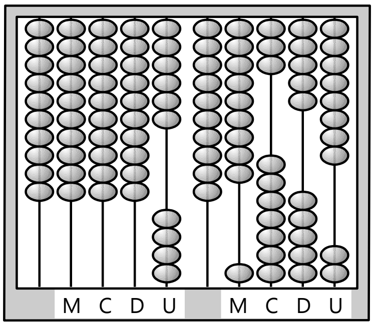
Empezamos con las centenas. Tenemos que hacer las multiplicaciones individuales en nuestra mente: 4 x 4 = 16, o sea, el resultado de las centenas es 16. *Remplazamos* las 4 centenas que están aquí, por 16 centenas. El canje también tenemos que hacer en nuestra mente: eso es 1 millar y 6 centenas.



Ahora multiplicamos las decenas: 3 x 4 = 12; eso es 1 centena y 2 decenas. Remplazamos las decenas que están aquí por las 2 decenas del resultado. La centena del resultado *añadimos* a las que ya están aquí.
Este paso puede ser un poco difícil al inicio. No debemos confundir el *remplazar* con el *añadir*. Lo que es parte del factor inicial (438) tenemos que remplazar por el resultado, porque el resultado no debe sumarse otra vez al factor inicial. Por eso tienen que desaparecer las 3 decenas que había allí, y deben quedar solamente las 2 que pertenecen al resultado. Pero las 6 centenas que están aquí, ya son parte del resultado, por eso no debemos quitarlas; solamente *añadimos* la centena adicional que resulta del canje.



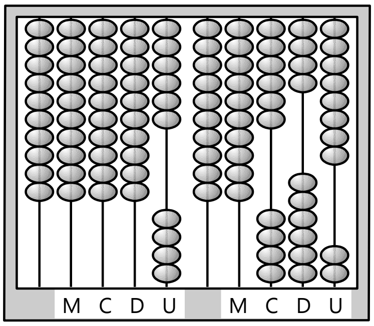
Por fin multiplicamos las unidades: 8 x 4 = 32, o sea 3 decenas y 2 unidades. Añadimos las 3 decenas a las que ya están aquí (porque pertenecen al resultado); y remplazamos las unidades que están aquí por las 2 unidades del resultado. Resulta 1752:



¿Y si comenzamos por las unidades?

Ahora podemos preguntarnos por qué comenzamos a la izquierda, y no a la derecha como en el procedimiento escrito. Examinemos qué pasa si comenzamos por la derecha:

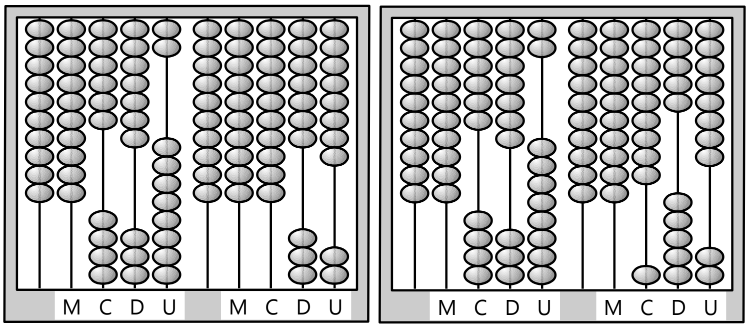
Multiplicamos las unidades, 8 x 4 = 32. Añadimos las 3 decenas a las que están aquí, y remplazamos las unidades por las 2 unidades del resultado.



Ahora tenemos 6 decenas: 6 x 4 = 24, añadimos 2 centenas a las que están aquí, y ... ¿remplazamos las decenas que están aquí por las 4 del resultado? Pero aquí ya hemos puesto unas decenas que pertenecen al resultado, y vamos a perder esas. Entonces ¿*añadimos* las 4 decenas a las que están aquí? Pero tenemos aquí también unas decenas que son parte del factor original ... y si lo pensamos bien, nuestra multiplicación ya estaba mal desde el inicio. Hemos comenzado con 438, entonces deberíamos multiplicar 3 decenas y no 6. Pero ya les hemos añadido las 3 decenas que resultaron del canje de las unidades, y con eso hemos malogrado nuestro factor original. Por eso no vamos a llegar al resultado correcto si lo hacemos de esta manera.
Cuando aprendamos el procedimiento por escrito *(Unidad 10)*, tendremos que acordarnos de este error, porque es algo que nos puede pasar también en el procedimiento escrito, si no tenemos cuidado.

Una forma alternativa de hacerlo

(y donde sí podemos comenzar por las unidades):



Si el "remplazar y añadir" les causa mucha dificultad, pueden hacerlo de esta otra manera:

Representamos el 438 en la mitad *izquierda* del ábaco, para ayudar a nuestra memoria, y comenzamos con la mitad derecha en cero. Construimos el producto paso por paso en la mitad derecha del ábaco. Tenemos que recordar en la memoria que estamos multiplicando por 4. Con este procedimiento podemos empezar por la izquierda o por la derecha, como queremos, porque en este caso solamente añadimos y nunca remplazamos. (No hay necesidad de remplazar nada, porque la representación del factor original nunca estaba aquí.) Por lo demás, las multiplicaciones y los canjes se hacen igual como en el primer procedimiento.

La desventaja de este método es que deja de funcionar cuando tenemos factores tan grandes que ya no caben en una mitad del ábaco. A no ser que mantengamos ambos factores en la memoria.

Relación entre estos métodos y el tablero posicional

Si hicieron la *Unidad 8*, exploren la relación entre estas operaciones con material concreto, y las operaciones que escribimos en el tablero posicional en la *Unidad 8, Tarea 2*. Hagan algunos ejemplos adicionales con material concreto (Base 10, tapas de botellas, o ábaco), y anoten en un tablero posicional lo que están haciendo, de la misma manera como en la *Unidad 8*.

Hagámoslo en la mente

Una multiplicación como 438 x 4 sería bastante difícil de calcular mentalmente. Si unos niños quieren hacerlo, que lo hagan; pero no lo vamos exigir de los que no pueden o no quieren.

Por el otro lado, una multiplicación como 307 x 8 no presenta la misma dificultad, porque no requiere "llevar" nada. Tenemos como resultado 24 centenas y 56 unidades, eso es 2456. Multiplicaciones como ésta se pueden resolver mentalmente sin mayores esfuerzos. (Los niños que dificultan en entenderlo, que lo hagan primero con material concreto.) Hagan entonces unos ejemplos de este tipo:
209 x 7, 808 x 9, 4008 x 2, 3090 x 3, ...

También pueden practicar con las tarjetas de la ***Hoja de trabajo 9.1*** (primera mitad).

El principio matemático detrás de estas multiplicaciones es la ley distributiva:

$$\begin{aligned} 307 \times 8 &= (300+7) \times 8 = (300 \times 8) + (7 \times 8) \\ &= 2400+56 = 2456 \end{aligned}$$

También esta multiplicación no es tan difícil: 2313 x 3. Aunque requiere cuatro multiplicaciones parciales; pero no involucra ningún canje, y por eso se puede ver inmediatamente que el resultado es 6939. Hagan también unos ejemplos de este tipo:

1202 x 4, 4133 x 2, 613 x 3, 711 x 6, ...

(Las dos últimas requieren canjear centenas por millares; pero no son más difíciles que las otras, porque no hay otros millares que interfieren.)

Analizando estos ejemplos, quizás los niños descubren por sí mismos que se puede multiplicar cifra por cifra, como lo haremos en la siguiente Unidad.

Ampliaciones

Arte matemático: Pintamos una tabla de multiplicación grande

Llenen una tabla de multiplicación grande, hasta 20 x 20, con sus resultados correspondientes.

Si varios niños participan en el proyecto, pueden repartir el trabajo: Cada niño llena una parte de la tabla en un papel separado, y después pegan todas las partes juntas

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	...
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	...	
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	...			
5	5	10	15	20	25	30	35	40	...							
...								...								

para formar una tabla grande. La ***Hoja de trabajo 9.2*** contiene una tabla así, repartida en ocho piezas que se pueden cortar y distribuir entre los niños. Repartan las piezas según la capacidad de cada niño: las partes fáciles para los niños que recién están aprendiendo las tablas de multiplicación, y las partes difíciles para los más avanzados.

Quizás los niños se darán cuenta de que no es necesario calcular cada multiplicación: se puede avanzar con sumas sucesivas. Por ejemplo, para calcular los números de la tabla del 17 desde 17x11 hasta 17x20, podemos calcular la primera multiplicación (17x11=187), y desde allí sucesivamente sumar 17 hasta llegar a 17x20.

Cuando la tabla está completa, pintamos cada cuadro según su rango numérico. Por ejemplo así:

Los cuadros que contienen un número de 1 a 50, con amarillo;
de 51 a 100, con anaranjado;
de 101 a 150, con rojo;
de 151 a 200, con violeta;
de 201 a 250, con azul;
de 251 a 300, con celeste;
de 301 a 350, con verde claro;
de 351 a 400, con verde oscuro.

Saldrá un patrón interesante.

Si tienen perseverancia, pueden hacer lo mismo con una tabla hasta 30 x 30 o aun más allá, usando para cada número un cuadradito de una hoja de papel cuadriculado. La obra de arte saldrá más hermosa cuando se usan cuadrados pequeños, y los números se escriben suavemente con lápiz para que no se noten mucho.

Problemas con multiplicaciones

1. Si una piña pesa 1.300 kg, ¿cuánto pesan 5 de estas piñas?

2. Los pasos de Tania miden 60 cm. Con 140 pasos llega hasta la casa de su amiga. ¿Qué distancia es eso en metros?

3. El papá de Sergio camina cada mañana 670 m a su oficina, y en la tarde el mismo camino de regreso. En una semana (5 días de trabajo), ¿cuántos kilómetros y metros camina de esta manera?

4. A una torre se sube por 150 gradas, de 24 cm de altura. ¿Cuál es la altura de la torre?

Matemática divina

La multiplicación como bendición de Dios

Cuando Dios creó el mundo, bendijo a los animales y les dijo: “Sean fértiles y multiplíquense, y llenen las aguas y la tierra.” (Génesis 1:22). Lo mismo dijo a los hombres (Génesis 1:28).

También al pueblo de Israel dijo que se iban a multiplicar, si hacían lo recto según los mandamientos de Dios:

"Multiplicaré tanto tu linaje, que no se podrá contar a causa de la muchedumbre." (Génesis 16:10)
"Cuiden de poner por obra todo mandamiento que yo les ordeno hoy, para que vivan, y sean multiplicados ..." (Deuteronomio 8:1)

Dios quiere que se multiplique lo bueno.

¿A dónde vamos desde aquí?

Esta Unidad fue una preparación para la siguiente, donde introduciremos el procedimiento escrito. Si los niños dificultaron en entender, quizás tendrán que repasar antes la ley distributiva, con las actividades correspondientes del nivel de Primaria I.

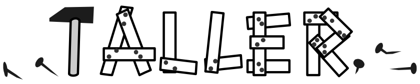
Unidad 10 - Multiplicación cifra por cifra

Prerrequisitos:
- El sistema decimal II *(Unidad 8)*, o Multiplicación mental *(Unidad 9)* – por lo menos una de las dos.

Materiales necesarios:
- Material de canje para el sistema decimal (Material Base 10; tapas de botellas; o similares).
- Ábaco.
- Dado.

Para los educadores

Las Unidades anteriores (8 y 9) pusieron la base para el entendimiento del procedimiento escrito de la multiplicación cifra por cifra. Este entendimiento es esencial para que los niños aprendan no solamente un procedimiento mecanizado, sino que lo usen *sabiendo lo que hacen*. Desde el trasfondo de las Unidades anteriores, podrán entender que el procedimiento escrito es simplemente una notación abreviada de lo que hicimos en el tablero posicional *(Unidad 8)* y con el material concreto *(Unidad 9)*.



Hacer y escribir

Volvamos a hacer unas multiplicaciones como en las unidades anteriores (8 y 9). Pero ahora aprenderemos una manera más corta de escribirlo.

Analicemos el siguiente ejemplo de la *Unidad 8*:

M	C	D	U		M	C	D	U
3	0	0	0		9	0	0	0
+	2	0	0		+	6	0	0
+		1	0	**x 3 =**	+		3	0
+			3		+			9

Podemos ahorrarnos los muchos ceros, y escribir todas las partes juntas en una única línea:

M	C	D	U	
3	2	1	3	x 3
9	6	3	6	

Representen esta multiplicación también con material Base 10 en un tablero posicional grande, o en el ábaco. Observen lo que pasa, y compárenlo con la operación escrita arriba.

Este ejemplo fue fácil, porque no había que "llevar" nada. ¿Cómo lo hacemos cuando hay canjes de una columna a otra? – Veamos el siguiente ejemplo:

M	C	D	U		M	C	D	U
1	0	0	0		7	0	0	0
+	3	0	0		+2	1	0	0
+		4	0	**x 7 =**	+	2	8	0
+			6		+		4	2
						1		
1	3	4	6		9	4	2	2

Si queremos escribir esto en una sola línea, tenemos que escribir los canjes como números pequeños que se "llevan":

M	C	D	U	
1	3	4	6	x 7
^{2}9	^{3}4	^{4}2	2	

El razonamiento es el siguiente:

6 x 7 = 42, escribo 2 unidades en el resultado y "llevo" 4 decenas. Escribimos entonces un 4 pequeño en la columna de las decenas.
Ahora multiplicamos 4 x 7 = 28, y añadimos las 4 decenas que tenemos del canje: 28 + 4 = 32, escribimos 2 decenas en el resultado y un 3 pequeño en la columna de las centenas.

Multiplicamos las centenas: 3 x 7 = 21, más las 3 centenas del canje anterior, son 24 centenas. Escribimos 4 en el resultado y "llevamos" 2 millares.
Por fin multiplicamos los millares: 1 x 7 = 7, más 2 son 9.

Representen también esta multiplicación con material Base 10 en un tablero posicional grande, o en el ábaco. Observen lo que pasa, y compárenlo con la operación escrita arriba.

Consejo para evitar un error común

Como en la suma y resta, por principio no importa a qué altura escribimos los números pequeños que "llevamos", con tal que estén en la columna correcta. Sin embargo, yo prefiero escribirlos *abajo*, en la línea del resultado, por la siguiente razón:
Estos números se suman al resultado; *no al factor que multiplicamos*. Si los escribimos arriba, se nos podría ocurrir hacer lo siguiente:

M	C	D	U	
^{5}1	^{5}3	^{4}4	6	x7
...	6	6	2	

7 x 6 = 42, escribo 2 en el resultado y "llevo" 4 decenas.

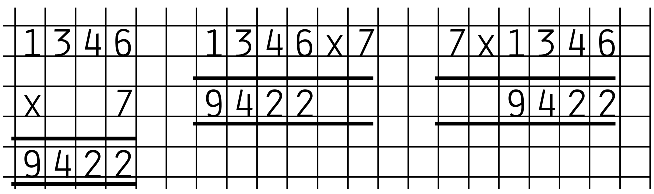
Ahora tengo 4 + 4 = 8 decenas; multiplico 8 x 7 = 56, escribo 6 decenas en el resultado y "llevo" 5 centenas. Tengo 3 + 5 = 8 centenas; multiplico 8 x 7 = 56, ...

¿Se dan cuenta de lo que está andando mal aquí? Este es el mismo error como el que ocurrió con el ábaco cuando multiplicamos comenzando al lado derecho. *(Vea Unidad 9.)* Si observamos el tablero posicional completo (la forma "más larga" de escribir esta multiplicación), vemos inmediatamente que los números que "llevamos", no tienen nada en absoluto que ver con el factor 1346 que multiplicamos. Se suman *únicamente al resultado*.

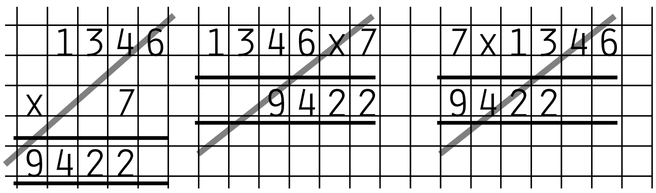
Para evitar el error que hemos visto, prefiero anotar lo que se "lleva" *abajo*, junto con el resultado.

Nota acerca de la notación:

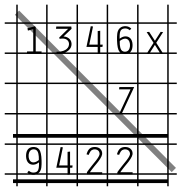
Existen diversas formas de anotar las multiplicaciones. Muchos escriben el segundo factor debajo del primero *(el primer ejemplo abajo)*. Otros prefieren escribirlo después del primero, como lo hemos escrito siempre en las multiplicaciones que se resuelven mentalmente *(segundo ejemplo)*. También se puede escribirlo adelante *(tercer ejemplo)*. Lo esencial es que cada cifra del resultado se encuentre en la columna correcta, según su valor posicional. Entonces, las tres formas siguientes son todas correctas, según los principios matemáticos:



En cambio, no sería correcto escribir un número de tal manera que su cifra de unidades coincida con la columna de decenas de otro número, o vice versa. Por tanto, las siguientes formas son equivocadas y causan confusión:



También es incorrecto asociar un signo con un número al que no pertenece, o escribir un signo sin que le siga un número. Los signos se escriben siempre *delante* del número al que se refieren. Por tanto, la notación siguiente también es equivocada, y causa confusión respecto al significado de los signos:



Ejemplos al azar

Inventen más ejemplos y resuélvanlos, para practicar este procedimiento. También pueden dejar que los dados les provean ejemplos: Tiren un dado tres veces. Anoten los puntajes en su orden, para obtener un número de tres cifras. Tiren el dado una vez más. A este puntaje sumen 3 para obtener el segundo factor.

Por ejemplo: Tiramos 2, 5, 3, entonces nuestro número es 253. Después tiramos 4, le sumamos 3: 4+3=7, este es el segundo factor. Tenemos que multiplicar entonces 253 x 7.

Para pensar: ¿Cuál es el mayor resultado que podemos obtener de esta manera?

Ampliaciones

Ejercicios para el cuaderno

De los ejercicios siguientes, haz tantos como necesitas para estar seguro en la multiplicación por escrito. Cópialos al cuaderno y resuelve. Recuerda escribir las cifras ordenadamente en la cuadrícula.

a) 2321 x 4	g) 786 x 2	m) 1193 x 3
b) 3183 x 3	h) 888 x 8	n) 2469 x 4
c) 4096 x 2	i) 384 x 9	ñ) 727 x 9
d) 1666 x 6	j) 1287 x 7	o) 999 x 8
e) 1473 x 5	k) 875 x 8	p) 1334 x 6
f) 2734 x 3	l) 1578 x 5	q) 776 x 7

Problemas

1. Una imprenta imprimió 1250 ejemplares de una revista que consiste en 5 hojas. ¿Cuántas hojas se imprimieron en total?

2. Una oficina compró 6 computadoras, a 1483.– cada una. ¿Cuánto costaron las computadoras en total?

3. Un edificio tiene 8 pisos. Cada piso tiene una altura de 275 cm. ¿Cuántos metros mide el edificio?

4. En una tienda se vendieron 7 bicicletas, a un precio de 858.– cada una. ¿Cuánto fueron los ingresos totales por estas ventas?

5. Si comes 4 panecillos cada día, ¿cuántos comes en un año?

¿A dónde vamos desde aquí?

Después de completar esta Unidad, los niños podrían resolver también las multiplicaciones incompletas en la *Unidad 75*.

Unidad 11 - División mental y con material concreto

Prerrequisitos:
- División con residuo.
- Ley distributiva.
- Es ventajoso entender las propiedades del sistema decimal en cuanto a la multiplicación *(Unidad 8)*.

Materiales necesarios:
- Material de canje para el sistema decimal (Material Base 10, tapas de botellas, o similares).
- Figuras de juego.
- Ábaco.

TALLER

Divisiones en la vida diaria

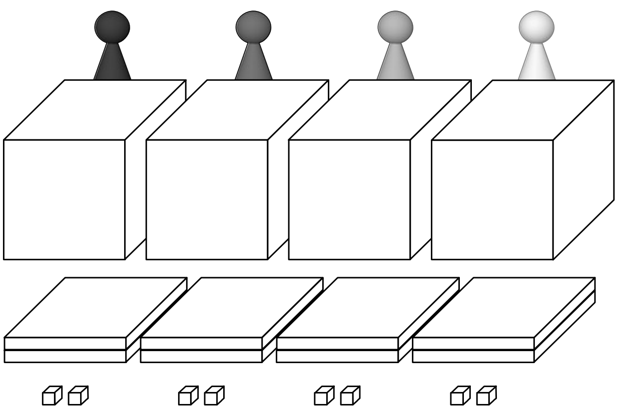
No son frecuentes las situaciones en la vida de un niño donde tenemos que dividir números grandes. Pero quizás encontramos algunas de estas situaciones donde podemos involucrar a los niños:

- En unos trabajos de carpintería o similares. Por ejemplo: Tenemos un listón de madera de 2.82 m y queremos cortarlo en tres partes iguales. ¿Cuánto tiene que medir cada parte?

- Al cambiar monedas de otro país. Por ejemplo, un dólar estadounidense vale aproximadamente tres soles peruanos. Entonces, si quiero saber cuánto valen 5000 soles en dólares, tengo que dividir este número entre 3.
Solamente que el tipo de cambio no siempre será un número tan "práctico" o exacto como el 3. Entonces se requerirá una división entre un número con varias cifras *(Unidad 29)*.

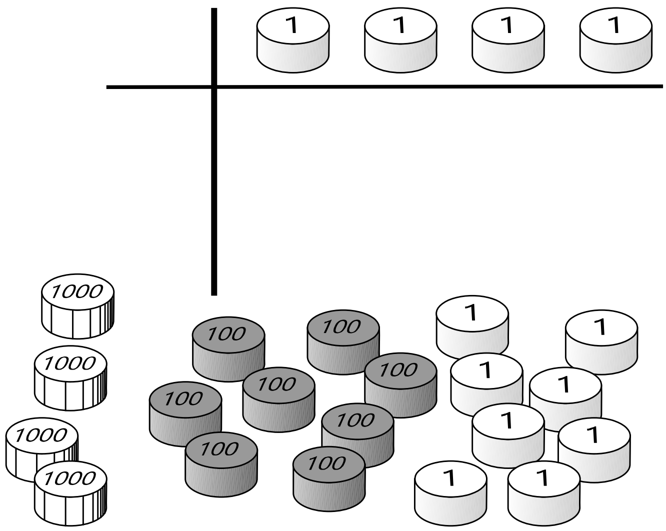
División con material Base 10

División sin residuos:
Representen el número 4808 con material Base 10, o con el material de las tapas de botellas. Vamos a repartir este material en partes iguales entre 4 figuras de juego:

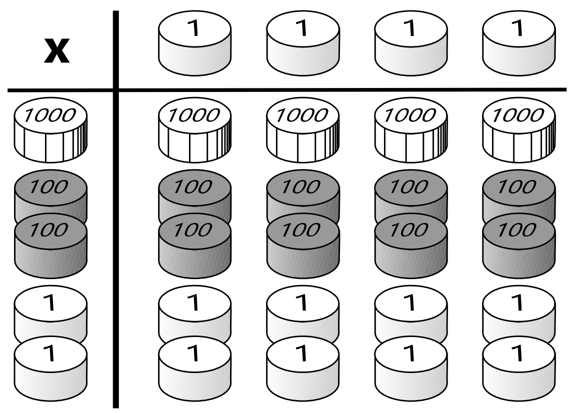


Vemos que cada figura recibió 1 millar, 2 centenas y 2 unidades. O sea, el cociente es 1202.

Con las tapas de botellas podemos representarlo de la misma manera como la multiplicación, y así se hace visible que la división es la operación inversa de la multiplicación: Alistamos 4808 aparte, y colocamos 4 unidades afuera de la línea gruesa, para que representen el divisor:



Ahora repartimos el material del 4808 dentro del rectángulo:



Resulta el mismo rectángulo como si hubiéramos multiplicado 1202 por 4.

La ley matemática que explica esta operación es la *ley distributiva*: Cada parte del número se puede dividir aparte.

$$(8000+400+8) \div 4 = (8000\div4) + (400\div4) + (8\div4)$$
$$= 2000 + 100 + 2.$$

Hagan algunos otros ejemplos que se pueden resolver de la misma manera:

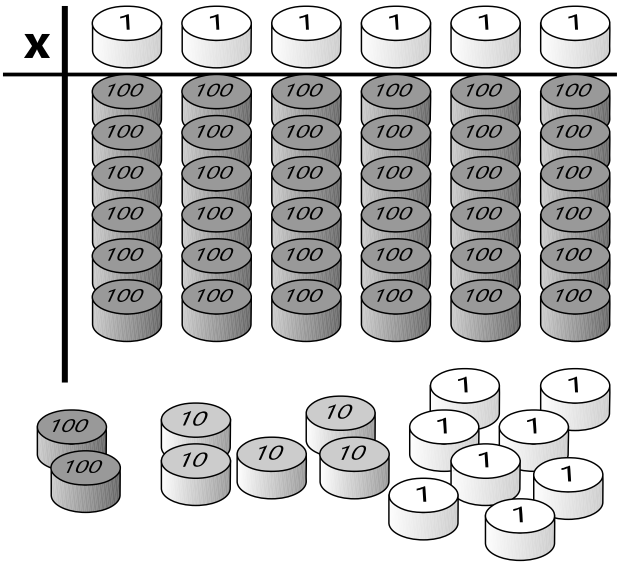
6824 ÷ 2, 3936 ÷ 3, 7077 ÷ 7.

Estos ejemplos son fáciles porque no queda residuo. Al observar lo que sucede, quizás los niños ya descubren por sí mismos que estos ejemplos se pueden dividir cifra por cifra.

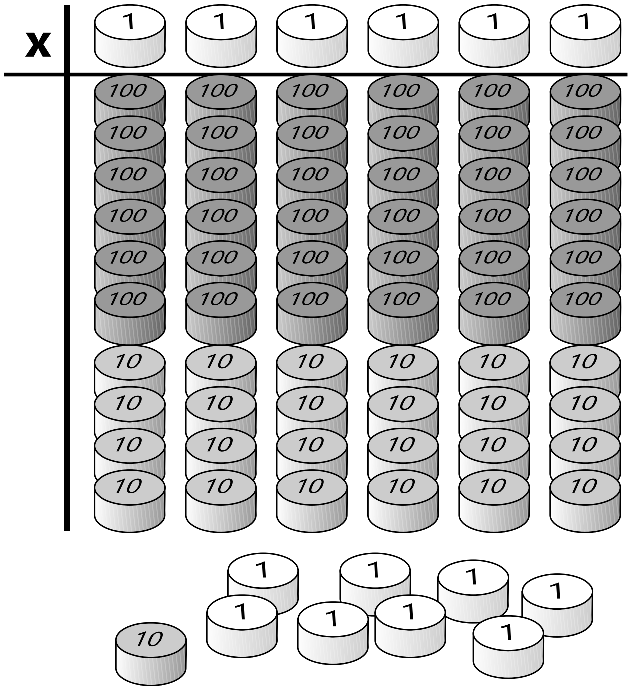
División con residuos parciales:

Hagamos ahora algunos ejemplos donde queda residuo. Por ejemplo 3858 ÷ 6:

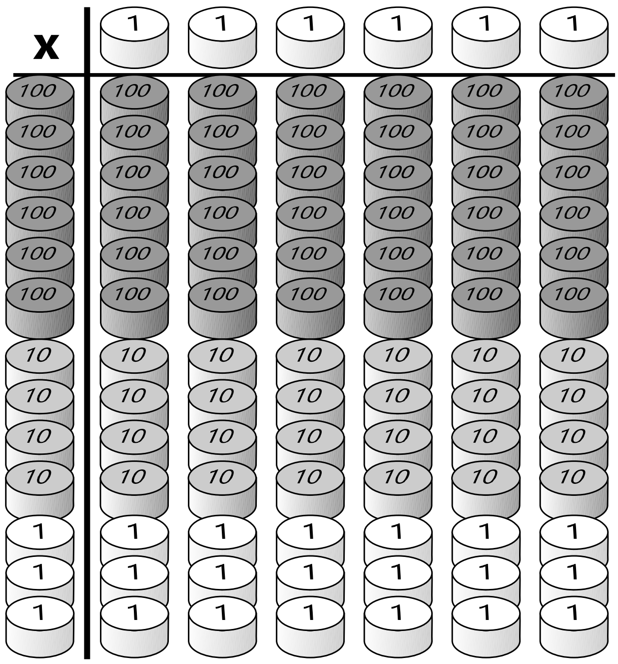
No podemos repartir 3 millares entre 6; hay que canjearlos por centenas. Tenemos ahora 38 centenas para repartir:



Sobran 2 centenas; las canjeamos por decenas. Junto con las 5 decenas que ya están aquí, tenemos 25 decenas para repartir:



Hay un residuo de 1 decena. La canjeamos por unidades, y repartimos las 18 unidades que tenemos ahora:



Podemos ver que el cociente es 643.

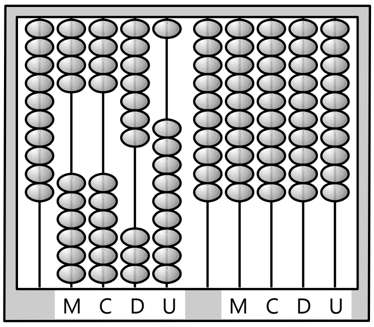
Hagan otros ejemplos de este tipo:

2725 ÷ 5, 9992 ÷ 8, 5005 ÷ 7.

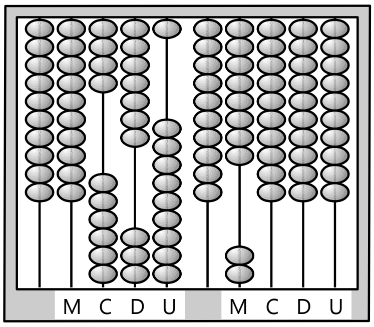
División en el ábaco

División sin residuos:

Para dividir, tenemos que usar el ábaco en dos mitades como ya lo hemos hecho en operaciones anteriores. En la mitad izquierda representamos el dividendo. La mitad derecha queda en cero; allí construiremos el cociente. Tenemos que mantener el divisor en la memoria. Por ejemplo para 6639 ÷ 3:



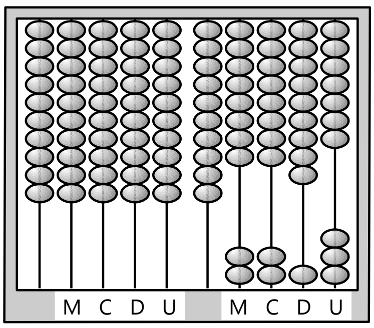
Ahora dividimos, empezando por el lado izquierdo. En el ábaco no podemos repartir cuentas; tenemos que hacer las divisiones parciales mentalmente: 6 ÷ 3 = 2, entonces tenemos 2 millares en el cociente. Quitamos los 6 millares del dividendo, porque los hemos procesado ahora:



Ahora las centenas: 6 ÷ 3 = 2, tenemos 2 centenas en el resultado, y quitamos las 6 centenas del dividendo que hemos dividido ahora.

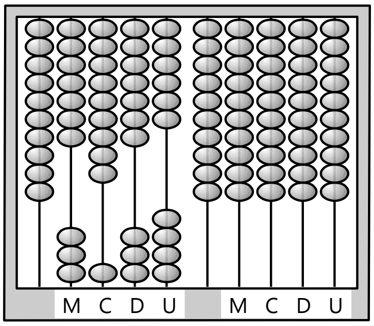
Las decenas: 3 ÷ 3 = 1, una decena en el cociente, y quitamos las decenas del dividendo.

Las unidades: 9 ÷ 3 = 3, tenemos 3 unidades como resultado, y quitamos las 9 unidades del dividendo. Así podemos ver el resultado: 2213.

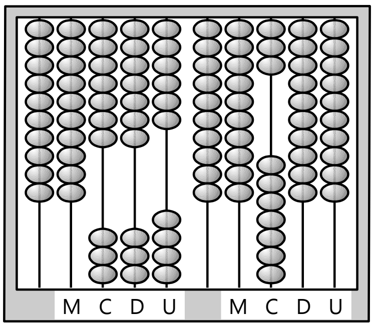


Pueden hacer de la misma manera los otros ejemplos de arriba, los que se pueden repartir sin residuo.

División con residuos parciales:

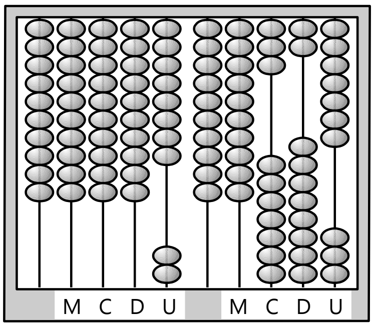


Hagamos ahora una división que deja residuos, por ejemplo 3134 ÷ 4. Representamos el dividendo como antes. 3 millares no se pueden dividir entre 4; tenemos que canjearlos por centenas. Ahora no podemos hacer este canje con las cuentas del ábaco; tenemos que hacerlo mentalmente. 3 millares y 1 centena equivalen a 31 centenas. 31 ÷ 4 = 7 (con un residuo de 3). Entonces colocamos 7 centenas en el cociente. – En el lado del dividendo tenemos que quitar ahora exactamente lo que hemos repartido. Recordando el procedimiento con las figuras de juego, hemos dado 7 centenas a cada figura. O sea, hemos repartido 7 x 4 = 28 centenas. Esta es la cantidad que tenemos que quitar del dividendo. Podemos hacerlo como siempre hacemos las restas en el ábaco: Quitamos 2 millares (=20 centenas) y seguimos quitando centenas: 1 – ahora tenemos que canjear el millar que queda por 10 centenas – , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Sobran 3 centenas.
O podemos hacerlo mentalmente: Nuestra división (31 ÷ 4) dejó un residuo de 3, entonces tienen que quedar 3 centenas (y ningún millar).



Ahora pasamos a las decenas, porque las 3 centenas que tenemos no se pueden repartir entre 4. (Eso es obvio. Si hubiera aquí una cantidad que podemos repartir, entonces en el paso anterior hubiéramos repartido más centenas.) Junto con las 3 decenas que hay, eso equivale a 33 decenas. 33 ÷ 4 = 8, con un residuo de 1. El cociente tiene 8 decenas, y en el dividendo dejamos el residuo de 1 decena. (Esto equivale a quitar las 32 decenas que hemos repartido.)

Finalmente las unidades: 1 decena y 4 unidades equivalen a 14 unidades. 14 ÷ 4 = 3, con un residuo de 2. Ponemos 3 unidades en el cociente, y por el lado del dividendo quedan 2 unidades.



En este procedimiento obtenemos entonces siempre en la mitad derecha del ábaco el cociente, y en la mitad izquierda el residuo.

Hagan otros ejemplos como este. Por ejemplo:

7395 ÷ 8, 9655 ÷ 4, 3333 ÷ 9.

Hagámoslo en la mente

Como en la multiplicación, no intentamos hacer mentalmente divisiones que requieren muchos canjes y residuos parciales.

Practiquen con las tarjetas de la ***Hoja de trabajo 9.1*** (segunda mitad).

Principios matemáticos

Al introducir las multiplicaciones de números grandes, hemos visto que la *ley distributiva* explica esta operación. *(Unidades 8 y 9.)* La división es la operación inversa de la multiplicación. Por eso es de esperar que aquí se aplique la misma ley.

Esto es más fácil de ver en aquellas divisiones que no dejan residuos parciales, porque en esos casos la descomposición puede hacerse cifra por cifra:

$$6393 \div 3 = (6000 + 300 + 90 + 3) \div 3$$
$$= (6000\div 3) + (300\div 3) + (90\div 3) + (3\div 3)$$
$$= 2000 + 100 + 30 + 1 = 2131.$$

Las divisiones con residuos parciales son más difíciles de entender, porque allí tenemos que hacer la descomposición según números divisibles entre el divisor. Por ejemplo, no sirve descomponer así:

$$3626 \div 7 = (3000 + 600 + 20 + 6) \div 7,$$

porque los sumandos no son divisibles entre 7. Pero sí funciona de la siguiente manera:

$$3626 \div 7 = (3500 + 70 + 56) \div 7 = 500 + 10 + 8 = 518.$$

Esta es exactamente la misma descomposición como la que resultará si hacemos la operación con material concreto o con el procedimiento escrito. ¡Verifíquelo!

Matemática divina

Reparto justo

La operación de la división se basa en una forma de un reparto equitativo, donde cada uno recibe lo mismo. Si uno recibe más y el otro recibe menos, matemáticamente no es una división correcta.

¿A dónde vamos desde aquí?

Esta Unidad es una preparación para la siguiente, donde introduciremos el procedimiento escrito.

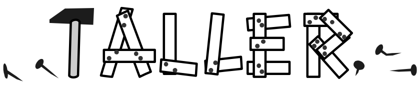
Unidad 12 - División cifra por cifra

Prerrequisitos:

- División mental y con material concreto, de números de 4 cifras *(Unidad 11)*.

Materiales necesarios:

- Material de canje (Base 10; tapas de botellas, o similares).
- Ábaco.



Representar divisiones en el tablero posicional

Todavía no hemos representado divisiones largas en el tablero posicional. Si desean, pueden hacerlo ahora como un paso preliminar, antes de introducir el procedimiento escrito. Si esto les parece innecesario, pueden saltar directamente a la siguiente actividad, donde aprenderemos el procedimiento escrito.

Representen con material Base 10, con tapas de botellas o en el ábaco la división 4288 ÷ 2. Después anotamos en un tablero posicional lo que hemos hecho, igual como lo hicimos para la multiplicación. Solamente que ahora escribimos los totales por encima y no por debajo, para que se parezca más al procedimiento escrito:

M	C	D	U		M	C	D	U
4	2	8	8		2	1	4	4
4	0	0	0	**÷ 2 =**	2	0	0	0
+	2	0	0		+	1	0	0
+		8	0		+		4	0
+			8		+			4

Este caso es fácil porque no quedan residuos parciales. Veamos ahora otro ejemplo: 4526 ÷ 7. Representen esta división con material concreto. Lo podemos escribir en un tablero posicional de la misma manera como en el ejemplo anterior. Solamente que ahora no lo podemos descomponer cifra por cifra. Tenemos que descomponerlo tal como nos muestra el material concreto:

4 millares no se pueden repartir entre 7. Canjeamos por centenas. Tenemos un total de 45 centenas. De esas podemos repartir 42, y el cociente es 6. Queda un residuo de 3 centenas. Hasta ahora podemos entonces escribir la siguiente descomposición:

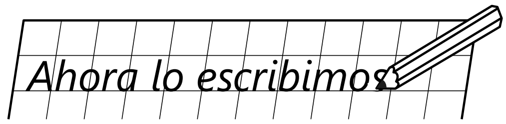
M	C	D	U		M	C	D	U
4	5	2	6					
4	2	0	0	**÷ 7 =**		6	0	0
+	3	2	6					

Hemos anotado provisionalmente todo lo que sobra del dividendo (326); pero en el siguiente paso tendremos que corregir este número. Canjeamos las 3 centenas por decenas; tenemos en total 32 decenas. De estas podemos repartir 28, da un cociente de 4 y un residuo de 4.

Finalmente repartimos las unidades: 46 ÷ 7 = 6, con un residuo de 4. La descomposición definitiva se ve entonces así:

M	C	D	U		M	C	D	U
4	5	2	6			6	4	6
4	2	0	0	**÷ 7 =**		6	0	0
+	2	8	0		+		4	0
+		4	2		+			6
+			4					

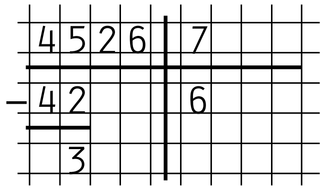
Las 4 unidades que sobran al final ya no pueden repartirse entre 7; eso es entonces el residuo final de la división. En el tablero derecho podemos ver el cociente: 646.



Introducimos el procedimiento escrito

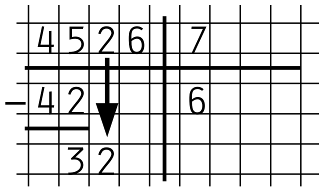
Las divisiones como 4288 ÷ 2 no son interesantes para el procedimiento escrito, porque podemos escribir directamente el resultado, o podemos hacerlo mentalmente. Comencemos entonces de frente con el ejemplo anterior, 4526 ÷ 7. Representen nuevamente esta operación con material concreto. Ahora escribimos en el cuaderno lo que hacemos, usando las cuadrículas como columnas de un tablero posicional.

No podemos repartir los 4 millares; los canjeamos por centenas. Repartimos 45 centenas: Podemos repartir 42 de ellas, eso da un cociente de 6. Escribimos entonces 6 (centenas) en el cociente. Por el lado del dividendo tenemos que quitar las 42 centenas que hemos repartido, o sea, restamos 42:



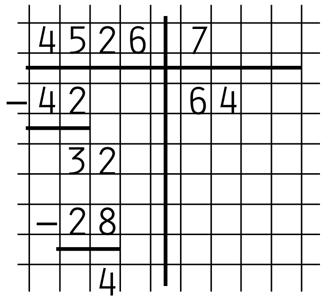
Podemos ver que este procedimiento corresponde exactamente a lo que hacemos en el ábaco: Al lado derecho colocamos los resultados de las divisiones parciales; y al lado izquierdo quitamos sucesivamente las cantidades que hemos repartido.

Tenemos ahora un residuo de 3 centenas. Las canjeamos por decenas. Junto con las 2 decenas que están aquí, tenemos 32 decenas.
En el procedimiento escrito obtenemos este efecto de una manera muy fácil: Podemos simplemente "bajar" la cifra 2 de las decenas y escribirla al lado de las 3 centenas:

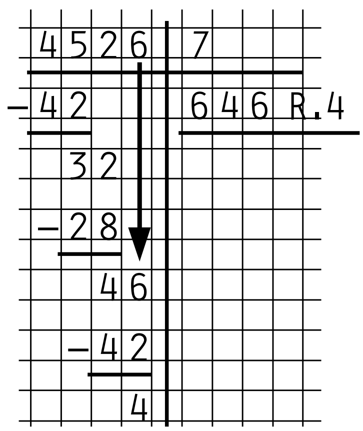


Este es entonces el significado de "bajar" una cifra en el procedimiento escrito: Lo que hacemos en realidad, es *sumar* las 30 decenas que resultan del canje, con las 2 decenas que ya están aquí. Las propiedades del sistema decimal nos permiten construir esta suma, escribiendo simplemente las cifras lado a lado, y forman el resultado correcto.

Ahora tenemos entonces 32 decenas para dividir: 32 ÷ 7 = 4 (y un residuo). Escribimos 4 decenas en el resultado, y restamos 4 x 7 = 28 decenas por el lado del dividendo:



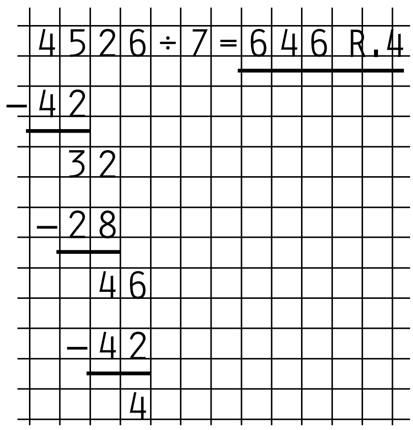
Y nuevamente podemos escribir el canje, "bajando" simplemente la cifra 6 de las unidades: Tenemos ahora 46 unidades. Efectuamos la última división: 46 ÷ 7 = 6, con un residuo de 4.



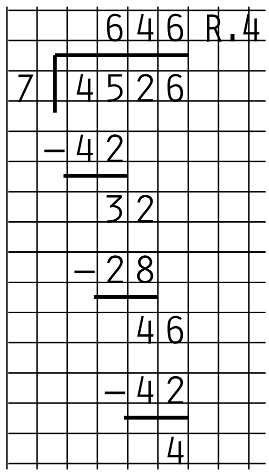
Viendo esta conexión entre el procedimiento escrito y lo que hacemos con el material de canje o el ábaco, los niños podrán entender mejor lo que significa cada paso en el procedimiento escrito, y así se equivocarán menos. Podemos hacer varios ejemplos similares, con material concreto y paralelamente anotándolo.

Para los educadores

En el ejemplo arriba he usado una notación escolar usual. Algunos detalles de esta notación no son tan importantes, tales como la línea horizontal y vertical adicional, o el lugar exacto donde escribimos el cociente. Se podría también escribir de la siguiente manera, como en algunos países europeos:



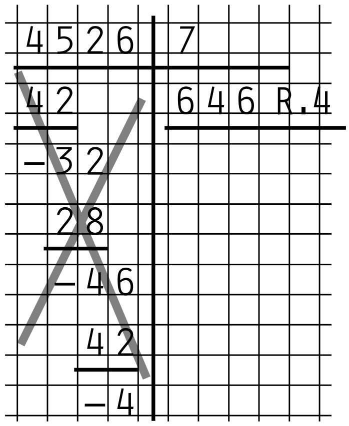
En los Estados Unidos se usa una notación bastante diferente: El dividendo se escribe a la derecha y el divisor a la izquierda; y el cociente se escribe encima del dividendo. Pero el cálculo de los residuos se escribe igual como en las otras notaciones:



Podemos entonces dar lugar para variaciones individuales de la notación. Lo que no se puede alterar es lo esencial: que las cifras del mismo valor posicional se escriban en la misma columna. Por eso, los pasos del cálculo en sí resultan iguales en las tres notaciones.

Algunos alumnos y profesores prefieren omitir el signo "–" delante de los números que se restan. Los que saben lo que hacen, puede hacerlo así, pero la operación pierde claridad cuando se omiten esos signos.

Otros escriben una raya horizontal "–" en los lugares donde una cifra del residuo es cero. Aconsejo fuertemente NO hacer eso. En el uso general en la matemática, esta raya no significa cero; significa el signo "menos". Una división escrita de esta manera da la impresión de que esos residuos son números que restamos. Si además se omiten los signos "–" delante de aquellos números que sí se restan, la confusión está completa. No es buena práctica, anotar las operaciones de una manera que causa malentendidos.



Ejercicios para resolver en el cuaderno

En la sección "Ampliaciones" aprenderemos una forma más corta de escribir la operación. Si deseas, puedes dejar algunos de los ejercicios para más tarde, para resolverlos de esa manera más corta.

a) 8448 ÷ 4	g) 5554 ÷ 2	m) 8354 ÷ 3
b) 6954 ÷ 3	h) 5004 ÷ 6	n) 6922 ÷ 8
c) 7296 ÷ 8	i) 5005 ÷ 7	ñ) 7295 ÷ 4
d) 9177 ÷ 7	j) 5008 ÷ 8	o) 5445 ÷ 6
e) 7278 ÷ 6	k) 3000 ÷ 9	p) 9818 ÷ 2
f) 6993 ÷ 9	l) 7765 ÷ 5	q) 7248 ÷ 7

Haz tantos ejercicios como necesitas para dominar bien el procedimiento.

Comprobación de los resultados

¿Te acuerdas de las máquinas de multiplicación y división? "División al revés" es multiplicación. Así puedes comprobar si el resultado de una división es correcta.

Por ejemplo: Calculaste que 5668 ÷ 4 = 1417. Si esto es correcto, entonces 1417 x 4 debe ser igual a 5668.

¿Y cómo puedes comprobar el resultado de una división con residuo? Si no lo recuerdas, investígalo ahora. Puedes usar unos ejemplos con números pequeños. Represéntalos con piedritas, semillas o cubitos de unidad que se reparten entre figuras de juego. Por ejemplo 46 ÷ 8 = 5 R.6. ¿Cuál es la operación inversa de esta? ¿Cómo se escribiría esta operación "al revés"?

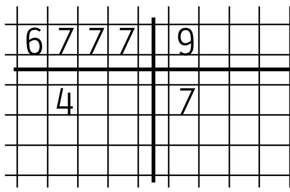
Comprueba de esta manera tus resultados de algunos de los ejercicios arriba.

Ampliaciones

Anotarlo de manera más corta

Si has entendido cómo funcionan las divisiones por escrito, puedes ahorrarte un poco de trabajo: Ya no necesitas anotar las cantidades que repartes; puedes anotar de frente los residuos.

Por ejemplo 6777 ÷ 9: Dividimos primero las centenas. 67 ÷ 9 = 7, residuo 4. Escribimos 7 en el resultado, y 4 como residuo. Hemos repartido centenas, entonces el 4 pertenece a la columna de las centenas:



Pasamos a las decenas. Bajamos el 7 de las decenas. Ya sabes que esto significa anotar el total de decenas que tenemos después de canjear las centenas: Tenemos 47 decenas: 47 ÷ 9 = 5, residuo 2. Escribimos 5 en el resultado y 2 como residuo, en la columna de las decenas.

Bajamos el 7 de las unidades: Tenemos en total 27 unidades. 27 ÷ 9 = 3, residuo 0. Anotamos como antes y tenemos el resultado final:

6	7	7	7		9		
	4	7			7	5	3
		2	7				
			0				

Puedes resolver algunos de los ejercicios para el cuaderno de esta manera más corta.

Hoja de trabajo 12.1: *Máquinas de multiplicación y división*

Esta hoja funciona igual como la *Hoja 6.3*, pero aquí trabajamos con las operaciones del "segundo piso" (multiplicación y división).

En las operaciones de esta hoja, que los niños decidan por sí mismos si quieren resolverlas mentalmente o por escrito. Algunas se pueden calcular mentalmente sin dificultad; otras requieren el procedimiento escrito.

En los ejemplos con el título "¿Qué hace la máquina?", se podría teoréticamente colocar una operación de suma o de resta en las máquinas. Pero aquí el tema es "Multiplicación y división", entonces se debe usar una de estas operaciones.
En el ejemplo de la izquierda hay dos pares de números dados. Una suma o resta que funciona con uno de estos pares, no funcionará con el otro: 856 – 642 = 214, pero 3300 – 642 no es igual a 825. Si un niño intenta solucionar este ejemplo con una resta como esta, podemos señalarle este hecho, e indicarle que se requiere una multiplicación o división.

Igualmente las "Cadenas de máquinas" deben resolverse con multiplicaciones o divisiones.

Puede ser un problema para algunos niños, encontrar la operación correspondiente: ¿Cuánto por 214 es 856? Todavía no hemos practicado operaciones de este tipo. Se puede resolver "probando": Multiplica 214 por algunos números, hasta que encuentres uno que dé 856 como resultado. (Hacer una buena estimación ayuda.) O de una manera más sistemática: Anota la "tabla del 214" hasta que llegues a 856.

Hoja de trabajo 12.2: *Cuadrículas de multiplicación y división*

Esta hoja funciona igual como la *Hoja 6.4*, pero ahora trabajamos con multiplicaciones y divisiones.

Las cuadrículas **a)**, **b)** y **c)** pueden llenarse fácilmente, porque las operaciones son dadas. En **b)** y **c)** tendremos que usar las "máquinas al revés" cuando damos pasos hacia la izquierda o hacia abajo.

En **c)** se quiere saber también el significado de algunos pasos "al revés" y diagonales. Como en la *Hoja 6.4*, eso se puede descubrir comparando números después de llenar la cuadrícula; o se puede razonar acerca de la combinación de dos máquinas.
Los dos últimos pasos diagonales (hacia la derecha-arriba y hacia la izquierda-abajo) no se pueden indicar como una única máquina con los conocimientos que los niños tienen hasta ahora, porque se requeriría una fracción. Los niños que ya dominan operaciones con fracciones, pueden llenar estas también. A los demás les decimos que pueden dejar estas "máquinas" en blanco, o que las remplacen por una combinación de dos máquinas (÷5 x2).
Es importante que los niños experimenten que en la matemática existen ciertos problemas que no tienen solución, o cuya solución no se puede expresar con los medios que conocemos hasta ahora.

En la cuadrícula **d)** no sabemos lo que hacen las "máquinas", pero tenemos varios números dados dentro de la cuadrícula. Estos números nos permiten, con unos razonamientos, descubrir las operaciones correspondientes.
Como en la cuadrícula **c)**, aquí también queremos saber el significado de los pasos en otras direcciones. Aquí, todas las operaciones diagonales se pueden expresar mediante una única operación con números enteros.

La cuadrícula ***e)** es un poco más difícil, porque sabemos solamente las operaciones que corresponden al dar dos pasos a la vez: Pasando *dos* cuadros a la derecha, llegamos del 54 al 6. ¿Qué operación es esta? ¿Y qué significa entonces dar un único paso a la derecha, para que sea ambas veces lo mismo? – Y de manera similar para la operación diagonal "x4" que es dada.

Errores comunes en la división, y cómo evitarlos

Si has cometido un error, no lo dejes ahí no más. Pero tampoco te desanimes y no te sientas fracasado. Analiza el error para descubrir *por qué* lo cometiste, y después trata de descubrir cuál hubiera sido el razonamiento correcto. Así sabrás cómo evitar el error la próxima vez.

¡No desperdicies tus errores! Los errores son oportunidades para aprender.

1. Analinda está dividiendo 6874 entre 7:

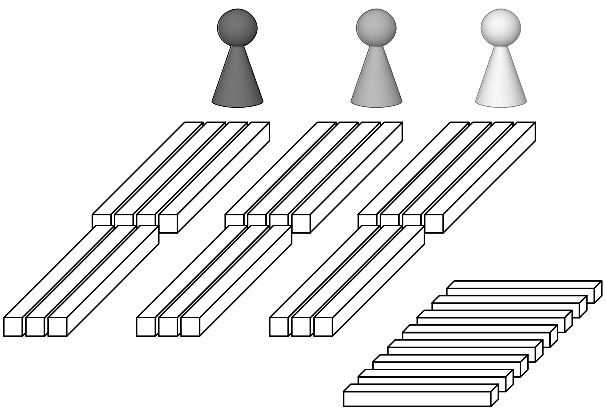
```
 6874 | 7
-63   | 9712
  57
 -49
    8
   -7
    14
```

Antes de seguir leyendo, analízalo tú primero, e intenta descubrir dónde está el error.

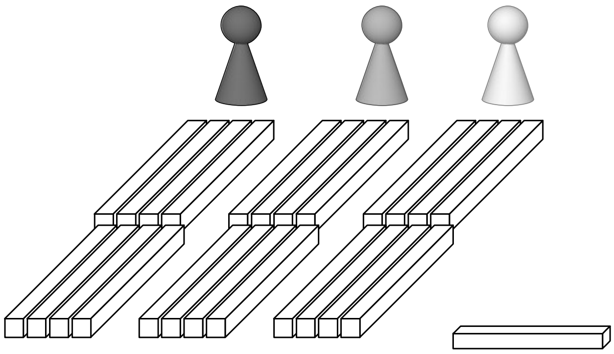
Aun sin hacer la comprobación, podemos notar a primera vista que esta división es equivocada, porque el resultado (9712) es mayor que el dividendo con el que empezamos (6874). Analicemos el razonamiento de Analinda:

Cuando llegó a un residuo de 57, pensó: 7 x 7 es 49, entonces 57 ÷ 7 es 7, y queda un residuo de 8. Después continuó: 8 ÷ 7 es 1, y el residuo es 1.

Si reproducimos esta división con material concreto, rápidamente nos damos cuenta del error. El 57 fueron decenas. Repartamos entonces 57 decenas entre 7 figuras:



Hemos dado 7 decenas a cada figura, y todavía sobran 8. ¡Pero si sobran tantas, podemos seguir repartiendo!



Ahora cada figura tiene 8 decenas, y una decena sobra. Entonces, en el resultado de nuestra división debe haber 8 decenas, no 7. Esta es la división correcta:

```
 6874 | 7
-63   | 982
  57
 -56
   14
```

¿Cómo evitar este error?

Comprueba siempre los residuos, si son razonables. Cuando dividimos entre 7, no puede haber un residuo de 8, porque este residuo se podría seguir repartiendo. Aun un residuo de 7 está mal, porque los 7 se podrían repartir entre 7. ***El residuo tiene que ser menor que el divisor.***

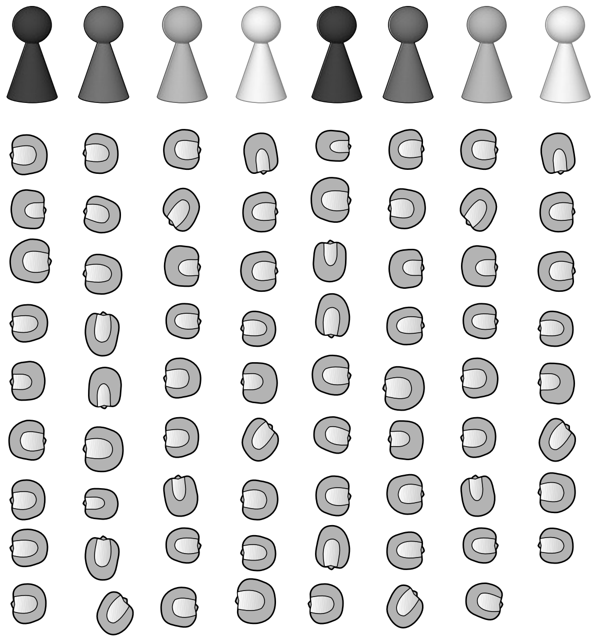
2. Jorge hizo la siguiente división:

```
 7144 | 8
-72   | 918
  14
 - 8
   64
```

Analiza también esta división, antes de seguir leyendo.

Esto se ve bien a primera vista, pero hagamos la comprobación: 8 x 918 = 7344, eso no es nuestro dividendo original. ¿Dónde está el error?

Analicemos el razonamiento de Jorge: 8 x 9 = 72, 72 – 71 = 1, entonces 71÷ 8 es 9, con un residuo de 1. Nuevamente, con material concreto nos daríamos cuenta del error fácilmente: Repartimos 71 granos de maíz entre 8 figuras. Damos 9 granos a cada figura:



Aquí no sobra un grano, ¡aquí *falta* uno! O sea, la resta está al revés. Miremos la división de Jorge: debería haber restado 71 – 72. Pero esta es una resta "imposible". Entonces Jorge en su cabeza cambió el orden de los números y restó 72 – 71. ¡Eso no lo podemos hacer, porque no es lo mismo! Ya que *falta* un grano de maíz, no podemos dar 9 granos a cada figura; podemos darles solamente 8. Aquí está la división correctamente resuelta:

	7	1	4	4	8		
–	6	4			8	9	3
		7	4				
	–	7	2				
			2	4			

¿Cómo evitar este error?

No intentes hacer restas imposibles. Si te sale una resta así, estás intentando repartir más de lo que hay; entonces tienes que disminuir tu resultado.

3. Francisco dividió así:

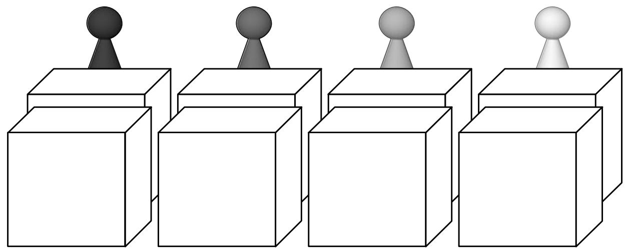
	8	3	3	6	4		
–	8				2	8	4
	0	3	3				
	–	3	2				
			1	6			

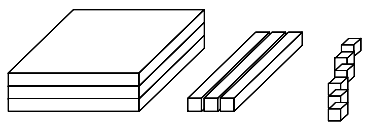
¿Qué dices acerca de esta división? Piénsalo, antes de seguir leyendo.

Aquí podríamos ver sin hacer la comprobación que algo está mal, porque el resultado salió muy pequeño. Pero hagamos la comprobación: 4 x 284 = 1136. Eso efectivamente está mal. ¿Por qué?

Francisco razonó así: 8 ÷ 4 = 2, el residuo es 0. 3 ÷ 4 no se puede dividir, entonces tengo que bajar la siguiente cifra. 33 ÷ 4 = 8, con un residuo de 1.

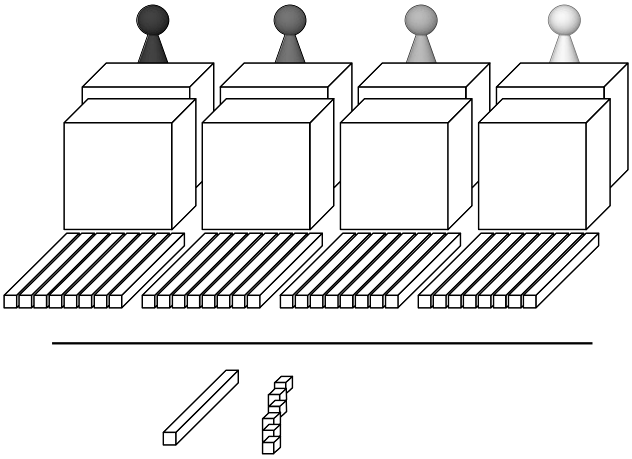
¿Cómo se ve esta división con material Base 10? Tenemos 8 millares, 3 centenas, 3 decenas y 6 unidades. Podemos repartir los 8 millares entre 4 figuras:





Eso ya es diferente de la división de Francisco, porque su resultado ni siquiera tiene millares. ¿Por qué? Vamos a ver...

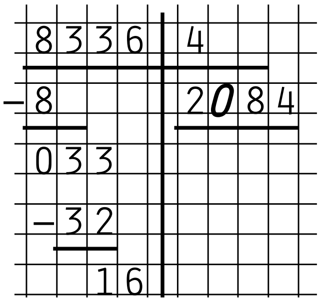
No podemos repartir las centenas, entonces las canjeamos por decenas. Tenemos 33 decenas, y podemos dar 8 a cada figura:



A partir de aquí, la división sale igual como la de Francisco: 8 decenas y 4 unidades. Entonces el resultado correcto es 2084.

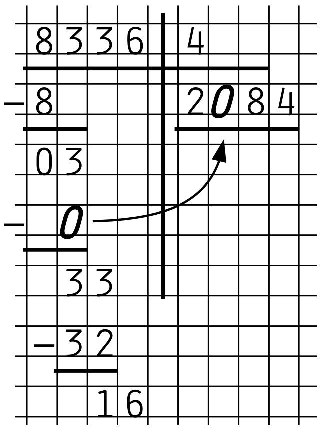
¿Cómo evitar este error?

Hay dos cosas que puedes hacer. ***Uno:*** Si el resultado de una división es cero, *este cero hay que escribirlo.* Al llegar a las centenas, el razonamiento correcto hubiera sido este: 3 ÷ 4 = 0, con un residuo de 3, entonces *escribo 0 centenas en el resultado:*



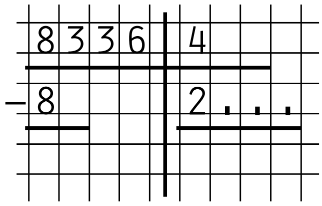
O si quieres estar bien seguro de no equivocarte, escríbelo así:

Esto es un poco más trabajoso, pero más seguro.

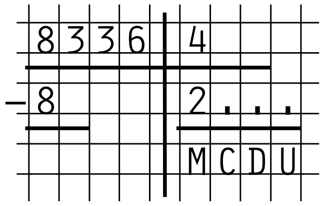


Dos: Asegúrate de antemano de que las cifras de tu resultado tengan el valor posicional correcto. En la primera división parcial que realizas, analiza: ¿Tengo unidades, decenas, centenas, o millares?

En nuestro caso, comenzamos repartiendo 8 *millares*, entonces el resultado (2) debe estar en la posición de los millares, y le deben seguir tres cifras más. Podemos marcar con puntitos las posiciones de estas tres cifras que todavía no sabemos:

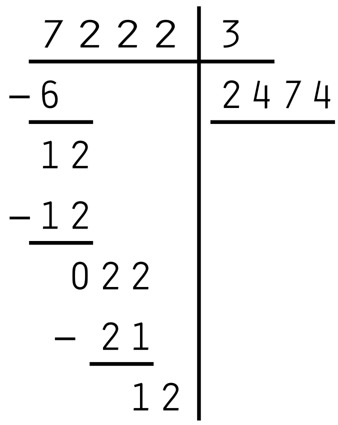


O si quieres ser más exacto, puedes incluso marcar los valores posicionales con letras:



Entonces, si tu resultado no sale de acuerdo al número de cifras que indicaste, sabes que algo ha ido mal.

4. Fabiana hizo la siguiente división:

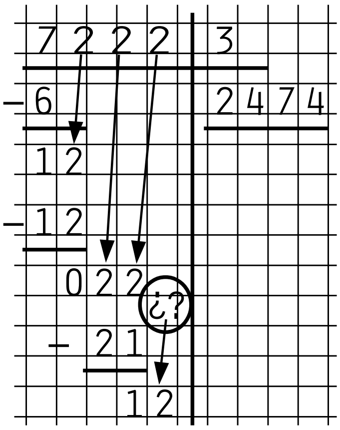


Analiza esta división antes de seguir leyendo. ¿En qué se equivocó Fabiana?

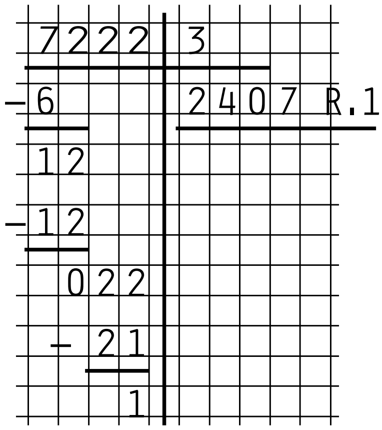
A primera vista quizás no podemos ver que la división está mal. Pero la comprobación da 3 x 2474 = 7422, no 7222.

Primeramente, vemos que Fabiana cometió el mismo error como Francisco: Después de restar 12 y bajar el siguiente 2, tuvo que dividir 2 ÷ 3, y no escribió el cero que resultó de esta división. Pero ¿por qué entonces no falta ninguna cifra en su resultado?

Eso lo descubrimos cuando analizamos bien dónde aparecen las cifras que bajó Fabiana:



Aparentemente, Fabiana se confundió al ver las muchas cifras 2, y bajó un 2 adicional donde no había ninguno. La división correcta se ve así:



¿Cómo evitar este error?

Escribe en papel cuadriculado, y usa exactamente un cuadrado para cada cifra. De esta manera aseguras que cada cifra mantiene su lugar correcto, de acuerdo a su valor posicional.

Problemas con divisiones

Nota acerca de las divisiones con unidades de medida: *A veces tenemos que convertir medidas en una unidad más pequeña: No podemos dividir 6 metros entre 8; pero podemos hacer centímetros y tenemos 600 cm ÷ 8.*

1. En una ciudad se quiere construir un nuevo conducto de agua potable, de 5376 metros de largo. Se usan tubos de una longitud de 7 m. ¿Cuántos tubos se necesitan?

2. Una empresa vende maíz en bolsas de 8 kg. ¿Cuántas de estas bolsas puede transportar un camión con una capacidad de 7 t ?

3. En una pastelería se fabricaron 9000 galletas. Se reparten en bolsas de 12 galletas, y 6 de estas bolsas se colocan en una caja. ¿Cuántas cajas se llenan?

4. Cuatro amigos pintan un muro de 35 m de largo. Si se reparten el trabajo en partes iguales, ¿cuánto le toca pintar a cada uno?

5. Volvamos a la cuenta de las cantidades de trigo molido en un molino *(Unidad 5)*:

Lunes	2078 kg
Martes	1412 kg
Miércoles	978 kg
Jueves	1155 kg
Viernes	1847 kg

Calcula la cantidad promedia de trigo que fue molido diariamente durante aquella semana.
¿En cuáles días se molió más que el promedio? ¿En cuáles días menos?

¿A dónde vamos desde aquí?

Esta Unidad completa el tema de las operaciones por escrito, en el espacio numérico hasta 10'000. Pero se recomienda tratar también el tema de las operaciones combinadas en la Unidad siguiente.

Después de este bloque, las operaciones por escrito continúan en el Bloque III, con números hasta un millón. Pero en la mayoría de los casos será más recomendable hacer primero el Bloque II, por lo menos hasta la Unidad 21. Estas actividades todavía no requieren números mayores.

Alternativamente, pueden intercalar unos temas de geometría (Bloque VI), o del Bloque VII.

Unidad 13 - Operaciones combinadas

Prerrequisitos:
- Suma, resta, multiplicación y división hasta 10'000 (mentalmente y por escrito).
- Entendimiento básico de las convenciones que rigen el orden de las operaciones y el uso de paréntesis.

Materiales necesarios:
- 5 dados.

Para los educadores

Nota acerca de los problemas con dinero:

El valor de la moneda nacional varía mucho entre un país y otro, y también varía a lo largo del tiempo. Por tanto no fue posible asegurar que los precios mencionados en los problemas sean realistas. Tome la libertad de adaptar los montos mencionados, y/o las situaciones, a la realidad de su país.

TALLER

Un presupuesto para el negocio propio

Operaciones combinadas ocurren a menudo en los cálculos necesarios al planificar y administrar un negocio. En la *Unidad 7* ya hemos visto unas ideas para la administración de un pequeño negocio propio de los niños. Si queremos establecer un presupuesto exacto, tenemos que hacer unos cálculos adicionales. Como mínimo, debemos tener en cuenta:
- la inversión necesaria (Gastos por materiales, productos y servicios que tenemos que adquirir),
- los ingresos que podemos esperar, a base de los precios de venta que establecemos.

La diferencia entre los ingresos y la inversión nos da la ganancia.

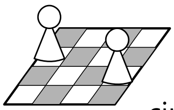
Aparte de la adquisición de materiales, la inversión puede incluir conceptos como los siguientes:
- Gastos por energía. Por ejemplo, hornear galletas o tortas requiere combustible o electricidad.
- Servicios que encargamos a terceras personas porque no podemos realizarlos en casa; tales como: Impresión de etiquetas o avisos; fabricación de sellos; etc.

Un presupuesto "profesional" tomaría en cuenta también la devaluación de las herramientas por el uso (útiles de cocina; computadora; etc); pero para el uso casero eso nos llevaría demasiado lejos.

Al calcular los ingresos o ganancias y fijar un precio de venta, podemos también considerar las horas de trabajo que invertimos, y podemos calcular cuánta ganancia tenemos por hora de trabajo, o cuál sería un precio de venta razonable, en base a una determinada ganancia por hora de trabajo. En este respecto no habrá que despertar unas expectativas demasiado elevadas en los niños: su trabajo como niños obviamente no podrá generar el mismo valor material como el trabajo de un adulto.

Algunos de los problemas en la sección "Ampliaciones" muestran ejemplos de situaciones y razonamientos que pueden ocurrir a la hora de establecer un presupuesto, o de decidir sobre precios de venta en un negocio.

Como señalamos ya en la *Unidad 7*, las ganancias que los niños adquieren con sus negocios o servicios son su propiedad, por lo cual deben ser libres para administrarlas y decidir acerca de su uso; pero al mismo tiempo se recomienda enseñarles también a ser generosos, a compartir, y donde es indicado a realizar también servicios al prójimo sin la expectativa de recibir algo a cambio.



Juego: Yatzy

Para este juego se necesitan cinco dados. Se trata de alcanzar con los cinco dados ciertos resultados específicos según exigen las reglas. (Una variación de este juego es conocida como "Generala".)

Antes de comenzar el juego, se debe preparar una hoja de resultados donde cada jugador anotará los puntajes que corresponden a sus resultados obtenidos. La hoja de resultados contiene las siguientes entradas:

Nombres:				
Uno (x 1)				
Dos (x 2)				
Tres (x 3)				
Cuatro (x 4)				
Cinco (x 5)				
Seis (x 6)				
Suma 1:				
Bono 25 pt (mínimo 64):				
1 par				
2 pares				
3 iguales				
4 iguales				
Casa llena (3 + 2)				
Calle pequeña (1...5)				
Calle grande (2...6)				
Oportunidad				
Yatzy (5 iguales)				
Suma 2:				
Suma 1 + Bono:				
Suma final:				

Se juega por turnos. Cada jugador, en su turno, puede tirar los dados un máximo de tres veces. Primero tira todos los cinco dados juntos. En la segunda y tercera vez deja los dados que le convienen tales como están, y tira solamente los demás. (En la tercera vez se pueden tirar también aquellos dados que se dejaron en la segunda vez.) Si un jugador con la primera o la segunda vez ya obtiene un resultado que le conviene, puede detenerse allí y anotar el resultado.

Después de terminar de tirar los dados, el jugador tiene que llenar *obligatoriamente* uno de los cuadros vacíos de su columna en la hoja de resultados. Si el resultado de sus dados no cumple con los requisitos para el cuadro respectivo, tiene que escribir cero.

Los cuadros "Suma", "Bono", etc, se calculan y se llenan después de terminar el juego.

Esto significa que el juego dura exactamente 15 turnos, y entonces todos los cuadros estarán llenos, sea con el puntaje respectivo o con un cero. Gana quien tiene la suma final mayor.

Los significados de las entradas son los siguientes:

Uno: Se anotan solamente los puntos de aquellos dados que muestran el número 1. *Ejemplo:* Pedro tiró 1, 3, 4, 1, 5, entonces anota 2 puntos porque tiró 2 "Unos".

Dos: Se anotan solamente los puntos de aquellos dados que muestran el número 2. *Ejemplo:* Paola tiró 3, 2, 2, 1, 2, entonces anota 6 puntos porque tiró tres veces el número 2, y 2 x 3 = 6.

Tres, Cuatro, etc: De la misma manera como los anteriores.

Suma 1: La suma de los puntajes de "Uno" hasta "Seis".

Bono: Se pueden anotar 25 puntos adicionales si la "Suma 1" es 64 o mayor. Quienes alcanzan menos que 64 puntos en la "Suma 1", anotan cero aquí.

1 par: El resultado debe contener dos números iguales. Se anotan solamente los puntos de estos dos números. *Ejemplo:* Sonia tiró 4, 5, 2, 6, 5. Anota 10 puntos porque el "par" consiste en 5 + 5 = 10.

2 pares: El resultado debe contener dos pares de números iguales. Se anota la suma de estos cuatro números. *Ejemplo:* Bernardo tiró 2, 5, 6, 6, 2. Anota 16 puntos porque 2 + 2 + 6 + 6 = 16.
Cuatro números iguales pueden también contar como "2 pares". – Si un jugador tiene que llenar este cuadro sin tener 2 pares de números iguales, escribe cero.

3 iguales: El resultado debe contener 3 números iguales, cuyos puntajes se anotan. *Ejemplo:* Braulia tiró 4, 4, 6, 4, 3. Anota 12 puntos, porque 4 + 4 + 4 = 12.

4 iguales: Como "3 iguales", pero se requieren 4 números iguales.

Casa llena: El resultado debe contener 3 números iguales, y los 2 restantes también deben ser iguales. *Ejemplo:* 5 + 5 + 5 + 3 + 3 = 21 puntos.

Calle pequeña: Los números 1, 2, 3, 4, 5. Vale 15 puntos.

Calle grande: Los números 2, 3, 4, 5, 6. Vale 20 puntos.

Oportunidad: Se anota la suma de los cinco dados. No se necesita cumplir ninguna condición.
(Se recomienda guardarse este cuadro para la etapa final del juego, para cuando ocurra la situación de que no se pueden cumplir los requisitos para ningún otro cuadro.)

Yatzy: Cinco números iguales. Yatzy vale 50 puntos, independientemente del puntaje de los dados.

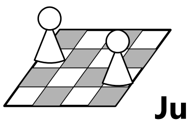
Suma 2: La suma de los puntajes en la segunda parte de la hoja (desde "1 par" hasta "Yatzy").

Suma 1 + Bono: La suma de "Suma 1" más el bono, si se obtuvo.

Suma final: La suma de los dos cuadros anteriores ("Suma 2" + "Suma 1 + Bono"), o sea el puntaje total.

Este juego requiere decidir sabiamente cómo usar los resultados de los dados, para poder llenar todos los cuadros con un puntaje óptimo. Un ejemplo:

Mónica tiró en la primera vez 3, 4, 5, 4, 4. Entre otros, tiene todavía vacíos los cuadros "Cuatro", "4 iguales", "Calle pequeña" y "Calle Grande". Entonces Mónica podría dejar en la mesa los dados con los números 3, 4, 5, e intentar tirar con los dados restantes un 1 y un 2 para tener "Calle pequeña"; o si tira un 2 y un 6, tendría "Calle grande". O podría dejar los dados 4, 4, 4, e intentar obtener un 4 adicional con los otros dos dados, entonces podría anotar 16 puntos en "Cuatro" o en "4 iguales". (O si tiene mucha suerte, podría obtener "Yatzy".)



Juego: 144 con 5 dados

Esta es una variación un poco más difícil de un juego que presentamos en el nivel de Primaria I. Allí hemos intentado alcanzar el resultado 24 con 4 dados. Ahora intentamos alcanzar 144 con 5 dados:

Tiren 5 dados juntos. Intenten formar una operación cuyo resultado es 144, usando el puntaje de cada dado exactamente una vez. Se pueden usar las cuatro operaciones básicas y paréntesis. Se pueden también formar números de varias cifras, interpretando los puntajes como cifras.

Ejemplos:

- Se tiraron 1, 1, 1, 1, 2.
Una solución es (11 + 1) x 12 = 144.

- Se tiraron 5, 5, 5, 5, 6.
Una solución es (5 x 5 – 5 ÷ 5) x 6 = 144.
(Nota que la división se efectúa antes de la resta.)

- Se tiraron 2, 3, 4, 5, 6.
Una solución es (5 + 3 – 2) x 4 x 6 = 144.
Otra solución posible es 54 x 2 + 36 = 144.

- Se tiraron 1, 1, 2, 2, 3.
Una solución es 123 + 21 = 144.

- Se tiraron 1, 2, 3, 3, 4.
Una solución es (33 + 1 + 2) x 4 = 144.

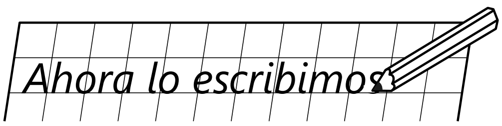
Otra solución posible es 24 x (3 + 3) x 1 = 144. Otra es 432 ÷ 3 ÷ 1 = 144. Y puede haber otras con esta misma combinación de números...

Variación: Con anticipación, se define como meta un número más difícil de alcanzar, por ejemplo 100 ó 51. Por turnos, cada jugador tira los 5 dados e intenta formar una operación cuyo resultado sea el más cercano posible a la meta. Gana quien se acerca más a la meta.

Se puede fijar un límite de tiempo; por ejemplo que cada jugador tiene como máximo un minuto para definir su operación.

Ejemplo: Hemos definido 100 como meta. Alberto tiró 1, 1, 1, 1, 2 y puede formar la operación 112 – 11 = 101, o sea, se queda a un único punto de la meta. Alfredo tiró 5, 5, 5, 5, 6 y llega a 55 + 55 – 6 = 104; le sobran 4 puntos. Anita tiró 2, 3, 4, 5, 6 y llega exactamente a la meta con (2 + 3 + 5) x (4 + 6) = 100. Con eso, Anita gana. Si nadie hubiera alcanzado la meta exactamente, Alberto sería el ganador.

(Con una meta de 51, Alfredo y Anita empatarían; ¿descubres cómo?)



Escribimos operaciones combinadas

En el juego "144 con 5 dados", *escriban* las operaciones que encuentran. Así practican escribir estas operaciones de manera correcta.

Note que a veces hay más que una única manera de escribir una operación. El ejemplo de más arriba, (5 x 5 – 5 ÷ 5) x 6 = 144, podría escribirse también así: (5 x 5 – (5 ÷ 5)) x 6 = 144. Los paréntesis interiores no son necesarios, pero contribuyen a la claridad. – Y por supuesto, 6 x (5 x 5 – 5 ÷ 5) = 144 es también la misma operación, solamente en otro orden.

Operaciones combinadas para resolver en cuaderno

Por si necesitas practicar el orden de las operaciones, resuelve las siguientes, tantas como necesitas hasta estar seguro(a). En algunos de estos ejemplos se puede cambiar el orden de las operaciones para que sea más fácil resolverlas; ¡pero hay que hacer eso de una manera *permitida*!

a) (6862 – 2914) ÷ 6

b) 722 x 4 + 8896 ÷ 8

c) 3360 ÷ (429 x (44 – 37) – 2998)

d) 1277 – 968 x 3 + 1926

*e) 2995 x 567 ÷ 7 ÷ 5 ÷ 9

f) 8844 ÷ 6 – 2844 ÷ 6

*g) 987 x 6 – 4 x (477 – 9) x 5 + 492 x 7

Si algunas operaciones te parecen demasiado difíciles y lo has pensado por mucho tiempo, consulta las pautas en el *Anexo A*.

Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 13.1: *Problemas con segmentos*

Para resolver esta clase de problemas, lo más importante es entender el principio del entero y sus partes. (Vea en la introducción al Bloque I.) Ahora, si tenemos varios segmentos, podemos tener un segmento que está compuesto de dos segmentos menores, entonces es un "entero" respecto a esos dos segmentos pequeños. Pero este mismo segmento puede a su vez ser parte de otro segmento mayor, entonces es una "parte" respecto a ese segmento mayor.

Otra clave para resolver estos problemas consiste en encontrar dónde comenzar. Por ejemplo en el primer problema (las casas dibujadas), no podemos inmediatamente calcular el camino entero, porque no tenemos suficientes datos para eso. Pero podemos calcular los segmentos pequeños; y una vez que tenemos esos, podemos también calcular el camino entero.

Para los problemas de texto en la segunda mitad de la hoja, se recomienda hacer un dibujo en una hoja aparte para entender mejor la situación.

Hoja de trabajo 13.2: *Cadenas de máquinas*

Aquellos cálculos que no pueden realizarse mentalmente, deben calcularse en una hoja o un cuaderno aparte. Después de rellenar los resultados, hay que analizarlos según las instrucciones en la hoja:

- ¿Se puede encontrar una única máquina que realiza la misma operación como las tres máquinas juntas? ¿Cuál es?

- ¿Qué efecto tiene el intercambiar las máquinas? – La primera y la segunda "cadena" contiene las mismas máquinas, solamente en otro orden. ¿Qué efecto tiene eso sobre los resultados finales? – Lo mismo para la tercera y la cuarta "cadena".

Si lo han pensado por bastante tiempo y no llegan a conclusiones satisfactorias, consulten las pautas en el *Anexo A*.

Hoja de trabajo 13.3: *¡Combina!*

Arriba: Intenta alcanzar los resultados requeridos, insertando operadores y paréntesis entre los cuatro números 1080, 8, 112, 7. Se permiten las cuatro operaciones básicas (+, –, x, ÷), y cualquier combinación válida de paréntesis.

Abajo: Los resultados requeridos deben alcanzarse con una combinación de los tres números dados, en cualquier orden y usando cualesquieras de las operaciones básicas, y paréntesis si es necesario. Pero cada uno de los tres números dados debe usarse exactamente una vez. Así por ejemplo en la primera serie, la solución 15 + 5 + 5 = 25 no sería válida, porque estaríamos usando el 5 dos veces y el 300 ninguna vez.

En las líneas sin resultados dados, intenta encontrar unas combinaciones nuevas que dan resultados distintos de los anteriores.

Nota 1: Algunas soluciones podrían requerir divisiones entre números grandes, tales como 1176 ÷ 392. ¿Cómo podemos descubrir el resultado de una división como esta? – Si aplicamos el principio de la operación inversa, entendemos que esta es la misma operación como: 392 x ¿? = 1176. Entonces podemos probarlo, multiplicando el 392 con diversos números hasta encontrar el correcto. (Hacer una buena estimación ayudará.) O de una manera un poco más sistemática: Podemos anotar la "tabla del 392" en orden hasta llegar a 1176.

Nota 2: La última serie requiere un resultado mayor a 10'000. Eso no hace daño, porque las operaciones funcionan de la misma manera con números mayores. Entonces los niños pueden igualmente intentar encontrar las operaciones que llevan a este resultado, aunque se encuentre en un rango que "oficialmente" todavía no hemos aprendido.

Ampliaciones

Problemas diversos

1. Un negociante compró 164 kg de naranjas a 958.–. Las vende a 7.– el kilo. ¿Cuánto es su ganancia?

2. Otro negociante compró 500 limones, a 20.– el ciento, y los vende a cuatro por 1.–. ¿Cuánto de ganancia hace?

3. Un negocio compra refrigeradoras en cantidad, a 895.– cada una. Las vende a 1048.–. En una semana se vendieron 8 refrigeradoras. ¿Cuánto fue la ganancia por la venta de refrigeradoras durante aquella semana?

4. El señor Martínez compró un carro a 9522.–. Después de usarlo durante un año, lo vendió a 7585.–.
El señor Marín alquiló un carro durante un año, a 163.– por mes.
¿Quién de los dos pagó más por el uso del carro?

5. Rodrigo produce galletas para vender. Los ingredientes para 120 galletas cuestan 10.70. Rodrigo las vende en bolsas de 6 galletas, la bolsa a 1.–. ¿Cuánto es su ganancia?

6. Marta fabrica cajitas de cartón y las vende por docenas a una tienda, la cual vende a sus clientes cada cajita a un precio de 2.50. Los materiales para una docena de cajitas cuestan 13.80. ¿A qué precio tiene que vender Marta la docena de cajitas, para que la ganancia sea repartida en partes iguales entre ella y la tienda? *¿Y si Marta quiere ganar el doble de lo que gana la tienda?

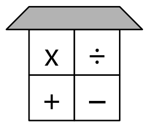
*7. Carla produce tarjetas adornadas para vender. Sus gastos para 100 tarjetas son los siguientes:

Cartulina	6.–
Papeles de color	2.80
Goma	–.80

Para fabricar una tarjeta, Carla necesita 12 minutos. Quiere ganar por lo menos 3.– por hora de trabajo. Entonces, ¿a qué precio debe vender cada tarjeta?

Principios matemáticos

Hacemos recordar que la "Casa de dos pisos" es una buena ilustración para hacer entender las convenciones acerca del orden de las operaciones. Vea la introducción general al Bloque I, “Principios matemáticos”.



¿A dónde vamos desde aquí?

Aquí termina el Bloque I. Hemos introducido los procedimientos escritos para las operaciones básicas.

Este tema continúa en el Bloque III, con números hasta un millón. Pero en la mayoría de los casos será más recomendable hacer primero el Bloque II, por lo menos hasta la Unidad 21. Estas actividades todavía no requieren números mayores.

Alternativamente, pueden intercalar unos temas de geometría (Bloque VI), o del Bloque VII.

Bloque II: Múltiplos y divisores (Unidades 14 a 25)

Las Unidades de este bloque se ocupan de los principios y leyes relacionados con la divisibilidad, las factorizaciones, los números primos, múltiplos y divisores comunes, etc. Incluimos aquí también el tema de las proporciones, porque está relacionado con las operaciones de multiplicación y división. El tema central de este bloque es entonces el "razonamiento multiplicativo" (a diferencia del "razonamiento aditivo").

Algunos de estos temas se introdujeron ya en el nivel de *Primaria I (Bloque VI)*. Ya que ese fue un bloque opcional en Primaria I, volvemos a explicar esos temas aquí. Los trataremos ahora con mayor profundidad, y usaremos unos ejemplos más exigentes, que requieren cálculos con números mayores, y/o razonamientos un poco más avanzados.

Los niños deben entender por lo menos los temas de las *Unidades 14 a 19* (hasta Múltiplos y divisores comunes) antes de entrar al tema de las fracciones *(Bloque IV)*. Las *Unidades 20 a 25* tocan unos temas un poco más avanzados que se pueden tratar enseguida, o dejarlos para más tarde.

Resumen de principios matemáticos acerca de los múltiplos y divisores

Para los educadores

Algunos de los principios descritos abajo fueron introducidos en el nivel de Primaria I, en las unidades de aprendizaje opcionales del Bloque VI. Otros se introducen por primera vez en este nivel. Algunos de los principios un poco más avanzados todavía no necesitan enseñarse en este nivel, pero los mencionamos aquí para el beneficio de los educadores.

Los temas tratados aquí pertenecen a la rama de la matemática llamada "Teoría de números"; más exactamente a la teoría de los números naturales. Se sobreentiende por tanto que todas las explicaciones que siguen a continuación, se refieren a los números naturales; y el término "número" en este contexto significa "número natural".

Principios matemáticos

Divisibilidad

Se dice que un número es *divisible* entre otro número, si la división es exacta, sin residuo. Por ejemplo 24 es divisible entre 6, porque la división 24 ÷ 6 no deja residuo. Esto es sinónimo a decir que "6 es un divisor de 24", o también "24 es un múltiplo de 6".

Entonces, para saber si un número es divisible entre otro número, hay que efectuar la división y evaluar si queda un residuo o no.

Los divisores de un número aparecen de dos en dos: Si he descubierto que 6 es un divisor de 24, puedo efectuar la división, y el cociente es otro divisor: 24 ÷ 6 = 4, entonces 24 es divisible también entre 4. En otras palabras, puedo descomponer el 24 en dos factores: 24 = 4 x 6.

La única excepción es cuando el cociente es igual al divisor encontrado; por ejemplo 25 ÷ 5 = 5. En este caso no encuentro ningún divisor nuevo. Esto sucede cuando buscamos los divisores de un número que es un cuadrado perfecto.

Cada número es divisible entre 1, y cada número es divisible entre sí mismo.

Para algunos divisores particulares existen reglas especiales de divisibilidad. Estas reglas se basan en las propiedades del sistema decimal, y permiten evaluar la divisibilidad de una manera más rápida, sin necesidad de efectuar la división. En este nivel introducimos algunas de estas reglas; pero todavía no podemos presentar las demostraciones exactas de por qué estas reglas "funcionan", porque eso requiere álgebra. Lo haremos en el nivel de *Secundaria I*.

Números primos y compuestos

Los números primos son números que tienen solamente dos divisores: el 1 y el número mismo. Los números compuestos son los que tienen otros divisores adicionales; o sea, se pueden representar con una multiplicación, sin usar el 1 como factor.
En las actividades con material concreto experimentaremos esto al ver que los números compuestos pueden representarse en forma de un rectángulo.

En el transcurso del siglo 20, los matemáticos decidieron definir que el número 1 no es ni primo ni compuesto. Hablaremos acerca del trasfondo de esta decisión en la *Unidad 16*.

Los números primos presentan muchos desafíos interesantes de investigación, porque siguen un patrón aparentemente irregular. Muchos de estos problemas requieren conocimientos avanzados para analizarlos; pero presentaremos unos cuantos que son accesibles ya para alumnos de primaria.

Descomposición en factores primos

Al descomponer un número en factores, podemos seguir factorizando los factores hasta que todos los factores sean primos. Por ejemplo, hemos descompuesto 24 = 4 x 6. Pero 4 = 2 x 2, y 6 = 2 x 3. Remplazamos esto, y obtenemos 24 = 2 x 2 x 2 x 3. Esta es la descomposición de 24 en factores primos: Todos los factores son números primos; por tanto no podemos seguir factorizando.

En este contexto hay un teorema importante:

Cada número natural se puede descomponer de una única manera en factores primos. (Excepto que los factores se pueden enumerar en un orden distinto.)

Por ejemplo, podríamos intentar descomponer el 24 de otra manera: Empezamos con 24 = 3 x 8. 3 ya es un número primo; 8 = 2 x 4 = 2 x 2 x 2. Remplazamos, y tenemos 24 = 3 x 2 x 2 x 2. Estos son los mismos factores como arriba, solamente en otro orden. No podemos llegar a ninguna otra factorización en factores primos; la descomposición del 24 es *única*.

Esta ley matemática se llama el ***teorema fundamental de la aritmética***. Es importante porque la descomposición en factores primos se usa en muchos contextos: al buscar divisores, al calcular el MCD y el MCM, al simplificar fracciones, al buscar el denominador común de varias fracciones, y en diversas otras ocasiones. La descomposición en factores primos revela la "estructura interna" de un número, la que no se puede ver a primera vista. Por ejemplo, a primera vista no vemos mucha diferencia entre los números 1007, 1008 y 1009. Son "casi iguales". Sin embargo, cuando los factorizamos, encontramos que sus "estructuras internas" son muy distintas:

1007 = 19 x 53
1008 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 7
1009 = 1009 (primo).

Para encontrar todos los divisores de un número de manera sistemática, necesitamos su descomposición en factores primos. Toda descomposición de un número en factores (divisores), si continuamos factorizando, nos lleva a su descomposición en factores primos. Esto implica que también vice versa, todos los divisores de un número son productos de sus factores primos. Para encontrar todos los divisores, tenemos que enumerar todas las combinaciones posibles de los factores primos.

Por ejemplo, la descomposición anterior nos muestra que los divisores de 1007 son: 1, 19, 53, 1007.

Algunos divisores de 1008 son:

1	7	
2	8 = 2 x 2 x 2	
3	9 = 3 x 3	
4 = 2 x 2	12 = 2 x 2 x 3	
6 = 2 x 3	14 = 2 x 7	etc.

Entraremos a este tema en la *Unidad 24*, "Diagramas de divisores".

Divisores comunes; MCD

Dos o varios números pueden tener divisores comunes: números que son divisores de ambos (o todos) los números a la vez. Por ejemplo 24 y 32 tienen como divisores comunes el 1, el 2, el 4 y el 8. Todos estos números son divisores tanto de 24 como de 32.

El mayor de los divisores comunes (en nuestro ejemplo el 8) se llama el ***máximo común divisor (MCD)***. El MCD se usa por ejemplo al simplificar fracciones *(vea Bloque IV)*: Tanto el numerador como el denominador se dividen entre su MCD.

$$\frac{24}{32} = \frac{24 \div 8}{32 \div 8} = \frac{3}{4} \quad \text{porque } 8 = \text{MCD}(24, 32).$$

Reflexione acerca del siguiente teorema, y verifique que es cierto:

De dos o más números dados, sus divisores comunes son los divisores del MCD.

Múltiplos comunes; MCM

De manera análoga a los divisores comunes se definen los múltiplos comunes. Por ejemplo, partiendo de los números 15 y 20, encontramos que 120 es un múltiplo de 15 y también de 20: 120 = 15 x 8 = 20 x 6. O sea, 120 es un *múltiplo común* de 15 y de 20. Podemos encontrar otros múltiplos comunes de estos números: 60, 180, 300, ... El menor de estos múltiplos comunes (en nuestro ejemplo el 60) es el ***mínimo común múltiplo (MCM)***.

Una manera segura de encontrar un múltiplo común consiste en simplemente multiplicar los números: 15 x 20 = 300, este número es con seguridad un múltiplo de 15 y un múltiplo de 20, porque lo hemos hecho así. Pero en muchos casos, el múltiplo que encontramos de esta manera no es el "*mínimo*" común múltiplo.

Cuando buscamos un denominador común de varias fracciones *(vea Bloque IV)*, el mínimo denominador común es el MCM. Así por ejemplo, las fracciones con los denominadores 15 y 20 pueden todas convertirse en fracciones con el denominador 60:

$$\frac{1}{15} = \frac{4}{60}, \quad \frac{1}{20} = \frac{3}{60}$$

porque 60 = 15 x 4 = 20 x 3 = MCM(15, 20)

Reflexione acerca del siguiente teorema, y verifique que es cierto:

De dos o más números dados, sus múltiplos comunes son los múltiplos del MCM.

Nota: El cero es múltiplo de todo número, porque todo número multiplicado por cero da cero. Pero al evaluar el "mínimo común múltiplo" no tomamos en cuenta el cero, porque en este tema nos limitamos a los números naturales, y 0 no es un número natural.

Relaciones entre factores primos, MCD y MCM

Puesto que todo divisor de un número es un producto de algunos de sus factores primos, el MCD es el producto de los factores primos comunes.

De manera análoga, todo múltiplo de un número contiene todos sus factores primos; entonces el MCM es el menor número que contiene en conjunto todos los factores primos de los números dados.

Examinaremos como ejemplo las descomposiciones de los números 60 y 108. Mostramos en la tabla aparte los factores primos que ambos números tienen en común, y los factores que cada número tiene por separado:

60 =	2 x 2 x 3	x 5	
108 =	2 x 2 x 3		x 3 x 3
MCD =	2 x 2 x 3		= 12
MCM =	2 x 2 x 3	x 5	x 3 x 3 = 540

Para calcular el MCD tomamos en cuenta solamente los factores comunes. Para calcular el MCM tomamos en cuenta todos los factores; pero los que aparecen en ambos números, los usamos una sola vez.

De esta tabla podemos desprender otra ley interesante: Si multiplicamos 60 x 108, el producto va a contener todos los factores primos enumerados en las primeras dos filas de la tabla. Si multiplicamos el MCD con el MCM, el producto consiste en todos los factores primos de las últimas dos filas. Pero vemos que el contenido de estas dos filas, en conjunto, es exactamente el mismo como de las primeras dos filas: Los factores comunes aparecen dos veces, y los factores "separados" una vez. Efectivamente, 60 x 108 = 12 x 540 = 6480.
Esta es una ley general: ***El producto del MCD y MCM de dos números es igual al producto de los números mismos.***
O escrito como fórmula: **MCD(a,b) · MCM(a,b) = a·b**.

Podemos seguir observando la tabla arriba, y encontraremos otras relaciones. Por ejemplo, ¿qué significado podemos dar a los factores "separados" o "particulares"? El número 60 tiene como "factor particular" el 5. Los otros factores del 60 son los que tiene en común con 108, o sea el MCD. En otras palabras, 60 es el producto de 5 multiplicado por el MCD: 60 = 5 x MCD.
Por el otro lado observamos que si multiplicamos el 5 por el *otro* número (el 108), obtenemos la totalidad de los factores, o sea el MCM: MCM = 5 x 108.
Con conocimientos de álgebra se puede demostrar que estas propiedades están relacionadas con la ley que hemos formulado arriba.

En las Unidades de aprendizaje exploraremos algunas otras propiedades sencillas del MCD y MCM.

Clases de residuos; congruencia modular

Cuando un número no es divisible entre otro número, la división deja un residuo. Podemos clasificar los números según el residuo que dejan al dividirlos entre un número particular; por ejemplo entre 9. Entonces el 4, el 13, el 22, el 94, etc, pertenecen a la misma "clase": todos estos son números que dejan un residuo de 4 cuando los dividimos entre 9. El matemático dice que todos estos números son "congruentes módulo 9". *(No necesitamos enseñar estos términos a los niños. Pero el concepto de la congruencia modular es útil para describir diversas leyes matemáticas.)*

Lo interesante es que estos residuos hacen siempre las mismas operaciones, o similares, como los números completos: Si sumamos dos números, sus residuos se suman. Si restamos dos números, sus residuos se restan. Si multiplicamos dos números, sus residuos se multiplican. (Para la división aplican leyes un poco más complicadas; a esas no entraremos ahora.) En esta ley se basa por ejemplo la "prueba del nueve" *(Unidad 22)*, que permite comprobar de una manera sencilla si una operación es correcta.

Por ejemplo: 22 + 94 = 116

Sus residuos módulo 9: 4 + 4 = 8

Solamente que en algunos casos, la operación con los residuos resulta en un residuo "demasiado grande" o en uno negativo. En estos casos tenemos que tomar en cuenta la congruencia modular. Como en este ejemplo:

13 x 24 = 312

Sus residuos módulo 9: 4 x 6 = 6 ¿?

Parece equivocado; sin embargo la operación es correcta: 4 x 6 = 24, y el residuo de 24 "módulo 9" es 6. Ya que 6 y 24 pertenecen a la misma clase de residuos "módulo 9", este resultado es correcto.

Igualmente en la resta: 40 – 25 = 15

Sus residuos módulo 9: 4 – 7 = 6 ¿?

No podemos restar 4 – 7. Pero estamos calculando con la "aritmética modular", entonces podemos remplazar el 4 por un número mayor que es congruente a 4; por ejemplo el 13: 13 – 7 = 6; eso es correcto. O podríamos hacer la comprobación con la operación inversa: 6 + 7 = 13, y el residuo de 13 al dividir entre 9 es 4, eso es lo que estamos esperando. (Con los niños lo haremos de esta manera, para evitar “restas imposibles” o números negativos.)

Unidad 14 - Múltiplos y divisores

Prerrequisitos:
- Multiplicación y división

Materiales necesarios:
- Material contable: piedritas, semillas, cubitos de unidad de las regletas Cuisenaire, etc.

Para los educadores

La investigación en esta Unidad ya se hizo en una Unidad opcional del nivel de *Primaria I*. Los niños que ya lo hicieron allí, pueden en su lugar hacer un breve repaso y solamente practicar los ejemplos numéricos en las preguntas c) y e), que son diferentes de los que se hicieron en *Primaria I*.

Investigación

Formamos rectángulos

Para esta actividad necesitamos algún material contable: piedritas, habas, granos de maíz, etc. También pueden hacerlo con los cubitos de unidad de las regletas Cuisenaire, si tienen suficientes.

a) Que cada uno saque un puñado de piedritas (o lo que tengan) e intente formar un rectángulo completo, usando todas las piedritas que tiene. Un rectángulo completo es un rectángulo donde cada fila contiene el mismo número de piedras:

o o o o o
o o o o o
o o o o o

O sea, un marco como este no sería un rectángulo completo:

o o o o o
o   o
o o o o o

Cuenten el número de piedritas y anoten la multiplicación que corresponde al rectángulo que encontraron. En el caso de que no encuentren solución, aumenten o quiten una piedrita, e inténtenlo nuevamente.

Intenten lo mismo con otros números de piedritas.

b) Respondan a la pregunta: ¿Es posible formar un rectángulo con cualquier número de piedritas? ¿O existen casos que no tienen solución? – Anoten ejemplos.

Nota:

Los números que permiten formar un rectángulo (donde cada lado mide por lo menos 2 piedritas), se llaman ***números compuestos***. Los números que permiten formar solamente una única fila de 1 piedrita de ancho, se llaman ***números primos***.

c) Usen ahora unos números "difíciles" de piedritas, e intenten descubrir si se puede formar con ellos un rectángulo o no (o sea, si son números primos o no).

Por ejemplo: 47, 53, 57, 61, 69, 73, 87, 91, 93, 97.

d) Busquen una manera sistemática de descubrir para cualquier número cómo se puede representar en forma de rectángulo, o si es un número primo.

(Volveremos a esta pregunta en la Unidad 16.)

Notas:

Todos los rectángulos que hemos encontrado, representan *multiplicaciones*. Por ejemplo, con 12 piedritas podemos formar un rectángulo con los lados 3 y 4, porque 3 x 4 = 12. Se dice que 12 es un ***múltiplo*** de 3, porque 12 es el resultado de una multiplicación por 3. 12 es también un múltiplo de 4.

Los múltiplos de 3 son todos los números de la tabla del 3 (continuando hasta el infinito). Igualmente, los múltiplos de 4 son todos los números de la tabla del 4.

Una fila de una sola piedrita de ancho es una multiplicación por 1: 1 x 12 = 12. Entonces el 12 es también un múltiplo de 1 y un múltiplo de 12. Cada número es un múltiplo de 1, y cada número es un múltiplo de sí mismo.

o o o o o o o o o o o o

Podemos invertir la multiplicación y escribirla como división: 12 ÷ 4 = 3, y 12 ÷ 3 = 4. Por eso se dice también: 4 es un ***divisor*** de 12, o: 12 es ***divisible*** entre 4, porque podemos dividir 12 entre 4 y sale exacto. 3 es también un divisor de 12; o sea, 12 es también divisible entre 3.

El 1 es un divisor de todos los números, porque todos los números se pueden dividir entre 1 y no queda residuo.

Cada número puede también dividirse entre sí mismo, y no queda residuo. Por ejemplo 12 ÷ 12 = 1. Entonces cada número es también un divisor de sí mismo.

Los números primos tienen exactamente dos divisores: el 1, y el número mismo. Los números compuestos tienen adicionalmente otros divisores.

Entonces ya conocemos cuatro divisores del 12: el 3, el 4, el 1, y el 12 mismo. Pero 12 es también 2 x 6. Entonces el 2 y el 6 también son divisores del 12.

e) Intenten ahora encontrar *todos* los divisores de un número. Pueden hacerlo formando rectángulos como antes. También pueden hacerlo anotando directamente, si ya se sienten seguros en eso.

Por ejemplo el 15: Ya sabemos que el 1 y el mismo 15 son sus divisores. Pero 15 es también 3 x 5. No hay otra manera de formar un rectángulo con 15 piedritas, entonces estos son todos los divisores de 15: 1, 3, 5, 15.

Inténtenlo con otros números. Por ejemplo:

24, 30, 45, 49, 51, 64, 72, 90, 126, 150, ...

f) De los números hasta 100, ¿cuáles son los que tienen más divisores?

g) De los números hasta 50, ¿cuáles son números primos? (Si tienes perseverancia, puedes investigarlo hasta 100.)

Para algunas de las preguntas hay pautas adicionales en el *Anexo A*. Pero tomen primero suficiente tiempo para investigar por ustedes mismos, antes de leer las pautas.

Vocabulario matemático

Múltiplo: Que es resultado de una multiplicación. – Por ejemplo 28 es un múltiplo de 4, porque es resultado de multiplicar 4 por 7.

Divisible: Que se puede dividir sin residuo. – Por ejemplo 15 es divisible entre 3, porque 15 ÷ 3 = 5 y no queda residuo.
Esto es sinónimo de decir que "15 es un múltiplo de 3."

Divisor: Un número entre el cual otro número es divisible. – Por ejemplo 3 es un divisor de 15, porque 15 es divisible entre 3.

Número compuesto: Número que es producto de una multiplicación, sin usar el 1 como factor. – Por ejemplo 26 es un número compuesto porque 26 = 2 x 13.

Número primo: Número que tiene solamente dos divisores: el 1 y el número mismo.

Nota: Por definición, el 1 no es ni primo ni compuesto.

Nota para los profesionales: Se sobreentiende que todas estas definiciones se refieren a números naturales. No es necesario mencionar esto para niños de este nivel.

Unidad 15 - Divisibilidad entre 2, 3, 5 y 9

Prerrequisitos:

- Conceptos de múltiplos, divisores, divisibilidad *(Unidad 14)*.
- División de números de varias cifras *(Unidades 11 y 12)*.

Materiales necesarios:

- Tarjetas de cartulina.
- *(Opcional)* Lámina adhesiva transparente.

Para los educadores

Unas partes de estas investigaciones ya se hicieron en unidades opcionales del nivel *Primaria I*. Los niños que ya lo hicieron, pueden ahora hacer solamente un repaso rápido y practicar las partes que son distintas de la investigación en *Primaria I*: los ejemplos numéricos y las preguntas c) y f).

Las investigaciones en la sección "Ampliaciones" (Divisibilidad entre 4 y entre 8) son nuevas en este nivel.

Investigación

Divisibilidad entre 2 y entre 5

Si queremos saber si un número es divisible entre 2, podemos dividirlo entre 2 y ver si hay un residuo. Pero en el caso del 2 existe una regla más sencilla. La vamos a descubrir ahora.

Anotaremos la tabla del 2 en columnas de 5 números cada una:

2 x 0 = 0	2 x 5 =___	2 x 10 =___
2 x 1 = 2	2 x 6 =___	2 x 11 =___
2 x 2 = 4	2 x 7 =___	2 x 12 =___
2 x 3 =___	2 x 8 =___	2 x 13 =___
2 x 4 =___	2 x 9 =___	2 x 14 =___ etc.

a) Ahora fíjate en cada columna en los dígitos finales de los resultados (o sea, las cifras de las unidades). ¿Qué observas? ¿Encuentras una regularidad? ¿Te ayuda eso para decir rápidamente si un número está en la tabla del 2? ¿Cuál es la regla?

b) ¿Puedes ahora decir rápidamente si los siguientes números son divisibles entre 2 o no?

102, 112, 221, 378, 997, 998, 2645, 3770, 4656

Mientras no estás seguro de la regla, comprueba tus respuestas, efectuando la división.

***c)** ¿Puedes explicar *por qué* hay esta regularidad en las cifras de unidades en la tabla del 2?

d) Una regla similar existe para la tabla del 5. Anota los números de la tabla del 5. Fíjate con qué dígitos terminan. ¿Encuentras una regularidad? ¿Cómo puedes reconocer fácilmente los números divisibles entre 5?

e) ¿Puedes ahora decir rápidamente si los siguientes números son divisibles entre 5 o no?

155, 352, 551, 670, 5523, 7815, 8630, 9005

Mientras no estás seguro de la regla, comprueba tus respuestas, efectuando la división.

***f)** ¿Puedes explicar por qué hay una regla acerca de los últimos dígitos para el 2 y el 5, pero no para otros números como el 6, el 7, el 9, el 12, ...?

Divisibilidad entre 3 y entre 9

Escribe la tabla del 3 hasta 3 x 12. Después suma las *cifras* de cada resultado, y escribe estas sumas al lado de cada número en la tabla. Por ejemplo:

3 x 4 = 12, 1+2 = 3
3 x 5 = 15, 1+5 = 6   ...etc.

g) Observa estas sumas de cifras. ¿Observas una regularidad? ¿Cómo se pueden entonces reconocer fácilmente los múltiplos de 3?

h) Continúa la tabla del 3 hasta 3 x 17 o más allá. Haz lo mismo como antes. ¿Continúa la regularidad que has observado en la pregunta g)? ¿O tienes que formularla de una manera un poco diferente? ¿Cuál es la regla para reconocer fácilmente los múltiplos de 3?

i) ¿Puedes decir rápidamente si los siguientes números son múltiplos de 3 o no?

123, 133, 345, 2001, 5856, 9473

Mientras no estás seguro de la regla, comprueba tus respuestas, efectuando la división.

j) Haz lo mismo como en las preguntas g) y h) para la tabla del 9:

9 x 2 = 18, 1+8 = 9
9 x 3 = 27, 2+7 = 9   ... etc.

¿Qué concluyes? ¿Cuál es la regla para reconocer fácilmente los múltiplos de 9?

k) ¿Puedes decir rápidamente si los siguientes números son múltiplos de 9 o no?

629, 702, 756, 969, 2799, 5379, 6561, 9854

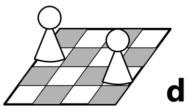
Mientras no estás seguro de la regla, comprueba tus respuestas, efectuando la división.

Hojas de trabajo

La ***Hoja de trabajo 15.1*** presenta otra oportunidad para practicar este tema.

Las instrucciones se encuentran en la hoja.

TALLER



Juego de múltiplos y divisores (con cartas)

Alisten 42 tarjetitas de cartulina. Escriban en cada tarjeta un número, según las siguientes instrucciones:
Dos tarjetas de cada uno de los números de 1 a 6.
Una tarjeta de cada uno de los siguientes números:
7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 35, 40, 42, 45, 48, 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 75, 80.

Si quieren que el juego sea un poco más difícil, pueden añadir también los siguientes números: 25, 49, 50, 84, 90, 96, 98, 100.
Pueden plastificar las tarjetas por ambos lados con lámina adhesiva transparente para que duren más.

Reglas del juego:

Las cartas se barajan y se reparten 5 a cada jugador. (Si son solamente dos o tres jugadores, pueden dar 6 ó 7 a cada uno.) Las cartas sobrantes quedan sobre la mesa como pila, con las caras hacia abajo. Los jugadores tienen sus cartas en sus manos, de manera que cada uno puede ver solamente sus propias cartas.
La primera carta de la pila se voltea y se coloca a su lado con la cara hacia arriba. Ahora, los jugadores ponen por turnos cada uno una carta sobre la carta anterior abierta. Pero se puede poner solamente un número que sea un múltiplo o un divisor de la carta anterior. Quien no tiene una carta adecuada, tiene que coger la carta superior de la pila. Si puede colocar esta carta, la pone. Si no, entonces no puede colocar ninguna carta, y continúa el siguiente jugador. Gana quien acaba primero todas sus cartas.

Ejemplo:

La última carta puesta es 14. Gustavo tiene en su mano los números 1, 4, 7, 12, 28 y 35. Puede colocar el 1 o el 7 (porque son divisores de 14), o el 28 (porque es un múltiplo de 14).

Se puede colocar un número sobre otro igual (por ejemplo un 5 sobre otro 5), porque cada número es divisor de sí mismo y también múltiplo de sí mismo.

Variaciones:
- Se puede acordar que cada uno, al poner su carta, tiene que decir la multiplicación o división correspondiente. Por ejemplo, la última carta puesta es 12. Marta coloca el 48 y dice: "12 x 4 = 48." Después Raúl coloca un 6 y dice: "48 ÷ 8 = 6." Etc.

- Si ya tienen más práctica, pueden jugar con la regla de que el jugador que pone una carta inválida (que no es múltiplo ni divisor de la carta anterior), tiene que retirarla y adicionalmente sacar una carta más de la pila.

- Pueden acordar que en vez de poner una única carta por turno, se pueden poner varias cartas seguidas, mientras cumplen con la regla.

Investigación

Divisibilidad entre 4 y entre 8

l) Escribe la tabla del 4 hasta 4 x 25 = 100. Observa: ¿Encuentras una relación entre los dígitos de unidades y los dígitos de decenas? ¿Puedes de allí establecer una regla para decir rápidamente si un número es múltiplo de 4?

m) Continúa la tabla del 4 hasta 4 x 30 o más allá. ¿Encuentras una regla útil para decir de los números mayores a 100, si son múltiplos de 4 o no?

***n)** Haz una investigación similar acerca de los múltiplos de 8. (Pauta: Investiga la tabla del 8 por lo menos hasta 8 x 25 = 200; e investiga también los números mayores a 1000 que son múltiplos de 8.)

Principios matemáticos

Reglas de divisibilidad para otros divisores

Es posible que después de estas investigaciones, los niños pregunten por reglas para la divisibilidad entre 6, entre 7, y entre otros números. Examinaremos la divisibilidad entre 6 (y entre otros números compuestos) en la *Unidad 23*.

Para la divisibilidad entre 7 se podría establecer una regla, pero resulta que esa regla es tan complicada que efectuar la división es igualmente eficaz. Por eso, la regla no tiene mucho valor, excepto como curiosidad. Por el otro lado, para números grandes existe una regla interesante para la divisibilidad "combinada" entre 7, 11 y 13. Está lejanamente relacionada con la investigación de la *Unidad 30* ("Un experimento de división").

Una regla para la divisibilidad entre 11 exploraremos en la *Unidad 25* (opcional).

Todas estas reglas se basan en nuestra forma de escribir los números con cifras, o sea, en propiedades del sistema decimal. Si usáramos en vez del 10 un número distinto como base del sistema de numeración, las reglas de divisibilidad también serían distintas. Por ejemplo en el sistema octal (base 8), nuestra "regla del 9" llega a ser una "regla del 7". Exploraremos algunas implicaciones de eso en los niveles de *Secundaria I* y *Secundaria II*.

Unidad 16 - Factorización; números primos

Prerrequisitos:
- Multiplicación y división.
- Concepto de múltiplo, divisor, número primo, número compuesto *(Unidad 14)*.

Materiales necesarios:
- Un dado.
- Material contable (piedritas, semillas, cubitos de unidad, etc.)

Para los educadores

La factorización en factores primos es difícil de representar con material concreto. Una factorización en *tres* factores se puede representar todavía en forma de un "ladrillo" tridimensional. Pero cuando son cuatro o más factores, llegamos a un límite donde las representaciones con material concreto llegan a ser casi igual de difíciles de entender como las operaciones con números.

Algunos aspectos, como por ejemplo la pregunta de investigación **b)**, pueden ilustrarse con rectángulos de piedritas. Para otros temas de investigación usamos los números mismos como "material" para observar su comportamiento.

Desarrollar sentido numérico en cuanto a los múltiplos y divisores

El sentido numérico es la capacidad de entender intuitivamente las propiedades de los números, y de formarse una imagen mental de ellos. En el nivel de *Primaria I* hemos hablado varias veces del desarrollar el sentido numérico en cuanto a las cantidades, y las operaciones básicas.
Por ejemplo, si alguien dice que 148 x 8 = 5664, una persona con sentido numérico puede decir inmediatamente que este resultado no puede ser correcto, porque está lejos del rango que se esperaría para el resultado de esta operación.

En cuanto a las factorizaciones, el sentido numérico nos permite visualizar un número como literalmente "compuesto" de sus factores primos, las que se combinan para formar factores mayores, las que a su vez se combinan para formar el número completo. Por ejemplo, podríamos imaginarnos los factores primos como pequeños ladrillos que juntos forman ladrillos más grandes, que juntos forman un muro que representa el número completo. Estaremos usando esta ilustración al introducir la factorización. Pero quizás otros niños prefieren alguna otra imagen mental. Lo importante es que encuentren *alguna* manera de imaginarse cómo "funciona" la factorización, y cómo este proceso "produce" los divisores de un número. Así entenderán más fácilmente los principios acerca de los múltiplos y divisores que introduciremos en las Unidades siguientes.

Ahora lo escribimos

Entendiendo los factores primos

En la *Unidad 14* hemos buscado *divisores* de diversos números. O, lo que es lo mismo: Hemos buscado cómo representar los números en forma de una multiplicación. Eso se llama una ***descomposición en factores***, o una ***factorización***.

Ahora llevaremos este proceso un poco más allá: Una vez que encontramos una factorización, analizamos si los factores pueden a su vez descomponerse en otros factores.

Por ejemplo: 12 = 4 x 3

Ahora, el 4 se puede escribir como 2 x 2. Entonces, juntándolo todo, tenemos:

12 = 2 x 2 x 3.

El 2 y el 3 son números primos, entonces no podemos seguir descomponiendo. Hemos descompuesto el 12 en sus ***factores primos***.

Podríamos decir que 2 = 1 x 2, y 3 = 1 x 3. Pero eso no nos aporta ninguna información nueva, porque seguimos teniendo el 2 y el 3 en la factorización. Por eso, los matemáticos se han puesto de acuerdo en que el número 1 no lo contamos entre los números primos.

De hecho, es un teorema matemático importante que para cada número existe *una única manera* de descomponerlo en factores primos. (Excepto el orden de los factores: 2 x 2 x 3 es lo mismo como 3 x 2 x 2.) Pero si admitiéramos el 1 como número primo, entonces tendríamos:

12 = 2 x 2 x 3 = 1 x 2 x 2 x 3 = 1 x 1 x 2 x 2 x 3 = ...

O sea, la factorización ya no sería única. Pero las factorizaciones que contienen el 1 no nos ayudan para nada, solamente complican el asunto. Esta es una buena razón para decidir que el 1 no lo incluimos entre los números primos.

Haremos otro ejemplo, con un número un poco más grande:

120 = 10 x 12

Pero 10 = 2 x 5, y 12 = 2 x 2 x 3 (acabamos de descubrir eso). Entonces:

120 = (2 x 5) x (2 x 2 x 3),
o de manera más ordenada:

120 = 2 x 2 x 2 x 3 x 5.

Podemos dibujar este proceso así:

<table>
<tr><td colspan="5">120</td></tr>
<tr><td colspan="2">10</td><td colspan="3">12</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>

Para descomponer un número en factores primos, podemos empezar con cualquier factorización que encontramos, y de allí seguir factorizando. Por ejemplo, llegamos al mismo resultado si comenzamos así:

120 = 8 x 15

8 = 2 x 4, 15 = 3 x 5, entonces:

120 = 2 x 4 x 3 x 5

Pero todavía no hemos terminado: 4 = 2 x 2, entonces:

120 = 2 x 2 x 2 x 3 x 5, como arriba.

Dibujándolo como arriba, esta otra operación se ve así:

<table>
<tr><td colspan="5">120</td></tr>
<tr><td colspan="3">8</td><td colspan="2">15</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">4</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr>
</table>

En vez de comenzar con una factorización cualquiera, se puede hacer también de una manera un poco más sistemática y ordenada. Eso fue la pregunta **d)** en la *Unidad 14*. Por ejemplo, podemos probar los factores posibles en orden: ¿Es el 2 un divisor de nuestro número? ¿Es el 3 un divisor? Etc.

Investigación **Pregunta a)**

¿Tenemos que probar con el 4 también? ¿Por qué sí? ¿o por qué no? – Piénsenlo bien. Si no están seguros acerca de su respuesta, pueden consultar el Anexo A.

Para los divisores 2, 3, 5 y 9 conocemos ahora unas reglas prácticas de divisibilidad que nos facilitan el trabajo *(Unidad 15)*.

Practicamos la factorización en factores primos

Practica ahora factorizar algunos otros números hasta llegar a sus factores primos. Puedes hacer tus propios ejemplos, o puedes practicar con los siguientes:

Fácil: 48, 72, 135, 245, 900, 1008, 3125, 6561, 8192, 9750.

Dificultad mediana: 343, 605, 819, 1859, 2303

Investigación ***Pregunta b)**

Supongamos que el número que queremos factorizar es primo. Entonces no será divisible entre ningún divisor que probamos. ¿Hasta dónde tenemos que probar hasta estar seguros de que el número es primo? – Por ejemplo, intentamos factorizar el 53. ¿Tenemos que probar con todos los divisores menores a 53, hasta saber que es primo? ¿O podemos detenernos antes? ¿Dónde exactamente?

(Pauta: Hagan el ejemplo del 53 con piedritas o cubitos de unidad, e intenten sistemáticamente formar un rectángulo. Observen lo que pasa con el rectángulo.)

Si descubriste esta regla, entonces puedes ahora factorizar los siguientes números "difíciles". Puedo decirte que entre estos hay dos primos; los otros son compuestos:

221, 241, 391, 403, 409, 437.

Factorizar números aleatorios

Tira un dado tres veces y anota sucesivamente los puntajes. Así obtienes un número de tres cifras. Descompón este número en sus factores primos.

Factores primos y divisores

Si conocemos los factores primos de un número, eso nos ayuda para encontrar más fácilmente sus divisores. Investiga la relación entre los factores primos y los divisores.

Por ejemplo con el número 18:

Sus factores primos son: 18 = 2 x 3 x 3.

Sus divisores son: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Investigación

Pregunta c)

Examina los números arriba. ¿Cómo se relacionan los divisores de 18 con los factores primos de 18?

O sea, si conocemos los factores primos de un número, ¿cómo podemos encontrar sus divisores?

Si descubres el principio, pruébalo con otros números. Haz unos ejemplos propios, o usa los números del ejercicio anterior. Encuentra y anota todos los divisores de esos números.

Si has intentado por mucho tiempo encontrar este principio y no lo descubres, puedes consultar el *Anexo A*.

Vocabulario matemático

Factorizar o **factorar:** Descomponer en factores.

Factor primo: Número primo que es un factor (resp. divisor) de un número dado.

Ampliaciones

Encontrar todos los números primos hasta 100 o más allá – La criba de Eratóstenes

En la *Unidad 14* preguntamos cuáles son los números primos hasta 50, o hasta 100. Habrás visto que esto es mucho trabajo si intentamos factorizar cada número aparte. Pero existe un método más fácil para eso. Fue descubierto por Eratóstenes, un matemático griego que vivía hace más de 2000 años. Su método funciona así:

Primero escribimos en orden los números que deseamos evaluar, desde 1 hasta donde queremos. En este ejemplo lo haremos hasta 100:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ahora comenzamos al inicio. El 1 pasamos por alto, porque no es primo ni compuesto. El 2 es primo, podemos marcarlo con un círculo. Ahora sabemos que todos los múltiplos de 2, excepto el 2 mismo, son compuestos. Entonces los tachamos:

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

El 3 no está tachado, entonces es primo. Lo marcamos con un círculo, y tachamos todos los múltiplos de 3 después del 3:

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Algunos números son múltiplos de 2 y también de 3, entonces los hemos tachado doblemente, pero eso no hace daño.

El siguiente número sin tachar es el 5, entonces es primo. Lo marcamos con un círculo, y tachamos los otros múltiplos de 5:

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

El siguiente número primo es 7. Lo marcamos con un círculo, y tachamos los otros múltiplos de 7:

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Ahora el 8, el 9 y el 10 están tachados; el siguiente número primo es 11. Lo marcamos, y tachamos los otros múltiplos de 11.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Pero si has observado bien, te habrás dado cuenta de que todos estos múltiplos de 11 ya estaban tachados. El 22, el 44, el 66 y el 88 los hemos tachado con los múltiplos de 2; el 33 y el 99 con los múltiplos de 3; el 55 con los múltiplos de 5; y el 77 con los múltiplos de 7. Tachar los múltiplos de 11 no nos aporta ninguna información nueva. Esto significa que hemos terminado: Todos los números compuestos están tachados, y los que sobran son los números primos.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Investigación

Pregunta d) *Si hubiéramos escrito números mayores (hasta 200, o hasta 300), ¿cuál sería el primer múltiplo de 11 que hubiera quedado sin tachar?*

Pregunta e) *¿Por qué sabemos que con el 11 hemos terminado? O sea, si todos los múltiplos de 11 ya están tachados, ¿cómo sabemos que también los múltiplos de 13, de 17, etc. ya están todos tachados?*

Una ley matemática acerca de los divisores

Investiga la siguiente propiedad:

12 es un divisor de 60.

1, 2, 3, 4, 6 y 12 son divisores de 12.

Pregunta f) *¿Son todos estos números también divisores de 60?*

Pregunta g) *¿Es eso siempre así? O sea, si un número tiene un divisor, y ese divisor tiene otros divisores, ¿son esos otros divisores siempre a la vez divisores del primer número? ¿Puedes fundamentar* ***por qué*** *sí, o por qué no?*

Patrones interesantes en los números primos

Si hiciste la actividad anterior (Criba de Eratóstenes), observa la secuencia de los números primos. Parece que no obedecen a ninguna regularidad. Aun conociendo todos los números primos hasta 100, no podemos predecir cómo continuará la secuencia. Las propiedades de los números primos son tan complicadas que hasta hoy, los matemáticos profesionales siguen investigándolos.

Sin embargo, hay algunas propiedades que tú ya puedes investigar ahora. Si lo hacen en un grupito de dos o tres personas, pueden ayudarse unos a otros.

Haz una tabla de seis columnas. Escribe dentro de esta tabla los números de 1 a 60 sucesivamente: en la primera fila los de 1 a 6, en la segunda fila los de 7 a 12, etc, un número por columna.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	...				

Ahora marca con círculos todos los números primos. Puedes copiarlos de la actividad anterior. O si quieres, puedes aplicar la "Criba de Eratóstenes" una vez más. Eso puede ayudarte para responder a las preguntas que siguen.

Pregunta h) *¿En cuáles de las columnas se encuentran los números primos? ¿Puedes explicar* ***por qué*** *se encuentran exactamente allí?*

Pregunta i) *Los números primos de la primera fila son diferentes de las otras filas. ¿Por qué?*

Hagamos ahora el mismo experimento otra vez, pero con una tabla de 30 columnas. Para poder observar bien lo que sucede, tendrás que escribir por lo menos 5 filas, o sea hasta 150. Aun mejor si continúas hasta 300. Escribe los números y marca los números primos, como en el experimento anterior.

Pregunta j) *¿En cuáles de las columnas se encuentran ahora los números primos? ¿**Por qué** se encuentran en estas columnas, y no en otras?*

Pregunta k) *Aquí también, los números primos de la primera fila son diferentes de las otras filas. ¿Por qué?*

Pregunta l) *Tomando en cuenta solamente los números primos mayores a 10: ¿Con cuáles cifras de unidades puede terminar un número primo? ¿Con cuáles no? ¿Por qué no?*

****Pregunta m)*** *Este experimento funciona bien con 6 columnas y con 30 columnas, porque el 6 y el 30 son números especiales. Con 7 ó con 11 columnas no funcionaría igual. ¿Qué hay de especial en el 6 y en el 30?*

Principios matemáticos

¿Leyes matemáticas o convenciones?

En esta Unidad mencionamos que los matemáticos se pusieron de acuerdo para no incluir el 1 entre los números primos. Eso puede haber dado la impresión de que los matemáticos pueden decidir de manera más o menos arbitraria qué es correcto en la matemática y qué no. ¡Pero eso no es así!

La decisión mencionada fue necesaria porque había una ambigüedad en la definición de los números primos. Si definimos los números primos como "los números que no son compuestos", entonces el 1 sería definido como primo. Pero si definimos los números primos como "los números que tienen exactamente dos divisores (el 1 y el número mismo)", entonces el 1 no sería primo, porque tiene un único divisor. Ahora, resultó más práctico preferir la segunda definición, porque así diversos teoremas pueden formularse de una manera más sencilla. Por ejemplo el Teorema Fundamental de la Aritmética que mencionamos en el Taller (que cada número tiene una única descomposición en factores primos).

Pero esta definición no altera ninguna de las propiedades matemáticas de los números. El 1 sigue teniendo un único divisor, y el 7 sigue teniendo dos divisores. La definición de que "el 1 no es primo" no es ningún teorema, no es ninguna ley de la matemática. Es solamente una *convención* (un acuerdo) acerca de los términos que usamos al hablar de la matemática. Como tal, no expresa ninguna verdad matemática; solamente expresa un acuerdo común acerca de la *comunicación* de la matemática.
Es cierto que con un cambio de la definición, se deben también hacer unos cambios en la forma como expresamos ciertos teoremas. Por ejemplo, en el siglo 19, cuando los matemáticos todavía incluían generalmente el 1 entre los números primos, era necesario añadir al Teorema Fundamental de la Aritmética una aclaración de que los factores primos tenían que ser *distintos de 1*. Pero eso es tampoco una alteración de la ley matemática; es solamente un cambio en nuestra forma de *expresar* la ley matemática – un asunto de comunicación.

Las verdades matemáticas en sí nunca cambian, y no pueden alterarse por una decisión de los matemáticos. Eso es lo hermoso de la matemática: No nos obliga a someternos a algún "experto", porque sus leyes son eternas y nadie las puede cambiar. Aun un niño (si sabe pensar lógicamente) puede descubrirlas; y aun el matemático más influencial tiene que someterse a ellas. Lo único que puede cambiar a lo largo del tiempo, son nuestras convenciones acerca de las palabras y los símbolos que usamos para *comunicar* la matemática.

Matemática divina

Los "elementos" que componen los números

Parece ser un principio de la creación de Dios, que todo se compone de ciertas piezas fundamentales o "bloques de construcción". Así por ejemplo la materia se compone de elementos químicos, y estos a su vez se componen de partículas elementales (electrones, protones, etc). Nosotros los humanos usamos este mismo principio: construimos casas de ladrillos; componemos máquinas de muchas piezas individuales; etc.

Algunos pensadores han dicho que en eso se refleja la misma naturaleza de Dios, porque él mismo es uno, y sin embargo hay en él varias "partes" o "personas": Dios el Padre, Jesús el Hijo, y el Espíritu Santo. Así también su creación consiste en muchas "piezas", y sin embargo forman una unidad.

Y así también en la matemática, en cierto sentido los factores primos son como los "elementos" que conforman los números. Así como un científico entiende mucho acerca de las propiedades de una sustancia cuando conoce su composición química, un matemático entiende mucho acerca de las propiedades de un número cuando conoce su descomposición en factores primos. Por eso, los números primos y las factorizaciones son un campo muy importante de la investigación matemática.

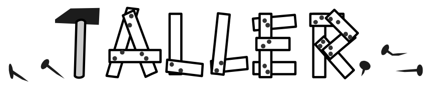
¿A dónde vamos desde aquí?

Si desean continuar con el tema de las factorizaciones y divisores, pueden anticipar la *Unidad 24*, "Diagramas de divisores". De otro modo pueden pasar a la siguiente Unidad *(17)*.

Unidad 17 - Divisores comunes

Prerrequisitos:
- Múltiplos, divisores, y factorización *(Unidades 14 y 16)*.

Materiales necesarios:
- Galletas, caramelos, o similares.
- Cartulina.
- Cartón o madera contrachapada (triplay), goma, tijera, sierrita.



Experiencias prácticas con divisores comunes

Repartir galletas

Puede ser un poco difícil encontrar situaciones de la vida diaria relacionadas con divisores comunes. Pero podemos crear unas experiencias donde tenemos que usar este concepto. Por ejemplo, compren galletas de naranja y de chocolate, y hagan lo siguiente:

Tenemos 42 galletas de naranja y 24 galletas de chocolate. Queremos repartirlas en bolsas que contengan ambos tipos de galletas, pero de manera que las galletas de cada tipo estén repartidas por partes iguales. O sea, cada bolsa debe contener el mismo número de galletas de naranja; y cada bolsa debe contener el mismo número de galletas de chocolate. Y no queremos que sobren galletas. ¿Con cuántas bolsas funciona eso?

Por ejemplo, podríamos usar solamente 2 bolsas. Entonces ponemos en cada bolsa 21 galletas de naranja y 12 galletas de chocolate.
Pero suponiendo que vamos a dar cada bolsa a un niño, no queremos dar tantas galletas a solamente dos niños; queremos que más niños puedan comer galletas. ¿Se puede hacer con un número mayor de bolsas?

Probando, quizás encuentran que funciona también con 3 bolsas. En este caso, ¿cuántas galletas de cada tipo tenemos que poner en una bolsa?

¿Y funciona también con más bolsas?

Podemos seguir probando; o podemos analizar el problema matemáticamente.

Puesto que queremos repartir por partes iguales, el número de bolsas debe ser un *divisor* del número de galletas. Pero la división debe funcionar con ambos tipos de galletas; o sea con el número 42 y también con el número 24. Entonces el número de bolsas debe ser un *divisor común* de 42 y de 24: Tiene que ser divisor de 42 y también de 24.

Ya hemos visto que el 2 y el 3 son divisores comunes de 42 y 24. ¿Hay otros?

Podríamos anotar todos los divisores de 42, y todos los divisores de 24. Después podemos comparar cuáles son los divisores que aparecen en ambas listas. Esos son los divisores comunes. Anoten, comparen, y saquen sus conclusiones.

Otro problema similar que pueden practicar de manera concreta:

Cortar tarjetitas

Tenemos dos tiras de cartulina del mismo ancho. Una tiene 360 mm de largo y la otra 495 mm. (Corte las tiras de antemano para tenerlas listas.) Queremos cortarlas en tarjetitas del mismo tamaño, sin que sobre algo. ¿Cuán grandes podemos hacer las tarjetitas?

Aquí no podemos "probar" como con las galletas, porque una vez que la cartulina está cortada, ya no podemos unir las partes si nos hemos equivocado. Entonces tenemos que calcular primero.

Podríamos como en el primer ejemplo anotar todos los divisores de 360, y todos los divisores de 495. Pero eso es ahora más difícil, porque tenemos números más grandes, y quizás pasamos por alto algunos divisores. En la *Unidad 24* aprenderemos un método para enumerar los divisores de manera sistemática. Pero ahora todavía no necesitamos ocuparnos de eso, porque vamos a aprender un camino más fácil donde no es necesario saber todos los divisores.

¿Se acuerdan que los divisores de un número tienen que ver con sus factores primos? Para encontrar todos los divisores de 360 y de 495, será entonces recomendable descomponer estos números en factores primos. Así vamos a encontrar sus divisores comunes.

Para entender el siguiente paso, hay que hacer un razonamiento más abstracto:

Si dos números tienen un divisor común, entonces tienen en común también todos los factores primos de ese divisor. Por ejemplo, 14 es un divisor de 42 y también de 70. Pero 14 es 2 x 7. Entonces el 2 y el 7 tienen que ser factores primos de 42, y también de 70.

Esto funciona también "al revés": Si queremos saber los divisores comunes de dos números, es suficiente examinar sus factores primos comunes. Y si queremos encontrar el *mayor* de los divisores comunes, entonces tenemos que usar *todos* los factores primos comunes.

En nuestro ejemplo de las tiras de cartulina:

360 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5
495 = 3 x 3 x 5 x 11

Los dos números tienen en común dos veces el factor 3, y una vez el factor 5. Entonces, todas las combinaciones de estos factores son divisores comunes. Por ejemplo 9 es un divisor común, porque 3 x 3 = 9. 15 es un divisor común, porque 3 x 5 = 15. Y por supuesto que el 3 y el 5 son divisores comunes (y también el 1, porque el 1 es divisor de todo número).
El mayor de todos los divisores comunes es el producto de *todos* los factores primos comunes: 3 x 3 x 5 = 45. Podemos entonces cortar tarjetitas de 45 mm de largo.

Introducimos el concepto del MCD

En muchos problemas se trata de encontrar el *mayor* de todos los divisores comunes, o sea el ***máximo común divisor*** (abreviado ***MCD***). En el ejemplo de las galletas y las bolsas, el mayor número de bolsas que se pueden usar es el MCD de 42 y de 24. En el ejemplo de las tiras de cartulina, la mayor longitud de tarjetitas que se pueden cortar es el MCD de 360 y de 495.

En algunos casos es fácil ver cuál es el MCD. Por ejemplo, ¿cuál es el MCD de 30 y de 70? – Ambos números están en la tabla del 10. Los otros factores son 3 para el 30 y 7 para el 70, esos ya no tienen divisores comunes. Entonces el MCD es 10. Podemos escribir: MCD(30, 70) = 10.

Cuando el MCD no se puede "ver" directamente, entonces tenemos que descomponer los números en factores primos. Por ejemplo, MCD(385, 924) = ¿?

Factorizando, encontramos los siguientes factores primos:
385 = 5 x 7 x 11
924 = 2 x 2 x 3 x 7 x 11
Los factores comunes son 7 x 11, entonces MCD(385, 924) = 77.

- Si no encontramos ningún factor común, ¿cuál es en ese caso el MCD?

Vocabulario matemático

Divisor común: Que es divisor de dos o más números a la vez.
Ejemplo: 3 es un divisor común de 12, 15 y 300.

Máximo común divisor (MCD): El mayor de todos los divisores comunes de dos o más números.
Ejemplo: 12 y 18 tienen los divisores comunes 1, 2, 3 y 6. El mayor de ellos es el 6; entonces 6 es el MCD de 12 y 18.

Primos entre sí (PESI): Números que no tienen ningún divisor común excepto el 1. O sea, su MCD es 1.

Por ejemplo, MCD(25, 42) = ¿?
25 = 5 x 5
42 = 2 x 3 x 7
Los dos números no tienen ningún factor en común. ¿Cuál es su MCD?

Hemos visto anteriormente que el 1 es un divisor de todo número. 1 es un divisor de 25, y es también un divisor de 42. El 1 es entonces un divisor común de 25 y 42. Y es el mayor de todos los divisores comunes, porque no hay otro. Entonces, MCD(25, 42) = 1.

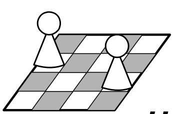
Cuando dos números no tienen otro divisor común excepto el 1, se dice que los dos números son ***"primos entre sí"*** (abreviado ***"PESI"***). 25 y 42 son PESI. Si dos números son PESI, su MCD es 1, y vice versa.

Dos números pueden ser compuestos y sin embargo "primos entre sí". Como en el ejemplo arriba: 25 y 42 son ambos compuestos; pero son PESI.

Para practicar

Encuentren el MCD de los siguientes pares de números:

18 y 24, 45 y 120, 38 y 76, 48 y 70, 49 y 50, 64 y 200, 102 y 255, 75 y 125.



Juego de múltiplos y divisores (tipo Scrabble)

Hoja de trabajo 17.1-4

Corta las dos mitades del tablero (Hojas de trabajo 17.1 y 17.2) por la línea punteada al margen derecho resp. izquierdo. Alista un tablero de cartón o cartulina de 40 x 28 cm y pega ambas hojas de trabajo encima, lado a lado, de manera que se junten por las líneas punteadas.

Pega las Hojas de trabajo 17.3 y 17.4 cada una sobre un pedazo de cartón grueso o madera contrachapada (triplay). Fíjate que la goma cubra todas las partes detrás de los números, para que no se despeguen cuando estén cortados. Corta las fichas de números por las líneas.

Reglas del juego: Todas las fichas se dispersan sobre la mesa, con la cara abajo. Cada jugador coge 5 múltiplos (las fichas grandes) y 10 divisores (las fichas pequeñas). (Alternativamente se pueden colocar todas las fichas en una bolsa no transparente, y los jugadores sacan sus fichas de la bolsa sin mirar adentro.) Además, alguien saca un múltiplo adicional y lo coloca sobre el tablero en el cuadro del centro (el que está marcado con un borde grueso).

Por turnos, cada jugador coloca *uno* de sus múltiplos sobre uno de los cuadros grandes vacíos del tablero, adyacente a uno de los múltiplos ya colocados (o sea, que quede un único cuadro pequeño entre los dos múltiplos). Las fichas se colocan solamente sobre los cuadros blancos; los cuadros sombreados quedan vacíos. – En el mismo turno, el mismo jugador tiene que colocar también en cada cuadro pequeño vacío entre dos múltiplos, uno de sus divisores; pero de manera que sea divisor de *ambos* múltiplos adyacentes. Si no puede hacer eso, entonces no puede colocar el múltiplo. Si no tiene ninguna posibilidad de colocar fichas según la regla, pierde su turno.

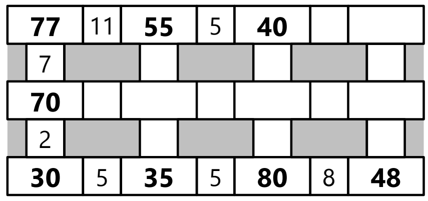
Mientras queden fichas cubiertas sobre la mesa (resp. en la bolsa), cada jugador, después de su turno, completa desde allí sus fichas, de manera que tenga nuevamente 5 múltiplos y 10 divisores.

El juego termina cuando se acaban las fichas, o cuando ningún jugador puede hacer una jugada válida.

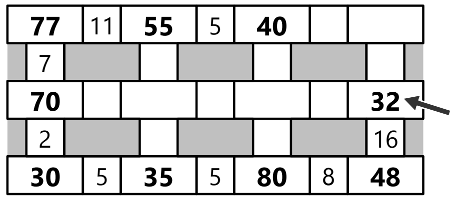
Anotar puntos: Si juegan por puntos, se anotan en cada turno para el jugador respectivo, según los divisores que colocó:
- Si colocó un solo divisor, el puntaje es el valor del divisor.
- Si colocó dos divisores, el puntaje es la suma de los dos divisores, multiplicada por 2.
- Si colocó tres divisores, el puntaje es la suma de los tres divisores, multiplicada por 5.
- Si colocó cuatro divisores, el puntaje es la suma de los cuatro divisores, multiplicada por 15.

Los múltiplos no valen puntos, solamente los divisores.

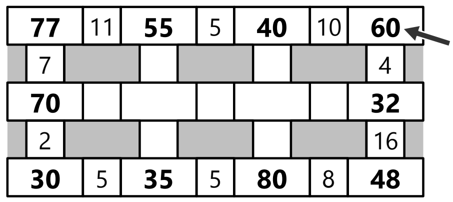
Ejemplos:



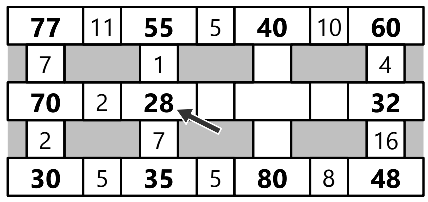
Así quedó el juego antes del turno de Pablo.



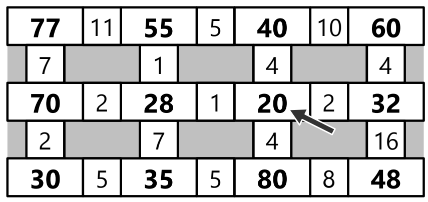
Pablo colocó el múltiplo 32 y el divisor 16:
16 puntos.



Miriam colocó el múltiplo 60 y los divisores 10 y 4: (10+4) x 2 = 28 puntos.

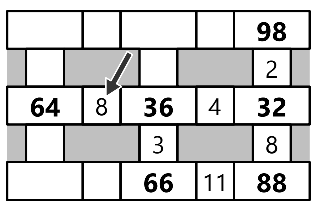


Paula colocó el múltiplo 28 y los divisores 1, 2 y 7: (1+2+7) x 5 = 50 puntos.

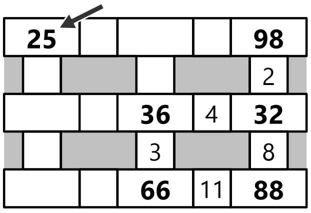


Martín colocó el múltiplo 20 y los divisores 4, 1, 2 y 4: (4+1+2+4) x 15 = 165 puntos.

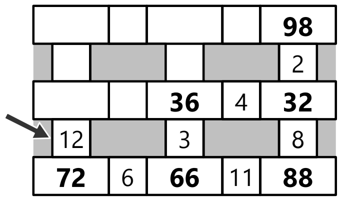
Las siguientes jugadas son inválidas:



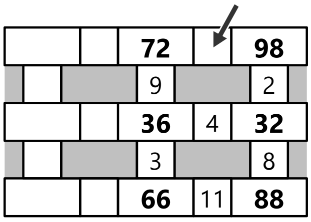
Jorge colocó el 8 que es divisor de 64, pero no de 36. Tiene que ser un divisor de *ambos* múltiplos adyacentes.



Nidia colocó su múltiplo 25 alejado de los otros múltiplos, de manera que no se puede colocar ningún divisor. Los múltiplos tienen que ser adyacentes.



Mario colocó el divisor 12 en una posición inválida: Cada divisor tiene que ponerse entre dos múltiplos.

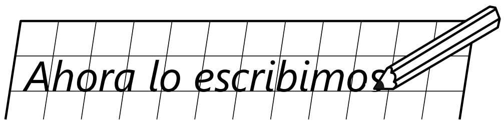


Braulia colocó el múltiplo 72 y el divisor 9 correctamente, pero dejó vacío el cuadro entre el 72 y el 98. En *cada* cuadro que queda entre dos múltiplos adyacentes, se debe colocar un divisor.

Variaciones del juego:

- Se puede acordar como regla adicional, que un jugador puede decidir renunciar a su turno y en su lugar cambiar *todas* sus fichas por otras desde la mesa (resp. de la bolsa). En este caso no puede colocar fichas ni anotar puntos. Eso es a veces una ayuda cuando alguien tiene fichas muy "difíciles".

- Se puede acordar que los múltiplos no tienen que colocarse en posición adyacente; se pueden también colocar lejos de los otros múltiplos. En este caso, el jugador no coloca ningún divisor y no anota ningún punto. (Con esta regla, el juego es más fácil al inicio, pero mucho más difícil hacia el final.)



Diferentes formas de anotar las factorizaciones

El proceso de comparar los factores primos puede anotarse de varias maneras. No debemos insistir en un "único procedimiento correcto". Lo importante es el *principio*: ***El MCD es el producto de todos los factores primos comunes.*** Que cada alumno escoja la notación que le ayuda mejor para encontrar estos factores comunes.

La notación más transparente consiste en escribir ambas factorizaciones en orden. Por ejemplo para encontrar el MCD de 252 y 462:

252 = 2 x 2 x 3 x 3 x 7
462 = 2 x 3 x 7 x 11

Después marcamos los factores comunes y los multiplicamos:

252 = **2** x 2 x **3** x 3 x **7**
462 = **2** x **3** x **7** x 11
MCD (252, 462) = 2 x 3 x 7 = 42.

Si queremos hacerlo de una manera un poco más ordenada, podemos anotar los factores en una tabla, los factores comunes aparte y los factores "particulares" de cada número aparte:

252 =	2 x 3 x 7	x 3 x 3	
462 =	2 x 3 x 7		x 11
MCD =	2 x 3 x 7 = 42		

De manera similar podemos anotar las factorizaciones verticalmente. Así es un poco más fácil anotar también los factores intermedios en la misma tabla. Por ejemplo como abajo: Debajo de cada número, la columna izquierda contiene sus factores primos, y la columna derecha los resultados parciales. (Usamos estos resultados parciales para continuar con el proceso de factorización. Para encontrar el MCD ya no son necesarios; para eso nos fijamos únicamente en los factores primos.)

252		462	
2	126	**2**	231
2	63	**3**	77
3	21	**7**	11
3	7	11	
7			

El procedimiento escolar usual es un poco más eficiente porque no requiere una factorización completa; pero es menos transparente. Si queremos usarlo, tenemos que asegurar que los alumnos entiendan el razonamiento detrás del procedimiento, para que no lo apliquen mecánicamente sin entender lo que hacen.

Este procedimiento consiste en dividir ambos números *simultáneamente* entre los factores comunes que encontramos. Los factores comunes se anotan a la derecha; los resultados de las divisiones debajo de los números respectivos. Esto se repite hasta ya no encontrar ningún factor común:

252	462	2
126 42 6	231 77 11	3 7

Vemos que el 6 y el 11 ya no tienen ningún factor en común, entonces hemos encontrado todos los factores comunes. O sea, el 6 y el 11 son PESI. Como en los procedimientos anteriores, multiplicamos los factores comunes para obtener el MCD: 2 x 3 x 7 = 42.

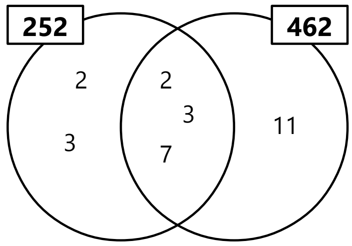
Observando esta tabla, podemos deducir la siguiente ley matemática:

Si dividimos dos números entre su MCD, los resultados son PESI.

Explicación: En este procedimiento estamos dividiendo ambos números sucesivamente entre sus factores comunes. Los últimos números en cada columna son entonces los resultados de dividir entre el producto de *todos* los factores comunes; o sea, son los resultados de dividir entre el MCD. Efectivamente, 252 ÷ 42 = 6, y 462 ÷ 42 = 11.

6 y 11 tienen que ser PESI, porque si no lo fueran, tendrían otro factor común y continuaríamos el proceso, y entonces 42 no sería el MCD.

Si conocemos los factores primos de dos números, podemos graficarlos también en forma de un diagrama de Venn:



El conjunto a la izquierda contiene los factores de 252; el conjunto a la derecha contiene los factores de 462. La intersección contiene los factores comunes, o sea los factores del MCD.

(Nota: Esta forma de enumerar los factores no corresponde exactamente a los principios de la teoría de conjuntos, porque en un conjunto en el sentido estricto no se puede repetir un mismo elemento. Si alguien quisiera ver en esto una razón para objetar contra el diagrama mostrado, entonces tendríamos que dar identidades distintas a los factores repetidos. Podríamos distinguirlos con colores y decir por ejemplo que el 2 en la intersección es el "2 rojo", y el 2 al lado izquierdo es el "2 verde".)

Ampliaciones

Abreviar el método cuando podemos "ver" divisores mayores

Si nuestra única meta es encontrar el MCD, entonces no es necesario encontrar todos los factores primos. Quizás hay unos divisores mayores que podemos ver inmediatamente; entonces podemos calcular con esos.

Un ejemplo sencillo: ¿Cuál es el MCD de 200 y 300? – Podemos ver inmediatamente que ambos números son múltiplos de 100. Entonces tenemos:

200 = **<u>100</u>** x 2
300 = **<u>100</u>** x 3

O con la notación del procedimiento escolar:

200	300	100
2	3	

2 y 3 ya no tienen ningún divisor común, entonces hemos terminado. El MCD es 100.

Otro ejemplo: ¿Cuál es el MCD de 108 y 144? – Si conocemos la tabla del 12, vemos inmediatamente que ambos números son múltiplos de 12. Entonces podemos calcular así:

108 = 12 x 9 = **<u>12</u>** x **<u>3</u>** x 3
144 = 12 x 12 = **<u>12</u>** x **<u>3</u>** x 4

Respectivamente:

108	144	12
9 3	12 4	3

En el último caso, todavía no hemos terminado después de dividir entre 12, porque el 9 y el 12 tienen otro divisor común, el 3. El MCD es entonces 12 x 3 = 36.

Para practicar

Encuentren el MCD de los siguientes pares de números:

378 y 594, 143 y 195, 505 y 808, 62 y 226, 159 y 161, 600 y 960, 88 y 888, 625 y 1125.

¿A dónde vamos desde aquí?

Si les interesa conocer un método alternativo para encontrar el MCD, pasen a la siguiente Unidad *(18)*. De otro modo pueden saltar directamente a la *Unidad 19*.

Unidad 18 - El algoritmo de Euclides, y por qué funciona

Prerrequisitos:
- Concepto del MCD *(Unidad 17)*.

Materiales necesarios:
- Regletas Cuisenaire.

Para los educadores

Esta pequeña Unidad es opcional. Introduce un método alternativo para encontrar el MCD, un método que ya fue conocido por los antiguos griegos hace 2000 años, y que no requiere factorizaciones.

TALLER

Un experimento con números

Comienza con los números 105 y 165. Calculamos la diferencia entre los dos:

165 – 105 = 60

Ahora calculamos la diferencia entre 60 y el número menor de los otros:

105 – 60 = ...

Nuevamente calcula la diferencia entre el resultado y el número menor de los otros (o sea, 60). Continúa así, calculando diferencias, hasta que llegues a cero.

Ahora observa el último número de tu cálculo, antes de llegar a cero. Este número es el MCD de 105 y 165. Compruébalo con el método que aprendiste en la Unidad anterior *(17)*.

Haz lo mismo con otros pares de números. Por ejemplo:

51 y 69, 192 y 320, 36 y 25, 264 y 168.

O inventa tus propios ejemplos.

Encontrarás que siempre la última diferencia antes de llegar a cero es el MCD de los dos números. Compruébalo con el método de factorización.

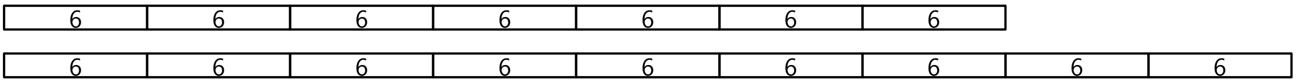
* *¿Puedes explicar por qué funciona esto?*

Este método de calcular el MCD se llama ***el algoritmo de Euclides.*** Fue descrito por primera vez por Euclides, un matemático griego que vivía hace más de 2000 años. Él descubrió este método al investigar las propiedades de los múltiplos y divisores. A continuación daremos una explicación. Pero antes de leerla, ¡intenta tú mismo descubrir por qué funciona!

El algoritmo de Euclides puede ser práctico cuando tienes que calcular el MCD de unos números que son difíciles de factorizar.

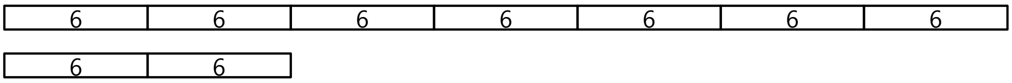
Una explicación del algoritmo de Euclides

Saca unas regletas Cuisenaire del mismo color; por ejemplo regletas de 6. Formamos dos "trenes" con estas regletas; digamos un tren de 7 regletas y otro de 9 regletas.

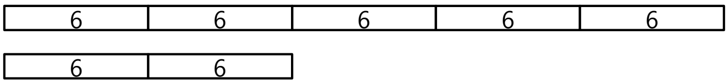


Ambos trenes representan múltiplos de 6. O sea, el 6 es un divisor común de estos dos números.

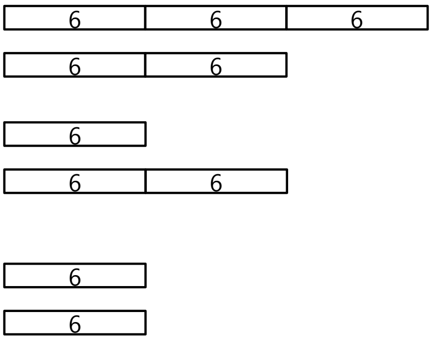
Calculamos ahora la diferencia: Quitamos del tren largo lo que corresponde a la longitud del tren corto. Lo que sobra es la diferencia.



Calculamos de la misma manera la diferencia entre el tren corto y lo que quedó del tren largo:



Continuamos hasta que nos queden dos "trenes" iguales.



Efectivamente nos quedamos al final con una regleta de 6, el divisor común de los dos números. Si los dos números iniciales están compuestos de regletas de 6, es obvio que sus diferencias también deben ser compuestas de regletas de 6.

Esto se aplica a cualquier divisor común de los dos números. Por eso, al final deben quedar *todos* los divisores comunes, o sea el MCD.

Esta es la ley matemática que explica por qué funciona el algoritmo de Euclides. Podemos formularla un poco más exactamente así:

La diferencia entre dos múltiplos de un número es un múltiplo del mismo número.

Y de la misma manera podríamos demostrar también que:

La suma de dos múltiplos de un número es un múltiplo del mismo número.

O sea, si sumamos o restamos múltiplos de 8, el resultado siempre va a ser también un múltiplo de 8. Si sumamos o restamos múltiplos de 13, el resultado también será un múltiplo de 13. Y así para cualquier número.

Ampliaciones

Para practicar

Encuentren el MCD de los siguientes pares de números. Analícenlos primero, para hacerlo de la manera más práctica (con el algoritmo de Euclides, o factorizando):

256 y 800,	972 y 864,	119 y 812,
600 y 975,	616 y 765,	891 y 2187,
984 y 1845,	7000 y 8500,	5000 y 8001.

Principios matemáticos

El algoritmo de Euclides abreviado

El algoritmo de Euclides se puede abreviar en algunos casos, si en vez de la diferencia de los dos números usamos *el residuo de la división* del mayor entre el menor. Eso es ventajoso sobre todo si uno de los números es mucho mayor que el otro. Por ejemplo, si tenemos los números 35 y 231, podríamos repetidas veces restar 35 del número mayor, hasta que la diferencia sea menor a 35:

231 – 35 = 196,   196 – 35 = 161,   161 – 35 = 126,
126 – 35 = 91,   91 – 35 = 56,   56 – 35 = ***21***.

Pero podríamos igualmente dividir 231 ÷ 35 = 6 R.***21***, y seguir calculando con el residuo. Eso tiene el mismo efecto, porque en la división con residuo, el cociente nos dice "cuántas veces podemos restar el divisor", y el residuo nos dice cuánto sobra, después de restar el divisor "tantas veces".

No hemos presentado esta alternativa en las explicaciones para los alumnos, porque es un poco más difícil de entender y de demostrar con regletas. Pero si desean, pueden explorar este tema juntos: ¿Por qué la división con residuo es "muchas restas en una"? ¿Por qué llegamos con ambos procesos al mismo residuo?

El mismo principio funciona también "al revés": Si tenemos que dividir entre un número un poco "complicado", y vemos que el cociente debe ser pequeño, entonces podemos en su lugar restar repetidas veces. Por ejemplo, si nos toca dividir 4949 ÷ 1424:

4949 – 1424 = 3525
3525 – 1424 = 2101
2101 – 1424 =   677

entonces el cociente es 3 (porque hemos restado 3 veces), y el residuo es 677.

Unidad 19 - Múltiplos comunes

Prerrequisitos:
- Múltiplos, divisores, y factorización *(Unidades 14 y 16)*.

Materiales necesarios:
- Regletas Cuisenaire.

Para los educadores

Como en el tema de los divisores comunes, también para los múltiplos comunes no ocurren frecuentemente situaciones de la vida diaria que permiten practicarlo. Por tanto puede ser necesario crear "artificialmente" algunas de esas situaciones, como las sugeridas en el Taller.

TALLER

Patrones de tejido

Los trabajos de tejer son muy relacionados con la matemática. Constantemente hay que contar puntos y hacer los cálculos respectivos.

Considere la siguiente situación: En un tejido se combinan dos patrones diferentes. Una parte se teje con un patrón que se repite cada 6 puntos; y otra parte más arriba se teje con un patrón que se repite cada 8 puntos. El tejido debe medir alrededor de 75 puntos; pero queremos que ambos patrones se repitan completamente sin que sobre o falte nada.

Que los niños piensen y conversen por algún tiempo, cómo resolverían este problema. Si no llegan a ninguna conclusión, tendremos que ayudarles un poco:

Para que el patrón de 6 puntos se repita completamente, el número de puntos tiene que ser un múltiplo de 6. Y para que el patrón de 8 puntos se repita completamente, tiene que ser un múltiplo de 8. Buscamos entonces un número cercano a 75 que sea un múltiplo de 6 y a la vez un múltiplo de 8. (Podemos en este momento introducir de manera informal un término técnico: Buscamos un *múltiplo común* de 6 y de 8.)
Así quizás ya encuentran la respuesta. Si no, entonces habrá que anotar los números de la tabla del 6 y de la tabla del 8 (ambas tablas por lo menos hasta 80), y comparar cuáles números aparecen en ambas tablas.

Podemos hacer ejemplos con otros números: ¿Cuántos puntos servirían para un patrón que se repite cada 9 puntos, y otro que se repite cada 15 puntos? ¿O uno de 4 puntos y uno de 7 puntos?

Coincidencia de fechas

Durante algún tiempo, una señora llegaba cada tres días a nuestra casa para traernos leche. En cierta semana nos trajo leche el día miércoles. ¿Después de cuántos días será la próxima vez que la señora viene en un miércoles?

Quizás habrá que dibujar un pequeño calendario para entender la situación. Por ejemplo así:

Mié	Jue	Vie	Sáb	Dom	Lun	Mar	Mié	Jue	Vie
X			X			X			X

Hemos marcado con una X los días cuando la señora viene a traer leche. Habrá que continuar el calendario hasta la próxima vez que tengamos un miércoles marcado con X.

Pero podemos también analizar la situación matemáticamente: La señora viene cada tres días. Entonces, el número de días que buscamos tiene que ser un múltiplo de 3. Pero los miércoles se siguen en espacios de 7 días. Entonces el número de días tiene que ser también un múltiplo de 7. ¿Cuál número es un múltiplo común de 3 y de 7?

Trenes de un solo color

Formen "trenes" de regletas Cuisenaire, de la siguiente manera: Usamos por ejemplo regletas de 3 y regletas de 5. Queremos un tren de regletas de 3, y otro tren de regletas de 5, de manera que ambos trenes tengan la misma longitud.

3	3	3	3	3

5	5	5

Hagan lo mismo con otras combinaciones de regletas: 4 y 6, 4 y 8, 5 y 6, 5 y 7, etc. Si desean, pueden anotar los resultados que obtienen (o sacar fotos de los "trenes").

Piensen: ¿Pueden predecir la longitud de los trenes? Por ejemplo con regletas de 6 y de 10, ¿cuánto medirán los trenes? – Anoten sus predicciones, y después verifíquenlas con las regletas.

Introducimos el concepto del MCM

Las actividades que hemos hecho tienen que ver con *múltiplos comunes*. El número de puntos en el tejido; el número de días hasta que la señora nos traiga leche un miércoles; las longitudes de los trenes de un solo color; todos estos números son múltiplos comunes de los números involucrados.

Ahora, en diversas situaciones queremos saber cuál es el *menor* de todos los múltiplos comunes. Si preguntamos: ¿Cuándo será *la próxima vez* que nos trae leche un miércoles?, estamos preguntando por el número *menor* de días cuando eso vuelva a suceder. Al examinar nuestros trenes de regletas, podríamos preguntar cuáles son los trenes *más cortos* que podemos formar, por ejemplo, con regletas de 5 y también con regletas de 7.

Eso es lo que llamamos el ***mínimo común múltiplo (MCM)***.

Quizás ya descubriste que puedes encontrar un múltiplo común, si multiplicas simplemente los dos números: 5 x 7 = 35, este es un múltiplo común de 5 y de 7. Y en este caso es efectivamente el MCM. No existe ningún número menor a 35 que sea un múltiplo común de 5 y de 7. ¡Pero no siempre es así!
Por ejemplo, queremos formar trenes iguales con regletas de 6 y de 9. Podemos formar trenes que miden 54 cm, porque 6 x 9 = 54. Pero si lo haces con las regletas, encuentras que funciona con trenes mucho más cortos: Un tren de 18 cm se puede formar con ambos tipos de regletas, porque 18 = 6 x 3 y 18 = 9 x 2.

Para investigar: ¿En qué casos, el producto de dos números es su MCM? ¿Y en qué casos existe un MCM que es menor al producto de los dos números? ¿De qué propiedad de los dos números depende eso?

Cuando no podemos ver directamente cuál es el MCM, entonces tenemos que descomponer los números en factores primos, como lo hemos hecho para el MCD. Por ejemplo, MCM(24, 42) = ¿?
Factorizando, encontramos los siguientes factores primos:

24 = 2 x 2 x 2 x 3
42 = 2 x 3 x 7

Para que sea múltiplo de 24, el MCM debe contener todos los factores primos de 24. Y para que sea múltiplo de 42, debe contener todos los factores de 42. ¿Cuál es el menor número que cumple esta condición?
En 24 aparece 3 veces el factor 2, en 42 solamente una vez. Entonces el MCM debe contener 3 veces el 2. (No 4 veces; 3 veces es suficiente para que sea múltiplo de 24, y así el factor 2 del 42 ya está incluido.)
Ambos números contienen una vez el factor 3; entonces el MCM también debe contener un factor 3.
El 42 contiene además el factor 7, entonces el MCM debe contener también un factor 7.
En total tenemos: MCM(24, 42) = 2 x 2 x 2 x 3 x 7 = 168.

Efectivamente encontramos tanto el 24 como el 42 "dentro" del 168 como divisores:

168 = (2 x 2 x 2 x 3) x 7 = 24 x 7, y:
168 = 2 x 2 x (2 x 3 x 7) = 4 x 42.

Para practicar

Encuentren el MCM de los siguientes pares de números:

8 y 12, 7 y 12, 8 y 24, 15 y 20, 10 y 11, 18 y 45, 22 y 33, 14 y 18.

Después de practicar con estos números, ¿pueden ahora responder a la pregunta de investigación arriba?

Ahora lo escribimos

Diferentes formas de anotar las factorizaciones

Como para el MCD, el proceso de comparar los factores primos puede anotarse de varias maneras. No debemos insistir en un "único procedimiento correcto". Lo importante es el *principio*: ***El MCM debe contener cada factor primo de cada número dado,*** tantas veces como aparece en el número que lo contiene más veces.

Que cada alumno escoja la notación que le ayuda mejor para encontrar estos factores.

La notación más transparente consiste en escribir ambas factorizaciones en orden. Por ejemplo para encontrar el MCM de 36 y 90:

36 = 2 x 2 x 3 x 3
90 = 2 x 3 x 3 x 5

Después marcamos cada factor donde aparece más veces, y multiplicamos estos factores:

36 = **2** x **2** x **3** x **3**
90 = 2 x 3 x 3 x **5**
MCM (36, 90) = 2 x 2 x 3 x 3 x 5 = 180.

(El 3 lo podríamos marcar arriba o abajo, porque aparece 2 veces en ambas factorizaciones. Pero lo marcamos *solamente en una* de las factorizaciones.)

Si queremos hacerlo de una manera un poco más ordenada, podemos anotar los factores en una tabla, los factores comunes aparte y los factores "particulares" de cada número aparte:

36 =	2 x	2 x 3 x 3	
90 =		2 x 3 x 3	x 5
MCM =	2 x	2 x 3 x 3	x 5 = 180

Entonces, cuando tenemos solamente dos números, podemos interpretar el MCM también de esta manera: Es el producto de los factores comunes (una vez) por los factores "particulares".

De manera similar podemos anotar las factorizaciones verticalmente. Así es un poco más fácil anotar también los factores intermedios en la misma tabla. Por ejemplo como abajo: Debajo de cada número, la columna izquierda contiene sus factores primos, y la columna derecha los resultados parciales. (Usamos estos resultados parciales para continuar con el proceso de factorización. Para encontrar el MCM ya no son necesarios; para eso nos fijamos únicamente en los factores primos.)

36		90	
2	18	2	45
2	9	**3**	15
3	3	**3**	5
3		**5**	

El procedimiento escolar usual es un poco más eficiente, porque no requiere una factorización completa; pero es menos transparente. Si queremos usarlo, tenemos que asegurar que los alumnos entiendan el razonamiento detrás del procedimiento, para que no lo apliquen mecánicamente sin entender lo que hacen.

Este procedimiento consiste en dividir los dos números sucesivamente entre todos los factores que encontramos. Si encontramos un factor común, dividimos ambos números *simultáneamente* entre ese factor común. Si el factor es "particular" de un número, dividimos solamente ese número. Todos los factores se anotan a la derecha; los resultados de las divisiones debajo de los números respectivos. Esto se repite hasta que ambos números estén "divididos completamente", o sea, hasta llegar a 1:

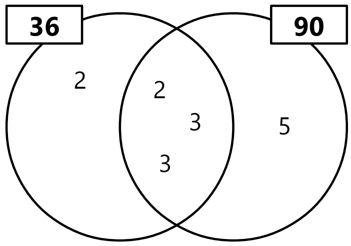
36	90	2
18	45	2
9	45	3
3	15	3
1	5	5
	1	

Así logramos que en la columna derecha aparecen todos los factores primos de los dos números, pero los factores comunes aparecen una sola vez. Si multiplicamos ahora todos estos factores, obtenemos el MCM:
2 x 2 x 3 x 3 x 5 = 180.

Podemos usar también el gráfico en forma de un diagrama de Venn:

El conjunto a la izquierda contiene los factores de 36; el conjunto a la derecha contiene los factores de 90. La *unión* de los dos conjuntos contiene los factores del MCM.

(Vea la nota en la Unidad 17 acerca de este gráfico.)



Ampliaciones

Una propiedad interesante

El diagrama de Venn arriba puede servir de ilustración para otra propiedad:

Si calculamos el producto 36 x 90, multiplicamos todos los factores del conjunto izquierdo por todos los factores del conjunto derecho. O sea, este producto contiene todos los factores que están en el diagrama, *pero los factores de la intersección dos veces*.

Ahora, si multiplicamos el MCD por el MCM, obtenemos lo mismo: El MCD contiene los factores que están en la intersección, y el MCM contiene los factores que están en la unión. Multiplicándolos juntos, tenemos también todos los factores que están en el diagrama (o sea, la unión), y los factores de la intersección una segunda vez.

Efectivamente:
36 x 90 = 3240 = 18 x 180
= MCD(36, 90) x MCM(36,90)

En vez de usar el diagrama de Venn, podemos también usar la siguiente tabla para ilustrar la misma propiedad:

36 =	3 x 3 x 2	x 2	
90 =	3 x 3 x 2		x 5
MCD =	3 x 3 x 2		= 18
MCM =	3 x 3 x 2	x 2	x 5 = 180

Aquí también vemos que la multiplicación de 36 x 90 contiene exactamente los mismos factores como la multiplicación del MCD por el MCM: dos veces los factores comunes, y una vez los factores "particulares".

Métodos alternativos para calcular el MCM

Esta propiedad nos permite calcular el MCM de otras maneras. Por ejemplo, podemos aplicar la operación inversa a la igualdad de arriba:

36 x 90 = MCD(36, 90) x MCM(36,90)

entonces también:

MCM (36, 90) = 36 x 90 ÷ MCD(36, 90)

Así podemos calcular el MCM si ya sabemos el MCD:
MCM(36, 90) = 36 x 90 ÷ 18.

Esto todavía no es tan práctico, porque puede resultar en números muy grandes. Pero cuando calculamos el MCD por el método de la factorización, obtenemos a la vez los "factores particulares" de cada número:

36 = 18 x **2**, 90 = 18 x **5**

Volvamos a observar la tabla anterior, o el diagrama de Venn: Podemos interpretar el MCM también como el producto de uno de los números por los "factores particulares" del otro número.

36 =	3 x 3 x 2	x 2	
90 =	3 x 3 x 2		x 5
MCM =	**3 x 3 x 2**	**x 2**	**x 5 = 180**

MCM = 36 x 5 = 180, o también:

36 =	3 x 3 x 2	x 2	
90 =	3 x 3 x 2		x 5

MCM = 90 x 2 = 180.

(El MCM es el producto de los cuadros sombreados.)

De esta manera, el MCM se puede calcular un poco más fácilmente si antes ya hemos hecho el cálculo del MCD.

Repasen este razonamiento detenidamente para entenderlo. Vamos a hacer otro ejemplo: Queremos saber el MCD y el MCM de 75 y 120. Calculamos primero el MCD:

75	**120**	3
25 **5**	40 8	5

El MCD es entonces 3 x 5 = 15.

Ahora podemos desde esta tabla usar directamente los "factores particulares" (5 resp 8) para calcular el MCM: 120 x 5 = 600. O también 75 x 8 = 600; pero la primera multiplicación es un poco más fácil.

Abreviar el método cuando podemos "ver" divisores mayores

Como para el MCD, también para el MCM podemos calcular directamente con divisores mayores, si nuestra única meta es encontrar el MCM y no necesitamos una factorización completa en factores primos.

Un ejemplo sencillo: ¿Cuál es el MCM de 200 y 300? – Podemos ver inmediatamente que ambos números son múltiplos de 100. Entonces tenemos:

200 = **100** x **2**
300 = 100 x **3**

O con la notación del procedimiento escolar:

200	300	100
2	3	2
1	3	3
	1	

El MCM es entonces 100 x 2 x 3 = 600.

Vocabulario matemático

Múltiplo común: Que es múltiplo de dos o más números a la vez.
Ejemplo: 480 es un múltiplo común de 6, 8 y 30.

Mínimo común múltiplo (MCM): El menor de todos los múltiplos comunes de dos o más números.
Ejemplo: 10 y 15 tienen los múltiplos comunes 30, 60, 90, 120, etc. El menor de ellos es el 30; entonces 30 es el MCM de 10 y 15.

Otro ejemplo: ¿Cuál es el MCM de 72 y 108? – Si conocemos la tabla del 12, vemos inmediatamente que ambos números son múltiplos de 12. Entonces podemos calcular así:

72 = 12 x 6 = **12** x **2** x 3
108 = 12 x 9 = 12 x **3** x **3**

Respectivamente:

72	108	12
6	9	2
3	9	3
1	3	3
	1	

El MCM es entonces 12 x 2 x 3 x 3 = 216.

Para practicar

Encuentren el MCM de los siguientes pares de números:
32 y 40, 35 y 49, 70 y 90, 25 y 100, 13 y 20, 34 y 20, 34 y 85, 33 y 55, 128 y 192, 120 y 144.

Unos problemas con divisores y múltiplos

1. A Lina le gustan las galletas de vainilla que se venden en bolsas de 12. A Dina le gustan las galletas de limón que se venden en bolsas de 8. La mamá quiere comprar a ambas sus galletas favoritas, pero de manera que ambas reciban la misma cantidad de galletas. ¿Cuántas bolsas de cada tipo tiene que comprar como mínimo?

2. La señora Buenaventura quiere hacer cubrir el piso de su cuarto de baño con baldosas cuadradas, pero de manera que salga exacto, sin tener que cortar ninguna baldosa. El piso tiene 2.24 m de ancho y 3.08 m de largo. ¿Con baldosas de qué tamaño se puede lograr eso?

3. El ejército de Alandia puede marchar en compañías de a 99 soldados, o también en compañías de a 111 soldados, sin que sobre ni falte ninguno. El ejército de Belandia puede marchar de la misma manera en compañías de 104 o de 140. Si ambos ejércitos tienen menos de 5000 soldados, ¿cuál de los ejércitos es mayor?

*4. El jefe del almacén ordenó a Jorge colocar las cajas de fideos en filas de 15, pero sobró una caja. Eso no le gustó al jefe, entonces ordenó hacer filas de 14. Otra vez sobró una caja. "Haga entonces filas de 13", dijo el jefe. Esta vez no sobró ninguna caja, y el jefe estuvo contento. ¿Cuántas cajas eran?

¿A dónde vamos desde aquí?

Con esta Unidad, los niños deben tener una base suficiente para comprender los temas del *Bloque III* (Fracciones); entonces podrían pasar a esos temas y dejar las *Unidades 20 a 25* para más tarde. Pero pueden también continuar de frente; o pueden ahora intercalar unos temas de geometría *(Bloque VI)*, razonamiento *(Bloque VII)*, u otro.

Unidad 20 - Proporciones

Prerrequisitos:
- Multiplicación y división *(Unidades 9 a 12).*
- MCD y MCM *(Unidades 17, 19).*

Materiales necesarios:
- Objetos de la vida diaria.

Para los educadores

Aprender proporciones de manera práctica y concreta

La proporcionalidad es un tema fundamental en la matemática. *(Vea más abajo en "Principios matemáticos".)* Felizmente es también uno de los temas que aparece con mayor frecuencia en las situaciones de la vida diaria. Así nunca faltarán oportunidades para hacer experiencias concretas con proporcionalidades. Solamente que debemos estar atentos a esas oportunidades y no desperdiciar su potencial educativo.

Dicho de manera sencilla, una proporcionalidad consiste en que dos cantidades aumentan o disminuyen juntas "en la misma medida": si la una se duplica, la otra también se duplica; si la una se reduce a un tercio, la otra también se reduce a un tercio; etc. Así existen proporcionalidades por ejemplo entre la cantidad de productos que compramos y su precio; entre la duración de un viaje y la distancia recorrida; entre las horas de trabajo y la cantidad de productos del trabajo; entre el número de personas y su consumo de un producto determinado; etc.

Experiencias concretas con tales situaciones proveen un camino de acceso mucho mejor que las fórmulas y los métodos algebraicos que se encuentran en muchos libros escolares acerca de este tema. No practicaremos esos métodos "escolares" en el nivel de Primaria, porque su comprensión requiere una capacidad de pensamiento abstracto plenamente desarrollada; y no queremos introducir procedimientos "misteriosos" que los alumnos no pueden comprender. Veremos que existen maneras más prácticas y "concretas" de manejar proporciones.

Ya en el nivel de *Primaria I*, los alumnos resolvieron problemas como estos:

- "En la tienda, un kilo de arroz cuesta 4.–. ¿Cuánto cuestan 8 kilos?"

- "Si 7 mandarinas pesan 560g, ¿cuánto pesa una mandarina?"

Estos *ya son* problemas de proporciones. Prácticamente todos los problemas de razonamiento multiplicativo implican el concepto de la proporcionalidad. Los alumnos ya practicaron anteriormente esta clase de razonamiento. Lo único que hace falta es mostrarles cómo aplicar estos razonamientos a situaciones un poco más complejas.

El sentido numérico y la flexibilidad al elegir un procedimiento

Existen diversos procedimientos posibles para resolver problemas con proporciones. No queremos prescribir un único procedimiento, porque lo más importante es que los niños *entiendan los principios* que gobiernan las proporciones.

Si un niño adquirió sentido numérico en cuanto a los múltiplos y divisores, podrá analizar las situaciones y elegir flexiblemente para cada situación el procedimiento más conveniente. Por ejemplo:

1) "*600 gramos de fideos cuestan 5.60. ¿Cuánto cuestan 1.800 kg?*"
Aquí podemos ver que 1.800 kg es un múltiplo de 600 g. (Más exactamente, el triple). Entonces el camino más fácil consiste en triplicar también el precio: 5.60 x 3 = 16.80.

2) "*700 g de otro tipo de fideos cuestan 5.25. ¿Cuánto cuestan 1.200 kg?*"
Aquí no podemos usar el mismo procedimiento, porque 1200 no es un múltiplo de 700. Aquí será lo más conveniente calcular primero el precio de 100g, y desde allí el precio de 1200g: 5.25÷7 = –.75, –.75 x 12 = 9.–.

Un niño que no tiene este sentido numérico, dificultará en hacer una elección sensata de un procedimiento. Estos niños probablemente querrán que les demos una "regla" o un procedimiento mecánico que funciona "siempre". Tales reglas existen. He aquí tres alternativas posibles:

A) Usar siempre el 1 como "puente". Por ejemplo, si conocemos el precio de 8 kg, y queremos saber el precio de 14 kg, calcular primero el precio de 1 kg, y desde allí el precio de 14 kg. Este es el procedimiento más "lógico", pero dependiendo de los datos puede llevar a divisiones inexactas resp. fracciones (así en el ejemplo 1 arriba).
(Acerca del concepto del "puente", vea las explicaciones en el Taller, "Cuando no se puede calcular con una sola máquina".)

B) Usar siempre el MCD como "puente". Así en el ejemplo 2 arriba, el MCD de las cantidades es 100 g, eso lleva a la operación más sencilla. Pero los niños que no han adquirido sentido numérico, no pueden "ver" inmediatamente el MCD, entonces tienen que efectuar otra operación adicional para eso, y eso les complica el cálculo, aunque después la operación de la proporción en sí resulte sencilla.

C) Usar siempre el MCM como "puente", o alternativamente el producto de los dos datos. Por ejemplo, si conocemos el consumo de 7 personas y queremos saber el consumo de 12 personas, calcular primero el consumo de 84 personas (multiplicando por 12), y desde allí el consumo de 12 personas (dividiendo entre 7). Este procedimiento funciona siempre, y no produce divisiones inexactas (excepto si el resultado final es inexacto). Su desventaja es que requiere operaciones con números mayores que las otras alternativas.
(Analizando, encontramos que este procedimiento requiere las mismas operaciones como el primero, solamente en orden invertido: En el primer procedimiento dividimos primero, después multiplicamos. Aquí multiplicamos primero, después dividimos.)

Los tres procedimientos mencionados aquí funcionan "siempre". Pero hemos visto que cada uno de ellos tiene sus inconvenientes, dependiendo de las propiedades de los datos. Por eso es preferible ayudar a los niños a que adquieran sentido numérico (sobre todo respecto a los múltiplos y divisores); eso les facilitará mucho el trabajo.

TALLER

Proporciones en la vida diaria

Use situaciones como las siguientes para practicar el cálculo de proporciones con los niños:

- Al hacer compras. Por ejemplo, necesitamos 3 kg de papas. ¿Cuánto cuesta 1 kg? ¿Cuánto cuestan entonces 3 kg?
A veces necesitamos hacer comparaciones de precios: En esta tienda venden 15 huevos a 6.–. En esa otra tienda venden 6 huevos a 2.50. ¿Dónde es más económico? – Que los niños descubran su propia manera de hacer la comparación. Todavía no introduzcamos procedimientos predefinidos. Los niños tienen que explorar mentalmente estas situaciones por sí mismos.
Seguramente encontrarán muchas otras situaciones similares cuando van de compras juntos. Si desea, puede en el transcurso de estas actividades introducir informalmente el término "proporción" o "proporcional": "El precio es proporcional al número de huevos", etc.

- Al ir de viaje o de caminata. Por ejemplo al hacer un viaje largo en bus, podemos con anticipación averiguar cuántos kilómetros mide el viaje. Después medimos el tiempo que dura el viaje. ¿A cuántos kilómetros por hora hemos viajado?
El resultado de ese cálculo nos dará una velocidad *promedia*. Nos puede interesar también la velocidad *actual* en algún momento del viaje. Si viajamos en carro propio, podemos observar el velocímetro. Si viajamos en bus, podemos observar el kilometraje de la carretera y medir el tiempo con un cronómetro: ¿Cuánto demoramos de un kilómetro al siguiente? ¿Cuántos kilómetros avanzaríamos entonces en una hora, a la misma velocidad?
Cálculos similares podemos hacer en el transcurso de una caminata: ¿Qué distancia ya hemos caminado? ¿Cuánto tiempo hemos caminado? ¿Con qué velocidad hemos caminado entonces? ¿Qué distancia nos falta hasta llegar a la meta? ¿A qué hora podemos esperar llegar?
Si tenemos un mapa, podemos medir las distancias en el mapa y calcular a cuánto equivalen en la realidad. *(Vea en la Unidad 67, "Planos y mapas".)*

- Al cocinar. Prueben unas recetas nuevas. Eso requiere pesar y medir las cantidades indicadas en la receta. Pero también puede ser necesario calcular primero las cantidades necesarias. Por ejemplo, si la receta dice "Para 4 personas", y somos 6 personas, entonces tenemos que usar cantidades mayores. ¿Cuánto exactamente? Eso es un problema de proporciones.
O si hacemos galletas, podemos contar cuántas galletas resultaron con las cantidades indicadas en la receta. Si la próxima vez queremos hacer 100 galletas, ¿qué cantidades de los ingredientes tenemos que usar?

- Al hacer trabajos manuales. Por ejemplo al tejer: He tejido 80 puntos y miden 30 cm, pero mi tejido tiene que medir 48 cm. ¿Cuántos puntos tengo que tejer?
O al hacer trabajos de carpintería: He usado 40 clavos para armar estas 3 cajas, pero necesito 5 cajas más. ¿Cuántos clavos adicionales necesitaré? *(Nota: ¿Por qué el número de clavos usados no es un múltiplo de 3? – Es que algunos se doblaron y se desperdiciaron. Hay que tomar en cuenta circunstancias como estas al hacer nuestros cálculos.)*
O estimando el tiempo que necesitamos para un trabajo mayor, por ejemplo para un negocio propio: He fabricado 7 cajitas de cartón en 2 horas. ¿Cuánto tiempo necesitaré para hacer 50 cajitas?

- Al hacer negocios. Tenemos que calcular precios y cantidades, de la misma manera como al hacer compras. Adicionalmente puede ser necesario hacer un presupuesto donde consideramos también las ganancias por hora de trabajo, la proporción entre inversión e ingresos, y otros factores. (Vea los ejemplos en la *Unidad 13.*)

- Al responder preguntas curiosas. A veces los niños hacen preguntas curiosas acerca de números y cantidades. Por ejemplo: "¿Cuántas hojas de papel son una tonelada?" Para calcular eso, tendremos que averiguar primero el peso de una cantidad menor de papeles ... y después hay que resolver un problema de proporciones. (Preguntas como estas pueden requerir números mayores, o cálculos con fracciones y decimales. En este caso, unos adultos o alumnos mayores tendrán que calcularlo ... o la pregunta será una oportunidad para introducir algunos temas que aparecerán en los bloques siguientes de este libro.)

En la vida diaria, investiguen diversas situaciones similares a las descritas; u otras situaciones relacionadas con proporciones. Deje que los niños hagan sus propios razonamientos – quizás con un poco de ayuda adulta, pero sin darles un procedimiento predefinido. Solamente cuando los niños hayan razonado lo suficiente acerca de esas situaciones, comparen sus ideas con las que siguen a continuación.
Si ocurren situaciones que requieren operaciones todavía desconocidas (por ejemplo con fracciones), anótenlas y guárdenlas para cuando los niños hayan aprendido esas operaciones. En la *Unidad 43* trataremos de problemas con proporciones que requieren fracciones. En diversas Unidades del *Bloque V* podemos hacer ejemplos que requieren decimales.

Proporciones donde no se conoce la "unidad"

Las proporciones más sencillas son aquellas donde conocemos el dato que corresponde a la unidad. Por ejemplo:

- Un carro avanza 950 metros en un minuto. ¿Cuánto avanza en 40 minutos?

- Un kilo de uvas cuesta 9.–. ¿Cuánto cuestan 4 kilos?

No necesitamos ningún razonamiento especial para estas situaciones. El caso es diferente cuando el dato que corresponde a la unidad no es conocido. Estas son las situaciones que tenemos que examinar más detenidamente. El ejemplo de comparar los precios de los huevos fue una de estas situaciones: Tenemos que comparar el precio de 15 huevos con el precio de 6 huevos, y no sabemos cuánto cuesta un único huevo.

Otras situaciones de esta clase serían por ejemplo:

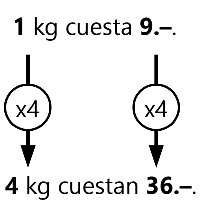
- Un carro avanza 5720 metros en 5 minutos. ¿Cuánto avanza en 35 minutos?

- 300 g de uvas cuestan 2.55. ¿Cuánto cuesta un kilo?

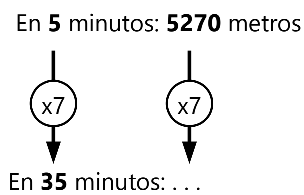
Quizás ya encontraron situaciones similares al hacer las actividades sugeridas anteriormente. ¿Cómo las resolvieron? ¿Qué razonamientos usaron?

Vamos a explorar estas situaciones desde varias perspectivas. Después, los niños podrán usar aquellos razonamientos que les parecen los más fáciles de entender.

Podemos diagramar una proporcionalidad de la siguiente manera, usando nuestras "máquinas" de operaciones:

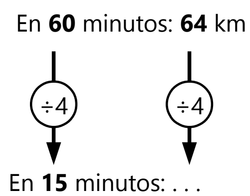


O sea, la proporcionalidad consiste en que ambos valores *pasan por la misma "máquina"*. A veces se puede hacer lo mismo con una proporción donde la "unidad" no es conocida:



De esta manera ya podemos resolver varias situaciones similares. A veces necesitamos también máquinas de división en vez de multiplicación:

Un carro avanza con 64 km/h. ¿Cuánto avanza este carro en 15 minutos?



Ejemplos para practicar ahora:

1. Un paquete de 6 galletas cuesta 1.10. ¿Cuánto cuestan 24 galletas?

2. Fiorela camina 400 metros en 5 minutos. ¿Cuánto tiempo necesita para caminar 2 km? – ¿Y cuál es su velocidad en km/h?

3. Un carro consume 7 litros de gasolina por 100 km. ¿Cuánto de gasolina necesita para un viaje de 25 km?

4. Si 3 naranjas pesan 500 g, ¿cuántas naranjas hay en 3 kg?

5. Si con 2 kg de harina se pueden hacer 3 kg de pan, ¿cuánta harina se necesita para hacer 1 kg de pan?

6. Pedro necesita 9 pasos para cruzar su sala que mide 6 metros. Para ir a la casa de su amigo Juan son 225 pasos. ¿A cuántos metros equivale eso?

Recuerda: *Para resolver divisiones con medidas, puede ser necesario convertirlas en una unidad de medida menor.*

Cuando no se puede calcular con una sola "máquina"

Pero existen también proporciones que no se pueden calcular con una sola "máquina":

300 g de uvas cuestan **2.55**

↓ (¿ ?)

1000 g de uvas cuestan **...**

No existe ninguna "máquina" directa de multiplicación o división que nos lleve de 300 a 1000. (A no ser que usemos fracciones. Si los niños ya conocen las multiplicaciones y divisiones con fracciones, podemos explorar ahora esta posibilidad. Si no, eso tendrá que esperar hasta la *Unidad 38* o más tarde.)

Una solución posible consiste en calcular el "precio unitario": ¿Cuánto cuesta *un gramo* de uvas? Después podríamos multiplicar ese precio por 1000, y tendríamos el precio de un kilo.

En ciertas situaciones se puede hacer así. Por ejemplo en la comparación de los precios de los huevos (convirtiendo todo a centavos):

15 huevos cuestan **600** centavos. — **6** huevos cuestan **250** centavos.

↓ (÷15) ↓ (÷15) — ↓ (÷6) ↓ (÷6)

1 huevo cuesta **40** centavos. — **1** huevo cuesta **(41 R.4)** centavos.

En la segunda operación ya llegamos a nuestros límites, porque tenemos una división con residuo. Pero aun así podemos ver que en la segunda tienda un huevo cuesta más: un poco más de 41 centavos, frente a 40 centavos en la primera tienda.

En este caso, una alternativa consistiría en calcular cuánto costarían 6 huevos en la primera tienda, porque allí conocemos el precio unitario exactamente:

15 huevos cuestan **600** centavos.

↓ (÷15) ↓ (÷15)

1 huevo cuesta **40** centavos.

↓ (x6) ↓ (x6)

6 huevos cuestan **240** centavos.

Así la comparación es un poco más clara: En la primera tienda, 6 huevos cuestan 2.40, mientras en la segunda tienda, el mismo número de huevos cuesta 2.50.

Pero bien, en el ejemplo anterior de las uvas realmente no podemos hacerlo así, porque no podemos dividir 255 entre 300. Por lo menos no mediante operaciones con números enteros. Pero ¿qué tal si usamos el precio de *100 gramos* como nuestro "precio unitario"?

300 g de uvas cuestan **2.55**

↓ (÷3) ↓ (÷3)

100 g de uvas cuestan **–.85**

↓ (x10) ↓ (x10)

1000 g de uvas cuestan **8.50**

Entonces la "unidad" no siempre tiene que ser 1. Puede ser un número mayor, con tal que resulte en operaciones posibles de calcular.

De todos modos, usar un "precio unitario" equivale a utilizar *dos máquinas* en vez de una sola. Una de ellas va a ser una máquina de división, y la otra una máquina de multiplicación. Para eso necesitamos un paso intermedio como "puente", donde podemos "anclar" las dos máquinas. Si elegimos este "puente" de manera inteligente, la operación se vuelve sencilla.

Por ejemplo, para llegar desde el precio de 15 huevos al precio de 6 huevos, podríamos usar como "puente" el precio de 3 huevos, en vez del precio de un solo huevo:

15 huevos cuestan **600** centavos.

↓ (÷5) ↓ (÷5)

3 huevos cuestan **...**

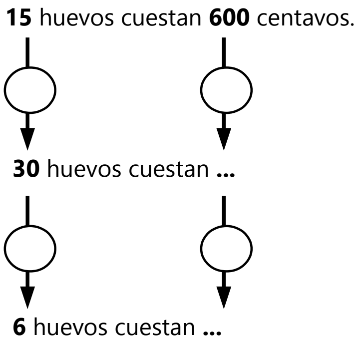
↓ (x2) ↓ (x2)

6 huevos cuestan **...**

Para pensar: ¿Qué propiedades tiene que cumplir un número para que pueda servir como "puente"?

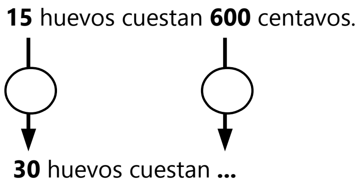
(Piénsenlo bien. Si lo han pensado por mucho tiempo y no llegan a ninguna respuesta, pueden consultar el *Anexo A*.)

Ahora, el "puente" podría también ser *mayor* que los datos que tenemos. En el ejemplo de los huevos, podríamos también usar 30 huevos como "puente". Copien el siguiente diagrama y completen ustedes las máquinas y los resultados que faltan:

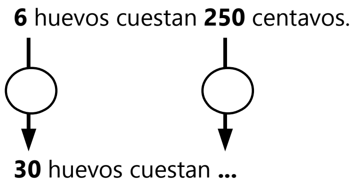


Desde aquí podemos obtener otra idea para comparar los precios de los huevos: Podríamos calcular cuánto cuestan 30 huevos en cada una de las tiendas:

Primera tienda:



Segunda tienda:



Nota: En la sección "Principios matemáticos" más abajo se encuentran unas ideas adicionales, que no necesariamente tenemos que tratar con los niños ahora.

Problemas para practicar

Tenemos ahora diversas ideas de cómo se pueden resolver problemas con proporciones. Practiquen con los siguientes problemas, e intenten encontrar para cada uno un camino sencillo y eficaz de resolverlo:

1) En una tienda venden 12 lápices a 21.–. ¿Cuánto cuestan 9 lápices?

2) Nadia compra 50 kg de azúcar a 185.–. ¿Cuánto le cuestan 3 kilos?

3) Si 4 cuyes comen 1 kg de pasto, ¿cuánto comen 9 cuyes?

4) Cornelia hace galletas con 200g de harina, 125g de azúcar, 75g de mantequilla y un huevo. Le salieron 48 galletas. ¿Qué cantidades de los ingredientes tiene que usar para fabricar 144 galletas?

5) Débora hace galletas con la misma receta como Cornelia, y le resultaron 50 galletas. Ahora quiere hacer 120 galletas. ¿Qué cantidades de los ingredientes necesita?

6) Elvira preparó 480g de masa para galletas, y le alcanzó para hacer 56 galletas. ¿Qué cantidad de masa tiene que preparar para hacer 140 galletas?

7) Un carpintero clava 8 clavos en 3 minutos. ¿Cuántos clavos clava en una hora?

8) Sandro camina 5 km en una hora. ¿Cuánto tiempo necesita para caminar 3250 metros?

9) 1 kg de tomates cuestan 8.50. ¿Qué cantidad de tomates se puede comprar con 15.30?

10) En la tienda de la esquina venden la docena de huevos por 6.60. En el supermercado venden veinte huevos por 11.20. ¿Dónde son más económicos?

*11) El gato de Alexandra come en una semana 430g de comida para gatos. ¿Cuánto come en un mes?

*12) A las 9:00 de la mañana sale un avión de Santiago de Chile hacia Bogotá, y avanza con una velocidad constante de 790 km/h. A la misma hora sale un avión de Bogotá hacia Santiago y avanza a 690 km/h. Si la distancia es de 4440 km, ¿a qué hora y a qué distancia de Santiago se cruzan los aviones?

Principios matemáticos

"Máquinas paralelas"

Al dar el paso hacia la abstracción, hemos representado las proporcionalidades como un par de "máquinas" en paralelo: Toda operación que se hace con uno de los valores, se hace también con el otro valor (mientras se trate de una operación del "segundo piso", o sea multiplicación o división).

$$\begin{tikzcd} \boxed{40} \arrow[d, "\div 5"] & \boxed{120} \arrow[d, "\div 5"] \\ \boxed{8} & \boxed{24} \end{tikzcd}$$

Investigando las propiedades de esta estructura, encontramos que en todos estos casos podemos colocar otro par de "máquinas paralelas" perpendicularmente a las primeras:

$$\begin{tikzcd} \boxed{40} \arrow[r, "\times 3"] \arrow[d, "\div 5"] & \boxed{120} \arrow[d, "\div 5"] \\ \boxed{8} \arrow[r, "\times 3"] & \boxed{24} \end{tikzcd}$$

Esto significa que tenemos *dos* proporcionalidades. Por ejemplo comparando precios: Hay una proporcionalidad entre la cantidad del producto y su precio; pero hay también una proporcionalidad entre los datos del primer caso y los datos del segundo caso. Podemos usar cualquiera de las dos proporcionalidades para calcular un resultado.

Algebraicamente podemos explicar esto de la siguiente forma: *(El siguiente razonamiento es para la instrucción de los educadores. Con los alumnos no entraremos a estos terrenos, mientras no hayan llegado a la etapa del pensamiento abstracto, o sea en el nivel de Secundaria I.)*

Los valores proporcionales se pueden expresar como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Multiplicamos por ambos denominadores, y obtenemos: **ad = bc**.

Si dividimos esto entre ***bd***, obtenemos otra vez la primera forma. Pero en su lugar podemos también dividir entre ***cd***: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Esta igualdad expresa ahora las proporciones que corresponden a las "máquinas horizontales".

Lo dicho se refiere a la *proporcionalidad directa*. El caso es distinto en la *proporcionalidad inversa* que trataremos en la siguiente Unidad. En este caso también podemos dibujar dos "máquinas" paralelas, pero *en sentido opuesto*:

$$\begin{tikzcd} \boxed{13} \arrow[d, "\times 7"] & \boxed{35} \\ \boxed{91} & \boxed{5} \arrow[u, "\times 7"'] \end{tikzcd}$$

Analizando esta situación, encontramos que aquí no se pueden colocar "máquinas" en sentido perpendicular. Pero los *productos* de los valores arriba y abajo son iguales:

$$\begin{tikzcd} \boxed{13} \arrow[d, "\times 7"] & \times & \boxed{35} & = & \boxed{455} \\ \boxed{91} & \times & \boxed{5} \arrow[u, "\times 7"'] & = & \boxed{455} \end{tikzcd}$$

Tomen tiempo para analizar las propiedades de las proporciones. Eso les ayudará a entender mejor los principios de la proporcionalidad. A los niños les ayudará a llegar a procedimientos entendibles para resolver problemas con proporciones; procedimientos que "tienen sentido" para ellos.

Dos máquinas en una

Los casos que requieren dos "máquinas", se pueden expresar con una sola máquina, usando fracciones: Multiplicar por un número y dividir entre otro equivale a multiplicar por una fracción: *(Vea Unidades 38, 41, 43.)*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{15}\text{ huevos cuestan} \arrow[d, "\div 5"] & \mathbf{600}\text{ centavos.} \arrow[d, "\div 5"] \\ \mathbf{3}\text{ huevos cuestan} \arrow[d, "\times 2"] & \dots \arrow[d, "\times 2"] \\ \mathbf{6}\text{ huevos cuestan} & \dots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{15}\text{ huevos cuestan} \arrow[d, "\times 2/5"] & \mathbf{600}\text{ centavos.} \arrow[d, "\times 2/5"] \\ \mathbf{6}\text{ huevos cuestan} & \dots \end{tikzcd}$$

Así vemos que este caso obedece a exactamente las mismas leyes como el caso de "una sola máquina". Exploraremos esto después de introducir las operaciones con fracciones. *(Vea Unidad 43, "Proporciones y fracciones".)*

Las proporciones están por todas partes

Entender el principio de la proporcionalidad es esencial para entender muchos otros principios matemáticos:

- En las fracciones equivalentes *(Unidad 39)* existe una proporcionalidad entre numerador y denominador.
- Al interpretar un mapa o al dibujar un plano a escala *(Unidad 67)*, existe una proporcionalidad entre las medidas en el mapa y las medidas reales.
- La semejanza de figuras geométricas *(Unidades 70, 96, y Secundaria I)* consiste en que sus medidas son proporcionales.
- Las funciones lineales *(Secundaria I)* son una forma de expresar proporcionalidades algebraicamente.
- Muchas leyes de la física son simples proporcionalidades entre las magnitudes involucradas.

Las proporciones son realmente uno de los "bloques de construcción" fundamentales en el edificio de la matemática. Procedamos de manera prudente para que los niños lo entiendan bien; y entonces podrán edificar muchos otros conceptos encima de este principio.

Pregunta capciosa:

En cada rincón de una habitación rectangular está sentado un gato. Cada gato mira los ojos de tres otros gatos. Y sobre la cola de cada gato está sentado un gato.
¿Cuántos gatos están en la habitación?

¿A dónde vamos desde aquí?

El tema de las proporciones vuelve a aparecer en diversos problemas en otras Unidades, aun sin que se mencione el tema específicamente.

La Unidad siguiente amplía el tema con las proporciones inversas y el reparto proporcional. Estos temas pueden ser demasiado exigentes para niños que recién tuvieron su primer encuentro con las proporciones. En este caso puede ser preferible avanzar primero con algunos temas de otros bloques, antes de ir a la Unidad 21.

Unidad 21 - Más proporciones

Prerrequisitos:
- Proporciones *(Unidad 20)*.
- Algunas situaciones y ejemplos pueden requerir multiplicaciones y divisiones con fracciones *(Unidad 38 y siguientes)*.

Materiales necesarios:
- Objetos de la vida diaria.

TALLER

Proporcionalidad inversa en la vida diaria

Hasta ahora hemos trabajado con proporciones directas: dos valores aumentan o disminuyen "en la misma medida". Pero existen también valores que cambian *en el sentido opuesto:* cuando el uno aumenta, el otro disminuye, y vice versa. Eso se llama una ***proporcionalidad inversa***.

Por ejemplo:

Cuanto más personas se reparten una torta, tanto menor es la porción que recibe cada uno.

Cuanto mayor es la velocidad de un vehículo, tanto menor es el tiempo que necesita para llegar a su destino.

Cuanto más personas ayudan a hacer un trabajo, tanto menos tiempo requieren para terminar.

Analicen algunas de estas situaciones numéricamente cuando ocurren en la vida diaria. Por ejemplo, hemos partido una torta en 16 pedazos iguales. Pesamos un pedazo y encontramos que pesa 60 gramos. Si hubiéramos hecho 8 pedazos, ¿cuánto pesaría uno de ellos? ¿Y si hubiéramos hecho 24 pedazos?

O cuando hacemos la limpieza de la casa: Ayudaron tres personas y hemos demorado una hora. ¿Cuánto tiempo hubiera durado el trabajo si hubieran sido cuatro personas? ¿o cinco? ¿o seis? (Con 6 es más fácil de calcularlo; quizás hay que comenzar con ese caso.)

O al viajar: El carro avanzó con 60 km/h, y el viaje demoró una hora y media. ¿Cuánto hubiera durado el viaje si el carro hubiera avanzado con 30 km/h? ¿o con 120 km/h? ¿o con 72 km/h?

Con estas situaciones podemos hacer diversos razonamientos. Quizás algunos niños sugerirán que en el ejemplo de la torta se podría calcular el peso de la torta entera; o en el ejemplo del viaje se podría calcular cuántos kilómetros mide el viaje entero; y desde allí se puede calcular lo que se pide. Algo similar se puede hacer también con la duración del trabajo en la casa, solamente que allí el "trabajo entero" es más difícil de imaginarse de manera concreta. Así tendríamos un primer método para resolver una proporción inversa; pero este método puede llevarnos a números muy grandes, o a operaciones que los niños todavía no dominan (tales como una división entre 72 en el último ejemplo del carro).

Después de calcular unos ejemplos así, podemos proponer un desafío de razonamiento: ¿Existe una manera de calcularlo sin calcular primero "el entero"? Piénsenlo por un tiempo. Si los niños no encuentran ninguna idea, continúen con las explicaciones que siguen.

Máquinas en sentido opuesto

Vamos a diagramar una proporcionalidad inversa con nuestras "máquinas":

2 niños barren la casa en **30** minutos.

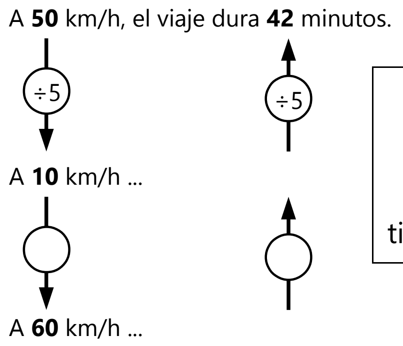
6 niños barren la casa en **10** minutos.

Vemos que ahora las flechas de las máquinas señalan en direcciones opuestas. Por eso se llama proporcionalidad "inversa". Podemos dibujar el mismo esquema con las flechas en la misma dirección, pero entonces con operaciones inversas:

2 niños barren la casa en **30** minutos.

6 niños barren la casa en **10** minutos.

Los valores pasan por máquinas *inversas*. Por lo demás, todo funciona igual como en una proporcionalidad directa. Si no se puede llegar a la meta con una única máquina, entonces podemos usar un valor adicional como "puente", y usamos dos máquinas en vez de una sola. Solamente que ambas máquinas tienen que ir en la dirección inversa:



Pregunta capciosa:

15 pares de medias necesitan 5 horas para secar. ¿En cuánto tiempo secan 3 pares de medias?

De esta manera, y usando el MCD o el MCM como "puente", podremos simplificar y resolver algunos de los ejemplos anteriores que produjeron operaciones con números demasiado grandes.

Diagramen y resuelvan algunos otros ejemplos de esta manera:

3 niños limpian el patio en 40 minutos. ¿Cuántos niños deben ayudar para hacerlo en 24 minutos?

Con 12 máquinas, un trabajo se termina en 14 horas. ¿En cuánto tiempo se haría con 21 máquinas?

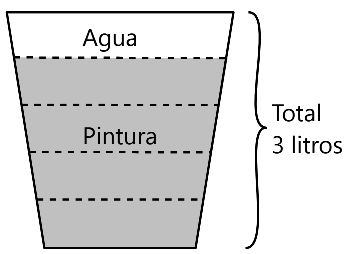
Reparto proporcional

Esta es otra clase de situaciones relacionadas con proporcionalidades. Por ejemplo:

Tenemos un balde de pintura cuyas instrucciones dicen: "Diluir 4 partes de pintura con 1 parte de agua." Y tenemos un recipiente con una capacidad de 3 litros para preparar la pintura. ¿Cuánto de pintura y cuánto de agua hay que echar a este recipiente para obtener 3 litros de pintura diluida?

Analicen este problema e intenten encontrar una solución, antes de seguir leyendo.

Un dibujo puede ayudarnos a imaginar la situación:



4 partes de pintura más 1 parte de agua son 5 "partes"; y estas 5 partes tienen que ser igual a 3 litros. Entonces, calculando con mililitros, una parte equivale a 3000 ÷ 5 = 600 m*l*. Las 4 partes de pintura son 600 x 4 = 2400 m*l*, y a eso tenemos que añadir 600 m*l* de agua; eso da un total de 3 litros.

Esto se llama "reparto proporcional", porque las condiciones dicen que la *proporción* de pintura a agua debe ser de 4 : 1 (4 a 1). Sin embargo, no podemos hacer un cálculo "normal" de proporciones, porque no sabemos ni la cantidad de pintura ni la cantidad de agua que debe entrar en el recipiente. Solamente sabemos el *total* de ambos. Este total tiene que repartirse en 4 partes *más* 1 parte, o sea en 5 partes. Por eso tenemos que repartir la cantidad total entre 5, y después asignar estas 5 partes a pintura resp. agua, según corresponde.

Analizaremos otro ejemplo para ilustrar este principio:

Teodoro, Teófilo y Timoteo se comprometen a hacer juntos un trabajo que vale 900.–. Teodoro trabaja 3 días, Teófilo 4 días y Timoteo 5 días. ¿Cómo debe repartirse el sueldo de manera justa?

Teodoro 3 días	Teófilo 4 días	Timoteo 5 días

Total 900.–

Para que el reparto sea justo, el sueldo de cada uno debe ser proporcional al número de días que trabajó. El trabajo de los tres obreros juntos equivale a 3+4+5 = 12 días de trabajo. Entonces el sueldo por un día de trabajo es 900 ÷ 12 = 75.–, y el reparto debe ser el siguiente:

Teodoro recibe el sueldo de 3 días, o sea
75.– x 3 = 225.–.

Teófilo recibe el sueldo de 4 días, o sea 75.– x 4 = 300.–.

Timoteo recibe el sueldo de 5 días, o sea
75.– x 5 = 375.–.

Podemos comprobar el resultado, evaluando el total: La suma de todo el dinero repartido debe ser igual a la cantidad total. 225 + 300 + 375 = 900, eso es correcto.

Problemas con proporciones

OJO: Primero hay que razonar y entender de qué trata la situación: ¿Es una proporción directa? ¿Una proporción inversa? ¿Un reparto proporcional? ¿O alguna otra situación? – Puede ser de ayuda, hacer un dibujo.

1) Si 4 niños comen una sandía en 20 minutos, ¿en cuánto tiempo la acaban 5 niños?

2) Si de 16 árboles se cosecharon 294 kg de naranjas, ¿cuántas naranjas se cosechan de 56 árboles del mismo tipo?

3) Para una invitación se prepararon porciones de 140g de arroz para cada una de las 24 personas que se esperaban. Pero llegaron 4 personas más. ¿Qué cantidad de arroz se pudo dar a cada una?

4) Federico y Francisca ayudan a transportar 60 ladrillos. Al mismo tiempo que Francisca carga dos ladrillos, Federico carga tres. ¿Cuántos ladrillos transporta Federico, y cuántos Francisca?

5) 5 trabajadores necesitan 18 días para arreglar un tramo de la carretera. Si el trabajo debe estar terminado en 10 días, ¿cuántos trabajadores se necesita?

6) 9 trabajadores pueden en un día reparar 30 metros de una carretera. ¿Cuántos metros pueden reparar 24 trabajadores en el mismo tiempo?

7) Cuando Sabrina compra una bolsa de alimento para sus 8 gallinas, el contenido alcanza para 15 días. Ayer, Sabrina mató a dos de sus gallinas. ¿Para cuántos días va a alcanzar ahora una bolsa de alimento?

8) Celia, Ofelia y Noelia se reparten un trabajo por un sueldo total de 4172.–. Celia trabaja el doble de lo que trabaja Ofelia, y Ofelia trabaja el doble de lo que trabaja Noelia. Calcula el sueldo que corresponde a cada una de ellas.

*9) Mario dice: "Necesito 30 minutos para lavar los platos. Entonces, 1800 personas lavarían los platos en un segundo." ¿Estás de acuerdo con Mario? ¿Por qué sí, o por qué no?

*10) Los dos amigos Amir y Bashar están cruzando el desierto. A dos días del último oasis se encuentran con un viajero desconocido, al cual se le habían acabado todas sus provisiones de alimentos. Amir tiene 90 dátiles, y Bashar tiene 150 dátiles. "Vamos a compartir nuestros dátiles", dicen. Juntan los dátiles y los reparten en partes iguales entre los tres. "Estoy muy agradecido", dice el viajero. "Gracias a su generosidad voy a tener fuerzas para seguir caminando hasta el oasis. No quiero dejarles sin recompensa. Tomen estas monedas y repártanlas entre ustedes de manera justa." Con eso les entrega 8 monedas de plata.
"Cuatro para ti y cuatro para mí", dice Amir. "¡No!", protesta Bashar. "Yo he tenido más dátiles que tú. Hay que repartir las monedas en la proporción de 90 a 150. Entonces, para ti serán ..." – Ya que no pueden ponerse de acuerdo, piden el consejo del viajero extraño. Este dice: "No quisiera interferir en una disputa que ustedes pueden resolver solos. Pero ya que piden mi opinión: Ninguno de los dos tiene la razón. Yo sugeriría ..."
¿Cómo habría que repartir las monedas según la propuesta de Bashar? ¿Y cuál fue la sugerencia aun más justa del viajero?

Nota: *Este último problema se remonta a un antiguo cuento árabe. Si tienen dudas acerca de la solución, consulten el Anexo A. Pero piénsenlo ustedes primero.*

Matemática divina

El reparto proporcional se aplica en muchas situaciones donde se requiere hacer un reparto justo, pero entre personas que no cumplen las mismas condiciones. Así por ejemplo en la parábola de los talentos, donde dice que el señor repartió los fondos a cada uno de los administradores "según su capacidad" (Mateo 25:15), porque no todos tenían la misma capacidad.

También al compartir con las personas necesitadas, entre los primeros seguidores de Jesús, se habla de un reparto proporcional cuando dice que repartían sus bienes "a todos según la necesidad de cada uno" (Hechos 2:45).

¿A dónde vamos desde aquí?

El tema de las proporciones se retoma en las *Unidades 43, 52, 67, 70, 83*; y en diversos problemas en otras Unidades.

Unidad 22 - La regla del 9 y la ley del residuo

Prerrequisitos:

- Operaciones básicas hasta 10'000
- Divisibilidad entre 9

Materiales necesarios:

- Regletas Cuisenaire

Para los educadores

Esta Unidad introduce unos conceptos fundamentales de la aritmética modular, en el contexto de las operaciones que los alumnos de primaria conocen, y todavía sin introducir términos técnicos. Al nivel de Primaria, estos contenidos pueden tratarse como opcionales; pero son un buen entrenamiento en pensar matemáticamente, y pueden despertar en algunos alumnos una motivación por investigar propiedades matemáticas interesantes que se encuentran más allá de lo obvio. Además, la "prueba del 9" tiene su utilidad práctica en la comprobación de los cálculos.

TALLER

Calcular rápidamente el residuo al dividir entre 9

Ya sabemos que los múltiplos de 9 se reconocen porque la suma de sus cifras es un múltiplo de 9. Pero la regla va más allá de eso: La suma de las cifras de *cualquier* número corresponde al *residuo* que ese número deja al dividirlo entre 9. Por ejemplo:

43: 4 + 3 = ***7***, 43 ÷ 9 = 4 R.***7***

71: 7 + 1 = ***8***, 71 ÷ 9 = 7 R.***8***

212: 2+1+2 = ***5***; 212 ÷ 9 = 23 R.***5***

Ahora tenemos que explicar más claramente lo que significa que la suma de las cifras "*corresponde*" al residuo. En muchos casos, la suma de las cifras es mayor a 9, y entonces no es un residuo válido al dividir entre 9. Pero el *residuo* de esta suma de cifras, y el residuo del número original, serán iguales. Lo podemos verificar si dividimos la suma de las cifras entre 9, o si de esta suma de cifras sacamos nuevamente la suma de sus cifras:

499: 4+9+9 = 22, 2+2 = ***4*** (22÷9 = 2 R.***4***),
499 ÷ 9 = 55 R.***4***

6863: 6+8+6+3 = 23, 2+3=***5*** (23÷9 = 2 R.***5***),
6863÷9 = 762 R.***5***

7796: 7+7+9+6 = 29, 2+9 = 11, 1+1 = ***2***
(29÷9 = 3 R.***2***)
7796÷9 = 866 R.***2***

Haz unos ejemplos con números propios y verifica que la regla funciona.

La ley del residuo

Estos residuos tienen una propiedad muy interesante: ***Los residuos hacen las mismas operaciones como los números originales.*** Si sumamos dos números, sus residuos se suman. Si multiplicamos dos números, sus residuos se multiplican. Etc. *(En realidad, el caso es un poco más complicado en la resta y en la división. Pero por ahora no nos preocupamos de eso.)*

Veamos dos ejemplos:

Los números originales:	Los residuos al dividir entre 9:
2614	4
+3259	+1
5873	5
1748	2
x 4	x 4
6992	8

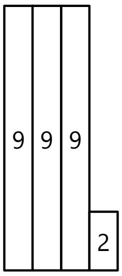
Ahora, como en la actividad anterior, estas operaciones nos pueden dar residuos "inválidos" (iguales o mayores a 9). Pero no importa: los reducimos hasta que sean válidos, como lo hemos hecho anteriormente:

Los números originales con sus residuos entre 9:		La operación de los residuos:
3544	(7)	7
+1556	(8)	+8
5100	***(6)***	15, 1+5 = ***6***
635	(5)	5
x 7	(7)	x 7
4445	***(8)***	35, 3+5 = ***8***

Haz algunos otros ejemplos de sumas y multiplicaciones, y verifica esta ley.

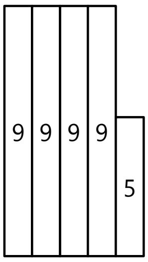
¿Por qué funciona la ley del residuo?

Lo podemos demostrar con regletas Cuisenaire. Vamos a representar cada número con regletas de 9, más una única regleta diferente que representa el residuo. Por ejemplo el número 29 se ve así:



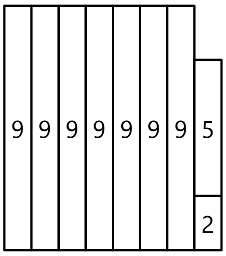
29 = 9 x 3 + 2; la regleta de 2 es el residuo.

Y el número 41 se ve así:



41 = 9 x 4 + 5; la regleta de 5 es el residuo.

Ahora sumamos estos dos números y obtenemos:

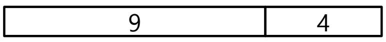


70 = (9x3 + 2) + (9x4 + 5)
= 9 x (3+4) + (2+5) = 9x7 + 7.

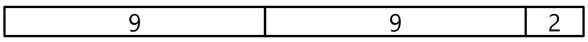
Efectivamente, los residuos se han sumado: el nuevo residuo es 2 + 5 = 7. Es que todas las otras partes de la operación son múltiplos de 9, o sea puras regletas de 9. Lo mismo sucederá en cualquier otra suma con números que representamos así.

Hacemos ahora una multiplicación: 13 x 20.

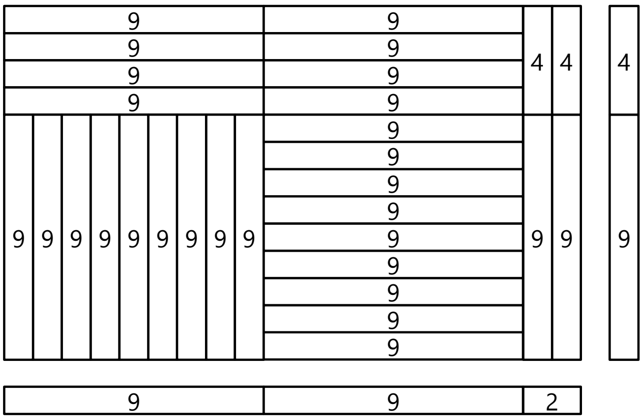
Así representamos 13:



Y así 20:



Formamos ahora el rectángulo que representa la multiplicación, y usamos regletas de 9 en todas partes donde podemos:



Vemos que el resultado consiste en puras regletas de 9, excepto el pequeño rectángulo arriba a la derecha. Este rectángulo pequeño es el residuo del resultado: 4 x 2 = 8. Efectivamente, los residuos de los factores se han multiplicado.

Esto funcionará de la misma manera en toda multiplicación de números que representamos así. (Solamente que tenemos que "reducir" aquellos residuos que resultan demasiado grandes.)

No solamente con el 9 funciona

Podríamos haber hecho la misma demostración con regletas de otro tipo, por ejemplo de 7. La misma ley funciona también con los residuos que quedan al dividir entre 7, y entre cualquier otro número. Solamente que en este caso, los residuos no son tan fáciles de calcular: tenemos que hacer la división. Verifícalo para las siguientes operaciones con los residuos al dividir entre 7:

Los números originales con sus residuos entre 7:		La operación de los residuos:
3547	(5)	5
+1560	(6)	+6
5107	***(4)***	11, 11÷7 = 1 R.***4***
635	(5)	5
x 5	(5)	x 5
3175	***(4)***	25, 25÷7 = 3 R.***4***

Haz unos ejemplos propios de sumas y multiplicaciones para verificar la regla.

Nota: *Obviamente, ¡el divisor que usamos tiene que ser el mismo en la operación entera! Si en una parte usamos el residuo al dividir entre 8, y en otra parte el residuo al dividir entre 6, ¡la ley no aplica!*

Para pensar: Un caso especial ocurre cuando aplicamos esta ley a los residuos de la división entre 10. ¿Cómo encontramos este residuo muy fácilmente? ¿y cómo podemos en este caso formular la ley de una manera más sencilla?

La prueba del 9

Ahora podemos usar estas leyes para comprobar si nuestros cálculos son correctos: Si hemos calculado correctamente, los residuos también deben ser correctos. Usaremos los residuos entre 9, porque esos son fáciles de calcular con la suma de las cifras. (Los residuos entre 10 también son fáciles, pero nos sirven solamente para comprobar una única cifra del resultado.) Calculamos estos residuos para los operandos y el resultado; después hacemos la misma operación con los residuos, y verificamos si resulta el residuo correcto para el resultado:

La operación original con sus residuos entre 9:		La operación de los residuos:
6268	(4)	4
+2543	(5)	+5
8811	***(0)***	9, equivale a ***0***

(***Nota:*** Si nos resulta un residuo de 9, eso significa que el número es múltiplo de 9, o sea que el residuo real es cero.)

1365	(6)	6
x 7	(7)	x 7
9455	***(5)***	42, 4+2 = ***6*** ***(¿?)***

En esta última operación la prueba no coincide; ¡esto significa que *el resultado está equivocado!* (¿Puedes corregirlo?)

Haz algunos otros ejemplos de sumas y multiplicaciones, y verifica los resultados con la prueba del 9.

La prueba del 9 para restas y divisiones

Hemos mencionado arriba que la correspondencia de los residuos es un poco más complicada en las restas y en las divisiones. Por eso, en estas operaciones es más seguro hacer la prueba del 9 *con la operación inversa*.

Los siguientes tres ejemplos son todos correctos, para mostrar la correspondencia de los residuos. Los números entre paréntesis son los residuos:

a) Operación:	Prueba del 9 (operación inversa):
7931 ***(2)***	
– 2658 (3)	8 + 3 = 11, 1 + 1 = ***2***
5273 (8)	

b) Operación:	Prueba del 9 (operación inversa):
6784 ÷ 8 = 848	
(7) (8) (2)	2 x 8 = 16, 1+6 = ***7***

c) Operación:	Prueba del 9 (operación inversa):
4725 ÷ 6 = 787 R.3	
(0) (6) (4) (3)	4x6 + 3 = 27, 2+7 = 9 ***(0)***

Haz unos ejemplos propios de restas y divisiones, y comprueba tus resultados con la prueba del 9, usando la operación inversa.

Comprueba también las siguientes operaciones, y marca aquellas que son equivocadas, según la prueba del 9:

a) 3689 + 5313 = 9002	d) 1356 x 7 = 9482
b) 8788 – 2929 = 5859	e) 7064 ÷ 8 = 888
c) 4000 – 1753 = 2347	f) 8779 ÷ 4 = 2194 R.3

Nota: La prueba del 9 puede detectar errores; pero no es una garantía de un resultado correcto.
En otras palabras: Si la prueba del 9 falla (los residuos no coinciden), entonces sabemos con seguridad que el resultado es equivocado. Pero si los residuos coinciden, todavía no tenemos la seguridad de que el resultado es correcto. (Piensa: *¿Por qué no?*)

Analiza los siguientes ejemplos donde la prueba del 9 sale correcta, y sin embargo el resultado es equivocado:

Operación	Prueba del 9
3682 (1)	
+475 (7)	1+7 = ***8***
8432 ***(8)***	
2364 (6)	
x 4 (4)	6 x 4 = 24, 2+4 = ***6***
9546 ***(6)***	
4734 ÷ 9 = 435	
(0) (0) (3)	3 x 0 = ***0***

Aunque pueden ocurrir casos como estos, la prueba del 9 sí es útil. Según las leyes de las probabilidades, la prueba del 9 detecta 8 de cada 9 errores.

(Comentarios en el Anexo A.)

Principios matemáticos

Congruencia modular

Las leyes y los procedimientos expuestos en esta Unidad están relacionados con el principio de la ***congruencia modular***, que aquí hemos introducido bajo el nombre de "ley del residuo". Se dice que dos (o más) números son "congruentes módulo ***n***" si dejan el mismo residuo al dividirlos entre ***n***. Así por ejemplo los números 3, 11, 27, 443 y 803 son todos congruentes módulo 8, porque todos dejan un residuo de 3 cuando los dividimos entre 8.
La congruencia modular se expresa con el símbolo ≡. Así podemos escribir:

$$3 \equiv 11 \equiv 27 \equiv 443 \equiv 803 \pmod{8}$$

(No es necesario introducir estos términos y símbolos para los niños de primaria.)

La congruencia modular se mantiene en las operaciones de la adición, de la multiplicación, y de la sustracción (si se extiende el concepto a los números negativos). Bajo ciertas limitaciones se mantiene también en la división; pero en este caso es preferible examinarla bajo la perspectiva de su operación inversa, la multiplicación.

El concepto de la congruencia modular puede en ciertas situaciones simplificar mucho la investigación de las propiedades de los números enteros, porque permite (bajo ciertas circunstancias) calcular solamente con los residuos, en vez de calcular con los números completos. Este caso se da sobre todo cuando se investigan propiedades de divisibilidad.

Matemática divina

El "residuo" de tu corazón te delata

Cuando cometemos un error al calcular con números grandes, el error puede esconderse bien entre las muchas cifras. Pero el residuo al dividir entre 9 es una característica muy particular de cada número; y a menudo esta característica delata el error.

Así puedes también por algún tiempo esconder alguna maldad entre las muchas cosas que hay en tu corazón. Pero siempre habrá algún "residuo" que en algún momento saldrá a la luz y te delata. Así dijo Jesús:

"No hay árbol bueno que produce fruto podrido, ni hay árbol podrido que produce buen fruto. Porque cada árbol se conoce por su fruto. Porque no se recogen higos de los espinos, ni uvas de la zarza.
El hombre bueno saca a la luz lo bueno que hay en el buen tesoro de su corazón; y el maligno saca a la luz lo malo que hay en el tesoro malo de su corazón. Porque de lo que rebosa su corazón, habla su boca."

(Lucas 6:43-45)

Entonces, no intentes esconder maldad en el corazón. En la matemática hay pruebas como la del 9 que podemos aplicar a las operaciones, para descubrir errores escondidos. Y Dios tiene sus pruebas que él aplica a nuestros corazones para sacar a la luz lo que hay dentro.

Unidad 23 - Divisibilidad entre números compuestos

Prerrequisitos:
- División *(Unidades 11 y 12)*.
- Divisibilidad *(Unidades 14 y 15)*.

Para los educadores

Esta pequeña Unidad es opcional, pero puede ser de ayuda para desarrollar el pensamiento matemático y el sentido numérico respecto a los múltiplos, divisores, y leyes de divisibilidad.

La mayor parte se desarrolla en forma de preguntas de investigación, observando el "comportamiento" de los números. Eso requiere capacidades de razonamiento un poco más avanzadas; se recomienda tratar esta Unidad hacia el *fin* del período de Primaria II.

Las preguntas son cortas, pero se puede necesitar bastante tiempo para llegar a respuestas matemáticamente correctas. Particularmente en el caso de la Pregunta *c), porque presenta una situación que parece desafiar la regla encontrada en las preguntas anteriores. Coleccionen suficientes ejemplos con números, para estar seguros de sus conclusiones; y después intenten fundamentar las conclusiones de manera lógica.

Investigación

a) Escoge 10 números, anótalos en la tabla que sigue, y completa la tabla según la divisibilidad de los números entre 3, entre 5 y entre 15. (Entre los números escogidos debe haber por lo menos dos que son divisibles entre 15.)

Número	***¿divisible entre 3?***	***¿divisible entre 5?***	***¿divisible entre 15?***
27	sí	no	no
35	no	. . .	. . .
. . .			

Observa cómo se distribuyen los "sí" y los "no" para cada número. ¿Encuentras alguna regularidad en aquellos números que son divisibles entre 15? ¿En qué se distinguen de los otros números? ¿Qué regla puedes establecer entonces para la divisibilidad entre 15?

b) ¿Puedes establecer reglas similares para la divisibilidad entre otros números compuestos: 6, 12, 18, 20, 45, ...?

***c)** Mario dice: "4 x 6 = 24. Entonces, si un número es divisible entre 4 y también entre 6, es divisible entre 24." – ¿Es correcto este razonamiento? ¿Por qué sí, o por qué no?

(Si intentaste por mucho tiempo encontrar las respuestas y no lo logras, puedes consultar las pautas en el *Anexo A*.)

Unidad 24 - Diagramas de divisores

Prerrequisitos:
- Factores primos y divisores *(Unidad 16)*.
- Entender el esquema de las "cuadrículas de multiplicación y división" *(Hoja de trabajo 12.2)*.
- *(para algunos de los diagramas)*: Números hasta un millón; Multiplicación y división con números de varias cifras *(Bloque III)*.

Para los educadores

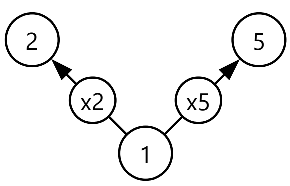
Esta Unidad es opcional a este nivel, pero puede ayudar a entender diversas propiedades de las factorizaciones y de los divisores. Exploraremos una forma gráfica de representar sistemáticamente todos los divisores de un número, basada en las "cuadrículas de multiplicación y división" *(Hojas de trabajo 12.2)*. En el nivel de *Secundaria I* usaremos este mismo esquema para descubrir unas fórmulas relacionadas con los divisores.

TALLER

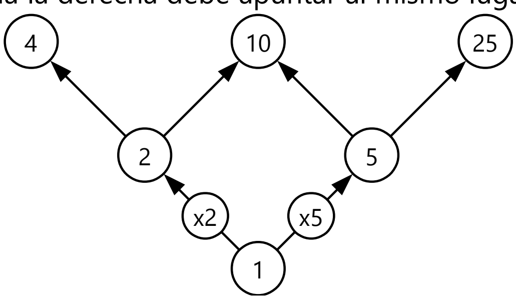
Construimos el primer diagrama de divisores

En una hoja de papel o en la pizarra, construimos la siguiente figura:

Empezamos abajo en el medio con un círculo que contiene el número 1. Después definimos dos "máquinas": Una flecha hacia la *izquierda* y arriba significa "x 2", y una flecha hacia la *derecha* y arriba significa "x 5". (En este diagrama, la *dirección* de las flechas es importante.) Escribimos los resultados de estas operaciones también encerrados en círculos, para que el diagrama se vea más bonito:

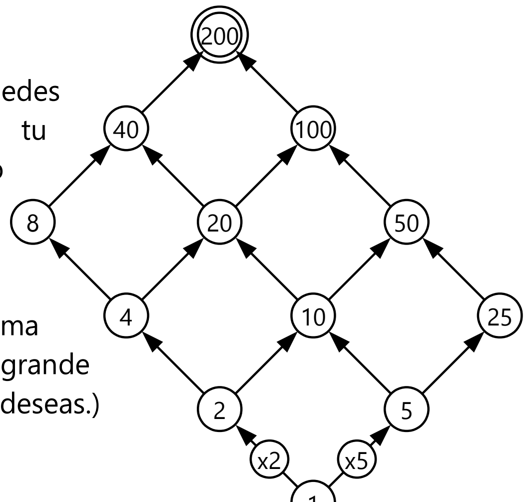


Ahora, desde el 2 y desde el 5 volvemos a dibujar estas mismas flechas, y sus nuevos resultados. Si haces las flechas exactamente iguales como las primeras, entonces la flecha desde el 2 hacia la derecha debe apuntar al mismo lugar como la flecha desde el 5 hacia la izquierda, porque 1 x 2 x 5 es lo mismo como 1 x 5 x 2:



Ahora hay una regla adicional para nuestros diagramas: deben estar "cerrados". O sea, no pueden quedar ramas sueltas como las del 4 y del 25. Todos los caminos desde abajo hacia arriba deben unirse finalmente en un único número en la punta. Por lo demás, puedes hacer tu diagrama tan grande como deseas. A continuación vemos un ejemplo de un diagrama donde el número en la punta es 200: Todos los caminos desde el 1 hacia arriba nos llevan al 200.

(Tú puedes hacer tu propio diagrama tan grande como deseas.)



Puedes explorar varios caminos desde el 1 hacia arriba. Por ejemplo podemos ir primero hacia la izquierda, después dos veces hacia la derecha, después dos veces hacia la izquierda (pero siempre hacia arriba). Este camino corresponde a estas operaciones:

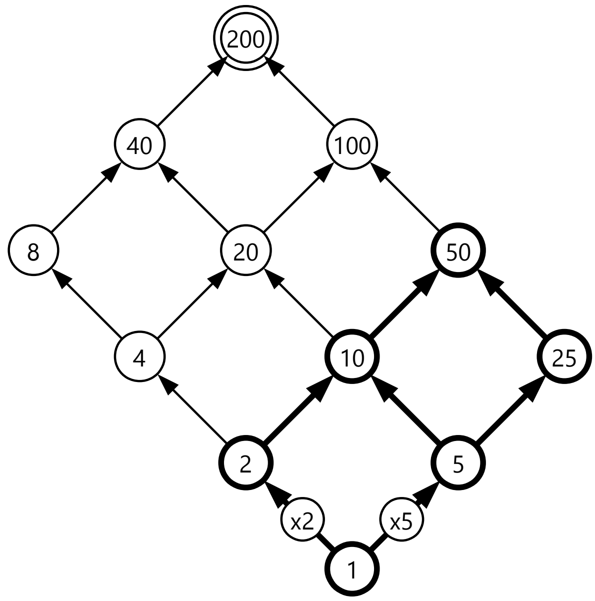
1 x 2 = 2, 2 x 5 = 10, 10 x 5 = 50,
50 x 2 = 100, 100 x 2 = 200.

O más corto: 1 x 2 x 5 x 5 x 2 x 2 = 200.

Pregunta 1) Examina otros caminos posibles en tu diagrama y anótalos. Compáralos, y averigua para cada camino: En total, ¿cuántas veces hemos multiplicado por 2? ¿y cuántas veces por 5? ¿Qué concluyes de tu observación?

Pregunta 2) Ahora falta explicar por qué llamamos a esto un "diagrama de divisores". Verifícalo: El diagrama arriba contiene todos los divisores de 200. Tu diagrama debe contener todos los divisores del número que está en la punta. Piensa e intenta explicar: ¿Por qué es eso así?

Observamos ahora unos "sub-diagramas". Por ejemplo, en la siguiente figura tenemos otra vez el diagrama del 200. Pero todos los caminos dentro de este diagrama que llevan al 50, están dibujados con líneas gruesas.

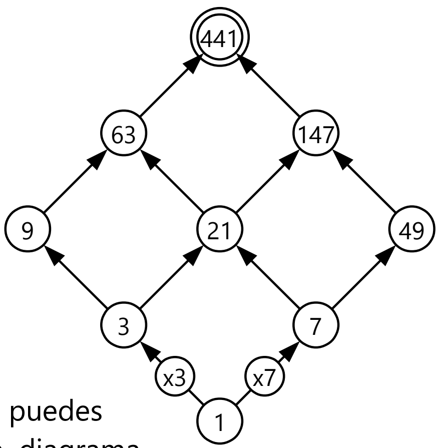


Vemos que estas líneas gruesas describen el entero diagrama del 50, el que contiene todos los divisores de 50. Y lo mismo podemos observar con cualquier otro número que se encuentra en el diagrama. O sea, el diagrama de los divisores de 200 contiene a la vez los diagramas de divisores de todos los divisores de 200.

Pregunta 3) ¿Puedes explicar por qué eso es así?

Algunos otros diagramas de divisores

Dibujemos otro diagrama. Definimos ahora que las flechas significan "x3" y "x7". Aquí tenemos el diagrama de los divisores de 441:



Si deseas, puedes ampliar este diagrama a números mayores.

Hoja de trabajo 24.1: *Completa los diagramas*

Esta hoja de trabajo contiene unos diagramas de divisores para completar. Funcionan de la misma manera como los que hemos dibujado hasta ahora, solamente con otros números.

Al lado del número en la punta escribimos también la multiplicación completa que produce este número, de acuerdo a las flechas. El diagrama ***a)*** te muestra el ejemplo.

Pregunta 4) Podríamos definir otro diagrama similar donde las flechas significan "x6" y "x9". ¿Sería eso también un diagrama de divisores? ¿Por qué sí, o por qué no? – ¿Qué propiedades deben tener los factores en las flechas, para que el diagrama muestre realmente todos los divisores del número en la punta?

Hoja de trabajo 24.2: *Diagramas con tres factores distintos*

En esta hoja tenemos unos diagramas con tres factores distintos. O sea, hay tres diferentes direcciones de flechas. Por ejemplo en el diagrama **e)**, una flecha hacia la izquierda y arriba significa "x3", una flecha directamente hacia arriba significa "x5", y una flecha hacia la derecha y arriba significa "x7".

Estos diagramas deben construirse más cuidadosamente. La flecha directamente hacia arriba ***no*** debe apuntar al mismo círculo como la combinación de las dos otras flechas, porque multiplicar por 5 no es lo mismo como multiplicar primero por 3 y después por 7. O sea, ¡la flecha "x5" desde el número 1 no debe apuntar al círculo con el 21!

En el diagrama **g)**, tú mismo tienes que descubrir lo que significan las flechas. En la punta tiene que resultar el número 154 ¿Qué puedes hacer con el 154 para descubrir el significado de las flechas?

Hojas de trabajo 24.3-4: *Más diagramas de divisores*

Estos diagramas funcionan igual como los anteriores. Unas pautas y preguntas acerca de algunos de ellos:

j) Aquí hay *cuatro* factores distintos, o sea cuatro diferentes direcciones de flechas. Por lo demás, funciona igual como todos los anteriores.

k) ¿Cuáles otros factores hay en el 240, aparte del 5? Si encuentras esos, entonces sabrás cómo definir las flechas que faltan.

l) ¿Qué puedes concluir de la forma de este diagrama? ¿Y qué operación corresponde a un paso hacia arriba?

m) Del 1 al 392 llegamos con *tres* pasos hacia la izquierda-arriba, y *dos* pasos hacia la derecha-arriba. Entonces el 392 debe tener un factor que ocurre tres veces, y otro factor que ocurre dos veces. Si encuentras estos factores, sabes lo que significan las flechas.

ñ) Un factor del 7007 es obvio. Un segundo factor ya sabemos porque está indicado en el diagrama. Con esta ayuda no debe ser tan difícil encontrar el tercer factor.

Diagramas de divisores para números dados

Ahora llegamos a la prueba final para los constructores de diagramas de divisores: Si te doy un número cualquiera, ¿puedes tú mismo construir su diagrama de divisores? ¿Cómo tendrás que proceder para hacerlo?

Intenta con los siguientes:
63, 500, 165, 64, 252, 770.

O haz tus propios ejemplos.

****Pregunta 5)*** Una pregunta un poco difícil. Pero analizando los diagramas de divisores, quizás encuentras la respuesta:

Si conoces la descomposición de un número en factores primos, ¿cómo puedes predecir *cuántos divisores* tiene ese número?

Si lo pensaste por mucho tiempo y no llegas a la respuesta, puedes consultar el *Anexo A*. Si no lo entiendes, no te preocupes: En el nivel de Secundaria I volveremos a este tema.

Principios matemáticos

Los principios matemáticos detrás de los diagramas de divisores son los mismos como los que investigamos en la *Unidad 16* (Preguntas c, f, g): Cada número natural se puede descomponer de una manera específica en factores primos. Todos los divisores de este número (excepto el 1) se pueden "combinar" a partir de estos factores primos. Los diagramas de divisores presentan estas combinaciones de una manera sistemática y ordenada.

Unidad 25 - Investigación: Los múltiplos de 11

Prerrequisitos:

- Operaciones básicas con números hasta 10'000 *(Bloque I)*.
- *(Opcional, pero recomendado):* Operaciones básicas cono números hasta un millón *(Bloque III)*.
- Concepto de la divisibilidad, múltiplos y divisores *(Unidades 14 y 15)*.
- Buenas capacidades de razonamiento.

Para los educadores

Esta Unidad contiene únicamente actividades de investigación. En vez de trabajar con algún material concreto, observamos el "comportamiento" de los números. Podemos decir que los números son el "material" que usamos para hacer nuestros experimentos.

En cuanto a conocimientos "técnicos", las operaciones introducidas en el *Bloque I* son suficientes para poder calcular los ejemplos que aparecen en esta investigación. (Aunque será beneficioso dominar también las operaciones con números grandes, introducidas en el *Bloque III.)*
Por el otro lado, una investigación como esta requiere capacidades un poco avanzadas de razonar. Por eso se recomienda hacer estas actividades hacia el *fin* del período de Primaria II.

Esta Unidad es opcional. Si estas actividades son demasiado exigentes para algunos alumnos, no necesitan hacerlo; los conocimientos que se tratan aquí no son necesarios para el nivel de Primaria. El propósito de estas actividades es el entrenamiento de la capacidad de pensar matemáticamente.

Hagan estas investigaciones sin el apuro de querer llegar "rápidamente" a una solución. Quizás necesitan coleccionar y observar muchos ejemplos, antes de entender sus propiedades. Quizás necesitan procesar mentalmente estas preguntas durante varios días.

Si han seguido el proceso de investigación y reflexión por varios días y no encuentran ninguna respuesta a algunas de las preguntas, entonces consulten las pautas en el *Anexo A*. Con la ayuda de las pautas deben poder seguir investigando por algún tiempo más. Pero quizás algunas propiedades tendrán que esperar hasta el nivel de Secundaria I para ser descubiertas. Allí retomaremos el tema, pero con la ayuda del álgebra.

Investigación

El coleccionador de números

Set, el coleccionador de números, está sentado ante una hoja de papel llena de números. "¿Qué es esto?", pregunta Anita. – "Estoy coleccionando múltiplos de 11." – "¿Todos?" – "No pues, serían infinitos. Estoy tratando de encontrar los que tienen propiedades interesantes. Mira:"

$$\underline{1122211 \times 11}$$
$$12344321$$

"Sí, interesante", dice Anita. "Pero yo todavía no sé calcular con números tan grandes. ¿Cómo haces para multiplicar tan rápidamente?" – "Multiplicar por 11 es *facilísimo*. Mira, te lo muestro con un número más pequeño:"

42 x 11 = 4 2

"Solamente tengo que escribir un 6 entre estos dos números:"

42 x 11 = 462

"¿Por qué un 6?", quiere saber Anita. – "Porque 4 + 2 = 6", responde Set. – "Ah, voy a probarlo yo también", dice Anita. "¿Así?"

58 x 11 = 5138

"No, así no funciona. Con este número tienes que usar otra regla."
– "¿Por qué?"
– "Porque ... porque ... ay, no soy bueno explicando. Acá viene Teora, seguramente ella te lo puede explicar mejor."
– Ya se había acercado Teora y pregunta: "¿De qué están hablando?"
– Set le expone su método de multiplicar por 11. "Mm", dice Teora, "un método interesante. Habría que investigar cómo se relaciona esto con las maneras más corrientes de multiplicar."

– "Pienso", dice Anita, "que para multiplicar por 11, habría que multiplicar primero por 10 y después por 1, y sumarlo:"

42 x 11 = 420 + 42 = 462

"Pero eso demora. Set lo hace mucho más rápido."
– "Sí", afirma Teora, "de alguna manera se debe generalizar el método de Set para todos los números. Set, ¿cómo lo haces para multiplicar 58 x 11 ?"

Dejaremos allí a los chicos por un momento, y haremos nuestra propia investigación:

1) ¿Por qué funciona el método de Set? ¿Puedes dar una explicación lógica?

2) ¿Cómo hay que adaptar este método para una multiplicación como 58 x 11?

3) ¿y cómo funcionaría para multiplicaciones mayores, por ejemplo 372 x 11?

Toma suficiente tiempo para hacer tu investigación. Después volveremos donde Set ...

Anita y Teora vuelven a examinar la hoja de Set. Ven que por un lado hay unas columnas resaltadas:

11	121	1144	1661	77880	225544	123321
22	242	1199	2442	33044	330011	372273
33	616	2233	2552	88330	336622	
44	858	3311	2992	22022		
55		3355	3333	44055		
66		5522	4774			
77		5555	6116			
88		6666	6886			
99		7777	7997			
		8822	9669			

"La tabla del 11 es fácil", dice Anita, señalando la primera columna. "Yo ya sabía eso. ¿Y los otros números aquí?"
– "Aquí hay números con cifras repetidas", explica Set. "Y aquí hay números capicúas."
– "¿Qué son números capicúas?"
– "Números que se leen igual hacia adelante y hacia atrás. 1661 es lo mismo si lo lees desde la derecha hacia la izquierda. Me pregunto si tal vez todos los números de esta clase son múltiplos de 11."
– "Habría que averiguarlo", dice Teora. "Veo que la mayoría de tus números interesantes tienen 4 cifras. ¿Por qué es eso?"
– "No sé. He encontrado más de esos que de los otros."
– "Eso debe tener una razón. ¿Y de 3 cifras no hay más?"
– "Quizás. Todavía no he terminado."
– "Y todos son capicúas ... ¿No hay múltiplos de 11 con 3 cifras repetidas?"
– "No encontré ninguno. Sólo con 2 y con 4."
– "Me gustaría hacerlo de una manera más sistemática", opina Teora. "Quizás podemos descubrir algún teorema que nos explica por qué los números aparecen de esta manera."
– "¿Por ejemplo?", pregunta Set.
– "Tú mismo acabas de sugerir unas hipótesis. Por ejemplo: Todos los números con cifras repetidas son múltiplos de 11. Todos los números capicúas son múltiplos de 11. Los números con 3 cifras repetidas no son múltiplos de 11 ... un momento, eso contradice la primera hipótesis. No pueden ser ambas verdaderas. Tendríamos que definir más exactamente qué entendemos con 'un número con cifras repetidas'.

Tendríamos que formular las condiciones más exactamente."
– "¿Y si nos limitamos a los números de 4 cifras?", sugiere Anita. "Set ya ha encontrado un montón de esos. Y no me imagino cómo examinaríamos *infinitos* números..."

¿Puedes tú llevar a cabo esta investigación? Vamos a precisar las preguntas un poco más:

4) ¿Son todos los números capicúas de 4 cifras múltiplos de 11? ¿Puedes explicar por qué sí, o por qué no?

5) ¿Son todos los números de 4 cifras con cifras repetidas múltiplos de 11? ¿O de qué manera exactamente tienen que repetirse las cifras? *(Compara por ejemplo los siguientes casos: 1111, 1114, 1144, 1444, 4444.)* ¿Y puedes explicar por qué?

6) ¿Cómo es en el caso de los números de 3 cifras? ¿Son todos los números capicúas de 3 cifras múltiplos de 11? ¿Y no hay ningún número de 3 cifras repetidas que es múltiplo de 11?

***7)** Investiga preguntas similares para números de 5, 6, y más cifras. ¿Encuentras unas leyes generales?

Volvamos a Set y sus amigas. Teora sugiere: "Quiero examinar los números de 3 cifras un poco más de cerca. Creo que de esos vamos a poder anotar todos los que son múltiplos de 11."
– "Está bien", responde Set. "Ya he avanzado más con mi colección; creo que ya no faltan muchos de esos."
– "Mira", dice Anita, "en todos estos números, la cifra del medio es la suma de las otras dos:"

121, 132, 143, 154, 231, 242, 253, 341, 352

Teora observa: "Esto es obvio. ¿Recuerdas que ese era el método que Set usaba para multiplicar por 11?"
– "¡Entonces podemos usar esto como una regla de divisibilidad!"
– "Para los números de 3 cifras. Pero ¿recuerdas que había otros números que no funcionaban así? Set, permíteme ver tu colección."
– Teora señala los siguientes números:

209, 308, 319, 407, 418, 429, 506, 517

"Aquí la cifra del medio no es la suma de las otras. Pero debe haber una regla similar que funciona aquí."

Ahora tenemos que despedirnos de nuestros amigos. Pero su última conversación deja unas preguntas abiertas que puedes investigar ahora:

8) ¿Encuentras una regla para el segundo grupo de números (empezando con 209)? ¿Qué propiedad nos ayuda aquí a distinguir los múltiplos de 11?

***9)** ¿Encuentras una regla similar para números de 4 o más cifras? *(En los números de 4 cifras puedes examinar primero aquellos múltiplos de 11 que son "números interesantes": capicúas, o con cifras repetidas. Pero recuerda que no todos los múltiplos de 11 se ven así. Por ejemplo 1837, 1683, 4565, 7381, también son múltiplos de 11.)*

***10)** Examina y describe cualquier otra propiedad interesante de los múltiplos de 11 que encuentras.

Principios matemáticos

Generalizaciones, demostraciones y refutaciones

En esta Unidad tenemos nuestro primer encuentro significativo con el concepto de una ***demostración*** matemática (Preguntas 4 a 7). Al nivel de primaria no exigimos que una demostración sea matemáticamente rigurosa o formalmente correcta. Podemos decir que una demostración matemática es simplemente ***una explicación de por qué algo tiene que ser como es.*** O sea, es una respuesta convincente a la pregunta: "¿Por qué?".

Las leyes matemáticas normalmente se refieren a "todos" los objetos de una clase determinada. Como en la Pregunta 4: "*Todos* los números capicúas de 4 cifras son múltiplos de 11." Podríamos producir treinta ejemplos y decir: "Ves, siempre es así." Pero eso no es una demostración matemática, porque no hemos demostrado que la ley se aplica a *todos* los números que cumplen la condición. ***Un gran número de ejemplos todavía no es ninguna demostración***.
En esta pregunta todavía sería factible enumerar *todos* los casos posibles, o sea todos los números capicúas de 4 cifras. Podríamos ordenarlos de manera sistemática y mostrar que cada uno de ellos es un múltiplo de 11. Entonces solamente nos faltaría demostrar que realmente hemos captado *todos* estos números, y la demostración es completa.
Pero eso no sería una respuesta satisfactoria a la pregunta "*¿Por qué?*". Cuando descubrimos alguna propiedad matemática llamativa, es de suponer que existe alguna razón más profunda que explica el *por qué* de esta propiedad. Una enumeración de todos los casos no explica esta razón más profunda. Debe existir alguna propiedad, relacionada con el hecho de que un número es capicúa, que a su vez explica por qué ese número debe ser un múltiplo de 11. O sea, debe existir una manera de *generalizar* todos los casos y expresarlos de una única forma, que a su vez permite sacar conclusiones que entonces se aplican a todos los casos. (El *Anexo A* contiene pautas de cómo eso se puede hacer en este caso. Pero inténtenlo ustedes mismos seriamente, antes de consultar las pautas.)

En muchos casos, un argumento generalizado es la única manera de demostrar algo, porque los casos posibles son *infinitos*, y por tanto es imposible enumerarlos todos. Por ejemplo, si queremos describir y demostrar una relación generalizada entre números capicúas y divisibilidad entre 11 para números arbitrariamente grandes (Pregunta 7), entonces necesitamos una demostración general, porque estamos hablando de una ley que se aplica a infinitos casos.

Por el otro lado, es mucho más fácil ***refutar*** una hipótesis que se refiere a "todos" los casos de una clase determinada. Por ejemplo: "¿Son todos los números capicúas de 3 cifras múltiplos de 11?" (Pregunta 6). La hipótesis es refutada, si encontramos ***un único contraejemplo*** donde la hipótesis resulta falsa. Por ejemplo 101 es un número capicúa, pero no es divisible entre 11. Con eso ya hemos refutado la hipótesis: *No todos* los números capicúas de 3 cifras son múltiplos de 11, porque acabamos de encontrar uno que no lo es.
En otras palabras: Para que la hipótesis sea verdadera, tendría que aplicarse a todos los casos *sin excepción*. Pero hemos encontrado una excepción; por tanto la hipótesis es falsa.

Pero si en su lugar establecemos la hipótesis: "*Ningún* número capicúa de 3 cifras es múltiplo de 11", esta hipótesis también es falsa. Equivale a decir: "*Todos* los números capicúas de 3 cifras *dejan un residuo* al dividirlos entre 11." Pero esta hipótesis también tiene sus excepciones. Por ejemplo 121 ó 616 son números capicúas de 3 cifras, que sí son múltiplos de 11.

Resumimos:

Una hipótesis que se refiere a "todos" los casos que cumplen determinadas condiciones, puede *demostrarse* mediante un razonamiento generalizado, si es que se demuestra que la generalización incluye todos los casos que cumplen las condiciones. En cambio, un gran número de ejemplos todavía no es ninguna demostración.

Una tal hipótesis, si es falsa, puede *refutarse* mediante un único contraejemplo.

Bloque III: Cálculos con números mayores (Unidades 26 a 33)

Este bloque se centra en la ampliación del espacio numérico, y las operaciones básicas con números grandes. En la suma y resta simplemente se aplican los métodos ya conocidos a números mayores. En la multiplicación y división, se introduce adicionalmente la multiplicación y división entre números con varias cifras. Estas operaciones pueden requerir bastante práctica con materiales concretos, hasta que los alumnos entiendan el significado de lo que se hace en el procedimiento escrito.

La ubicación de este bloque en el libro, después de las actividades con múltiplos y divisores, es bastante arbitraria. Dependiendo del camino individual de cada alumno, las actividades de este bloque se pueden hacer también en otro momento: inmediatamente después del Bloque I, o recién después del Bloque IV (Fracciones), o intercalado entre actividades de los otros bloques. Por el otro lado, se recomienda terminar este bloque antes de entrar al Bloque V (Decimales), porque el Bloque V requiere un buen entendimiento del funcionamiento del sistema decimal hasta un millón.

Unidad 26 - Números hasta un millón

Prerrequisitos:
- Números hasta 10'000 *(Unidad 1)*.
- Principios del sistema decimal y del valor posicional *(Unidades 2 y 8)*.

Materiales necesarios:
- Material de canje para el sistema decimal (tapas de botellas, "monedas" de cartulina, o similares). *(vea Unidad 1)*.
- Ábaco
- Tablero posicional grande en cartulina (hasta millones)
- *(para los trabajos manuales sugeridos en "Ampliaciones"):* Cartulina, madera, pintura, herramientas de carpintería, etc.

Para los educadores

Al ampliar el espacio numérico más allá de 10'000, llegamos a magnitudes que ya no se pueden representar fácilmente con material concreto. En la sección "Ampliaciones" se encuentran unas ideas para fabricar piezas del material Base 10, en el tamaño correcto, hasta un millón. Pero ya no será factible representar números grandes exactos (como 368'824) con estas piezas.

También en la vida diaria nos encontramos raras veces con objetos contables en tales cantidades. (Sin duda podríamos conseguir un millón de granos de arena o de arroz; pero ¿quién se encargará de contarlos?) Tenemos que recurrir a *estimaciones* que necesariamente son inexactas.

La *conversión de medidas* puede darnos una idea aproximada de los números grandes, si expresamos por ejemplo una distancia de varios kilómetros en centímetros, o una cantidad como 536 kg en gramos, o calculamos cuántos mililitros contiene un metro cúbico de agua.

Por lo demás, usaremos materiales "simbólicos" para representar los números grandes. O sea, materiales que ya no guardan ninguna relación directa con la cantidad que representan, sino que les hemos asignado su valor arbitrariamente: tapas de botellas que representan decenas de millares y centenas de millares; o las cuentas del ábaco decimal. Esto ya es un paso hacia la abstracción, porque tenemos que imaginarnos que el material "vale" una cantidad que no podemos ver. Pero al nivel donde nos encontramos ahora, los niños deberían ser capaces de dar este paso.

TALLER

Contar con muchos miles

Si tienen varios cubos de millares del material Base 10, pueden empezar a contar con estos: 1000, 2000, 3000, ... Cuando hayan contado todos los cubos que tienen, pueden pasar a otro material: las tapas de botellas o el ábaco. Contamos por millares y recordamos que cada millar vale tanto como uno de esos grandes cubos de mil.

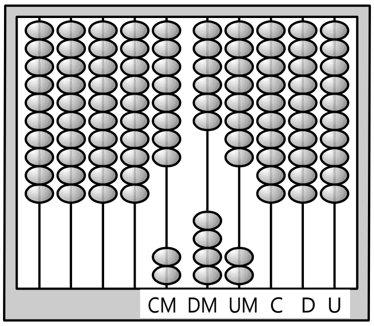
Para representar números hasta un millón (o varios millones) con tapas de botellas o "monedas" de cartulina, necesitamos ahora 7 colores diferentes, uno para cada posición del tablero posicional. O sea, adicionalmente a los colores que hemos usado hasta ahora, necesitamos un color que significa 10'000, otro que significa 100'000, y uno que significa un millón.

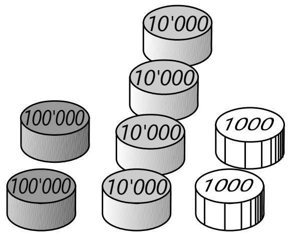
Cuando llegamos a 10'000, notamos que los millares son diferentes de los otros números que hemos conocido antes, respecto a sus nombres: Hasta aquí, cada nueva posición en el tablero posicional recibió un nombre nuevo: "uno", "diez", "cien", "mil". Pero para 10'000 no usamos ningún nombre nuevo; decimos "diez mil". Igualmente 100'000 no tiene ningún nombre nuevo; decimos "cien mil". Así podemos seguir contando por millares hasta llegar a 999'000. Ahora, la siguiente posición sí tiene un nombre nuevo: 1'000'000 no se dice "mil mil"; se dice "un millón".

Quizás no van a querer contar todos los millares hasta 999'000. Podemos contar de diez mil en diez mil desde 10'000 hasta 100'000, y después de cien mil en cien mil desde 100'000 hasta 1'000'000. O podemos elegir ciertos tramos para contar por miles; por ejemplo desde 485'000 hasta 505'000, o desde 980'000 hasta 1'000'000. Lo importante es que los niños entiendan que el contar por millares enteros funciona igual como el contar por unidades de 1 a 999: Los nombres de los números son los mismos, excepto que añadimos "... mil" porque son millares. Y también los canjes funcionan igual al pasar una decena o una centena (de millares).

Cuenten también retrocediendo como lo hemos hecho con los números más pequeños, pero ahora por millares: 603'000, 602'000, 601'000, 600'000, 599'000, 598'000, ...

Practiquen representar con el material algunos números arbitrarios, pero por ahora solamente millares enteros. Por ejemplo, así se ve el número 242'000 en el ábaco ... y con las tapas de botellas:





Ahora lo escribimos

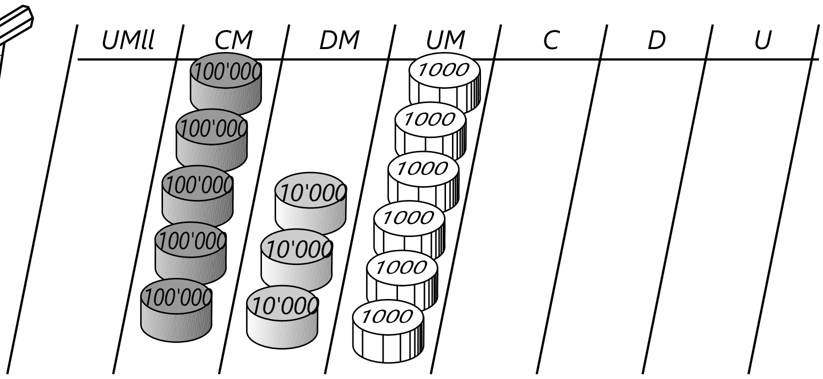
Tablero posicional grande

Para prepararnos para la lectura y escritura de estos números grandes, ampliamos nuestro tablero posicional grande de cartulina, o fabricamos uno nuevo. Incluimos ahora todas las posiciones hasta los millones:

UMll (1'000'000)	CM (100'000)	DM (10'000)	UM (1000)	C (100)	D (10)	U (1)

Ya que ahora tenemos tres posiciones dentro de los "millares", tenemos que diferenciarlos como "centenas de millares" (CM), "decenas de millares" (DM), y "unidades de millares" (UM).

Podemos usar las tapas de botellas para representar números grandes dentro de este tablero posicional. Colocamos las tapas dentro del tablero, cada una donde corresponde a su valor posicional. Así se ve por ejemplo el número 536'000:



Alternativamente pueden usar el ábaco en lugar de tablero posicional, y marcar las posiciones con las abreviaciones correspondientes.

Con el tablero posicional por delante, ya no es difícil escribir este número con cifras. En cada posición donde no hay nada, escribimos un cero.

(Acerca del separador de miles, vea la nota en la Unidad 1.)

Representen varios números de millares enteros de esta manera, y escríbanlos. Pueden también fabricar unas tarjetas con esta clase de números y darlas a los niños para que lean y representen los números escritos.

TALLER *(Continúa)*

Combinamos millares con centenas, decenas y unidades

Cuando los niños dominan la lectura y escritura de los números con millares enteros, podemos dar el siguiente paso: Aumentamos a estos números unas centenas, decenas y unidades. Por ejemplo, podemos comenzar con 367'000 y contar desde allí por unidades. Represente el número con el material y aumenten unidades, una por una. ¿Cómo se llaman estos números? ¿Cómo se escriben?

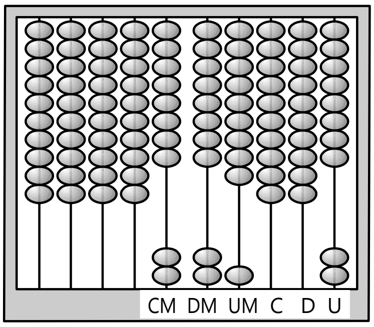
En vez de avanzar por unidades, podemos también avanzar por decenas o por centenas.

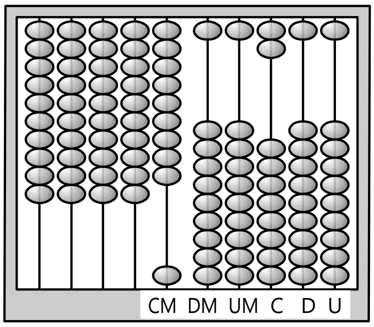
Un poco más difícil es contar retrocediendo con estos números grandes. ¿Qué número viene antes de 367'000? Hagan el proceso de canje en el ábaco o con las tapas de botellas, para que puedan quitar una unidad y contar retrocediendo. Cuenten también retrocediendo por decenas y por centenas.

Ahora practiquen representar, decir y escribir números arbitrarios como 793'662, 804'777, 260'034, etc.

Comparar números grandes

Si los niños han hecho anteriormente suficientes actividades de comparar números menores con material concreto, deberían ahora ser capaces de aplicar los mismos principios a la comparación de números mayores. Podemos comparar algunos números, representándolos en el ábaco o con las tapas de botellas. Pero al hacer eso, tenemos que recordar que las centenas de millar "pesan" más que las decenas de millar, y las decenas de millar "pesan" más que las unidades de millar. Comparemos por ejemplo 221'002 con 199'899:





El número 199'899 se representa con mucho más cuentas en el ábaco. Sin embargo es menor, porque tiene una sola centena de millares, mientras 221'002 tiene dos, y eso es lo que "pesa" más.

Comparen también los siguientes números entre sí. Usen material si desean:

472'858 con 473'121

53'343 con 532'232

853'535 con 848'484

717'555 con 676'777

699'669 con 699'696

Hoja de trabajo 26.1 *(arriba): Escribe números en cifras y en letras.*

Después de hacer las actividades con el material concreto, pueden pasar a esta hoja de trabajo. Para algunos niños puede ser necesario que representen estos números con un material concreto, antes de escribirlos. Otros podrán escribirlos directamente.

Hoja de trabajo 26.1 *(abajo): Cuenta hacia adelante y hacia atrás.*

En la tabla a la izquierda buscamos el antecesor y el sucesor de los números dados. O sea, contamos por una unidad hacia atrás y hacia adelante.

En las tablas a la derecha contamos en pasos de 1000, resp. 10'000. Analizando los números que están en cada tabla, los alumnos pueden descubrir por sí mismos si tienen que avanzar o retroceder.

Escribe los signos correctos (abajo a la izquierda): Aquí comparamos números entre sí, como lo hicimos anteriormente con el material concreto.

Buscamos números grandes

Busquen juntos unos datos que se expresan con números grandes (entre 1000 y 1'000'000): estadísticas de población, noticias sobre montos de dinero, otras cantidades grandes ... Pueden rebuscar las noticias en los diarios o en internet, las estadísticas en enciclopedias o en un atlas, etc. También pueden buscar datos específicos:
¿Cuántos habitantes tiene nuestra ciudad; nuestra provincia?
¿Cuánto cuesta comprar un carro; una casa?
¿Cuántos kilómetros mide una vuelta alrededor de la tierra?
¿Cuántas vacas hay en nuestro estado o país?
¿Cuántos niños nacieron en el año pasado en nuestro estado o país?
¿Cuántos kilos pesa un camión; una locomotora; un avión?
Etc.

Es posible que en estas búsquedas encuentren números mayores a un millón. Pueden explicar esos ahora, o guardárselos para la *Unidad 91*, "Números astronómicos".

Hoja de trabajo 26.2: *Ubicar y estimar números en la recta numérica*

Esta hoja funciona igual como la Hoja 1.2. Vea las explicaciones en la *Unidad 1*.

Pregunta capciosa:

¿Cómo se escribe con cifras: "once mil once cientos once"?

(Respuesta en el Anexo A.)

Ampliaciones

Construimos un material Base 10 hasta un millón

Esta actividad (opcional) puede requerir bastante trabajo, pero ayudará a tener una idea de lo que significan los números grandes. Vamos a fabricar una pieza de 10'000, una de 100'000, y una de un millón, según las medidas del material Base 10.

Si colocamos 10 cubos de millar en fila, uno tras otro, tenemos 10'000. La ***decena de millares*** corresponde entonces a una viga de 1 metro de largo y 10 x 10 cm de grosor. Quizás pueden pedir a un carpintero que les corte una viga con estas medidas, así solamente les falta pintarla.

Las piezas más grandes ya no podremos fabricar de madera maciza. La ***centena de millares*** es un cuadrado de 1 metro por 1 metro, y un grosor de 10 cm. Podemos fabricar un armazón con listones de madera, y cubrirlo con cartulina. (Pidan la ayuda de alguien que tiene experiencia en trabajos de carpintería.)

Para visualizar las unidades que contiene, podrían además forrarlo con papeles que tienen cuadrículas de 1 x 1 cm. La ***Hoja de Trabajo no.26.3*** contiene una cuadrícula que pueden copiar para este fin. Pero necesitarán 20 de estas hojas para forrar un metro cuadrado, y otras 20 hojas para el otro lado. *(Al lado izquierdo de la hoja falta una columna de cuadrados, los cuales se quedaron más allá del área imprimible del papel.)*

Como alternativa, quizás tienen un viejo colchón de espuma que ya no sirve, y pueden cortar de él un pedazo de un metro cuadrado.

La ***unidad de millón*** corresponde a un cubo de 1 metro de ancho, 1 metro de largo y 1 metro de alto; o sea un metro cúbico. Podrán fabricarlo con un armazón de maderas delgadas, como la centena de millares. O si lo necesitan solamente para uso temporal, quizás tienen algún mueble (cómoda o similar) que tiene aproximadamente las medidas correctas, para convertirlo en un "cubo de millón" para el tiempo que lo necesitan.

¿A dónde vamos desde aquí?

Los alumnos interesados en conocer números mayores a un millón, o los interesados en la astronomía, pueden ahora estudiar la *Unidad 91, "Números astronómicos"*. De otro modo, simplemente pasen a la Unidad siguiente.

Unidad 27 - Sumar y restar números grandes

Prerrequisitos:

- Números hasta un millón *(Unidad 26)*.
- Suma y resta mental y escrita *(Unidades 3, 4, 6)*.

Materiales necesarios:

- Material de canje para el sistema decimal (tapas de botellas, o similares).
- Ábaco.

Para los educadores

Técnicamente, esta Unidad no contiene nada nuevo. Simplemente usamos las operaciones y los procedimientos ya conocidos, y los aplicamos al espacio numérico ampliado hasta un millón.

Después de hacer las actividades con material concreto, se recomienda que los niños resuelvan las operaciones *mentalmente* hasta donde pueden. Así entrenan su concentración, y no se acostumbran a depender únicamente del procedimiento escrito. Por ejemplo en una operación como 240'000 + 750, el resultado se puede "ver" directamente, sin necesidad de efectuar la operación por escrito.

TALLER

Sumas y restas con tapas de botella y en el ábaco

Usamos los mismos procesos como en las *Unidades 3, 4 y 6:* Para sumar juntamos el material de todos los sumandos; y si en una posición hay 10 o más elementos, hacemos el canje necesario. Para restar quitamos la cantidad indicada; y si en una posición no alcanza, entonces quitamos primero lo que hay, después hacemos el canje de un elemento de la siguiente posición, y seguimos quitando. Se puede comenzar por la derecha o por la izquierda, funciona de ambas maneras. Si comenzamos por las unidades, estamos en analogía con el procedimiento escrito. Comenzar por la izquierda es más conforme a la manera usual de usar el ábaco.

Que los niños decidan cuando ya no necesitan el material y pueden hacerlo mentalmente o por escrito.

Pueden inventar sus propias operaciones, o practicar con las siguientes.
Nota: Si trabajan las operaciones siguientes sin material, las escritas horizontalmente (a-l) se resuelven de preferencia mentalmente, las escritas verticalmente (m-w) de preferencia por escrito. Pero eso se puede cambiar según la habilidad individual de cada niño.

a) 300'000 + 500'000	g) 906'000 – 5'000
b) 365'000 + 770	h) 500'422 – 200'000
c) 2'035 + 480'000	i) 790'338 – 60'200
d) 224'000 + 40'000	j) 807'306 – 4'004
e) 460'064 + 300'300	k) 484'454 – 400'454
f) 999'700 + 300	l) 600'000 – 600

m) 262'067 + 35'622	n) 581'734 + 418'265	ñ) 394'277 + 593'377
o) 67'219 + 377'225	p) 173'954 + 826'046	q) 5'678 + 594'323
r) 782'569 – 81'256	s) 801'777 – 678'321	t) 1'000'000 – 256'291
u) 572'112 – 73'116	v) 323'952 – 235'064	w) 320'023 – 38

Ampliaciones

Un truco de sumas

Alberto se presenta como el "mago de las sumas". Pide a su público: "Por favor, escriban aquí en la pizarra tres números de 5 cifras, uno debajo de otro, mientras yo me alejo para no verlos." – Los presentes escriben los siguientes números:

57'983
78'216
46'832

Alberto anuncia: "Ahora yo voy a escribir dos números más, y después voy a sumar todos los cinco números rápidamente." Se acerca a la pizarra, escribe dos números adicionales, y sin detenerse ni por un momento, escribe directamente el resultado de la suma:

57'983
78'216
46'832
21'783
53'167
257'981

Todos se quedan admirados. Aun Pablo, el "calculador" más rápido del grupo, demora un buen rato para verificar que el resultado de Alberto efectivamente es correcto. "¿Cómo lo hiciste?", quieren saber todos. – "No, los magos nunca revelan sus secretos", responde Alberto. – "Otro ejemplo más", pide Pablo. Alberto acepta. Esta vez, la suma completada se ve así:

48'881
66'772
88'544
33'227
11'455
248'879

Pablo supone: "Algo tienen que ver los números que Alberto añade". Pero Alberto borra rápidamente la pizarra, para que no se le ocurra a nadie descubrir su secreto.

Investigación

El experto puede ver que la "magia" de Alberto se basa en unas leyes matemáticas no demasiado complicadas. Ya que sus números están conservados en esta página, tú también puedes descubrir el secreto. ¿A qué ley obedecen los números adicionales que escribe Alberto? ¿Y cómo puede desde allí tan rápidamente escribir el resultado?

Matemática divina

Una suma larga por orden de Dios

¿Sabías que una vez Dios encargó a Moisés a calcular una suma larga como las que hicimos en esta Unidad? A veces es necesario saber matemática para cumplir los encargos de Dios. Moisés tuvo que contar el número de todos los varones adultos de Israel, tribu por tribu. Después tuvo que sumar los números de las tribus, para obtener el número total. Esta suma larga se encuentra en la Biblia en el libro de Números, capítulo 1.

Unidad 28 - Multiplicación por números de varias cifras

Prerrequisitos:
- Principios del sistema decimal y del valor posicional *(Unidades 2 y 8)*.
- Multiplicación de números grandes *(Unidades 9 y 10)*.
- Números hasta un millón *(Unidad 26)*.

Materiales necesarios:
- Material de canje en Base 10 (tapas de botellas o similares).
- Ábaco.

Para los educadores

Esta Unidad presenta una variedad de métodos para acercarse al procedimiento de la multiplicación larga: con el material de las tapas de botella; con el ábaco; con razonamientos más abstractos; con la "notación árabe" (en "Ampliaciones"). No es necesario que un alumno haga todas estas actividades. Que cada uno descubra cuál es el método que le ayuda mejor a comprenderlo; y una vez que lo comprende, podrá usar directamente uno de los procedimientos escritos (el convencional o el árabe).

TALLER

Multiplicar decenas, centenas, millares ...

Ya sabemos cómo multiplicar rápidamente por 10, por 100, por 1000, etc. (Si los niños no lo recuerdan, habrá que hacer un breve repaso de la *Unidad 8*.)

Entonces podemos también multiplicar fácilmente números que contienen *varias* centenas o millares. Por ejemplo 4000 x 8 es simplemente "4 millares por 8", o sea 32 millares. 600 x 6 es "6 centenas por 6", o sea 36 centenas = 3600. Podemos practicar algunas operaciones como estas con el material de las tapas de botellas. Quizás algunos niños pueden ya hacerlo directamente en la mente, sin la ayuda del material concreto.

A un nivel un poco más abstracto podemos ver que la multiplicación 4000 x 8 es lo mismo como 4 x 8, solamente con tres ceros "añadidos" al final. Eso hace que la operación sea muy fácil. (Las investigaciones de la *Unidad 8* nos han mostrado que en realidad no se "añaden ceros", sino que las cifras se desplazan en el tablero posicional. Esta diferencia sutil se volverá importante en el *Bloque V* cuando calculamos con decimales.)

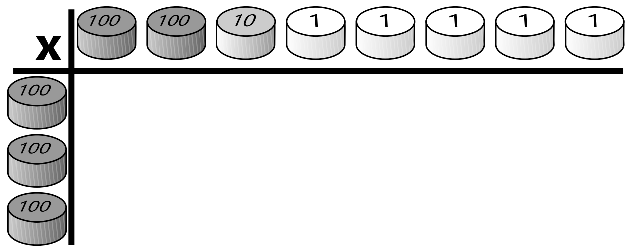
La ley matemática que nos explica esta operación es la *ley asociativa*:

$$8 \times 4000 = 8 \times (4 \times 1000) = (8 \times 4) \times 1000 = 32 \times 1000.$$

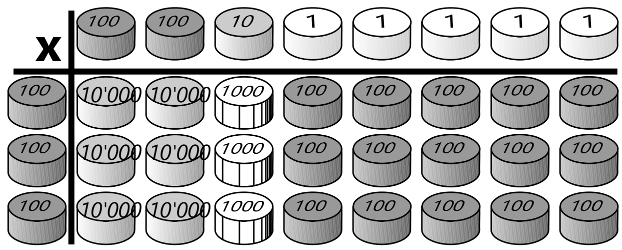
Ahora podemos también calcular unas operaciones un poco más difíciles, como por ejemplo 42100 x 4. Podemos representarlo con tapas de botellas o calcular directamente: Con el mismo razonamiento como antes, podemos ver fácilmente que es lo mismo como 421 x 4, y dos ceros detrás. Quizás algunos niños ya podrán calcularlo mentalmente:

Calculan 421 x 4 en la mente, escriben el resultado y escriben dos ceros detrás.

Un caso similar es este: 215 x 300. Si los niños ya entienden el procedimiento mental, no tendrán ninguna dificultad aquí. De otro modo podemos representarlo con tapas de botellas: Formamos un rectángulo donde un lado es la representación de 215, y el otro lado consiste en 3 *centenas*:

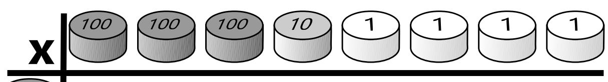
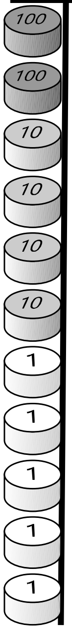


Aquí no podemos simplemente "copiar" el 215 tres veces, porque estamos multiplicando por centenas, no por unidades. Las unidades, cuando se multiplican por centenas, se convierten en centenas, porque 1 x 100 = 100. Las decenas se convierten en millares, porque 10 x 100 = 1000. Y de la misma manera, las centenas se convierten en decenas de millares.



Practiquen esto con algunos otros ejemplos similares. Les ayudará a comprender mejor la siguiente sección.

Multiplicaciones grandes con tapas de botellas

Ya conocemos esta actividad desde la *Unidad 9*. Allí hemos multiplicado un número grande por un número que consiste solamente en unidades. Ahora hacemos lo mismo para el caso donde *ambos* factores son números grandes. Por ejemplo, multiplicamos 314 x 245.

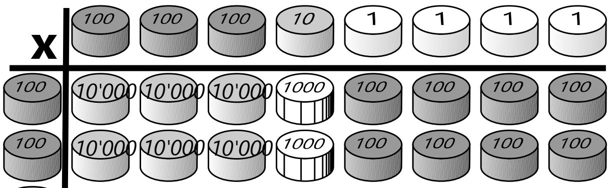
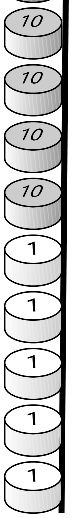
(Dependiendo del tipo de multiplicación que tenemos, podemos necesitar una gran cantidad de tapas. Si no tienen suficientes, pueden en su lugar fabricar tarjetitas o "monedas" de cartulina con los valores correspondientes, usando un color diferente para cada valor.)

Ahora tenemos que pensar bien cuál será el *valor posicional* de los resultados en cada campo de este rectángulo. Arriba a la izquierda multiplicamos centenas por centenas. Recordemos los principios del sistema decimal: 100 x 100 = 10'000. Aquí tenemos que colocar decenas de millares.

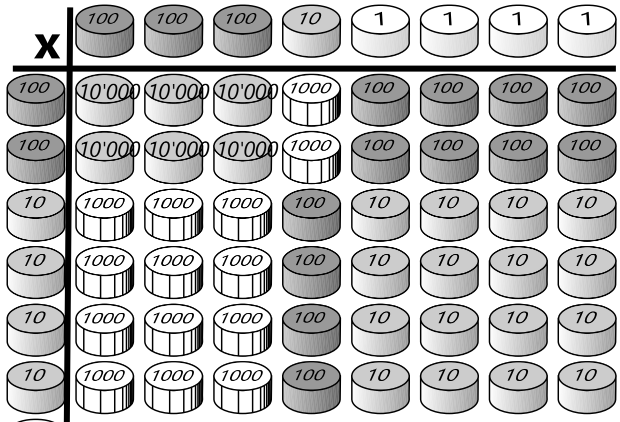
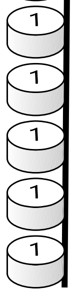
A su lado multiplicamos centenas por decenas; 100 x 10 = 1000. Aquí tenemos que colocar unidades de millares.

Arriba a la derecha multiplicamos centenas por unidades; aquí colocamos centenas.

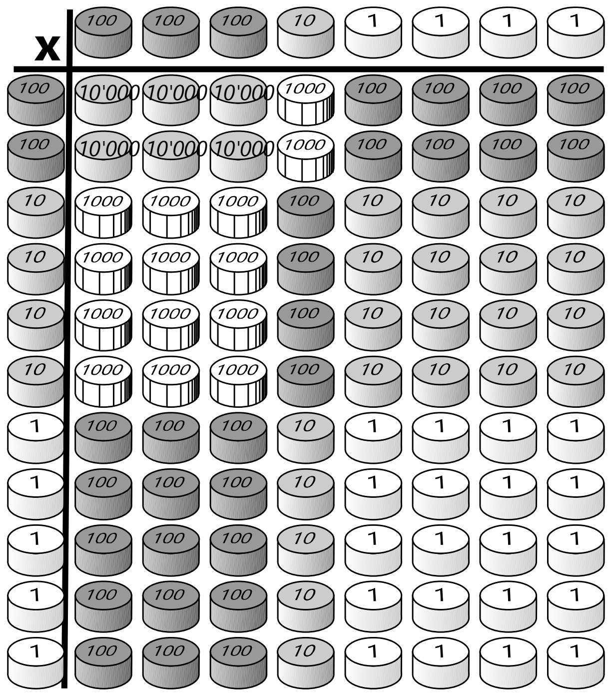
Hasta aquí, la multiplicación se ve así:

Pasamos a la siguiente parte por debajo. Aquí multiplicamos todo con decenas. Entonces tenemos que poner a la izquierda unidades de millares, en el medio centenas, y al final decenas *(Dibujo siguiente)*:

Y en la última parte multiplicamos todo con unidades; eso ya lo conocemos. Así queda la multiplicación completa:



Para saber cuánto vale todo eso, podemos contar todo; o podemos primero hacer los canjes necesarios: canjeamos 10 unidades por una decena, 10 decenas por una centena, etc. – Si lo contaron correctamente, deben llegar a 76'930.

Inventen algunos otros ejemplos y calcúlenlos de esta manera.

Ahora lo escribimos

Escribimos ahora lo que hemos hecho con el material. Volvamos al primer ejemplo: 245 x 314. Arriba estamos multiplicando 245 x 300. Podemos escribirlo así:

```
  245 x 300
73500              -->   73500
```

Debajo hemos multiplicado 245 x 10. (Eso se puede multiplicar mentalmente.)

Finalmente hemos multiplicado 245 x 4. Y la suma de estas tres multiplicaciones es el resultado de la multiplicación grande:

```
  245 x 300
73500              -->   73500
  245 x 10 =              2450
  245 x 4
  980              -->     980
Total                    76930
```

¿Recuerdas la ley distributiva? Esta ley nos explica por qué lo podemos hacer así:

245 x (300 + 10 + 4)
= 245x300 + 245x10 + 245x4

En las multiplicaciones escritas normalmente, comenzamos por el lado de las unidades; entonces es un poco más lógico si en lo vertical comenzamos también con la multiplicación por 4, después por 10 y al último por 300:

```
  245 x 4
  980              -->     980
  245 x 10    =           2450
  245 x 300
73500              -->   73500
Total                    76930
```

Nota: *En esta actividad caminaremos por un camino que nos lleva al procedimiento escolar conocido. En la sección "Ampliaciones" aprenderemos otra forma de anotar las multiplicaciones; una que corresponde más exactamente a la multiplicación con las tapas de botellas, pero es un poco más trabajosa.*

Y podemos ahorrarnos un poco de trabajo si no escribimos cada operación doblemente: Si ya hemos escrito 245 x 314, podemos solamente mirar estos números, y ya recordaremos que tenemos que multiplicar el 245 por 4, después por 10 y después por 300.
– Tampoco es necesario escribir los ceros finales: Si escribimos todo ordenadamente y usamos la cuadrícula de la hoja como tablero posicional, entonces solamente tenemos que recordar que la multiplicación con las decenas comienza en la columna de las decenas, y la multiplicación con las centenas comienza en la columna de las centenas. (O podemos marcar las posiciones de esos ceros con puntos.)

```
  245 x 314
   980
  245.
 735..
 76930
```

Esta operación contiene mucha información en muy poco espacio. Por eso es importante escribirla de manera ordenada y suficientemente grande; de otro modo pueden suceder errores.

Sobre todo los numeritos que "llevamos" al calcular cada multiplicación parcial, pueden causar confusiones. Quizás ya sabes multiplicar sin escribir esos numeritos y los guardas en la cabeza; entonces no tendrás este problema. Pero si necesitas escribirlos, entonces lo más recomendable será que los escribas en la misma fila del resultado que estás calculando. Así los numeritos se encuentran exactamente donde tienes que sumarlos al siguiente número. – Y al final, cuando sumas los resultados parciales, puedes escribir los números que "llevas" en la última fila donde escribes el resultado final; así esos también están en el lugar exacto donde los sumas después.

```
  245 x 314
    1 2
   980
  245.
 1 1
 735..
  1 1
 76930
```

(Al calcular esta suma final pasamos por alto los numeritos que hemos "llevado" al multiplicar, porque ¡esos ya están sumados dentro de los resultados de esas multiplicaciones!)

Multiplicaciones con resultados "interesantes"

Puedes practicar con las siguientes multiplicaciones. Todos los resultados tienen algún orden particular, una simetría, un patrón repetido, o alguna otra propiedad "interesante".

a) 22792 x 39
b) 6778 x 51
c) 287 x 271
d) 333 x 37
e) 8547 x 52
f) 3125 x 32
g) 1295 x 429
h) 11 x 13 x 13 x 13 x 14
i) 11 x 13 x 17 x 19 x 21
j) 2849 x 351
k) 1929 x 64
l) 2184 x 319
m) 2381 x 42
n) 3719 x 242
ñ) 3394 x 291
o) 15625 x 64
p) 4724 x 187
q) 1131 x 616

Una serie curiosa de multiplicaciones:

Para notar la propiedad especial de estos resultados, escríbelos todos uno debajo del otro en una tabla, una cifra en cada cuadro:

142857 x 1 =						
142857 x 3 =						
142857 x 2 =						
142857 x 6 =						
142857 x 4 =						
142857 x 5 =						
142857 x 7 =						

Y otra serie similar:

76923 x 2 =						
76923 x 7 =						
76923 x 5 =						
76923 x 11 =						
76923 x 6 =						
76923 x 8 =						
76923 x 13 =						

(Usa la cuadrícula de una hoja o de tu cuaderno como tabla. No escribas dentro del libro.)

El secreto del 1221:

Si tienes perseverancia, calcula las siguientes multiplicaciones para descubrir el secreto de la tabla del 1221:

a) 1221 x 263
b) 1221 x 354
c) 1221 x 445
d) 1221 x 536
e) 1221 x 627
f) 1221 x 718
g) 1221 x 809
h) 1221 x 647
i) 1221 x 556
j) 1221 x 465
k) 1221 x 374
l) 1221 x 283
m) 1221 x 192
n) 1221 x 101
ñ) 1221 x 91
o) 1221 x 182
p) 1221 x 273
q) 1221 x 364
r) 1221 x 455
s) 1221 x 546
t) 1221 x 637
u) 1221 x 728
v) 1221 x 819

Ahorrar trabajo cuando hay ceros

Si el segundo factor contiene uno o varios ceros, no es necesario escribir la multiplicación por cero, porque da cero. Solamente tenemos que recordar que en la multiplicación con el siguiente dígito tenemos que comenzar en la posición correcta:

372 x 803
1116
2976
298716

¿Puedes calcular también estas multiplicaciones, sin equivocarte en los valores posicionales, y sin escribir ceros innecesarios?

a) 792 x 205 b) 4007 x 206 c) 250 x 3040

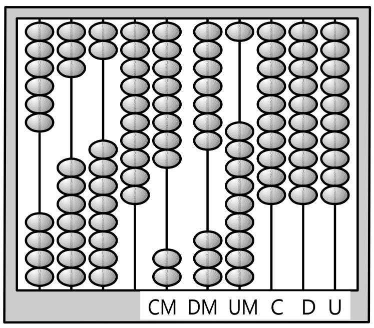
TALLER *(Continúa)*

Multiplicar en el ábaco

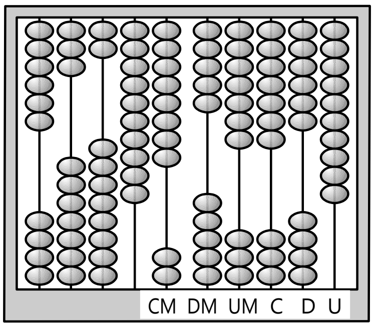
Podemos efectuar estas mismas multiplicaciones también en el ábaco, similar al método de la *Unidad 9*. En la mitad izquierda representamos el primer factor, y en la mitad derecha construimos el producto. El segundo factor tenemos que guardar en la memoria, o tenerlo escrito en un papel.

Si tenemos que asumir que el producto tendrá más que 5 cifras, entonces tenemos que colocar el primer factor más a la izquierda. Por ejemplo para multiplicar 478 x 538: Ponemos el 478 en las primeras columnas a la izquierda del ábaco, entonces tenemos 7 columnas libres para construir el producto. En las operaciones en el ábaco es usual comenzar todo por el lado izquierdo; entonces lo haremos así, aunque el método que usamos ahora se puede hacer en cualquier orden.

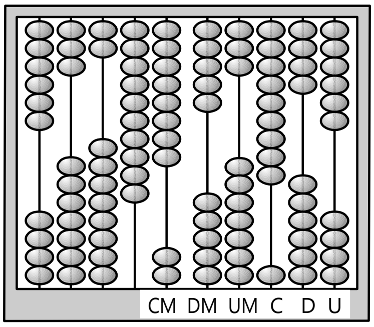
Primero multiplicamos entonces 478 x 500. Al inicio tenemos 4 centenas por 5 centenas, eso da *20 decenas de millares*. O sea, por el lado del producto colocamos *2 centenas de millares* y 0 decenas de millares. Después multiplicamos 7 x 5 = 35 y pasamos una columna a la derecha: 35 unidades de millares equivalen a 3 decenas de millares y 5 unidades de millares. Finalmente multiplicamos 8 x 5 = 40 centenas, eso equivale a 4 unidades de millares. Estas se aumentan a las 5 que ya están allí. Entonces el ábaco se ve así:



Ahora tenemos que multiplicar 478 x 30, y añadimos los resultados sucesivamente a lo que ya está allí: 4 centenas por 3 decenas son 12 unidades de millares. O sea, aumentamos 1 decena de millar y 2 unidades de millares. Eso requiere un canje, como ya lo conocemos desde la operación de la suma. Después añadimos 7 x 3 = 21 centenas, y 8 x 3 = 24 decenas.



Finalmente multiplicamos 478 x 8 y añadimos estos resultados: 4 x 8 = 32 centenas, 7 x 8 = 56 decenas (eso requiere un canje de 10 centenas por un millar), y 8 x 8 = 64 unidades (hay que canjear 10 decenas por una centena). Aquí tenemos el resultado, 257'164:



Pueden practicar algunos de los ejercicios anteriores en el ábaco, o inventar sus propios ejemplos.

Estimamos cantidades grandes

Hagan unas estimaciones acerca de cantidades realmente grandes. Que cada participante diga o escriba su estimación; después verifiquen quién estaba más cerca.

Ahora, muchas de estas cantidades no las vamos a poder verificar *exactamente*. Traten de encontrar una manera de medir o calcularlo por lo menos aproximadamente. Por ejemplo para saber cuántas letras contiene un libro, podemos primero contar cuántas letras hay en una línea. (Podemos contar varias líneas y usar el promedio.) Después contamos cuántas líneas hay en una página (otra vez usando un promedio razonable). Finalmente nos fijamos en el número de páginas. Multiplicándolo todo, resulta el número aproximado de letras.

Inténtenlo con las siguientes:

¿Cuántos granos de arroz hay en un kilo?

¿Cuántos granos de maíz hay en un saco de 50 kilos?

¿Cuántas letras contiene la Biblia (o algún otro libro grueso)?

¿Cuántos litros de agua contiene la piscina?

¿Cuántos cuadraditos hay en una hoja (o en un cuaderno) de papel cuadriculado?

Escojan alguna ropa tejida: ¿cuántos puntos contiene?

¿Cuántos ladrillos contiene la casa?

¿Cuántos cabellos tienes en la cabeza?

¿Cuántos pelos tiene el perro, el gato, ...?

Escojan algún árbol: ¿cuántas hojas tiene?

¿Cuántas casas hay en nuestra ciudad?

Inventen otras preguntas similares.

El *Anexo A* contiene unas pautas de cómo podríamos aproximar algunas de estas cantidades.

Ampliaciones

Problemas

1) La inscripción a una conferencia grande costaba 56.–. Se inscribieron 1348 personas. Calcula los ingresos que resultaron de estas inscripciones.

2) Una computadora cuesta 2536.– al contado. Se puede pagar también en 18 cuotas mensuales de 169.–. ¿Cuánto pierde el comprador si elige pagar por cuotas, en vez de pagar al contado?

3) Un tren transporta 252 personas, y todos los días del año va lleno. Entonces, ¿cuántos pasajes se venden para este tren en un año?

4) Cierto tipo de galletas se venden en bolsas con 6 paquetitos. Cada uno de estos paquetitos contiene 8 galletas. La tienda recibe las galletas en cajas con 18 bolsas en cada caja. Un camión transporta 444 de estas cajas.
a) ¿Cuántas galletas transporta el camión?
b) Si el paquetito de 8 galletas pesa 45g, ¿cuánto pesa la carga del camión?

5) La *factorial* de un número se escribe con un signo de admiración detrás del número, y significa el producto de todos los números naturales desde el 1 hasta ese número. Así por ejemplo, 4! = 1 x 2 x 3 x 4 = 24. – Calcula 9!.

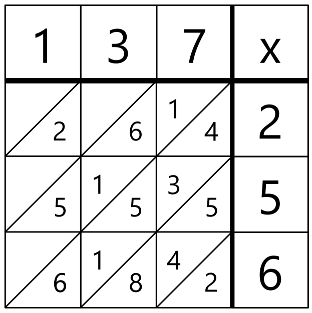
Multiplicación árabe

¡Nuestra forma de anotar multiplicaciones grandes no es la única posible! La matemática no depende de la manera de anotar algo. Lo importante es que obedezcamos a las leyes de la matemática. ¿Cuál es la ley matemática que rige la multiplicación de dos números grandes? – Arriba ya hemos dado la pauta, pero quiero formularlo otra vez claramente:
Tenemos que multiplicar cada cifra del primer número con cada cifra del segundo número; y tenemos que asignar el valor posicional correcto a los resultados.

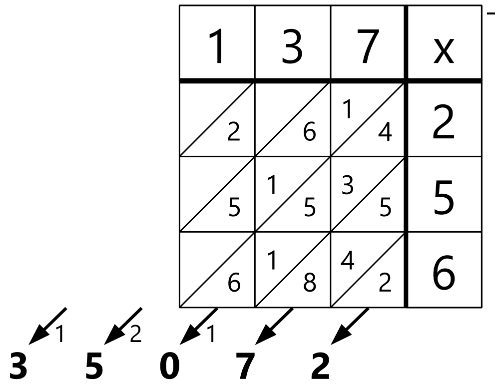
Nuestra manera de anotar multiplicaciones sirve para este propósito. Pero existen otras maneras que sirven igualmente. Los árabes usaban otra notación: Escribían el primer factor de manera horizontal, como nosotros; pero el segundo factor lo escribían de manera vertical, desde arriba hacia abajo. Entre estos dos números dibujaban una tabla de multiplicación rectangular, con un cuadro para cada cifra:

1	3	7	x
			2
			5
			6

Adicionalmente dibujaban la diagonal de cada cuadro. Después llenaban todos los cuadros de la tabla de multiplicación, escribiendo siempre las decenas a la izquierda de la diagonal y las unidades a la derecha. Por ejemplo, el cuadro del medio está debajo de la cifra 3 y a la altura de la cifra 5, entonces allí se escribe el resultado de 3 x 5. Los ceros se pueden omitir:



Al final sumaban las cifras, pero no de manera vertical, sino en la dirección de las diagonales; y llevando donde era necesario:



Comprueba si el resultado es correcto.

- ¿Por qué las cifras se suman en la dirección de las diagonales y no vertical? ¿Encuentras una explicación?

- Calcula algunas multiplicaciones con esta notación árabe.

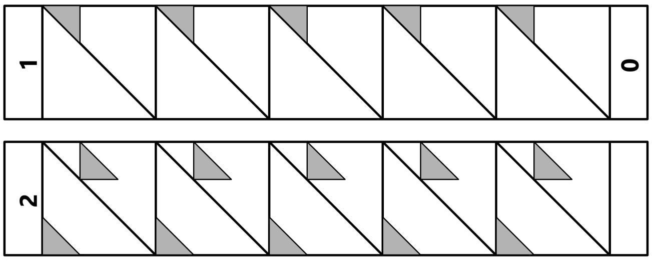
(Para la segunda pregunta hay una pauta en el Anexo A, por si lo pensaste por mucho tiempo y no lo descubriste.)

Los "huesos de Napier"

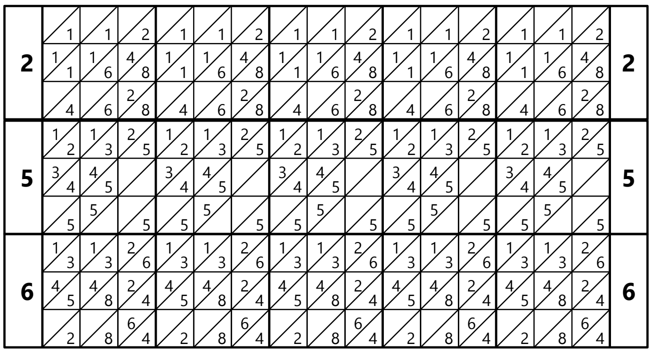
John Napier (1550–1617) fue un teólogo reformado escocés. En su tiempo libre se ocupaba con investigaciones matemáticas. Napier es más conocido por el invento de los logaritmos, un tema que trataremos en un nivel más avanzado. También inventó la primera calculadora mecánica: un mecanismo de multiplicación basado en la notación árabe. Este mecanismo consistía en una colección de reglas o tiras de marfil con números escritos encima. Por el material del marfil se veían similares a unos huesos, y por eso la gente comenzó a llamarlos "huesos de Napier".

Vamos a reproducir esta máquina, pero con un material más sencillo. Los moldes de las piezas están en las ***Hojas de trabajo 48.1-2***. Puedes usar el papel tal como está, o puedes pegarlo sobre cartón o sobre una madera delgada. Cada tira contiene tres filas de cuadrados. Corta las tiras.

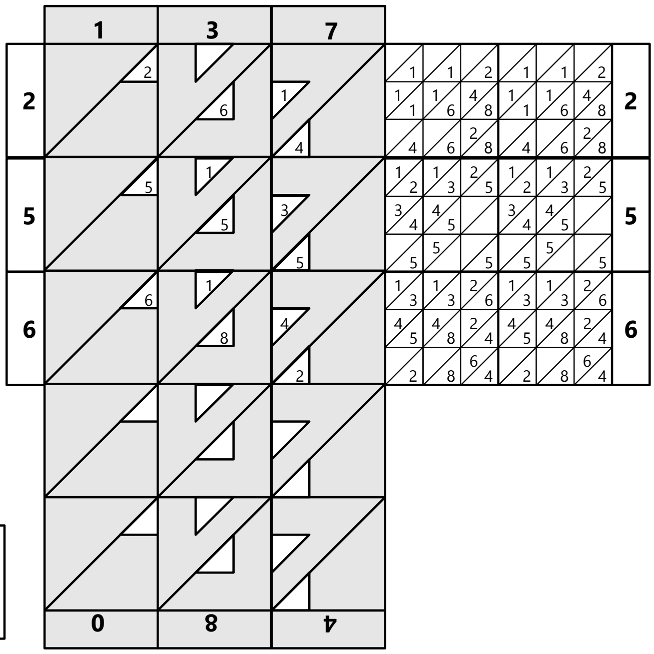
En las primeras cinco tiras, corta también los triángulos sombreados.



Para efectuar una multiplicación, colocamos primero las tiras con los números, de manera que los números grandes en su extremo forman uno de los factores. Usando el ejemplo de la actividad anterior, 137 x 256, formamos el factor 256:



Encima de estas tiras colocamos verticalmente las tiras con los triángulos cortados, exactamente sobre los cuadrados de las tiras con números, y de manera que los números grandes en sus extremos superiores forman el otro factor (en este caso 137):



En las aperturas triangulares aparecen ahora exactamente los números que había que llenar en la multiplicación árabe. (Compara con el dibujo de la actividad anterior.) Lo único que nos falta hacer es sumar estos números manualmente, y ya tenemos el resultado.

Las hojas de trabajo contienen un único ejemplar de cada tira. Si quieres poder multiplicar números con cifras repetidas, tendrás que copiar las hojas para fabricar más tiras.

Los "huesos de Napier" originales venían en una caja cuadrada que tenía unos bordes elevados en su cara superior. Las tiras se colocaban encima de la caja, y sus bordes permitían alinear perfectamente las tiras. Si deseas, puedes construir un marco similar para las tuyas.

Un poco de historia

En el año 1617, Napier escribió un libro para explicar el uso de su "máquina". El libro tenía el título "Rabdología"; eso significa aproximadamente: "Teoría de las varillas".

Ese libro contiene otra novedad histórica: Napier fue el primero en usar el *punto decimal* para indicar las partes fraccionarias de un número *(vea Unidad 45)*.

(Según Florian Cajori, "A History of Mathematics", 1909)

Unidad 29 - División entre números de varias cifras

Prerrequisitos:
- Números hasta un millón *(Unidad 26)*.
- División por escrito *(Unidades 11 y 12)*.
- (Opcional, pero muy recomendado): Estimaciones de cantidades, distancias, etc. *(Unidades 1 y 5)*.

Materiales necesarios:
- Material de canje en Base 10 (tapas de botellas o similares).
- Ábaco.

Para los educadores

¿"Probar" también es calcular?

La división entre números de varias cifras requiere un concepto nuevo, que puede ser difícil de aceptar para algunos niños: Requiere *estimar* cocientes. Hasta ahora, en todos los cálculos numéricos que hicimos, se podían calcular los resultados de una vez con seguridad. Pero ahora nos encontraremos con situaciones donde no podemos decir con seguridad cuánto es el resultado: ¿Cuánto es 2781 ÷ 348? Para poder decirlo inmediatamente con seguridad, tendríamos que saber de memoria la tabla del 348. Pero no podemos memorizar todas las tablas de multiplicación con números grandes.
Tenemos que hacer una estimación, y después verificarla. A veces tenemos que probar con varias estimaciones, hasta encontrar la respuesta correcta. Esta idea puede entrar en conflicto con el concepto de que "calcular no es adivinar, no es un juego al azar". En este caso tendremos que aclarar que "estimar" (razonablemente) no es lo mismo como "adivinar". Si los niños han hecho anteriormente diversas actividades de estimar cantidades, distancias, pesos, etc, entonces deberían ser capaces de entender esta distinción: "Adivinar" sería decir cualquier número al azar: "Podría ser 2. Podría ser 13. Podría ser 5. ..." – Una estimación razonable, en cambio, es un razonamiento basado en los datos, la experiencia, y el sentido numérico. En el ejemplo arriba podríamos razonar así: 348 está entre 300 y 400. Si fuera 300, el cociente sería 9. Si fuera 400, el cociente sería "casi 7". Nuestro cociente podría entonces ser 7, 8 ó 9. Será razonable probar con 8, y corregir la estimación si resulta equivocada. (Si hacemos la prueba, encontramos que 348 x 8 = 2784, un poco más que 2781. Entonces el cociente es 7.)

Existen entonces operaciones matemáticas donde no podemos calcular el resultado correcto en el primer intento. Pero si hemos fallado en el primer intento, podemos mejorar en el segundo intento.
En el nivel de Secundaria veremos que existen números que ni siquiera se pueden calcular "exactamente", aun con muchos intentos: raíces inexactas; el número π, y otros. Y los matemáticos y científicos profesionales se topan a veces con ecuaciones que no se pueden resolver algebraicamente; entonces necesariamente tienen que trabajar con métodos de aproximación numérica que comienzan con una aproximación bastante inexacta, y después se acercan poco a poco al valor efectivo del resultado.

Nota: En el caso de la división larga, sí existen por lo menos dos maneras de hacerlo con "seguridad": Si por ejemplo tenemos que dividir entre 348, podríamos primero calcular y escribir toda la tabla del 348, desde 348 x 1 hasta 348 x 9. Entonces ya no necesitamos estimar; podemos simplemente comparar con la tabla. – O podríamos convertir la operación entera al sistema binario *(vea en el libro de Secundaria I)*. Allí existen solamente dos posibilidades para las cifras del cociente, 0 ó 1, entonces no hay necesidad de estimar.
Pero ambas alternativas nos darían bastante más trabajo que el método de estimar.

TALLER

Dividir decenas, centenas, millares ...

Al explorar el sistema decimal, hemos encontrado que es muy fácil dividir entre 10, entre 100 o entre 1000. *(Unidad 2, Tarea 7.)* Si no lo recuerdas, repásalo.

Ahora podemos hacer lo mismo con números más grandes. En el siguiente tablero posicional, comienza con el número 840'000 y divídelo sucesivamente entre 10, hasta que ya no se puede más:

(Copia el tablero. No escribas dentro del libro.)

	CM	DM	UM	C	D	U
840'000 =						
840'000 ÷ 10 =						
... ÷ 10 =						
... ÷ 10 =						
... ÷ 10 =						
... ÷ 10 =						

Después escribe también sin el tablero posicional:

840'000 ÷ 10 = ...

840'000 ÷ 100 = ...

840'000 ÷ 1000 = ... (etc.)

¿Puedes rápidamente decir los resultados de las siguientes divisiones?

a) 25'000 ÷ 10

b) 250'000 ÷ 1000

c) 400'000 ÷ 100'000

d) 300'000 ÷ 100

e) 90'000 ÷ 10'000

f) 478'000 ÷ 100

g) 85'530 ÷ 10

h) 510'000 ÷ 1000

División entre varias decenas, centenas, millares ...

Mira ahora la siguiente división:

450'000 ÷ 300

¿Encuentras una manera fácil de resolverla?

Estamos dividiendo entre 3 centenas. 450'000 son 4500 centenas. Entonces esta división es lo mismo como preguntar: "¿Cuántas veces 3 centenas hay en 4500 centenas?" – Pero eso funciona igual como si fueran unidades. O sea, nuestra división es lo mismo como dividir 4500 ÷ 3. Y supongo que ¿esto lo puedes hacer mentalmente? (Si no, entonces hazlo con algún material: el material Base 10, las tapas de botellas, o el ábaco.)

Si ya sabes calcular con fracciones, entonces podrás entender que hemos hecho lo mismo como al simplificar una fracción: Hemos simplificado nuestra división con 100.

Practica con las siguientes:

i) 64'000 ÷ 8000

j) 64'000 ÷ 80

k) 6500 ÷ 500

l) 1'000'000 ÷ 20'000

m) 90'000 ÷ 600

n) 484'000 ÷ 4000

ñ) 99'000 ÷ 900

o) 230'000 ÷ 230

p) 30'000 ÷ 400

q) 720'000 ÷ 300

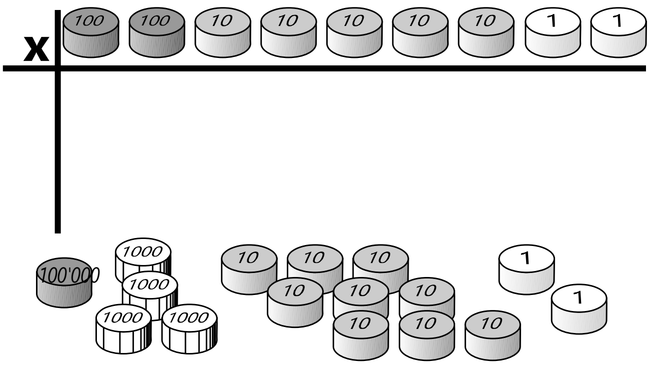
r) 720'000 ÷ 30'000

s) 567'000 ÷ 70

Dividir con tapas de botellas

Haremos ahora unas divisiones entre números más complicados. Esos ya no podremos calcular mentalmente. Lo haremos primero con el material de las tapas de botellas.

Para efectuar una división grande con este material, armamos la misma figura como en la *Unidad 28*; solamente que la llenamos "al revés", porque estamos haciendo la operación inversa. O sea, comenzamos con una cantidad de material que representa el dividendo, y alistamos uno de los factores (el divisor) al borde del rectángulo. Nuestra meta consiste en reconstruir el contenido del rectángulo con el material del dividendo. Por ejemplo para la división 104'092 ÷ 252:

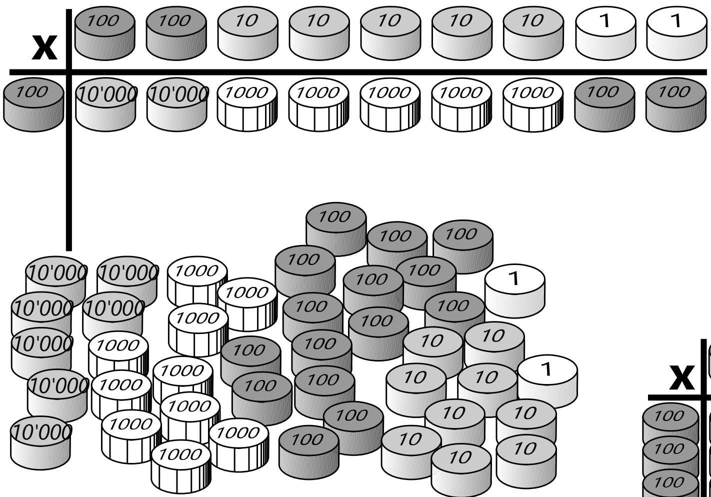


Como en el procedimiento escrito, comenzamos con las partes más grandes. Primero intentamos llenar las columnas de las 2 centenas con material del dividendo. Tenemos 1 centena de millares, con eso no podemos llenar 2 columnas.

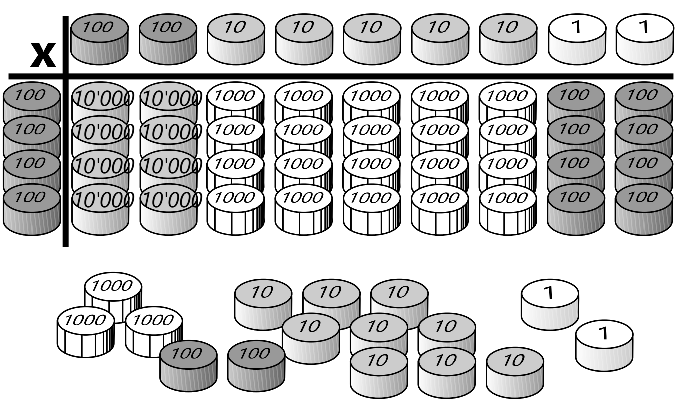
Por eso, antes de repartir algo, tenemos que canjear esta centena de millares por 10 decenas de millares. Con éstas podemos comenzar a ocupar las primeras 2 columnas. Si aquí tenemos decenas de millares, eso significa que el otro factor de la multiplicación (o sea el cociente) contiene *centenas* aquí, porque 10'000 es el producto de multiplicar 100 x 100. Colocamos entonces una centena para marcar el cociente, y una decena de millar en cada una de las dos columnas izquierdas.

Las siguientes 5 columnas corresponden al producto de decenas por centenas, entonces aquí se requieren unidades de millar. (10 x 100 = 1000.) Tenemos solamente 4 unidades de millar; canjeamos una de las decenas de millar para obtener más.

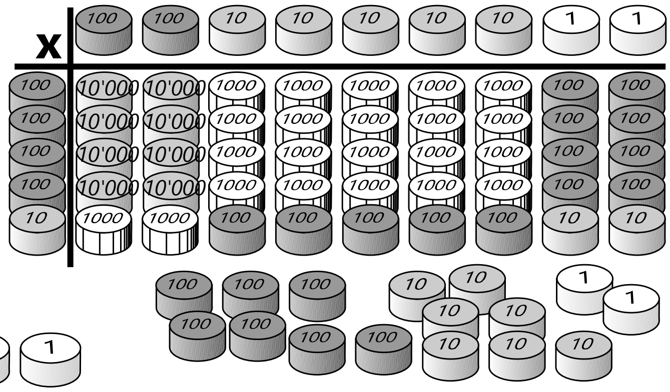
Las últimas 2 columnas requieren centenas; tenemos que canjear una de las unidades de millar para obtener centenas. Hasta aquí tenemos la siguiente situación:



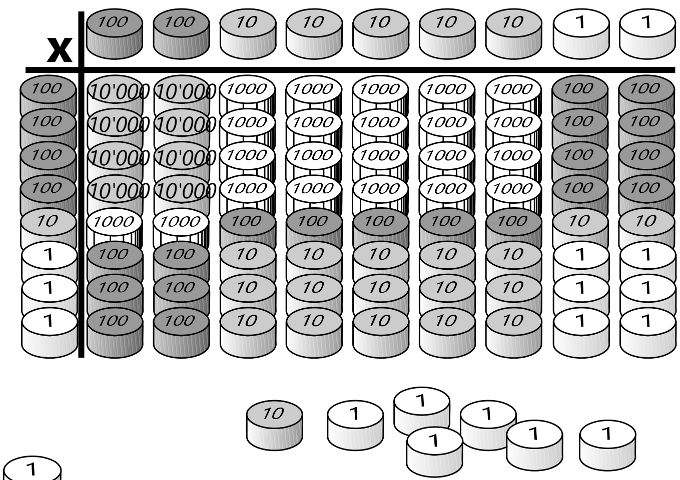
Tenemos suficiente material para seguir colocando centenas en el cociente. Repartimos el material como en el paso anterior, tantas veces como alcance. Hacemos canjes según sea necesario. Resulta que alcanza para 4 centenas en el cociente:



Ahora pasamos a la siguiente cifra del cociente, las decenas. Esto significa que a la izquierda tenemos que comenzar con unidades de millares. Tenemos todavía 3 millares. 2 de estos colocamos en las primeras columnas, y el último millar se canjea por centenas para poder llenar las siguientes 5 columnas. Finalmente colocamos 2 decenas en las últimas columnas:



No queda ningún millar para seguir repartiendo; entonces el cociente tiene una única decena, y pasamos ahora a las unidades. O sea, comenzamos con repartir centenas en las primeras columnas. Haciendo todos los repartos y canjes necesarios, resulta lo siguiente:

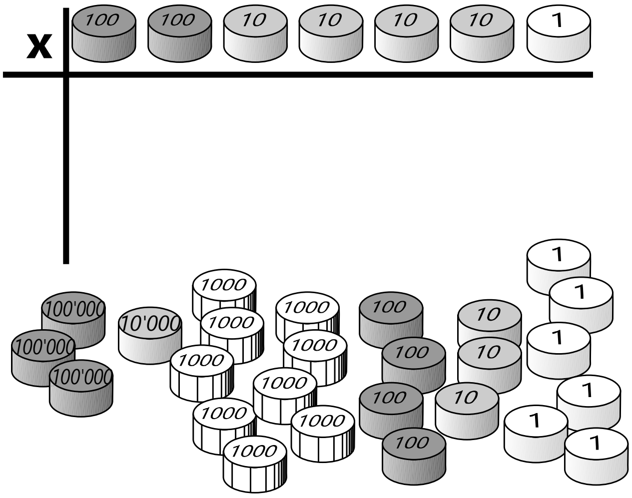


Ahora podemos leer a la izquierda que el cociente es 413, y sobran una decena y 6 unidades, o sea un residuo de 16.

Este proceso es un poco trabajoso. Pero permite observar visualmente como el dividendo se "desmiembra" en las partes respectivas que corresponden a las centenas, las decenas y las unidades del cociente.

Anotando la operación

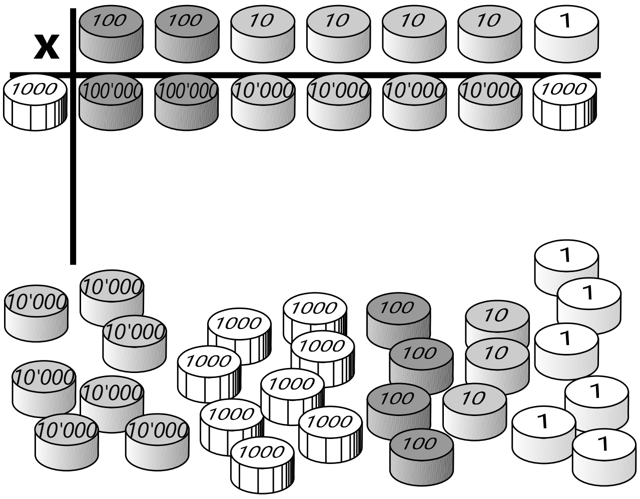
Hagamos otro ejemplo, pero ahora escribimos simultáneamente lo que hacemos con el material. Dividimos 319'436 ÷ 241. Alistamos el material:



... y escribimos:

	3	1	9	4	3	6		2	4	1	

En este ejemplo podemos repartir las centenas de millares; entonces el cociente comienza con millares. El material alcanza para un único millar en el cociente:

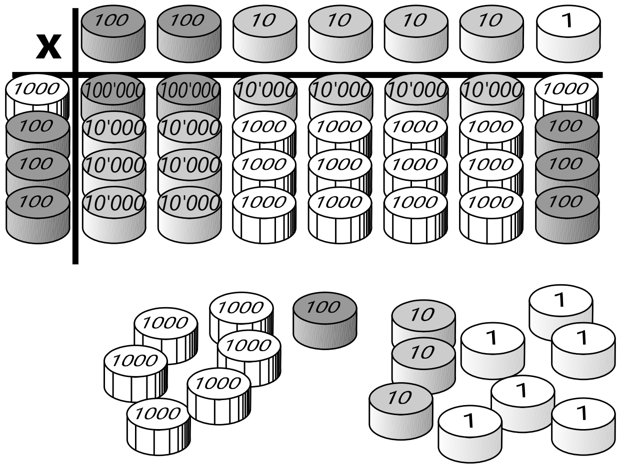


En la operación escrita, esto significa escribir 1 en el cociente, y recordar (o anotar) que es una unidad de millar. Después restamos del dividendo lo que hemos repartido: una vez 241 millares:

	3	1	9	4	3	6		2	4	1	
−	2	4	1					1			
		7	8								

El residuo debe corresponder con lo que nos queda en el material. Efectivamente tenemos aquí 78 millares (7 decenas de millar y 8 unidades de millar).

Ahora colocamos centenas en el cociente. Esto significa que en las primeras columnas del rectángulo grande tenemos que colocar decenas de millares, porque 100 x 100 = 10'000. A su derecha vienen las unidades de millares, y finalmente centenas. Haciendo los canjes necesarios, el material alcanza para colocar tres filas de esta manera:

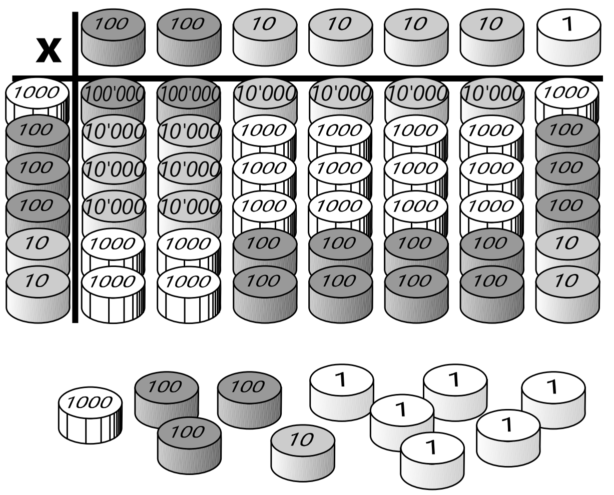


En la operación escrita se involucran ahora las centenas, porque al último hemos repartido centenas. Esto se indica con "bajar" la cifra de las centenas, como ya lo conocemos desde las divisiones entre números pequeños. Del total de las centenas restamos lo que hemos repartido, o sea 3 veces 241. Podemos escribir el resultado de 241 x 3 directamente en el lugar donde lo restamos. En el cociente escribimos 3 (centenas):

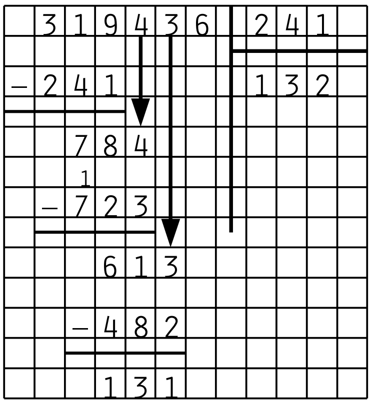
	3	1	9	4	3	6		2	4	1	
−	2	4	1					1	3		
		7	8	4							
		1									
	−	7	2	3							
			6	1							

Y nuevamente, el residuo de 61 centenas debe corresponder con lo que tenemos en el material.

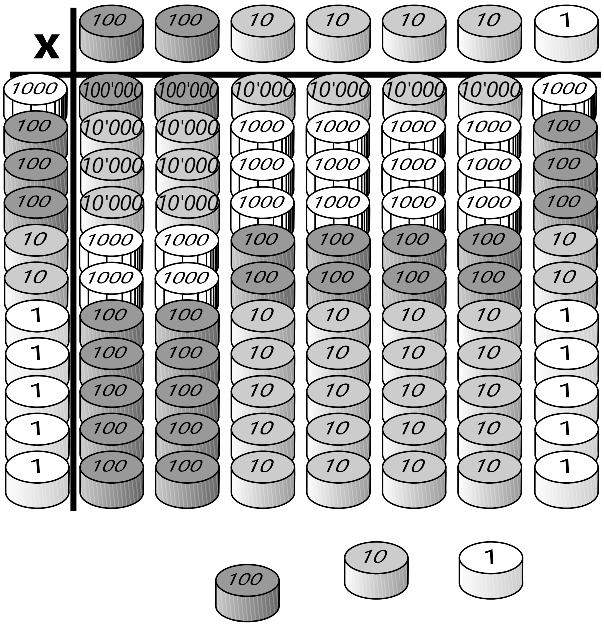
Colocamos decenas en el cociente y seguimos repartiendo; comenzando ahora con los millares. Podemos repartir lo que corresponde a 2 decenas en el cociente:



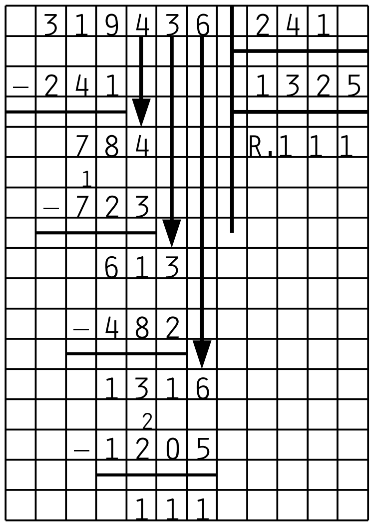
En la operación escrita pasamos a las decenas ("bajando" el 3), y restamos 241 x 2:



Sobran 131 decenas, como en el material. Seguimos repartiendo, ahora comenzando con centenas, lo que corresponde a unidades en el cociente. Podemos colocar 5 tapas nuevas en cada columna:



En la operación escrita pasamos a las unidades. "Bajamos" la cifra 6 del dividendo; escribimos 5 unidades en el cociente; y restamos lo que hemos repartido: el producto de 241 x 5. Queda un residuo de 111, igual como en la operación con el material.



- Practiquen con otros ejemplos, con o sin anotar. Pueden inventar sus propias divisiones, o pueden probar con las siguientes: (Estos ejemplos fueron escogidos de tal manera que no requieren una cantidad muy grande de tapas.)

160'368 ÷ 312

329'923 ÷ 143

108'730 ÷ 263

950'484 ÷ 2307

673'222 ÷ 133

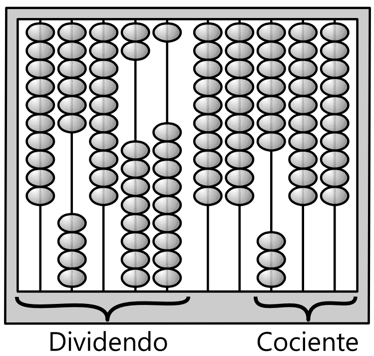
Dividir en el ábaco

Números de hasta 5 dígitos podemos dividir de la misma manera como lo hicimos en la *Unidad 11*: Representamos en la mitad izquierda del ábaco el dividendo, y en la mitad derecha construimos el cociente. El divisor debe guardarse en la memoria, o lo podemos anotar en un papel para tenerlo presente.

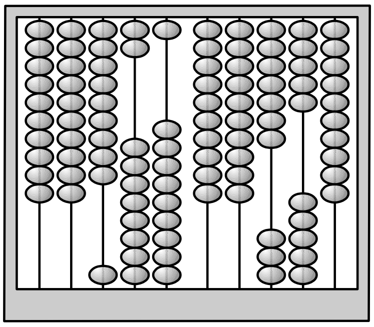
Solamente que en el ábaco, igual como en el procedimiento escrito, tenemos que *estimar* el cociente. En el último ejemplo de esta actividad veremos cómo hacer la corrección si hemos estimado mal.

Dividamos 27'489 ÷ 78. Los millares no se pueden dividir, porque 27 < 78. Empezamos entonces con las 274 centenas. 78 es cercano a 80, entonces estimamos que el cociente será 274 ÷ 80 = 3. Ya que estamos repartiendo centenas, colocamos 3 centenas por el lado del cociente.

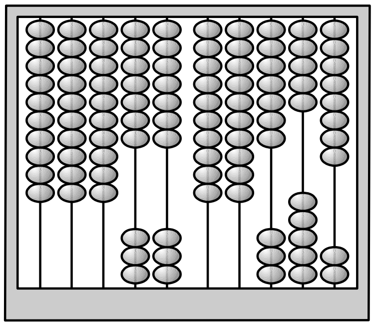
Ahora tenemos que restar del dividendo lo que estamos repartiendo, o sea 78 x 3. 7 x 3 = 21, eso son *millares* (el producto de centenas por decenas). Quitamos 21 millares del dividendo. 8 x 3 = 24; quitamos 24 centenas del dividendo. El ábaco se ve ahora así:



Ahora pasamos a repartir las decenas. Tenemos 408 decenas en el ábaco; eso es un poco más que 80 x 5. Por eso estimamos que el cociente será 5. Colocamos entonces 5 decenas en el cociente. En el lado del dividendo quitamos 78 x 5 decenas: 7 x 5 = 35, quitamos 35 centenas. (Eso requiere un canje de un millar por 10 centenas. Recordemos el procedimiento de la sustracción en el ábaco.) 8 x 5 = 40, quitamos 40 decenas:



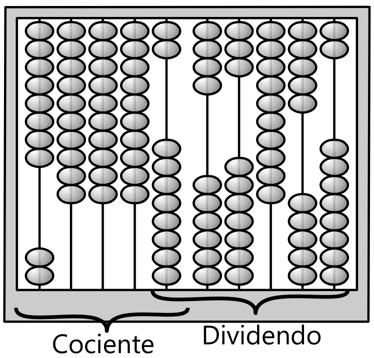
Quedan 189 unidades para dividir entre 78; estimamos que el cociente será 2. En el lado del dividendo restamos 78 x 2: 7 x 2 = 14 (decenas), 8 x 2 = 16 (unidades). Quedan 33 unidades como residuo; y por el lado derecho tenemos el cociente: 352.



Como en la operación con las tapas de botellas, aquí también podemos comparar lo que sucede en el ábaco con la operación escrita.

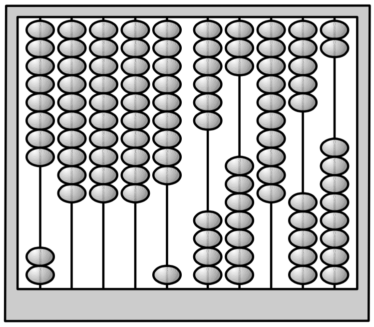
Dividir números mayores

Si tenemos un ábaco "normal" de 10 filas, y el dividendo tiene 6 cifras, entonces no podemos usar el método de la *Unidad 11*, porque el dividendo no cabe en una mitad del ábaco. Podemos usar un método que usan también los profesionales del ábaco japonés, donde construimos el cociente sucesivamente sobre las mismas columnas del dividendo. Éstas se van desocupando a medida que avanzamos. Si usamos este método en nuestro ábaco, las unidades del cociente no caerán en la columna de las unidades; entonces hay que tener cuidado de no equivocarnos en los valores posicionales. (El ábaco japonés usa un sistema un poco diferente para definir los valores posicionales.) Por el otro lado, este método tiene la ventaja de que nos permite dividir números de hasta 9 cifras.

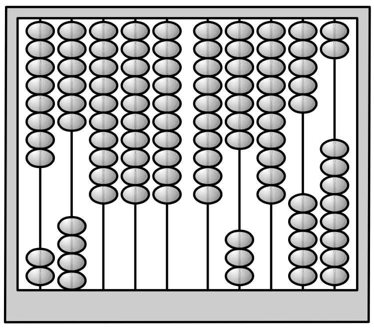


Hagamos un ejemplo: 867'058 ÷ 36. Ponemos 867'058 en el ábaco y mantenemos el divisor 36 en la mente. Podemos empezar a dividir con 86 y estimamos que el cociente de 86 ÷ 36 será 2. Colocamos este 2 a la izquierda del dividendo. Podemos comenzar en cualquiera de las columnas desocupadas; pero para evitar confusiones, es más seguro que dejemos por lo menos una columna libre entre el dividendo y el cociente.

Restamos entonces del dividendo el producto de 36 x 2: 3 x 2 = 6, entonces restamos 6 de la columna izquierda del dividendo. 6 x 2 = 12, restamos 12 de la siguiente columna (o sea, 1 de la columna izquierda y 2 de la siguiente). Ahora el ábaco se ve así:

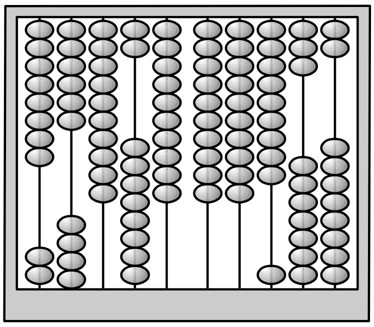


Pasando una columna más a la derecha, tenemos 147 para dividir entre 36. Estimamos que el cociente es 4. Ponemos este 4 a la derecha del 2 en el cociente. Después restamos 36 x 4 del dividendo: 3 x 4 = 12, restamos 12 de las columnas a la izquierda. 6 x 4 = 24, eso lo restamos de las siguientes columnas.

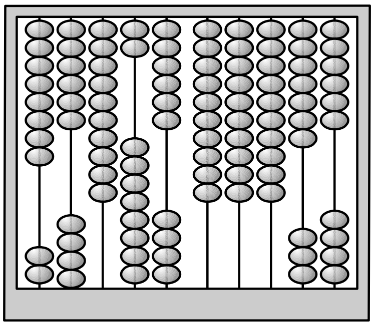


Pasamos otra vez una columna a la derecha: 30 ÷ 36 = 0, entonces la siguiente cifra del cociente es 0. Junto con la siguiente columna a la derecha tenemos 305 ÷ 36, estimamos que da 8. Este 8 colocamos en la siguiente columna del cociente, dejando una columna libre porque la división anterior dio 0.
Vemos aquí que con este método tenemos que mantener la cuenta de los valores posicionales para no equivocarnos. Por ejemplo, podríamos al inicio fijarnos en el valor posicional que dividimos primero: Hemos comenzado con 86 decenas de millares; entonces la columna izquierda del cociente significa decenas de millares. – O simplemente contamos bien las columnas al avanzar: hubo una división que dio 0, entonces una columna del cociente debe quedar vacía.

Restamos entonces 36 x 8 del dividendo: 3 x 8 = 24, restamos 24 de las columnas izquierdas. 6 x 8 = 48, restamos 48 de las siguientes columnas.



Nos quedan 178 para dividir en las últimas columnas. El cociente es 4; restamos 36 x 4 de la misma manera como en los pasos anteriores, y tenemos el siguiente resultado final:



Al lado izquierdo del ábaco tenemos el cociente (24'084), y al lado derecho el residuo (34).

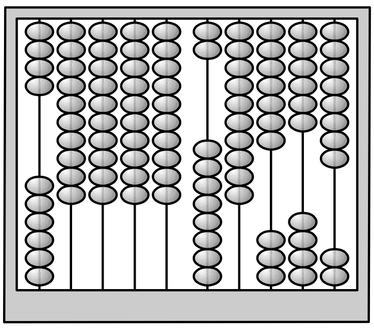
La corrección de un cociente equivocado en el ábaco

En las divisiones largas sucede a veces que nos equivocamos en la estimación de un cociente. Si nos sucede esto en la operación escrita, tenemos que borrar ese paso y empezar de nuevo. En el ábaco eso es más fácil de corregir; pero hay que saber cómo. Veremos:

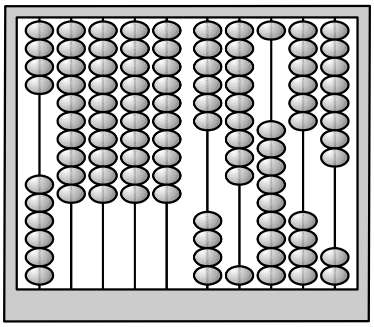
Vamos a dividir 320'342 ÷ 464. Tenemos que comenzar con las primeras cuatro columnas: 3203 ÷ 464. Estimamos que el cociente es 7, y lo colocamos en el ábaco. Comenzamos a restar 464 x 7:
4 x 7 = 28, restamos 28 de las dos columnas a la izquierda. 6 x 7 = 42, ... ahora no podemos continuar, porque las dos columnas que tenemos valen solamente 40, no podemos restar 42. Esto significa que nuestro cociente es demasiado grande. Tenemos que corregirlo de la siguiente manera:

- Disminuimos el cociente en 1. Eso nos da un cociente de 6.

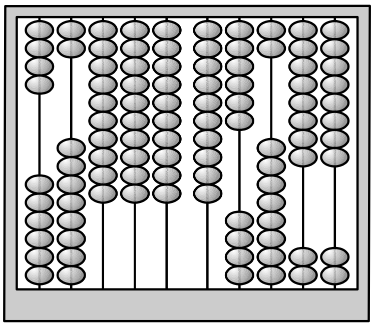
- Para compensar este cambio por el lado del dividendo, tenemos que devolver *una vez* lo que ya hemos restado 7 veces. Lo que hemos restado hasta ahora fueron 4 x 7 = 28 decenas de millares. Tenemos que devolver entonces *una vez 4 decenas de millares*. O sea, añadimos 4 cuentas a la columna de las decenas de millares. Ahora el ábaco se ve así:



Con esto hemos corregido nuestro error, y ahora tenemos que continuar *exactamente en el punto donde nos hemos detenido*. Estábamos al punto de restar 6 x 7 unidades de millar, cuando nos hemos dado cuenta de que eso no funcionaba. Efectuamos ahora esta resta, pero usamos el cociente corregido de 6, no 7: 6 x 6 = 36, restamos 36 millares. Pasamos a la siguiente columna y restamos 4 x 6 = 24.



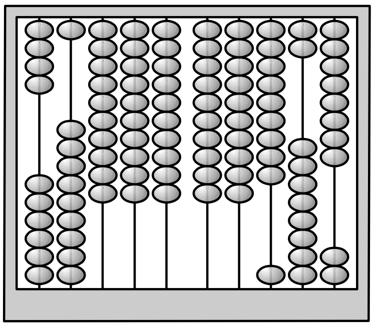
Para la siguiente cifra del cociente tenemos 4194 decenas para dividir. Estimamos que el cociente es 8, y restamos 464 x 8. Esto nos da la siguiente situación:



Pasamos a las unidades y tenemos la división 4822 ÷ 464. Pero ¡eso da 10! O sea, el residuo de las decenas es mayor que 464. Esto significa que nuestro cociente es demasiado pequeño: podemos repartir otra "porción" de 464 decenas. Esto lo corregimos de la siguiente manera:

- Aumentamos el cociente de las decenas en 1. El cociente corregido es 9.

- Para compensar este cambio, tenemos que restar del dividendo *una vez* lo que ya hemos restado 8 veces. Esta vez hemos completado la resta, entonces tenemos que restar el entero número 464 una vez más (de las decenas). Nos quedamos así:



La división de las unidades es ahora 182 ÷ 464. Esto da cero. O sea, la cifra de las unidades del cociente es 0. El cociente final es 690, y las 182 unidades quedan como residuo.

En toda división larga, para detectar las situaciones donde tenemos que corregir el cociente, tenemos que controlar siempre si los residuos parciales están en el rango de lo permitido. No puede haber residuos negativos (o sea, "restas imposibles"); y un residuo no puede ser igual o mayor al divisor. *(Vea en la Unidad 12, "Errores comunes en la división, y cómo evitarlos".)*

Practiquen con otros ejemplos. Pueden inventar sus propias divisiones, o pueden probar con las siguientes:

898'240 ÷ 63	943'500 ÷ 758
318'999 ÷ 45	943'272 ÷ 283
165'111 ÷ 29	972'972 ÷ 2673

Ampliaciones

Unos problemas

(Los residuos se pueden despreciar.)

1) Un pueblo de 6'847 habitantes quiere ampliar su sistema de desagüe, lo cual cuesta 1'000'000.–. ¿Cuánto cuesta eso a cada habitante?

2) El lugar más lluvioso de la tierra es Cherrapunji en la India; allí llueve 11'430 mm al año. ¿Cuánto es eso al día?

Nota: Se ha estimado que en Lloró, Colombia, llueve aun más: 13'300 mm al año. Pero esta estimación no está confirmada oficialmente.

3) Una ballena azul pesa aproximadamente 150 toneladas. ¿A cuántas personas de 65 kg equivale este peso?

4) La ballena gris viaja cada año desde el Océano Ártico hasta Baja California (México), una distancia de 10'000 km. En este viaje logra avanzar 185 km por día. ¿Cuántos días dura su viaje?

Investigación

Encontrar multiplicaciones con resultados "interesantes"

En los ejercicios de multiplicación de la Unidad anterior había varios que dieron resultados "interesantes", como 22'222 ó 987'654. ¿Puedes tú encontrar otras multiplicaciones similares? – por ejemplo que los resultados consistan en cifras iguales, o en cifras sucesivas, o que tengan alguna simetría ... ¡Investiga!

Matemática divina

La matemática nos enseña a ser hábiles y diligentes

Las multiplicaciones y divisiones largas requieren bastante esfuerzo, perseverancia y exactitud. Tenemos que ser diligentes y entrenar nuestra habilidad para hacerlo bien. Dios bendice el trabajo hábil y diligente:

"¿Has visto a un hombre solícito en su obra? Delante de los reyes estará; no estará delante de los de baja suerte." (Proverbios de Salomón 22:29)

Unidad 30 - Investigaciones relacionadas con la multiplicación y división

Prerrequisitos:
- Multiplicación y división larga *(Unidades 28 y 29)*.

Para los educadores

Esta Unidad consiste únicamente en desafíos de investigación. Vea en la *Introducción Pedagógica* acerca de la utilidad de las investigaciones, y las formas recomendadas de trabajarlas.

El *Anexo A* contiene pautas adicionales acerca de estas investigaciones. Pero es preferible que tanto alumnos como educadores tomen primero suficiente tiempo para explorar estos temas por su propia cuenta y formular sus propias hipótesis, antes de consultar las pautas.

Investigación

Las multiplicaciones ingeniosas de los antiguos persas

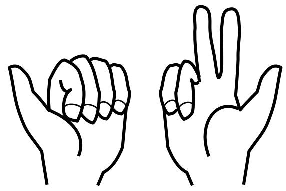
Ali Kushchi fue un astrónomo persa que vivía en el siglo 14. En un libro con el título "Risala Hisab", él describe unos métodos que permiten multiplicar fácilmente números hasta 20. Algunos de estos métodos se pueden efectuar de manera sencilla con los dedos. Por ejemplo:

Números menores a 10

Supongamos que olvidaste cuánto es 7 x 9. Podrías sumar el número 9 siete veces. Pero hay un método más rápido:

7 + 9 – 10 = 6, eso son las decenas del resultado. (Siempre hay que restar 10, no importa con qué números comienzas.) Ahora calcula la diferencia entre 10 y cada uno de los factores: 10 – 7 = 3, 10 – 9 = 1. Multiplica estas diferencias: 3 x 1 = 3, eso son las unidades. Entonces el resultado es 63.

O con los dedos: Abre tus manos, con las palmas hacia ti. Dobla 7 dedos, comenzando desde la izquierda. Después estira nuevamente los dedos de la mano izquierda. Ahora imagínate que doblas 9 dedos empezando desde la derecha; pero en realidad doblas solamente aquellos dedos que están en la mano izquierda, y la mano derecha queda como estaba. Ahora tus manos deben verse así:



Ahora, el número de los dedos doblados te da las decenas (6). El producto de los dedos estirados de cada mano (1 x 3 = 3) da las unidades.

Números entre 10 y 20

Si ambos factores están entre 10 y 20, el método funciona casi igual. Por ejemplo 12 x 13:

12 + 3 = 15, eso son las decenas del resultado. (Recordamos que siempre hay que restar 10. Por eso sumamos 3 en vez de 13; mentalmente ya hemos restado 13 – 10.)
Multiplicamos las unidades de los factores: 2 x 3 = 6, eso son las unidades del resultado. Entonces el resultado es 156.

Un ejemplo con números un poco mayores: 14 x 17:

14 + 7 = 21, 4 x 7 = 28, 210 + 28 = 238.

Con los dedos puedes hacer esto solamente si ninguno de los factores es mayor a 15. Con el ejemplo de 12 x 13: Estira en cada mano tantos dedos como corresponde a las unidades de los factores. O sea, 2 dedos en la mano izquierda y 3 dedos en la derecha. La *suma* de los dedos estirados, *más 10*, da las decenas: 2 + 3 + 10 = 15. El *producto* de los dedos estirados da las unidades: 2 x 3 = 6. (Los dedos doblados se pasan por alto en este caso.)

Un número menor a 10 por un número mayor a 10:

En este caso tenemos que hacer un pequeño cambio en la forma de calcular las unidades. Por ejemplo 8 x 14:

8 + 4 = 12, eso son las decenas. (Igual como antes: 8 + 14 – 10.)
Multiplicamos la diferencia entre cada número y el 10: 2 x 4 = 8. Eso son las unidades; pero en este caso tenemos que *restarlas* en vez de sumar: 120 – 8 = 112 es el resultado. (Para eso ya no hay ningún método práctico con los dedos.)

Ahora las preguntas de investigación:

a) Calcula unos ejemplos propios y verifica los resultados. ¿Puedes explicar *por qué* funciona este método?
(Se recomienda comenzar con el segundo caso, el de los números entre 10 y 20. Ese es el más fácil de entender.)

b) ¿Puedes inventar métodos similares para multiplicar números mayores a 20?

Multiplicar rápidamente por 5, por 25 y por 15

a) Escoge unos números *pares* y multiplícalos por 5. A su lado, escribe los mismos números otra vez y divídelos entre 2. Compara los resultados. ¿Qué notas? Usa tu observación para establecer una regla de cómo multiplicar rápidamente un número par por 5.

b) ¿Encuentras una explicación matemática de *por qué* eso funciona así?

c) ¿Cómo hay que adaptar la regla si queremos multiplicar de esta manera también números *impares* por 5?

d) Busca una regla similar para multiplicar rápidamente por 25. (Calcula unos ejemplos, hasta que encuentres la regla.) Encontrarás que para una determinada clase de números hay una regla muy fácil. ¿Para cuáles números? ¿y por qué funciona así?

e) Intenta adaptar la regla para multiplicar por 25, para que se pueda aplicar a *todos* los números.

f) Usa ahora las reglas que encontraste, para establecer unas reglas que te permiten *dividir* un número más fácilmente entre 5, y entre 25.

*g) ¿Encuentras una regla similar para multiplicar más fácilmente por 15, y para dividir entre 15?

Un experimento de división

Escribe cualquier número de 3 cifras. Repite el mismo número inmediatamente detrás, de manera que tienes un número de 6 cifras. Por ejemplo si empiezas con 348, entonces tu número será 348'348.

Divide este número de 6 cifras entre 7.

Divide el resultado de esta división entre 11.

Divide el nuevo resultado entre 13.

Notarás (si lo haces correctamente) que todas las divisiones salen exactas. Además, si comparas el resultado final con tu número inicial, observarás una propiedad muy notable.

Investiga:

a) ¿Funciona este experimento con *todos* los números de 3 cifras?

b) *¿Por qué* funciona? ¿Encuentras una explicación matemática?

Unidad 31 - Conversión de unidades de medida con números grandes

Prerrequisitos:
- Unidades de medida *(Unidad 5)*.
- Números hasta un millón *(Unidad 26)*.
- *(Para algunos de los problemas):* Proporciones *(Unidad 20)*.

Materiales necesarios:
- Cinta métrica.
- Balanza.
- Litrera.

Para los educadores

Conversión de medidas como preparación para el cálculo con decimales

En la vida diaria ocurren pocas oportunidades naturales para convertir unidades de medida con números grandes, como lo hacemos en esta Unidad. Raras veces necesitamos expresar un peso de muchos kilogramos en gramos, o una distancia de varios kilómetros en centímetros, o vice versa. A no ser que por pura diversión nos guste decir que "mi papá pesa 68500 gramos", o "nuestra casa tiene una altura de 0.012 kilómetros".
Por el otro lado, estas conversiones son una preparación excelente para aprender más adelante a calcular con números decimales *(Bloque V)*. Un dato como "7.45 metros" es efectivamente un número decimal, aunque por ahora todavía no lo interpretamos así. Por eso tomamos bastante tiempo para practicar estas conversiones de medidas. Si los niños lo entienden ahora, más adelante entenderán más fácilmente los números decimales.

TALLER

Conversiones de medidas en la vida diaria

Busquen oportunidades de practicar conversiones de medidas. Aunque quizás no sea "necesario", pero podemos hacerlo "por diversión" o "por curiosidad". Por ejemplo:

- Este saco contiene 50 kg de arroz. ¿Cuántos gramos son?
- Este camión puede llevar una carga de 16 t. ¿Cuántos kilos es eso?
- De aquí a la ciudad vecina son 68 km. ¿A cuántos metros equivale eso? *(Usen datos de acuerdo a su propia situación.)*
- ¿Cuántos milímetros mides?
- ¿Cuántos milímetros mide nuestra casa? (ancho, largo, y altura)
- ¿Cuántos centímetros son hasta el mercado?
- ¿Cuántos mililitros de agua caben en la bañera?
- ¿Cuántos centavos costaron nuestras compras de hoy?

- ¿Cuántos centímetros hay en un kilómetro?
- ¿Cuántos gramos hay en una tonelada?

Anoten de diversas maneras los pesos y medidas que encuentran. Por ejemplo:

1 m 35 cm 7 mm
= 1 m 35.7 cm
= 1.357 m
= 135.7 cm
= 1357 mm

El tablero posicional como ayuda para convertir medidas

Podemos diagramar las unidades de medida en un tablero posicional, de la misma manera como lo hicimos con los números. Solamente que ahora las columnas reciben los nombres de las unidades de medida. Cada unidad de medida debe encontrarse donde corresponde. Por ejemplo un kilómetro tiene 1000 metros, entonces la columna de los kilómetros debe encontrarse en el lugar de los "millares de metros". Un metro tiene 100 centímetros, entonces la columna de los metros debe encontrarse en el lugar de las "centenas de centímetros". Entonces, el tablero para las medidas de longitud se ve así:

km	(100 m)	(10 m)	m	(10 cm)	cm	mm
3	**0**	**5**	**8**	**4**	**4**	**2**
			4		**7**	

Aquí aplica la misma regla como para el tablero "normal" del sistema decimal: Si pasamos una columna hacia la izquierda, el valor posicional se multiplica por 10. Si pasamos una columna hacia la derecha, el valor posicional se divide entre 10.

Como primer ejemplo, está escrito en el tablero el valor 3 km 58 m 44 cm 2 mm. Ahora podemos encontrar diferentes formas de escribir esto, según la unidad básica que elegimos. El punto se encuentra siempre detrás de la columna que corresponde a la unidad básica. Si la unidad básica son kilómetros, vemos en el tablero que hay 3 kilómetros, y después del 3 ponemos el punto: 3.058442 km. – Si queremos escribirlo en metros, entonces tomamos la columna de los metros como "unidades", y vemos en el tablero que hay 3058 metros. Detrás de este número viene el punto: el número completo es 3058.442 m. – De manera similar vemos que esto equivale a 305844.2 cm, o a 3058442 mm.

Donde no hay nada en el tablero, simplemente rellenamos con ceros donde es necesario. En el segundo ejemplo tenemos escrito 4 m 7 cm. Si queremos escribir esto en kilómetros, ponemos como antes el punto detrás de la columna de los kilómetros, y tenemos 0.00407 km. (El último cero, el de los milímetros, ya no necesitamos escribir si medimos solamente en centímetros.) En metros tenemos 4.07 m (los ceros a la izquierda son innecesarios); en centímetros 407 cm, y en milímetros 4070 mm (ahora sí tenemos que completar el último cero, porque ahora estamos expresando una medida en milímetros).

Practiquen con diversos datos y mediciones que encuentren en situaciones de la vida diaria. Anótenlos en el tablero, y escríbanlos de diferentes formas. O usen los siguientes ejemplos para practicar:

a) Escribe 3578 m en kilómetros.
b) Escribe 5.80035 km en metros.
c) Escribe 56723.5 cm en metros y centímetros.
d) Escribe 56723.5 cm en milímetros.
e) Escribe 3 km 88 m en metros.
f) Escribe 8 km 5 m 7 cm en metros.
g) Escribe 8 km 5 m 7 cm en milímetros.
h) Escribe 707'007 cm en kilómetros, metros y centímetros.
i) Escribe 707'007 mm en metros, centímetros y milímetros.
j) Escribe 8 km 48 m en milímetros.
k) Escribe 5 m 9 mm en kilómetros.

Nota: Las posiciones de 10 cm, 10 m y 100 m tienen también sus nombres propios, pero son poco usuales. 10 cm ($^{1}/_{10}$ m) son un *decímetro (dm);* 10 metros son un *decámetro (dam)*; 100 metros un *hectómetro (hm)*. En el nivel de Secundaria I explicaremos estos nombres más detalladamente.

De manera similar podemos establecer un tablero posicional para las unidades de peso:

t	(100 kg)	(10 kg)	kg	(100 g)	(10 g)	g

Busquen unos ejemplos que pueden escribir y convertir con este tablero; o practiquen con los siguientes:

a) Escribe 4090 kg en toneladas.
b) Escribe 550'055 g en kilogramos.
c) Escribe 7890.123 kg en toneladas, kilogramos y gramos.
d) Escribe 48'080 g en toneladas.
e) Escribe 6.400 t en gramos.
f) Escribe 25 kg 63 g en gramos.
g) Escribe 25 kg 63 g en toneladas.
h) Escribe 9 t 99 g en kilogramos.

Ampliaciones

Problemas con unidades de medida

1) Un rascacielos de 70 pisos mide 203 m. Si todos los pisos tienen la misma altura, ¿cuál es la altura de un piso?

2) Una avenida mide 12 km. Se quiere colocar en cada 40 metros un poste de luz. ¿Cuántos postes se necesitan?

3) Un camión con una capacidad de 8 t, ¿cuántos paquetitos de chocolatillos de 160 g puede transportar?

4) Si una mandarina pesa 125 g, ¿cuántas mandarinas son una tonelada?

5) Si una caja con 12 botellas de jugo pesa 2.800 kg, ¿cuántas botellas puede transportar un camión con una capacidad de 3.500 t ?

6) Si hubiera una carretera a lo largo del ecuador de la tierra, ¿cuántos días demoraría una vuelta alrededor de la tierra, manejando constantemente a 64 km/h ? (El ecuador mide 40'000 km.)

7) Si una hormiga avanza 5 cm en un segundo, ¿cuántos kilómetros avanza en 12 horas?

*8) En 2017, los 2884 habitantes de un pueblo consumían diariamente 241'947 litros de agua. En 2018, la población había aumentado a 3388 habitantes. Si el consumo de agua por persona siguió igual, ¿cuántos litros se consumían diariamente en el año 2018?

(***Nota:*** Los problemas 6 y 7 requieren conversiones de medidas del tiempo. Los alumnos que todavía no dominan eso, deberán hacer la Unidad 33 primero.)

Principios matemáticos

Números grandes y cifras significativas

Cuando convertimos toneladas en gramos, o kilómetros en milímetros, resultan números mayores a un millón. Pero aun cuando calculamos con medidas muy grandes, en la práctica raras veces se calcula con números mayores a un millón. Eso se debe a que la precisión de las mediciones es limitada. Por ejemplo, una balanza para pesar camiones de varias toneladas, no podrá pesar con una precisión de gramos; en este caso es suficiente indicar el peso en toneladas y kilos. En cambio, una balanza de precisión que puede indicar aun los miligramos, normalmente podrá pesar solamente objetos pequeños de unos cuantos gramos. Lo mismo con las longitudes: Longitudes mayores a unos pocos metros normalmente no se miden al milímetro. Cuando hablamos de distancias de varios cientos de kilómetros, normalmente no indicamos los metros.

Entonces, si hablamos por ejemplo de una distancia de 2473 km, tenemos que calcular solamente con un número de 4 cifras. Podríamos decir que son 2'473'000 metros; pero eso no tendría mucho sentido, porque en realidad nadie ha medido los metros; por tanto los dígitos de los metros no aportan ninguna información adicional. En este ejemplo, el número 2'473'000 tiene 7 dígitos; pero tiene solamente 4 dígitos *significativos,* porque solamente los dígitos 2473 transmiten información.

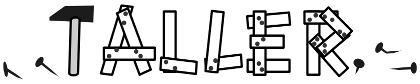
Por eso es sensato expresar los datos en una unidad de medida tal que los números se limitan a las cifras significativas: Necesitamos indicar los milímetros solamente si la medición tiene una precisión de milímetros; los centímetros solamente si hemos medido con una precisión de centímetros. Para la mayoría de los propósitos prácticos, tres o cuatro cifras significativas son suficientes.

A veces tenemos datos con muchas cifras significativas, pero el propósito del cálculo no requiere tanta precisión. En estos casos, los datos se pueden redondear a cuatro o tres (o incluso dos) cifras significativas. Por ejemplo, una ciudad con 286'733 habitantes planea construir un nuevo reservorio de agua, y los ingenieros tienen que estimar el consumo de agua de la población, para definir la capacidad necesaria del reservorio. En este caso, los ingenieros probablemente redondearán el número de habitantes a 290'000, o sea dos cifras significativas.

Unidad 32 - Medidas de áreas

Prerrequisitos:
- Operaciones básicas con números grandes.
- Conversión de unidades de medida con números grandes *(Unidad 31)*.

Materiales necesarios:
- Regla; cordel de medir.



Áreas de objetos en la casa

¿Cómo mediríamos el *área* (la superficie) de una hoja de papel; de la mesa; de la cama? – Que los niños hagan unas sugerencias. Conversen acerca de sus sugerencias y practíquenlas. Para el inicio vamos a limitarnos a áreas rectangulares, y que puedan medirse en cm^2. Así podemos introducir el *centímetro cuadrado* (cm^2) como una primera medida de áreas. Un cm^2 es el área de un cuadrado que tiene 1 cm de largo y 1 cm de ancho.
Los niños ya conocen el rectángulo como representación de una multiplicación. Por eso no será difícil entender que en el caso de una figura rectangular, su área se puede calcular multiplicando su ancho por su largo.
Midan y calculen el área de diversos objetos rectangulares en cm^2. Pueden hacer una tabla como la siguiente:

Objeto	Largo	Ancho	Área
Mi cuaderno	28 cm	21 cm	588 cm^2
Mi escritorio	90 cm	74 cm	...
Mi cama	...	...	...

Si los niños preguntan por qué en la abreviación de cm^2, "cuadrado" se escribe con un pequeño número 2, podemos explicarles que es porque un área es el resultado de multiplicar ***dos*** *factores (el largo y el ancho). Para entenderlo más claramente, se requiere comprender el concepto de las potencias (Unidad 89).*

Hoja de trabajo 32.1: Medir y comparar áreas

Esta hoja contiene diversas figuras para medir sus áreas en cm^2, y comparar entre ellas. Entre dos figuras que están lado a lado, siempre se encuentra un cuadrado vacío para escribir adentro uno de los signos <, =, >.

En los rectángulos, se pueden medir sus lados en cm y así calcular su área. Si desean, pueden adicionalmente dibujar cuadrículas de 1 cm en los rectángulos; así pueden contar los cuadraditos para verificar el cálculo.

En las figuras irregulares, la cuadrícula ya está dibujada; entonces simplemente se pueden contar los cuadraditos.

Hoja de trabajo 32.2: Otras medidas de áreas

La parte superior de la hoja contiene una comparación visual de 1 mm^2, 1 cm^2 y 1 dm^2. Si queremos saber cuántos mm^2 contiene un cm^2, solamente tenemos que contar y calcular el número de los cuadraditos pequeños: 10 x 10 = 100. Lo mismo para la comparación entre cm^2 y dm^2.

La parte inferior contiene unas figuras para medir y calcular sus áreas. Aquí tenemos que medir y calcular con milímetros, porque los lados no son centímetros enteros.
Las figuras irregulares se pueden partir en dos o tres rectángulos. Podemos dibujar con lápiz y regla las líneas de división. Después podemos medir y calcular el área de cada rectángulo aparte, y sumar los resultados. (Alternativamente podríamos dibujar una cuadrícula de milímetros y contar los cuadraditos; pero sería muy trabajoso...) Se recomienda escribir en cada lado su longitud, después de medir.

¿Y cómo podemos expresar estas áreas en cm^2?

Las conversiones entre estas unidades de medida se hacen igual como en otras medidas que tienen 100 partes: entre la moneda entera y centavos; o entre metros y centímetros. Ya que la medida mayor contiene 100 veces la medida menor, ponemos dos dígitos detrás del punto. Así por ejemplo 1538 mm^2 son iguales a 15.38 cm^2. Todavía no necesitamos hacer conversiones directas de mm^2 a dm^2 o vice versa.

Nota: Los niños a este nivel todavía no aprendieron a calcular con decimales; a no ser que hayan anticipado el *Bloque V*. Por eso todavía no podemos exigir que calculen por ejemplo directamente en cm^2 el área de un rectángulo que mide "3.5cm por 5.8 cm". Tendrían que convertirlo primero en milímetros, multiplicar 35mm por 58mm, y después convertir el resultado en cm^2.

Midan y calculen también algunos objetos de la casa en mm^2, y en dm^2. Unos objetos para medir en mm^2 podrían ser por ejemplo: una cajita de fósforos; una tarjetita pequeña (como las tarjetitas de operaciones que usamos en algunas actividades); un borrador rectangular; un sachet de champú o de condimento.

Unos objetos para medir en dm^2 podrían ser: la superficie de una mesa; una cama; una sábana; una ventana grande.

Medidas de áreas mayores

Para superficies mayores (casas, terrenos, provincias, ...) tenemos que usar medidas mayores. Las áreas de casas y de terrenos de construcción normalmente se indican en *metros cuadrados* (m^2). Midan y calculen el área de su sala, de su casa, del patio, o del terreno entero, en metros cuadrados. *(Vea también la Unidad 67, "Planos y mapas".)*

La siguiente unidad de medida más grande se llama "*área*", y corresponde a 100 m^2, o sea un cuadrado de 10m por 10m. Esta medida es poco usual.

La siguiente medida es la *hectárea* o 100 áreas; un cuadrado de 100m por 100m. Las áreas de terrenos agrícolas se suelen indicar en hectáreas.
Si tienen un campo propio o conocen a alguien que lo tiene, visítenlo y pregunten cuántas hectáreas tiene su campo. Quizás hasta pueden medir y calcularlo con un cordel de medir.

Para pensar: ¿Cuántos metros cuadrados tiene una hectárea?

La siguiente medida es el *kilómetro cuadrado* (km^2). Como dice el nombre, corresponde a un cuadrado de un kilómetro por un kilómetro. Las áreas de provincias y de países se indican en km^2.

Averigüen cuántos km^2 mide su municipio; su provincia; su país.

Suban a un cerro o un mirador, y estimen cuántos km^2 se pueden ver desde allí. Después verifíquenlo con un mapa: Midan en el mapa la extensión aproximada (largo y ancho) del área que han visto, calculen a cuánto corresponde en la realidad, y calculen el área. *(Vea también la Unidad 67, "Orientación con el mapa".)*

Nota: En el lenguaje cotidiano, mucha gente no distingue correctamente entre medidas de longitudes y medidas de áreas. Dicen por ejemplo "un terreno de 300 metros", cuando en realidad quieren decir "un terreno de 300 metros *cuadrados*". Acostumbremos a los niños desde el inicio a hablar correctamente. "300 metros" indica una *longitud*, no un área. Si nos referimos al área, tenemos que decir "metros cuadrados".
Las medidas de longitudes pueden también llamarse "lineales" para mayor precisión: "300 metros" (de longitud) es lo mismo como "300 metros lineales".

Conversión de medidas de áreas con la ayuda del tablero posicional

Podemos usar el método del tablero posicional *(vea en la Unidad anterior)* para convertir entre distintas medidas de áreas. En este caso, el tablero se ve así:

km^2	*10ha*	**ha**	*10a*	**a**	*$10m^2$*	**m^2**	*$10dm^2$*	**dm^2**	*$10cm^2$*	**cm^2**	*$10mm^2$*	**mm^2**

Hagan sus propios ejemplos para practicar algunas conversiones. Expresen p.ej. el área de su municipio en m^2, el área de su casa en ha, el área de la mesa en m^2 o en mm^2.

Problemas con medidas de áreas

1) Un terreno rectangular mide 21m de ancho y 32m de largo. Calcula su área en m^2.

2) Un campo rectangular de 7 ha tiene 560 metros de largo. ¿Cuál es su ancho?

3) ¿Cuántas baldosas de 30cm x 30cm se necesitan para cubrir un piso de 15.75 m^2?

4) El Lago Titicaca tiene aproximadamente 150 km de largo y 56 km de ancho. ¿Cuánto mide aproximadamente su superficie?

Medidas de áreas

Milímetro cuadrado (mm^2)

Centímetro cuadrado (cm^2) = 100 mm^2

Decímetro cuadrado (dm^2) = 10cm x 10 cm = 100 cm^2

Metro cuadrado (m^2) = 100 dm^2

Área (a) = 10m x 10m = 100 m^2

Hectárea (ha) = 100m x 100m = 100 a

Kilómetro cuadrado (km^2) = 100 ha

5) En el balde de pintura dice: "Rinde para $36m^2$." El pintor tiene que pintar una pared de 30 metros de largo y 6 metros de alto. ¿Cuántos baldes de pintura necesita?

*6) Una casa tiene 9 metros de ancho, 12 metros de largo y 7 metros de altura. El primer piso tiene 8 ventanas que miden 100cm x 150cm cada una, y dos puertas que miden 2m x 1m cada una. El segundo y el tercer piso tienen 10 ventanas en cada piso, que miden 100cm x 130cm cada una. ¿Cuántos baldes de pintura se necesitan para pintar la fachada de esta casa, si un balde alcanza para $36m^2$?

7. a) El país de El Salvador tiene una superficie de 21'041 km^2. En 2002 tenía 6'154'000 habitantes. En promedio, ¿cuántas personas vivían en un kilómetro cuadrado?

b) Compara con la densidad de la población en Panamá: Ese país mide 77'080 km^2. En 2002 tenía 2'812'000 habitantes. ¿A cuántas personas por km^2 equivale eso?

c) Averigua y calcula también para tu propio país: ¿Cuántas personas viven en un kilómetro cuadrado?

8) El aire de nuestra atmósfera pesa aproximadamente 1 kg sobre cada cm^2 de la superficie de la tierra. Estima cuánto pesa el aire sobre tu cabeza y tus hombros cuando estás parado.
(Para pensar: ¿Por qué este peso no nos aplasta?)

¿A dónde vamos desde aquí?

En vez de continuar con la siguiente Unidad, pueden en su lugar continuar con el tema de "Perímetros y áreas" en la *Unidad 65*, o hacer la actividad de dibujar un plano de la casa en la *Unidad 67*.

Unidad 33 - Medidas del tiempo

Prerrequisitos:
- Operaciones básicas con números grandes *(Unidades 27 a 29)*.
- Proporcionalidad *(Unidad 20)*.

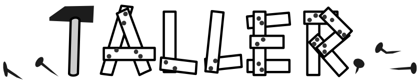
Materiales necesarios:
- Reloj, cronómetro.

Para los educadores

Medidas no decimales

Las conversiones de las medidas del tiempo no son compatibles con el sistema decimal, porque las relaciones entre las distintas unidades no son potencias de 10. Por tanto no podemos usar el método del tablero posicional en estos casos. Tenemos que multiplicar sucesivamente por los factores de conversión respectivos.

Esta es la única Unidad de este libro que trata explícitamente de las medidas del tiempo. Pero el tema se repasa implícitamente mediante problemas de tiempos, fechas, velocidades, etc, por ejemplo en el contexto de proporciones, fracciones, porcentajes, y otros.



Estimar tiempos – Nivel avanzado

En el nivel de Primaria I ya hicimos diversas actividades de estimar tiempos y duraciones. Podemos volver a hacer algunas de esas actividades, pero ahora de una manera que exige unas conversiones de unidades un poco más difíciles. Por ejemplo, en cualquier momento del día podemos preguntar: ¿Cuántos segundos pasaron desde la medianoche? O: ¿Cuántos segundos ya estás despierto hoy? – Que cada uno diga o escriba su estimación, y después lo calculamos juntos.

Algunas otras preguntas de esta clase:

¿Cuántas horas (o: minutos) faltan para tu cumpleaños?

¿Cuántos días cumples hoy?

¿Cuántos días tenía tu mamá cuando tú naciste?

¿Hace cuántos días vivía Jesucristo?

(En una caminata): ¿Cuántos segundos hemos caminado?

¿Cuántos segundos hay en un año? *(requiere conocimiento de "números astronómicos", Unidad 91)*

¿Cuántas horas has dormido en toda tu vida?

(Si no saben cómo calcular las conversiones de medidas necesarias, estudien el siguiente apartado.)

Pregunta capciosa:

¿Qué hora es cuando la campana del campanario toca 13 veces?

(La pregunta se refiere a los campanarios antiguos que tienen un reloj e indican la hora mediante toques de campana.)

Respuesta en el Anexo A.

Unas pautas acerca de la conversión de las medidas del tiempo

¿Cómo podemos escribir 65'000 segundos en días, horas, minutos y segundos?

Básicamente hay dos posibilidades: Podemos empezar con las unidades "grandes", o con las "pequeñas".

A) Si queremos empezar con las unidades "grandes" (días, en este caso), tenemos que saber primero cuántos segundos hay en un día: Un minuto tiene 60 segundos; una hora tiene 60 minutos; un día tiene 24 horas. Entonces un día tiene 24x60x60 segundos. Si calculamos esto, encontramos que el resultado es mayor a 65'000; entonces no tenemos ningún día entero. Pasamos entonces a las horas: Una hora tiene 60x60 = 3600 segundos. Tenemos que dividir 65'000 ÷ 3600 = 18 R.200. El residuo de 200 segundos tiene que convertirse en minutos: 200 ÷ 60 = 3 R.20. Entonces en total tenemos 18 horas, 3 minutos y 20 segundos.

B) Empezando por las unidades "pequeñas", el proceso se ve así: Convertimos primero los 65'000 segundos en minutos. Tenemos que dividir 65'000 ÷ 60 = 1083 R.20. O sea, hasta ahora tenemos 1083 minutos y 20 segundos. Convertimos los minutos en horas: 1083 ÷ 60 = 18 R.3. 18 horas son menos que un día, así sabemos que no hay días enteros El resultado es como arriba: 18 horas, 3 minutos y 20 segundos.

Vemos que es un poco más fácil comenzar con las unidades "pequeñas", porque de esta manera no necesitamos saber cuántos segundos hay en un día.

Las mismas dos alternativas existen en la conversión "al revés"; por ejemplo si queremos expresar 2 días, 7 horas, 46 minutos y 35 segundos en segundos.

A) Podemos saltar de cada una de las unidades directamente a los segundos. Entonces, como antes necesitamos saber primero cuántos segundos tiene un día; y después podemos convertir así:

	2 x 86'400 =	172'800 segundos
	7 x 3600 =	25'200 segundos
	46 x 60 =	2760 segundos
	35 =	35 segundos
Total:		200'795 segundos

B) O podemos primero convertir los días en horas, después las horas en minutos, y finalmente los minutos en segundos. En cada paso tenemos que acordarnos de sumar las cantidades que tenemos dadas :

2 x 24 = 48 horas, 48 + 7 = 55 horas *(eso son los 2 días y 7 horas)*

55 x 60 = 3300 minutos, 3300 + 46 = 3346 minutos

3346 x 60 = 200'760, 200'760 + 35 = 200'795 segundos.

Como antes, el segundo camino es probablemente un poco más eficiente, porque no requiere saber cuántos segundos hay en un día.

De manera similar podemos convertir días en semanas, meses o años. Al calcular con meses y años, tenemos que distinguir entre dos situaciones: ¿Calculamos con fechas reales, o hacemos cálculos financieros? En los cálculos financieros (como al calcular intereses), se calcula como si cada mes tuviera 30 días; entonces el "año bancario" se cuenta a 360 días. En cambio, al calcular con fechas reales, tenemos que tomar en cuenta las duraciones distintas de los meses, y los años bisiestos.

Un ejemplo con fechas reales: ¿Cuántos días fueron desde el 25 de junio de 2015 hasta el 12 de octubre de 2017?

Del 25 de junio de 2015 al 25 de junio de 2017 fueron dos años; pero el año 2016 fue bisiesto. Entonces hasta aquí tenemos 365 + 366 = 731 días.
Del 25 de junio de 2017 al 25 de octubre de 2017 fueron 4 meses. De esos, junio y septiembre tienen 30 días; julio y agosto tienen 31 días. Eso da un total de 122 días.
Del 25 al 12 de octubre de 2017 tenemos que regresar 13 días. Entonces el total es: 731 + 122 – 13 = 840 días.

(Es un poco más fácil regresar del 25 al 12 de octubre, en vez de calcular hasta el 25 de septiembre y desde allí pasar al 12 del mes siguiente.)

Estimar y calcular velocidades

Los viajes nos dan diversas oportunidades para estimar o calcular distancias, tiempos y velocidades. Si conocemos dos de estas magnitudes, podemos calcular la tercera. Por ejemplo:

- Viajamos a una ciudad que se encuentra a una distancia de 180 km. *(Eso lo podemos averiguar midiéndolo en el mapa, o fijándonos en las marcas de los kilómetros a lo largo de la carretera. O si viajamos en carro propio, podemos fijarnos en su kilometraje al salir y al llegar.)* Salimos a las 8:40 y llegamos a las 12:15. ¿Con qué velocidad hemos viajado?
Este cálculo nos dará la velocidad *promedia*. (No saldrá exacto; habrá que redondearlo.) En realidad viajamos no todo el tiempo con la misma velocidad. A veces avanzamos más rápidamente; a veces avanzamos despacio o incluso nos detenemos.

- Puede ser interesante estimar la velocidad *actual* del vehículo en el cual estamos viajando. Después lo comprobamos. Si no tenemos la posibilidad de leer el velocímetro, podemos hacer lo siguiente: Nos fijamos en las marcas de kilómetros a lo largo de la carretera. Con un cronómetro medimos cuántos segundos necesitamos para avanzar un kilómetro. A partir de este dato podemos calcular la velocidad. (¿Descubren cómo hacer eso?)

- Si sabemos que un carro avanza por ejemplo con 75 km/h, podemos medir el tiempo hasta llegar a cierto lugar, y con eso calcular la distancia recorrida. Por supuesto que eso funciona solamente en un tramo donde el carro puede avanzar con una velocidad más o menos constante. (¿Descubren también cómo hacer este cálculo?)

- Si conocemos la distancia y la velocidad, podemos calcular el tiempo. Por ejemplo: Sabemos que faltan todavía 46 km para llegar a nuestro destino, y que en promedio estamos avanzando con 63 km/h. ¿A qué hora llegaremos? (¿Cómo se calcula eso?)

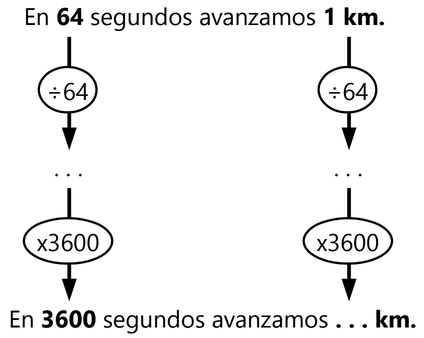
Si no pueden descubrir cómo hacer estos cálculos, estudien primero el siguiente apartado.

Medidas de velocidad, y cómo calcularlas

La velocidad de un vehículo se indica normalmente en km/h (kilómetros por hora). Por ejemplo 45 km/h significa que el vehículo avanza 45 km en una hora.
Otra medida que se usa a veces es m/s (metros por segundo). Por ejemplo 12 m/s significa que el vehículo avanza 12 metros en un segundo.

Los retos planteados en la actividad anterior están todos relacionados con el principio de la proporcionalidad *(Unidad 20)*. Además, para resolverlos, a menudo se requiere una conversión de unidades.

Por ejemplo: De una marca de kilómetro a la siguiente hemos demorado 1 minuto y 4 segundos; o sea 64 segundos. Para calcular la velocidad en km/h, tenemos que establecer una proporción que nos permite calcular cuánto avanzamos en una hora. Entonces tenemos que convertir la hora en segundos:

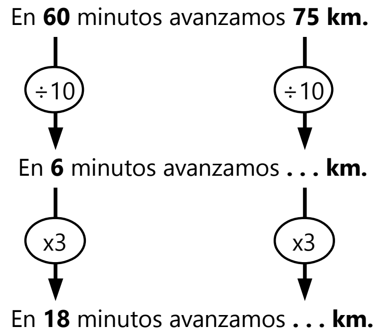


Este número de kilómetros nos da la velocidad en kilómetros "por hora".

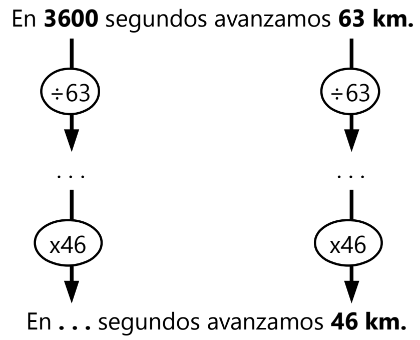
Si ya saben calcular con fracciones o con decimales, pueden hacer eso y dar el resultado de manera exacta. Si no, quedará un residuo y podemos redondear a kilómetros enteros. O podemos convertir todo a metros para el cálculo, y después convertir el resultado de regreso a kilómetros.
Los problemas en el libro a menudo son "fabricados" de manera que los resultados salen enteros. Pero en las situaciones de la vida real, ¡tenemos que calcular con los "números reales" (en ambos sentidos de la palabra)!

De la misma manera podemos calcular la velocidad promedia de un viaje entero: Establecemos una proporción para calcular cuántos kilómetros avanzamos en una hora; eso es la velocidad en km/h.

- Si conocemos la velocidad y el tiempo, y queremos saber la distancia, la proporción se ve muy similar; solamente que ahora el dato desconocido es la distancia. Por ejemplo, hemos avanzado con 75 km/h durante 18 minutos. ¿Cuántos kilómetros hemos recorrido?
Aquí tenemos el tiempo en minutos, entonces convertimos una hora en minutos. Usando el MCD como "puente":



- Veamos el último ejemplo dado arriba, donde queremos saber el *tiempo* para recorrer cierta distancia. Nuevamente, la proporción se ve casi igual como las anteriores. Podemos calcular con fracciones, o podemos desde el inicio convertir una hora en segundos, para poder calcular con segundos enteros (redondeando si es necesario):



¡Practiquen cálculos como estos cuando van de viaje!

Principios matemáticos

Sistemas de numeración no decimales

En las medidas del tiempo nos encontramos con una especie de "sistema de numeración" que no es decimal; o sea, su base no es 10. Además, la "base" (el factor de conversión) no es constante: De segundos a minutos y de minutos a horas es 60; de horas a días es 24; de días a meses es 30; etc.

El proceso de conversión de unidades de medida en un sistema como este tiene mucha similitud con la conversión de números del sistema decimal a otros sistemas de numeración, por ejemplo con base 8 o con base 16. Trataremos este tema en el nivel de Secundaria I.

Bloque IV: Fracciones
(Unidades 34 a 44)

Para entender bien los temas de este bloque, es necesario que los niños dominen los conceptos esenciales de los múltiplos y divisores *(Unidades 14 a 19)*. Una fracción es simplemente una manera distinta de escribir una división. Es importante que los niños ya no tengan confusiones en cuanto al razonamiento multiplicativo (a lo cual pertenece la división), antes que comiencen a practicar operaciones con fracciones.

Este bloque comienza con los conceptos más fundamentales de lo que es una fracción, y avanza poco a poco hasta cubrir todas las operaciones básicas con fracciones.

Las *Unidades 34 hasta 39* (Amplificar y simplificar) son fundamentales, y sin esta base será difícil entender el Bloque V. Las *Unidades 40 a 43* tratan de temas más avanzados, y pueden dejarse hasta más tarde. Las operaciones que se presentan en esas Unidades, generalmente requieren una edad mental mayor.[7)]

La *Unidad 44* (Matemática y Música) es completamente opcional, para aquellos alumnos que están interesados en el tema. Se incluye en este bloque porque la matemática de la música está muy relacionada con las fracciones.

Para los educadores

Las actividades de este bloque siguen mayormente un método mixto entre el uso guiado del material concreto (dando instrucciones a los niños de cómo usarlo), y actividades de exploración donde los niños descubren leyes matemáticas por sí mismos, pero guiados por una persona adulta. Se recomienda que para estas actividades se forme un grupo de niños interesados en explorar el tema, y que una persona adulta guíe sus actividades, porque podría ser difícil para los niños descubrir todo por sí mismos. Esto implica darles instrucciones donde es necesario, pero también hacer preguntas que incentivan la observación y el razonamiento.

No es necesario estar constantemente al lado de los niños mientras ellos exploran diversas respuestas. Es bueno que ellos se acostumbren a investigar por su cuenta durante algún tiempo, y no hay que darles prematuramente "la respuesta correcta". Pero sí hay que estar disponible para ayudarles en los puntos donde ellos no pueden seguir adelante por sí mismos.

Las sugerencias que se dan en las secciones de "Taller" y "Ahora lo escribimos" se refieren a la forma como un adulto puede guiar este proceso.

Algunos temas (sobre todo en las *Unidades 40 a 43*) son difíciles de representar con material concreto, por tanto usamos a los números mismos como "objetos" para observar su "comportamiento".

Si usted opina que sus niños son capaces de descubrir ciertas leyes y propiedades por sí mismos, entonces puede alternativamente copiar los ejemplos numéricos de una actividad, junto con unas preguntas guía, en una hoja de papel y darlos a los niños para que los elaboren por sí mismos.

7) Vea Nota 7 en el *Anexo B*.

Unidad 34 - Introducción a las fracciones

Prerrequisitos:
- Multiplicación y división.

Materiales necesarios:
- Alimentos u otros objetos que se pueden partir: panecillos, manzanas, barras de chocolate, etc.
- Material de fracciones (sectores circulares).

TALLER

Fracciones en la vida diaria

Estén atentos a las oportunidades de la vida diaria donde ocurren fracciones. Posiblemente los niños ya habrán aprendido de manera informal lo que significa "un medio", "un cuarto", quizás también "un tercio" o "tres cuartos".

En las recetas de cocina podemos encontrar expresiones como las siguientes: "Media cucharita de bicarbonato", "¾ taza de leche", etc. Al pesar y medir estas cantidades, los niños comienzan a entender lo que significan estas fracciones. O quizás tienen una litrera que permite medir medio litro, un cuarto de litro, etc. O al ir de compras: "Esta botella contiene 2 litros y medio de gaseosa." – "Hay que comprar un cuarto kilo de queso." – Etc.

O se da la situación de repartir una manzana entre cuatro niños. Cada niño recibe un cuarto. (¿Y qué si son cinco niños? ¿Alguien se atreve a cortar la manzana en quintos, o sea en cinco partes iguales?)

En los cumpleaños hay que repartir la torta en duodécimos (dozavos), en veintésimos, o en otra clase de fracciones.

Busquen oportunidades para partir otros objetos, por ejemplo plátanos, panecillos, o barras de chocolate. "Somos seis personas, hay que partirlo en sextos." Etc. Con estas actividades, los niños aprenden poco a poco los nombres de fracciones más allá de los "cuartos".

Al decir la hora, nos acostumbramos a decir: "Son las ocho y media"; "Son las diez menos cuarto". Estas fracciones se pueden ilustrar fácilmente al observar un reloj analógico: ¿Cuánto recorre el minutero en un cuarto de hora? ¿Y en media hora? Y al hacer estas observaciones podemos preguntar también: ¿Cuántos minutos son media hora? ¿y un cuarto de hora? ¿y tres cuartos de hora?

Algunos trabajos manuales también dan oportunidades para usar fracciones. Por ejemplo, muchos origamis requieren doblar la hoja primero por la mitad, después en cuartos, y quizás hasta en octavos. Algunos origamis especiales requieren doblar la hoja en tercios.

Representar fracciones con el material de los sectores circulares

Repartan el material de las fracciones sobre la mesa, todas las piezas mezcladas. Junten piezas del mismo color, y formen círculos con ellas. Si quieren, pueden dibujar los círculos que resultan.

Cada círculo significa "uno", o sea una unidad o "un entero". Las fracciones son *partes de la unidad*.

Encuentren qué color representa un tercio, un cuarto, un quinto, etc; hasta que conozcan los nombres de todas las piezas.

Quizás es necesario señalar que el nombre de la fracción está relacionado con el número de partes en un círculo: Si el círculo se divide en 7 partes, las partes se llaman "séptimos". Etc.

Piso incompleto

Jaimito dice: "El piso donde dormimos mis hermanos y yo, no está entero." – "¿Por qué no?", pregunta Juanito. – "Es que tiene solamente tres cuartos."

Comparar fracciones

Qué piensas: ¿Cuál es mayor, un cuarto o un quinto?

Haz tu predicción. Después averigua con la ayuda del material, si tu predicción fue correcta.

Haz lo mismo con algunas otras fracciones. Por ejemplo, ¿cuál es mayor, un sexto o un noveno? Etc. ¿Encuentras la "ley" de cómo se comportan los tamaños de las fracciones?

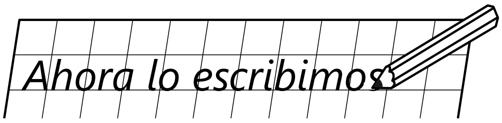
Quizás alguien comentará que la comparación de fracciones es "al revés": 4 es menor a 5, pero un cuarto es mayor a un quinto. ¿A qué se debe eso? – Cuando una torta se divide en más pedazos, los pedazos salen más pequeños. Pensando así, es lógico que con un número grande de pedazos, tendremos pedazos pequeños. Con el material de los sectores circulares podemos ver y experimentarlo de manera práctica.

También en la vida diaria podemos hacer pensar a los niños acerca de la comparación de fracciones. Por ejemplo, partimos dos manzanas. Una de ellas partimos en tercios y la otra en cuartos. "¿Qué prefieres, un tercio o un cuarto de manzana?"

Varias piezas de lo mismo

Aprendamos ahora a nombrar las fracciones que consisten en varias piezas. Por ejemplo, tomamos el círculo que está dividido en 8 partes. Estas partes se llaman "octavos". Entonces si pongo aparte 3 de estas piezas, esto se llama "tres octavos".

Hagan algunos ejemplos de este tipo hasta que los niños entiendan como funciona.

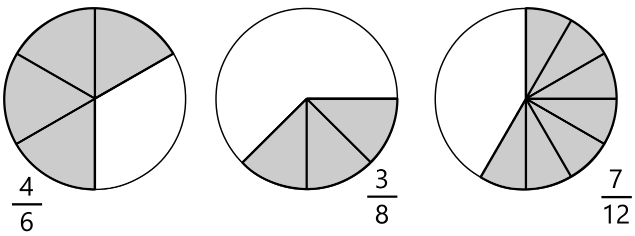


Lectura y escritura de fracciones

Para escribir una fracción como "tres séptimos", escribimos $\frac{3}{7}$. O sea, escribimos arriba cuantas piezas son: tenemos 3 piezas. Abajo escribimos cómo se llaman las piezas. Aquí se llaman "séptimos", porque hemos partido la unidad en 7 partes.

El número de arriba se llama "numerador", y el número de abajo se llama "denominador".

En grupitos de dos, hagan algunos ejemplos: Una persona representa una fracción con el material, y la otra persona la escribe. O al revés: Escriban primero, después represéntenlo con el material. Dibujen también algunas de las fracciones que están formando:



Nota: En un texto corrido, una fracción se puede también escribir así: 3/7, o así: $^3/_7$. Pero la forma vertical es más usual, y más práctica para las operaciones matemáticas.

Escribir comparaciones entre fracciones

Hagan también unas comparaciones entre fracciones y escríbanlas. Por ejemplo:

$$\frac{1}{7} > \frac{1}{9}$$

¿Pueden comparar unas fracciones sin usar el material? Intenten con las siguientes: *(Escriban los resultados en una hoja aparte, no en el libro.)*

$$\frac{1}{10} \square \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{12} \square \frac{1}{13}, \quad \frac{1}{100} \square \frac{1}{52},$$
$$\frac{7}{9} \square \frac{5}{9}, \quad \frac{7}{13} \square \frac{9}{13}, \quad \frac{1}{23} \square \frac{1}{32},$$
$$*\frac{3}{5} \square \frac{3}{4}, \quad *\frac{5}{16} \square \frac{5}{18}$$

Si no están seguros, intenten primero los que pueden hacer con el material.

Vocabulario matemático

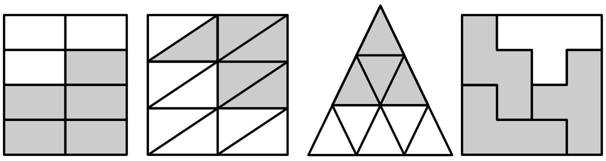
Numerador: El número que se escribe arriba en la fracción.
Se llama así porque "enumera" cuántas piezas son.

Denominador: El número que se escribe abajo en la fracción.
Se llama así porque nos da el "nombre" o la "denominación" de las piezas: Si el denominador es 6, las piezas se llaman "sextos". Si el denominador es 8, las piezas se llaman "octavos". Etc.

Para los educadores

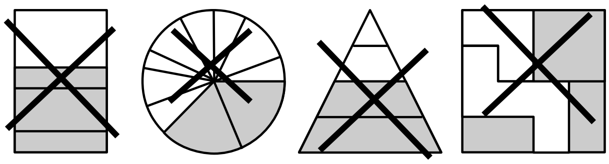
Representación de fracciones en dibujos:

Ya que estamos usando el material de sectores circulares, es natural que los niños hagan también sus dibujos de fracciones en forma circular, como en el ejemplo más arriba. Pero esa no es la única forma de dibujar fracciones. Por principio, cualquier figura geométrica es válida. Por ejemplo:



$\frac{5}{8}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{3}{4}$

Sin embargo, para que el dibujo sea adecuado, la unidad debe partirse en partes *iguales*. Si algunas partes son grandes y otras pequeñas, como en los ejemplos abajo, entonces no representan las fracciones correctamente:



Hoja de trabajo 34.1 (arriba): Escribe las fracciones

Escribe al lado de cada dibujo, a qué fracción equivale la parte sombreada. (En el último dibujo de esta serie se requiere completar la división en partes, para saber cuántas partes son en total.)

Hoja de trabajo 34.1 (abajo): Pinta las fracciones indicadas

Como en la parte de arriba, cada dibujo corresponde a un entero. Se deben pintar con un color tantas partes como corresponden a la fracción indicada.

Algunos dibujos requieren completar la división en partes. Por ejemplo, un dibujo pide colorear 11/18, pero el dibujo tiene solamente 9 partes. Entonces es necesario partir cada parte en dos, para obtener un total de 18 partes. Algunos de estos dibujos requieren primero un pequeño razonamiento geométrico, para descubrir cómo hacer para que las partes salgan iguales.

¿A dónde vamos desde aquí?

Se recomienda avanzar con el tema de las fracciones en el orden que presenta el libro, por lo menos hasta la *Unidad 37*. Así se construirá un concepto coherente de lo que son las fracciones.

Unidad 35 - Fracciones homogéneas

Prerrequisitos:

- Concepto de fracción *(Unidad 34)*.

Materiales necesarios:

- Material de fracciones (sectores circulares).
- (opcional) Figuras de juego (para dar pasos en la recta numérica).

Para los educadores

Vea la sección "Para los educadores" en la introducción al entero Bloque IV.

TALLER

Suma y resta de fracciones homogéneas

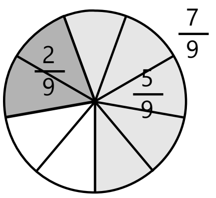
Hacemos unas sumas y restas con el material de fracciones; pero con fracciones del mismo tipo. Por ejemplo, usamos el círculo de los novenos. Apartamos dos novenos por un lado y cinco novenos por el otro lado: ¿cuánto es todo esto junto? – Comenzamos con seis novenos y quitamos cuatro novenos: ¿cuánto queda?

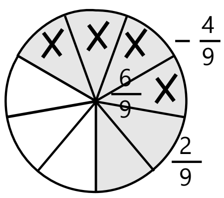
Trabajando con el material, es obvio que las piezas del resultado son del mismo tipo como las piezas con las que comenzamos: Si sumamos o restamos novenos, el resultado también consiste en novenos. (Así evitamos desde el inicio un error que es bastante común en alumnos que lo aprendieron solamente de manera abstracta.)

Después escribimos las operaciones que hemos hecho:

$$\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{7}{9} \qquad \frac{6}{9}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

Podemos también dibujarlas:





Hagan más ejemplos de este tipo.

De paso podemos explicar que por ahora sumamos o restamos solamente fracciones *del mismo tipo*, y que a eso se llama fracciones *homogéneas*.

Practica con números mayores

Si has entendido como funciona, puedes hacerlo sin el material. Practica con los siguientes ejemplos. Haz tantos ejercicios como necesitas para estar seguro en estas operaciones. Resuelve mentalmente lo que puedes, y usa los procedimientos escritos donde es necesario.

a. $\frac{13}{24}+\frac{7}{24}$ b. $\frac{46}{101}+\frac{40}{101}$

c. $\frac{257}{560}+\frac{303}{560}$ d. $\frac{798}{4999}+\frac{2445}{4999}$

e. $\frac{3409}{8243}+\frac{2892}{8243}$ f. $\frac{953}{9573}+\frac{68}{9573}$

g. $\frac{35}{24}-\frac{11}{24}$ h. $\frac{830}{831}-\frac{300}{831}$

i. $\frac{94}{100}-\frac{93}{100}$ j. $\frac{2145}{4321}-\frac{999}{4321}$

k. $\frac{1000}{7613}-\frac{22}{7613}$ l. $\frac{8564}{9791}-\frac{8473}{9791}$

Nota: Quizás algún niño curiosea acerca de lo que va a pasar si sumamos fracciones de tipos distintos, como por ejemplo cuartos y quintos. Tenemos que decirle que eso tiene que esperar hasta que sepamos más acerca de las fracciones. *(Vea Unidad 40.)* Por ahora no podemos decir cuál será el resultado: Si unimos cuartos con quintos, el resultado no va a ser ni cuartos ni quintos. Tendremos que investigar varios otros temas hasta que podamos decir qué es.

Completar el entero

Junta con el material $\frac{3}{5}$. ¿Cuántos quintos tienes que aumentar para formar un círculo entero?

$$\frac{3}{5} + \frac{\square}{5} = 1$$

¿Cuántos quintos son igual a 1? – Podemos entonces escribir: $1 = \frac{5}{5}$

Arma, dibuja y escribe algunas otras sumas de fracciones que suman 1.

Practica con números mayores:
(Copia los ejercicios; no escribas dentro del libro.)

m. $1 = \frac{\square}{56}$ n. $1 = \frac{\square}{400}$ ñ. $1 = \frac{4862}{\square}$

o. $\frac{367}{767} + \frac{\square}{765} = 1$ p. $\frac{3808}{4000} + \frac{\square}{4000} = 1$

q. $1 - \frac{891}{1001}$ r. $1 - \frac{6632}{7301}$

Fracciones y enteros

Piensa, y escribe: ¿Cuántos quintos necesitarías para formar 2, 3, 4, ... círculos enteros? $2 = \frac{\square}{5}$, $3 = \frac{\square}{5}$, etc.

Haz lo mismo con otras fracciones (cuartos, sextos, ...) Arma círculos; escribe unos ejemplos.

Practica con números mayores:

s. $2 = \frac{\square}{41}$ t. $3 = \frac{\square}{500}$ u. $323 = \frac{\square}{6}$

v. $1827 = \frac{\square}{3}$ w. $7 = \frac{56}{\square}$ x. $\frac{520}{8} = \ldots$

Vocabulario matemático

Número entero: Una cantidad de unidades.
Los números que usamos al contar son números enteros: 1, 2, 3, 4, ...
"Un entero" es sinónimo de "uno" o "una unidad".

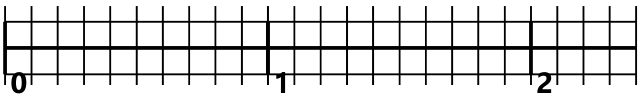
Fracción *(o "Quebrado")*: Una parte de una unidad; o lo que no es una unidad completa.
Ejemplos: $\frac{1}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{111}$
Las fracciones también son números; pero no son números enteros.

Fracciones homogéneas: Fracciones que tienen el mismo denominador.

Fracciones heterogéneas: Fracciones que tienen denominadores diferentes.

Fracciones en la recta numérica

Dibuja en una hoja cuadriculada una recta numérica. Pero la hacemos "en grande": una unidad en esta recta numérica tiene 10 cuadraditos. O sea, después del cero tienes que contar 10 cuadraditos, y allí recién marcas el 1. Avanza otros 10 cuadraditos, y allí marcas el 2.



¿Cuánto vale ahora un cuadradito en esta recta numérica?

Escribe los números correspondientes en la recta numérica, en cada lugar donde termina un cuadradito. (Tendrás que usar fracciones.)

Ahora representa unas sumas y restas en esta recta numérica, caminando con una figura de juego o dibujando flechas. Por ejemplo:

$\frac{3}{10} + \frac{5}{10}$, $\frac{9}{10} - \frac{4}{10}$, $\frac{7}{10} + \frac{3}{10}$.

Piensa: ¿Dónde se encuentra en tu recta numérica $^{11}/_{10}$? ¿ $^{15}/_{10}$? ¿ $^{20}/_{10}$?

¿A dónde vamos desde aquí?

Se recomienda avanzar con el tema de las fracciones en el orden que presenta el libro, por lo menos hasta la *Unidad 37*. Así se construirá un concepto coherente de lo que son las fracciones.

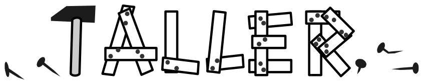
Unidad 36 - Números mixtos

Prerrequisitos:
- Concepto de fracción *(Unidad 34)*.
- Fracciones homogéneas *(Unidad 35)*.

Materiales necesarios:
- Material de números mixtos *(según la descripción en el Taller)*.
- (opcional) Figuras de juego (para dar pasos en la recta numérica).

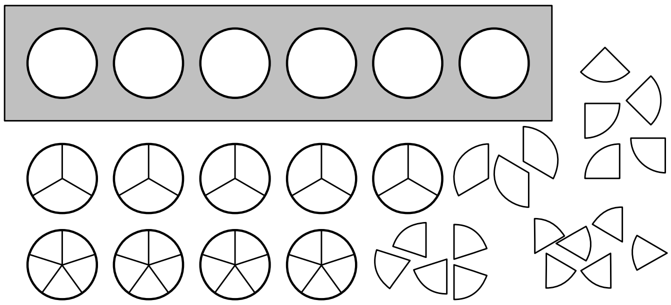
Para los educadores

Vea la sección "Para los educadores" en la introducción al entero Bloque IV.



El juego de números mixtos

Fabriquen este juego de madera contrachapada (triplay) o de cartón grueso. Consiste en una tabla con espacios vacíos para varios círculos, y una cantidad correspondiente de círculos enteros que son divididos con líneas en medios, tercios, cuartos, quintos, etc. Además algunas fracciones sueltas de los mismos tamaños:



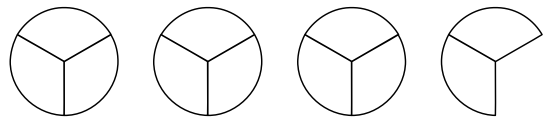
etc.

(Para instrucciones como dividir un círculo en fracciones iguales, vea en la *Unidad 59,* en "Polígonos regulares".)

Para ahorrar, pueden usar los círculos por ambos lados; por ejemplo los círculos con los cuartos pueden en su reverso tener marcados los quintos.

Peguen la tabla grande sobre una base de cartón, para que los círculos y las fracciones se puedan colocar dentro como en un rompecabezas.

Con este material podemos representar números que consisten en una combinación de enteros y fracciones, como por ejemplo "tres y dos tercios":



Acostúmbrense a usar siempre la clase de círculos que corresponden a las fracciones sueltas que tenemos. En el ejemplo arriba, las fracciones son tercios, entonces usamos aquellos enteros que tienen marcados los tercios.

Practiquen representar otros números mixtos de la misma manera: "cinco y tres cuartos"; "dos y un sexto"; "uno y cuatro séptimos"; etc.

Ahora lo escribimos

Practiquen ahora escribir estos números mixtos que hemos representado con el material. Escribimos simplemente los enteros primero y la fracción después:

$$\text{tres y cuatro quintos} = 3\frac{4}{5}$$

En realidad, esto significa una *suma* del número entero más una fracción: $3\frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5}$. Pero no necesitamos escribir el signo +, porque se entiende sin este signo.

Representen unos números mixtos con el material y escríbanlas. O escriban unos números mixtos, y después represéntenlos con el material. Lo pueden hacer en grupitos de dos: un niño escribe y el otro usa el material.

También pueden hacerlo con las tarjetitas de la ***Hoja de trabajo 36.1***, usando las tarjetas por el lado del número mixto.

TALLER *(Continúa)*

Sumar y restar números mixtos

Hagamos ahora unas sumas y restas con este material. Por ejemplo: $3\frac{1}{5} + 1\frac{3}{5}$

Podemos simplemente juntar los enteros primero, y después juntar las fracciones sueltas. Así tenemos 4 enteros y 4 quintos. El resultado es $4\frac{4}{5}$.

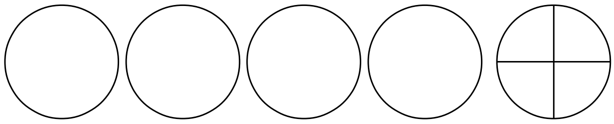
De manera similar podemos representar una resta, por ejemplo $5\frac{3}{6} - 2\frac{2}{6}$. Aquí también podemos quitar 2 enteros de los que hay, y quitamos 2 sextos de los sextos sueltos que hay. El resultado es $3\frac{1}{6}$.

Hagan otros ejemplos con el material, como estos:

a. $2\frac{1}{4} + 3\frac{2}{4}$, b. $4\frac{3}{7} - 1\frac{2}{7}$, c. $3\frac{1}{2} + 2$,
d. $3\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$, e. $5\frac{2}{3} - 3\frac{2}{3}$, f. $1\frac{1}{4} + 3\frac{3}{4}$.

Canje con fracciones

¿Observaron algo especial en el ejemplo f. arriba? Nos resultan 4 círculos enteros y 4 cuartos sueltos. O sea, el resultado es $4\frac{4}{4}$. Pero estos 4 cuartos sueltos forman juntos otro entero. Podemos *canjearlos* por un círculo entero, y entonces el resultado es 5. *(Dibujo siguiente.)*



Con las fracciones podemos hacer canjes como con las unidades y decenas. Usemos el material para practicar algunos otros ejemplos donde necesitamos hacer esta clase de canje. Por ejemplo $2\frac{3}{5} + 1\frac{4}{5}$: Juntamos todo lo que tenemos, y resulta $3\frac{9}{5}$. Pero esos quintos sueltos son ahora más que un círculo entero. Canjeamos entonces 5 quintos por un entero, y tenemos $4\frac{4}{5}$.

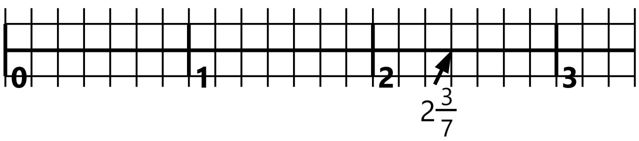
Hagan también esta operación: $4\frac{3}{7} - 2\frac{6}{7}$. Para restar los enteros no hay problema: quedan 2 enteros. Pero ahora deberíamos quitar 6 séptimos, y hay solamente 3. ¿Qué hacemos? – Canjeamos uno de los enteros por 7 séptimos. Ahora tenemos un total de 10 séptimos y podemos quitar 6. Nos quedan 4 séptimos, y un solo entero, porque el otro hemos canjeado. El resultado es $1\frac{4}{7}$.

Practiquen algunas operaciones de esta clase con el material. Pueden inventar sus propios ejemplos, o pueden usar estos:

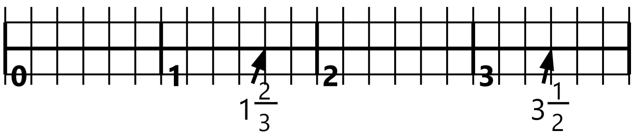
g. $1\frac{5}{6} + 2\frac{3}{6}$, h. $3\frac{3}{5} + 2\frac{2}{5}$,
i. $3\frac{5}{7} + \frac{4}{7}$, j. $4\frac{2}{5} - 3\frac{4}{5}$,
k. $5\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$, l. $3\frac{4}{6} - 1\frac{5}{6}$.

Números mixtos en la recta numérica

Dibujen unas rectas numéricas "grandes" como en la Unidad anterior. Tendrán que hacer una recta numérica nueva para cada nueva clase de fracciones que quieren usar. Por ejemplo para poder marcar séptimos, una unidad debe medir 7 cuadraditos; entonces cada cuadradito es $^1/_7$.



Para los medios y los tercios pueden usar una medida un poco más grande, por ejemplo 6 cuadraditos por unidad; entonces $^1/_2$ mide 3 cuadraditos, y $^1/_3$ mide 2 cuadraditos.



Representen unas sumas y restas en estas rectas numéricas, caminando con una figura de juego o dibujando flechas. Pueden usar los ejemplos de la actividad anterior, o inventar unos ejemplos propios.

Ahora lo escribimos

¿Pueden ahora hacer estas operaciones sin el material? Intenten con las siguientes:

m. $11\frac{5}{8} + 8\frac{3}{8}$, n. $3\frac{17}{20} + 3\frac{11}{20}$, ñ. $15\frac{44}{61} + \frac{50}{61}$,
o. $12\frac{7}{15} - 3\frac{11}{15}$, p. $20 - 3\frac{43}{100}$, q. $86\frac{4}{31} - \frac{29}{31}$.

Y para practicar las sumas y restas con números grandes:

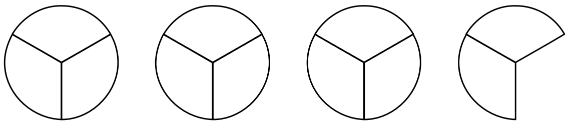
r. $3789\frac{37}{100} + 544\frac{87}{100}$, s. $58\frac{2692}{5431} + 141\frac{2741}{5431}$,
t. $9001\frac{64}{211} - 2\frac{87}{211}$, u. $644\frac{15}{6644} - 643\frac{219}{6644}$.

Para pensar: Alfredo está sumando $3\frac{2687}{3166} + \frac{3165}{3166}$. "¡Qué suma tan larga!", suspira. Alicia responde: "¡Pero eso se puede hacer de manera mucho más fácil!" – ¿Por qué? ¿Cómo lo hizo Alicia?

TALLER (Continúa)

Representar fracciones impropias

Volvamos al primer ejemplo del Taller, "tres y dos tercios":



Ahora queremos saber cuántos tercios contiene este número *en total*. Tenemos no solamente los dos tercios sueltos al final; también los círculos enteros contienen tercios. Podemos simplemente contarlos: son 11 tercios en total. Entonces podemos escribir este número también como una fracción:

$$3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}.$$

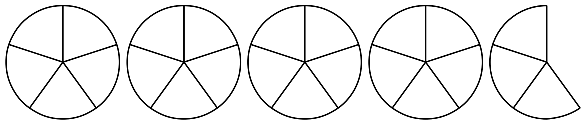
Una fracción como esta se llama *"fracción impropia"*, porque contiene unos enteros "escondidos".

Hagan algunos otros ejemplos como este: Represéntenlos con el material, y escriban el número mixto y la fracción impropia correspondiente. Pueden inventar sus propios ejemplos, o usar las tarjetitas de la ***Hoja de trabajo 36.1***

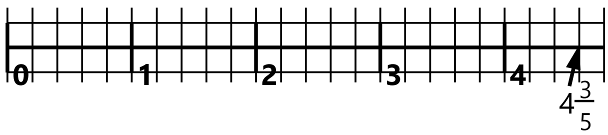
Convertir números mixtos en fracciones

Analicemos ahora cómo funciona esta conversión de un número mixto en una fracción. ¿Podemos hacerlo de una manera más eficaz? Quizás ya lo descubrieron mientras hicieron la actividad anterior.

Si no, observen este ejemplo:



O usando la recta numérica dividida en quintos:



Ya que las fracciones sueltas son quintos, es obvio que el resultado de la conversión también son quintos. ¿Cuántos quintos contienen los 4 enteros? – En vez de contarlo, ¿con cuál operación matemática podemos calcularlo?
Ahora tenemos que juntar estos quintos con los tres quintos sueltos; eso es obviamente una *suma*.

De manera matemáticamente correcta, podríamos escribir la operación entera así:

$$4\frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{23}{5}$$

Pero no es necesario que los niños lo escriban así. Lo importante es que entiendan en su mente cómo funciona la operación, y que puedan realizar los pasos correctamente.

Practiquen con algunos ejemplos de las tarjetitas, o inventen sus propios ejemplos. Esta vez hagan *primero* el cálculo, y *después* representen el número mixto con el material y comprueben si el cálculo es correcto. Cuando entienden bien como funciona, ya no necesitarán el material, y será suficiente comprobar el resultado según la tarjeta.

Después practiquen con los siguientes ejemplos que ya no podemos representar con el material (¡excepto si tienen *mucho* material!):

$$8\frac{8}{9},\quad 9\frac{3}{10},\quad 5\frac{8}{13},\quad 100\frac{3}{5},\quad 5\frac{3}{100},\quad 12\frac{7}{20},\quad 42\frac{6}{7}$$

(Si han hecho todas las actividades anteriores con el material y con las tarjetitas, estos ejemplos deben ser suficientes. Si no, inventen más.)

Convertir fracciones en números mixtos

Para pensar: Si comenzamos con una fracción impropia, ¿cómo podemos representarla con el material? – Practiquen con unos ejemplos. Pueden inventar sus propios ejemplos, o pueden usar las tarjetitas de la ***Hoja de trabajo 36.1***, usándolas por el lado de la fracción.

Al inicio, los niños lo harán simplemente contando. Por ejemplo para representar $^{20}/_6$, hay que comenzar poniendo enteros. (Ya que tenemos sextos, usamos los círculos donde los sextos están marcados.) Contamos cuántos sextos tenemos, y seguimos aumentando círculos enteros hasta que tengamos suficientes. Después completamos lo que falta con fracciones sueltas.
Si hacen este proceso con varios ejemplos, quizás ya comienzan a descubrir una estrategia de cómo convertir fracciones a números mixtos de manera más eficaz.

Para pensar: Mirando una fracción, ¿cómo puedes decir inmediatamente si contiene enteros o no? ¿Qué propiedad particular tiene una fracción que contiene enteros?
Aplica tu respuesta a las siguientes fracciones: Di si contienen enteros o no. Después verifica tus respuestas con el material.

$$\frac{6}{7},\quad \frac{13}{4},\quad \frac{9}{7},\quad \frac{7}{9},\quad \frac{12}{2},\quad \frac{5}{5},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{20}{3},\quad \frac{3}{1}$$

(***Nota:*** Hasta ahora todavía no nos hemos encontrado con ninguna fracción como la última, con un denominador de 1. Piensen y conversen: ¿Qué significa esto, cuando el denominador es 1?)

Aquellas fracciones de arriba que contienen enteros, escríbanlas también cómo números mixtos.

Ejemplo: $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$

Si todavía no encontraron la operación matemática para hacer esto de manera más eficaz, lo analizaremos ahora.

Queremos saber cuántos enteros hay en $^{13}/_4$. Sabemos que un entero tiene cuatro cuartos. Recuerden las actividades de la Unidad anterior *(35)*: ¿Cuántos cuartos hay entonces en 2 enteros? ¿en 3? ¿en 4? ¿Cuál es la operación matemática que aplicamos para calcular esto?
Lo que estamos haciendo ahora, es *lo inverso* de esa operación. ¿Cuál es entonces la operación que usamos para convertir $^{13}/_4$ en enteros?
Solamente que aquí el resultado no consiste en puros enteros. Puede haber cuartos que sobran. Si hacemos la operación que hemos encontrado, ¿cómo sabemos cuántos cuartos sobran?

(Por si no lo pueden descubrir, la respuesta está en la sección "Principios matemáticos" de esta Unidad.)

Practiquen con más ejemplos de las tarjetitas, o inventen sus propios ejemplos. Esta vez hagan *primero* el cálculo, y *después* representen el número mixto con el material para comprobar si el cálculo es correcto. Cuando entienden bien cómo funciona, ya no necesitarán el material, y será suficiente comprobar el resultado según la tarjeta.

Después practiquen con los siguientes ejemplos:

$$\frac{100}{9},\quad \frac{61}{11},\quad \frac{136}{8},\quad \frac{759}{100},\quad \frac{777}{2},\quad \frac{221}{220},\quad \frac{3893}{10,}\quad \frac{47}{1}$$

(Si han hecho todas las actividades anteriores con el material y con las tarjetitas, estos ejemplos deben ser suficientes. Si no, inventen más.)

Ahora puedes también hacer la *comprobación* de los resultados del ejercicio anterior, de convertir números mixtos en fracciones: Toma las fracciones que obtuviste allí, y conviértelas de regreso a números mixtos. Si calculaste correctamente, debes llegar a los números originales.

Vocabulario matemático

Fracción impropia: Una fracción donde el numerador es igual o mayor que el denominador.
Ejemplo: $\frac{5}{4}$
Se llama así porque se ve como una fracción, pero en realidad contiene enteros.

Número mixto: Un número que consiste en enteros y una fracción.
Ejemplo: $5\frac{3}{8}$
Un número mixto es una fracción impropia, escrita de otra forma.

Ampliaciones

Problemas con números mixtos

1) En el cumpleaños de Zulema, cada niño bebió medio litro de jugo. Había $6\ ^{1}/_{2}$ litros de jugo. ¿Cuántos niños eran?

2) En el cumpleaños de Fabricio, sus padres le permiten invitar a sus amigos a la pollería. Cada uno puede comer $^{1}/_{8}$ de pollo. En total son 19 personas. ¿Cuántos pollos enteros y cuántos octavos hay que pedir?

3) Para viajar de Costa Azul a Cerro Blanco hay que viajar con tres buses. El primer viaje dura $2\ ^{3}/_{4}$ horas, el segundo $^{3}/_{4}$ horas y el tercero $1\ ^{3}/_{4}$ horas. ¿Cuánto tiempo dura el viaje entero?

4) Jaime, Javier y Jorge ayudan a preparar surcos para sembrar verduras. Juntos hicieron 8 surcos. Jaime hizo $1^{2}/_{3}$ surcos, y Javier hizo $2^{2}/_{3}$. ¿Cuántos surcos hizo Jorge?

5) Marta tiene que tomar una medicina, $^{1}/_{4}$ pastilla tres veces al día durante 5 días. ¿A cuántas pastillas equivale eso?

Principios matemáticos

Las conexiones entre las propiedades matemáticas

Muchas propiedades matemáticas están conectadas entre sí por los mismos principios. Por ejemplo, la operación de convertir una fracción en un número mixto es la misma como la división con residuo, porque una fracción es efectivamente una división. *(En la Unidad siguiente (37) profundizaremos este tema.)* Veamos un ejemplo:

$$\frac{13}{4} = 13 \div 4 = 3\,\text{R.}1 = 3\frac{1}{4}$$

(El residuo de 1 que sobra, llega a ser 1/4, porque estamos dividiendo entre 4, o sea, partimos la unidad que sobra en 4 partes.)

Y la conversión de un número mixto en una fracción es lo mismo como la *comprobación del resultado* de una división con residuo. (¿Cómo haríamos la comprobación en el ejemplo arriba?)

Entender estas conexiones es una clave para comprender bien la matemática. Sus principios fundamentales son relativamente pocos, pero tienen muchas aplicaciones. Cuando entendemos que la división con residuo, y las conversiones de los números mixtos, son aplicaciones de un mismo principio, estos temas se vuelven fáciles: "¡Es lo mismo!" No necesitamos aprender cuatro procedimientos distintos y desconectados entre sí; es suficiente comprender un único principio. Esta es la gran ventaja de un aprendizaje de la matemática por principios.

Ayudemos entonces a los niños a ver estas conexiones, y la matemática se volverá fácil y transparente para ellos.

¿A dónde vamos desde aquí?

Se recomienda avanzar con el tema de las fracciones en el orden que presenta el libro, por lo menos hasta la *Unidad 37*. Así se construirá un concepto coherente de lo que son las fracciones.

Unidad 37 - Las fracciones son divisiones

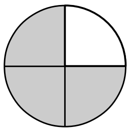
Prerrequisitos:
- Multiplicación y división.
- Concepto de fracción *(Unidad 34)*.

Materiales necesarios:
- Alimentos u otros objetos que se pueden partir: panecillos, manzanas, barras de chocolate, etc.

Para los educadores

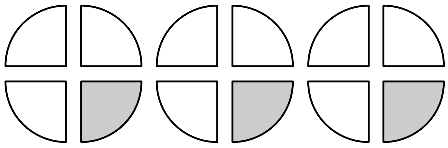
Dos formas de interpretar las fracciones

Esta unidad es corta, pero introduce un principio muy importante. Hasta ahora hemos entendido las fracciones de la siguiente manera: "Para formar $^3/_4$, divide la unidad en 4 partes y coge 3 de ellas." A esto corresponde el siguiente dibujo de "torta":



Esta manera de interpretar las fracciones es práctica para operaciones como la suma y resta de fracciones homogéneas, o la multiplicación de una fracción por un número entero.

Pero con la Unidad anterior hemos preparado el camino hacia una manera distinta de interpretar las fracciones: "Para obtener $^3/_4$, toma *tres* unidades y divídelas por partes iguales entre 4 personas." Entonces el dibujo de "tortas" se ve así:



Como resultado final, tenemos lo mismo como en la primera variante: tres piezas de un cuarto de torta. Pero la segunda interpretación facilita el entendimiento de que una fracción no es otra cosa que una división, escrita de otra manera: 3/4 = 3 ÷ 4.
Esto es práctico para entender la conversión entre fracciones impropias y números mixtos: No es otra cosa que una división con residuo; solamente que ahora sabemos dividir el residuo también.
Esta segunda interpretación será práctica también cuando avanzamos más con las operaciones de multiplicación y división de fracciones.

TALLER

Repartir objetos que se pueden partir

En la *Unidad 34* ya hemos repartido objetos entre varias personas. Hemos visto que si repartimos una manzana entre 4 personas, cada persona recibe $^1/_4$; y si repartimos una torta entre 20 personas, cada una recibe $^1/_{20}$.

Ahora, ¿cómo hacemos para repartir *tres* manzanas entre cuatro personas? – Si intentan pensarlo “matemáticamente”, posiblemente los niños se enredarán con conceptos teóricos que todavía no entienden. Pero hay una manera práctica de entenderlo: Partimos *cada manzana* en 4 partes; entonces a cada persona le toca una parte de cada manzana, o sea 3 partes en total. Eso equivale a $^3/_4$.
Practiquen situaciones similares: Repartir 7 barras de chocolate entre 6 niños; repartir 7 panecillos entre 2 personas, repartir 3 tortitas entre 7 personas, etc.

Después de hacer varios ejemplos de este tipo, analicemos matemáticamente lo que estamos haciendo. Repartir en partes iguales es una división. Entonces, repartir 3 manzanas entre 4 personas equivale a la división 3 ÷ 4. Podemos escribir:

$$3 \div 4 = \frac{3}{4}$$

Y así también con los otros ejemplos que hemos hecho. Efectivamente, una fracción es simplemente una forma diferente de escribir una división. Aun el signo de la división nos hace recordar eso. Obsérvenlo bien: este signo es una fracción en miniatura, donde los puntitos simbolizan el numerador y el denominador.

Así podemos también escribir divisiones "normales":

$$28 \div 7 = \frac{28}{7} = 4$$

Comparen esto con lo que hicimos en la *Unidad 36* al convertir enteros en fracciones, y vice versa. Efectivamente es lo mismo.

En un caso como el de las 7 barras de chocolate entre 6 niños, vemos que no es necesario pedacear todos los chocolatillos. Podemos primero dar a cada niño una barrita entera. Entonces solamente tenemos que partir el último chocolatillo restante (o sea el residuo) en 6 partes. Eso nos da el resultado de la división 7 ÷ 6: Un entero y un sexto. O sea:

$$7 \div 6 \;=\; \frac{7}{6} \;=\; 1\text{R.}1 \;=\; 1\frac{1}{6}$$

Aquí podemos sacar varias conclusiones interesantes. Primeramente vemos que esta es la misma operación como ya la hicimos al convertir fracciones impropias en números mixtos. (Comparen con las actividades de la Unidad anterior.) Pero al mismo tiempo, esta es una división con residuo. Vemos que en vez de dejar el residuo allí no más, podemos dividirlo también, haciendo fracciones. Si la división es entre 6, entonces salen sextos.

En el nivel de Primaria I quedó abierta la pregunta acerca de lo que podemos hacer con el residuo en una división inexacta. Aquí tenemos una primera respuesta a esta pregunta. (Una segunda respuesta encontraremos en la *Unidad 50*, cuando calculemos con decimales.)

Y entendemos ahora que la operación de convertir fracciones impropias en números mixtos, no es otra cosa que una división con residuo.

Ampliaciones

Escribe las siguientes divisiones como fracción y como número mixto:

a) 30 ÷ 7	e) 9567 ÷ 10	i) 6368 ÷ 5
b) 100 ÷ 9	f) 8351 ÷ 100	j) 7043 ÷ 8
c) 268 ÷ 4	g) 2821 ÷ 1000	k) 9231 ÷ 4
d) 13 ÷ 11	h) 457 ÷ 60	l) 7999 ÷ 3

Los ejemplos i) a l) probablemente tendrás que resolver con el procedimiento escrito. Los otros se pueden resolver mentalmente.

Pregunta sin respuesta

¿Dónde se encuentra la otra mitad del medio ambiente?

En una de las Unidades anteriores hicimos la pregunta: ¿Qué significa un denominador de 1 en una fracción? ¿Cuánto es por ejemplo $\frac{15}{1}$?

Ahora debes poder dar una respuesta más clara a esta pregunta.

Principios matemáticos

Vea las explicaciones en la Unidad anterior *(36)*.

¿A dónde vamos desde aquí?

Al terminar esta Unidad, los alumnos deben tener un entendimiento básico de lo que son las fracciones. Si desean, pueden continuar con el tema de las fracciones. Si quieren variar, este puede ser un buen momento para pasar a unos temas de algún otro bloque.

Unidad 38 - Multiplicación y división de fracciones con enteros

Prerrequisitos:

- Números mixtos *(Unidad 36).*
- Entender las fracciones como divisiones *(Unidad 37).*

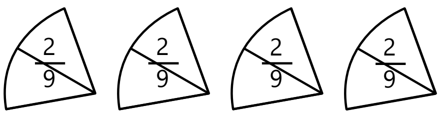
Materiales necesarios:

- Material de fracciones (sectores circulares).
- Material de números mixtos.
- Reloj analógico (con agujas).
- Fracciones de papel o cartulina (para cortarlas en partes más pequeñas).

TALLER

Multiplicar fracciones

¿Cómo multiplicamos fracciones? – Multiplicar es "hacer copias" de algo. Eso funciona con fracciones igual como con números enteros. Por ejemplo $\frac{2}{9} \text{x} 4$: Saquen dos novenos del material de fracciones. Queremos multiplicar eso por 4; o sea, queremos tener 4 copias de lo que tenemos aquí. Tenemos 2 piezas; entonces si las multiplicamos por 4 tenemos 8 piezas. $\frac{2}{9} \text{x} 4 = \frac{8}{9}$.



Otro ejemplo: ¿Cuánto es $\frac{5}{6} \text{x} 5$? Para eso probablemente ya no tenemos suficientes fracciones en el material. Si calculamos la multiplicación, obtenemos $\frac{25}{6}$. Vemos que esta fracción contiene enteros. Podemos representarla con el material de números mixtos. ¿Cuántos enteros y cuántos sextos salen?

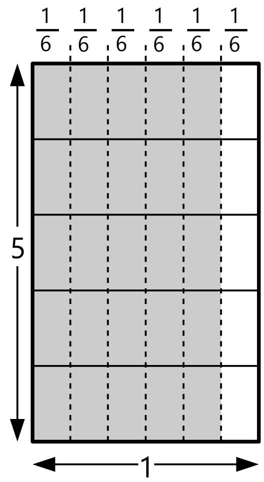
Practiquen con estos otros ejemplos. Representen con el material concreto los que pueden. Intenten resolver directamente los que no pueden representar con material:

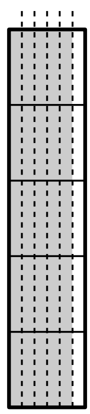
$\frac{3}{4} \text{x} 7$, $3 \text{x} \frac{5}{7}$, $\frac{4}{6} \text{x} 3$, $9 \text{x} \frac{7}{100}$, $\frac{5}{8} \text{x} 8$, $\frac{8}{23} \text{x} 4$.

Representación de la multiplicación como rectángulo

Desde los primeros inicios hemos usado el *rectángulo* como la representación de una multiplicación. *(Vea en Primaria I.)* También al representar multiplicaciones con un material de canje, como las tapas de botellas, hemos visto que esta operación corresponde a un rectángulo.

Podemos hacer lo mismo con las fracciones. Por ejemplo para representar $\frac{5}{6} \text{x} 5$, dibujamos un rectángulo con un lado de 5 y un lado de 1. El lado de 1 lo dividimos en sextos, y coloreamos 5 de ellos en cada unidad. Así tenemos una representación de esta multiplicación. Podemos contar y verificar que el rectángulo sombreado contiene efectivamente 25 sextos.





Nota: En este dibujo, una "unidad" en dirección horizontal es mucho más larga que una "unidad" en dirección vertical. Se hizo así por razones estéticas, porque de otro modo el rectángulo se haría muy largo y delgado. Matemáticamente no hay ningún problema con eso: podemos definir una "unidad" vertical a una escala distinta de la "unidad" horizontal.
Si los niños objetan a eso, o si les causa confusiones, entonces podemos cambiar el dibujo para que la escala sea la misma en horizontal y en vertical *(Dibujo a la izquierda).*

Otra forma de entender las multiplicaciones con fracciones

Hasta ahora hemos entendido las fracciones como partes de una unidad: media manzana; un octavo de un pollo; etc. Pero las fracciones pueden referirse también a un "entero" más grande. A veces usamos expresiones como "la mitad de los niños", o "un tercio de estas nueces". Por ejemplo, si hay 36 nueces, ¿cuánto es "un tercio de 36 nueces"? – ¿O cuánto es "la mitad de 18 niños"?

Podemos introducir este concepto en la vida diaria, cada vez que hay algo que repartir. Quizás tenemos 30 nueces y somos 5 personas: "Cada uno va a recibir un quinto de estas nueces." – Busquen otras situaciones similares y exprésenlas de esta manera.

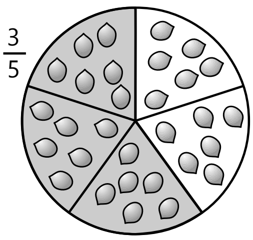
En estas situaciones vemos fácilmente que obtenemos la respuesta *dividiendo*: "Un tercio de 36 nueces" es 36 ÷ 3 = 12. "La mitad de 18 niños" es 18 ÷ 2 = 9.

Pero ¿cuánto es "*tres quintos* de 30 nueces"? – Si hemos repartido las nueces entre 5 personas, ahora cada una tiene un quinto. *Tres* quintos es entonces la cantidad de nueces que tienen 3 personas; o sea, un quinto multiplicado por 3. La operación entera consiste entonces en una multiplicación y una división: Primero dividimos las nueces entre 5, y después multiplicamos el resultado por 3.

$$\frac{3}{5} \text{ de } 30 = 30 \div 5 \times 3 = 6 \times 3 = 18$$

Podemos representarlo en un dibujo como lo conocemos desde las representaciones de fracciones. Pero ahora el círculo entero no representa una unidad; representa 30 nueces:

$\frac{3}{5}$



Si observamos este resultado, descubrimos que es lo mismo como si hubiéramos *multiplicado* tres quintos por 30:

$$\frac{3}{5} \times 30 = \frac{90}{5} = 18$$

Quizás es un poco difícil entender para los niños *por qué* esto es así. Pero no es ningún misterio. Lo podemos explicar usando la conmutatividad de las multiplicaciones y divisiones combinadas; y sabiendo que una división se puede escribir como fracción:

$$\frac{3}{5} \text{ de } 30 = 30 \div 5 \times 3 = 30 \times 3 \div 5 = 30 \times (3 \div 5) = 30 \times \frac{3}{5}$$

Podemos decir entonces:

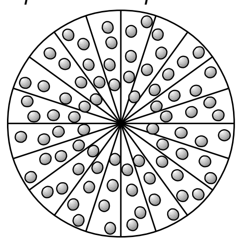
Una fracción "<u>de</u> algo" significa esa fracción <u>multiplicada por</u> "algo".

Vamos a ilustrarlo con otro ejemplo:

En el cumpleaños de Martina hubo una torta decorada con 80 frutitas de mazapán. La torta se partió en 20 tajadas. Suponiendo que las frutitas de mazapán estaban distribuidas de manera igual, ¿cuántas frutitas había en cada tajada? – Si sobraron 3 tajadas, ¿cuántas frutitas de mazapán sobraron?

(Por ahora es una situación ficticia. ¡Pero los niños estarán encantados si preparamos esta torta de verdad para experimentar el buen sabor de la matemática! – Podemos usar otros números para que sea un problema nuevo.)

Podemos dibujarlo de la siguiente manera. La torta entera corresponde ahora a 80:



Podemos calcularlo dividiendo y multiplicando: Cada tajada contiene 80 ÷ 20 = 4 frutitas de mazapán. Entonces 3 tajadas contienen 4 x 3 = 12 frutitas.

Pero podemos interpretarlo también en forma de fracción: 3 tajadas son 3/20 de la torta.

$$\frac{3}{20} \times 80 = \frac{240}{20} = 12$$

En este caso la operación sale un poco más complicada. Si multiplicamos primero, tenemos que calcular con números mayores. Esto nos enseña que una multiplicación con fracciones se puede calcular también *dividiendo primero*. Aquí un ejemplo con otros números:

$$\frac{6}{7} \times 56 = 56 \div 7 \times 6 = 8 \times 6 = 48$$

Pero ojo: Eso funciona solamente si la división es exacta. De otro modo es más práctico multiplicar primero, como lo hemos hecho en la primera actividad de este Taller.

Volviendo a la torta de Martina, podemos notar otra propiedad interesante: Si calculamos con una única tajada, tenemos:

$$\frac{1}{20} \text{ de } 80 = \frac{1}{20} \times 80 = 80 \div 20 = 4$$

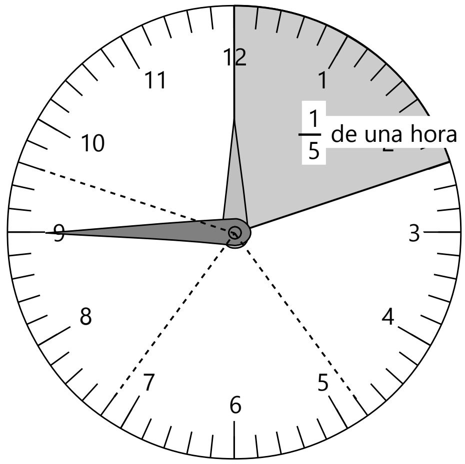
O sea, ¡multiplicar por $^{1}/_{20}$ es lo mismo como dividir entre 20! Recordemos eso para más tarde, porque en una Unidad posterior *(42)* volveremos a este asunto.

Fracciones de una hora

Observen un reloj. El minutero da una vuelta completa en una hora. Podemos representar las fracciones de una hora como fracciones del círculo entero del reloj. Las más usuales son media hora y un cuarto de hora. Esas son fáciles de ver. ¿Cuántos minuto son media hora? ¿un cuarto de hora?

Pero podemos usar también una fracciones menos usuales: ¿Cuántos minutos son un quinto de una hora? ¿un octavo? ¿un noveno? (No todos estos salen con minutos enteros; pero podemos calcularlos igualmente.)

¿A qué hora son las ocho más tres quintos? ¿Las tres menos dos tercios? – Inventen otras formas de decir la hora de manera inusual.



Problemas con fracciones

Si te parece difícil imaginarte la situación, haz un dibujo.

1) Érica tiene ahorrado 84.–. Decide gastar $^{2}/_{7}$ de sus ahorros en un regalo para su abuela. ¿Cuánto costó el regalo?

2) ¿Cuánto de jugo hay en 7 botellas de $^{3}/_{4}$ litros cada una?

3) Para el cumpleaños de María, mamá había comprado tres piñas. $^{1}/_{15}$ piña estaba malograda. Lo que quedó, se repartió en partes iguales entre 11 personas. ¿Cuánto recibió cada uno?

4) Pablo pregunta: "¿Qué hora es?" – "Las tres y tres quintos", responde Germán. ¿Qué hora es esa, dicho de manera normal?

*5) La siguiente vez que Pablo quiere saber la hora, Germán dice: "Las siete menos once sextos". – ¿Qué hora significa eso?

6) El carpintero tiene 216 clavos. Usa $^{1}/_{6}$ de esta cantidad para una mesa y $^{1}/_{9}$ para una silla. ¿Cuántos clavos le quedan?

7) En la fiesta de cumpleaños de Tania había 30 personas. $^{3}/_{5}$ de los presentes eran niñas, y $^{2}/_{15}$ eran personas adultas. ¿Cuántos niños (varones) había?

8) Tres hermanos habían recogido 189 nueces. Primero vino Fran y sacó $^{1}/_{3}$ de las nueces. Después vino Fredy y sacó $^{1}/_{3}$ de lo que había quedado. Más tarde vino Fernando y sacó $^{1}/_{3}$ de lo que estaba allí.
a) ¿Cuántas nueces sobraron?
b) Se quiere repartir las nueces sobrantes de manera equitativa, para que cada hermano tenga $^{1}/_{3}$ del total. ¿Cómo hay que repartir las nueces que sobraron?

*9) Rosa pide a Lisa: "Por favor, dame un cuarto de los caramelos que tienes." Lisa le da a Rosa como pidió, y entonces cada una de las niñas tiene 24 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía Rosa al inicio?

*10) Carlos comienza un trabajo a las 8h y $^{8}/_{15}$, y termina a las 8h y $^{15}/_{8}$. ¿Cuántos minutos trabajó?

*11) Rosmery pregunta: "¿Qué hora es?" – Sandra responde: "Hace siete décimos de una hora fue las 7 y media menos diez." – ¿Puedes decir esta hora de manera normal?

12) ¿Cuántos segundos son $^3/_{16}$ de una hora?

Una pauta general para todos los problemas con fracciones:

Cuando se mencionan fracciones, siempre debemos tener claro a qué se refiere la fracción; o sea, cuál es el "entero". Por ejemplo, cuando dice "7 botellas de $^3/_4$ litros", el "entero" es un litro, $^3/_4$ litros son $^3/_4$ *de un litro*. Pero cuando dice "Hay 7 litros de jugo, $^3/_4$ son jugo de naranja", entonces el "entero" son los 7 litros, y estamos hablando de $^3/_4$ *de 7 litros*.

De manera similar, si dice "Hay 80 caramelos, Gerardo saca $^1/_4$ y Germán saca $^1/_4$", no es lo mismo como cuando dice "Gerardo saca $^1/_4$, y Germán saca $^1/_4$ *de lo que sobra*". En el primer caso, ambas fracciones se refieren a los 80 caramelos ($^1/_4$ *de 80*); o sea, ambos chicos se sacan 20 caramelos. Pero en el segundo caso, solamente la primera fracción se refiere a los 80. Cuando llegamos a la segunda fracción, "el entero" es la cantidad que sobra después de quitar la porción de Gerardo, o sea 80 – 20 = 60. Entonces en este caso, Germán recibe solamente $^1/_4$ *de 60*, o sea 15 caramelos.

Para pensar: Observa las siguientes multiplicaciones y sus resultados, si se convierten en enteros:

$\frac{3}{7} \times 7, \quad 12 \times \frac{5}{12}, \quad \frac{8}{9} \times 9, \quad 100 \times \frac{13}{100}$

¿Qué observas? ¿Por qué sucede eso?

Multiplicación de números mixtos

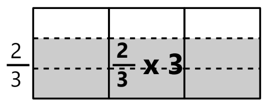
Ya sabemos multiplicar fracciones. Ahora, ¿cómo multiplicamos números mixtos? ¿Cómo calculamos por ejemplo $2\frac{2}{3} \times 3$?

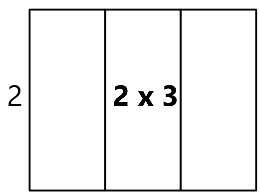
Representa $2\frac{2}{3}$ con el material de números mixtos. Después pon tres veces esta cantidad. Tenemos 6 enteros y 6 tercios sueltos. Estos tercios podemos canjear por 2 enteros, y tenemos un total de 8 enteros. El resultado es 8.

Si escribimos lo que hemos hecho, vemos que hemos aplicado la ley distributiva:

$$\left(2 + \frac{2}{3}\right) \times 3 = 2 \times 3 + \frac{2}{3} \times 3 = 6 + \frac{6}{3} = 8$$

Podemos ilustrarlo de la siguiente manera:





La misma multiplicación se puede resolver también de otra forma. Si quieres representar eso con el material, necesitarás muchas fracciones sueltas. Podemos primero canjear todos los enteros en fracciones; entonces tenemos una multiplicación de una fracción como ya lo hemos hecho antes. Al fin podemos canjear todo de regreso a enteros:

$$2\frac{2}{3} \times 3 = \frac{8}{3} \times 3 = \frac{24}{3} = 8$$

Toda multiplicación de números mixtos se puede resolver de ambas maneras. Tú decides cuál te parece más práctica.

Unos ejemplos para practicar:

1. $9\frac{2}{5} \times 8$
2. $333\frac{1}{3} \times 3$
3. $545\frac{1}{4} \times 12$
4. $277\frac{40}{53} \times 4$
5. $32\frac{47}{100} \times 100$
6. $19\frac{3}{7} \times 40$

7) El chofer Martín maneja un bus en la ruta de San Más a San Menos. Un viaje dura 1 $^3/_4$ horas. Cada día, Martín maneja dos veces de ida y de regreso. Por hora de manejo le pagan 13.–. ¿Cuánto gana al día?

8) Manuela camina 4 $^4/_5$ km en una hora. Un día hizo una caminata de seis horas. ¿Cuán lejos llegó?

9) Un bidón de aceite pesa 3 $^2/_7$ kg. Se quieren transportar 600 de estos bidones en una camioneta con una capacidad de 2 t. ¿Alcanza la capacidad de la camioneta para esta carga?

División de fracciones

En la división de fracciones podemos encontrar dos situaciones: una que es fácil de entender, y otra que es un poco más difícil.

Comenzamos con un ejemplo fácil: $\frac{8}{9} \div 4$

Pon 8 novenos del material de fracciones sobre la mesa. Divídelos en 4 partes iguales. Cada parte contiene 2 novenos. Entonces $\frac{8}{9} \div 4 = \frac{2}{9}$.

Hagan algunos otros ejemplos de esta clase.

Lo mismo puede funcionar con números mixtos, si convertimos los enteros en fracciones sueltas. Si tienen suficientes fracciones sueltas, pueden representar el siguiente ejemplo con el material:

$$2\frac{1}{4} \div 3 = \frac{9}{4} \div 3 = \frac{3}{4}.$$

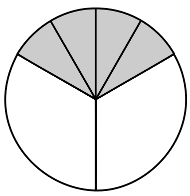
Inventen otros ejemplos similares con el material. Cuando ya pueden hacerlo sin el material, practiquen los siguientes:

1. $6\frac{2}{9} \div 8$ 2. $31\frac{1}{2} \div 9$ 3. $3\frac{43}{100} \div 7$
4. $3\frac{17}{20} \div 11$ 5. $221\frac{3}{7} \div 50$ 6. $2\frac{178}{253} \div 6$

Pero esto funciona solamente cuando podemos dividir las partes exactamente. ¿Qué hacemos cuando queda un "residuo de fracciones"?

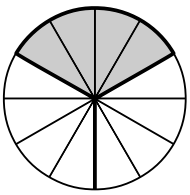
Para hacer los siguientes ejemplos, tendrán que preparar algunas fracciones de papel o cartulina, porque vamos a cortarlas en piezas más pequeñas. Veamos esta división:

$$\frac{1}{3} \div 4$$

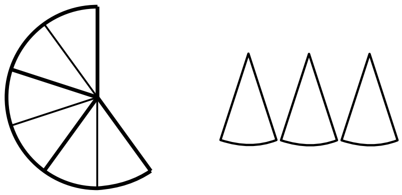


Dividir entre 4 significa hacer 4 partes iguales. Tomamos entonces un tercio, y lo cortamos en 4 partes iguales. ¿A cuánto equivale ahora una de estas piezas pequeñas?

Para encontrar la respuesta, tenemos que imaginarnos (o representar con material) el círculo entero lleno de partes como estas. El círculo entero tiene 3 tercios. Si cada uno de estos se corta en 4 partes, ¿cuántas partes tiene el círculo entero?



Hagamos otro ejemplo similar: $\frac{3}{5} \div 2$ – Alistamos 3 quintos, y cortamos cada uno en 2 partes iguales. Ahora podemos repartir lo que tenemos en 2 partes iguales. Cada parte contiene 3 piezas; ¿y cuánto vale cada pieza? Usen el mismo razonamiento como en el ejemplo anterior.



Hagan algunos otros ejemplos:

$\frac{1}{4} \div 4$, $\frac{5}{6} \div 2$, $\frac{3}{4} \div 3$, $\frac{2}{3} \div 5$, $\frac{2}{3} \div 7$.

Anoten estas operaciones y sus resultados con números. Observen lo que pasa con los números. ¿Encuentren una regla cómo calcular estas divisiones sin el material? ¿Y pueden explicar ***por qué*** esta regla funciona?

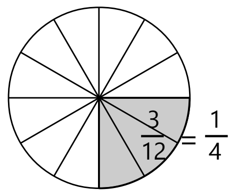
Apliquen su regla a las siguientes divisiones:

7. $\frac{3}{11} \div 5$ 8. $\frac{7}{8} \div 9$ 9. $\frac{13}{20} \div 5$
10. $3\frac{1}{4} \div 8$ 11. $5\frac{5}{6} \div 6$ 12. $4\frac{2}{5} \div 7$

Ahora nos puede parecer que existen "dos clases distintas" de divisiones de fracciones: las exactas y las inexactas. Pero en realidad podríamos calcular las divisiones exactas también según el segundo método. Comparemos un ejemplo según ambos métodos:

$$\frac{3}{4} \div 3 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$$



Parece que los resultados no son iguales: Con el primer método sale $^1/_4$, con el segundo método sale $^3/_{12}$. Pero representemos ambas fracciones con el material, y comparemos: Vemos que $^3/_{12}$ tiene exactamente el mismo tamaño como $^1/_4$.

Aquí descubrimos que una misma fracción se puede escribir con números de distintas maneras. Este tema exploraremos en la siguiente Unidad.

Más problemas con fracciones:

1) Una tela de $3\,^{1}/_{5}$ m de largo se cortó en cuatro pedazos de la misma longitud. ¿Cuántos metros midió cada pedazo?

2) Juana tiene 135.–. Regala $^{1}/_{10}$ de lo que tiene a una vecina enferma. ¿Cuánto dinero le queda?

3) Joaquín se comprometió a hacer un trabajo, por un sueldo de 7800.–. Pero cuando le faltó todavía $^{1}/_{12}$ del trabajo, tuvo que dejarlo. ¿Qué sueldo le corresponde?

4) Antonio invierte 3500.– en un negocio. Sus ingresos son $^{19}/_{14}$ de la inversión. ¿Cuánto es su ganancia?

5) Un balde lleno de agua pesa 15 kg. Si el balde se llena solamente hasta la mitad de su capacidad, pesa $8\,^{1}/_{2}$ kg. ¿Cuánto pesa el balde vacío?

*6) Ana y Berta tienen 72 uvas. Las reparten de manera que Ana recibe $^{1}/_{3}$ de lo que recibe Berta. ¿Cuántas uvas recibe Ana?

*7) Los niños preparan una masa de galletas y cortan galletas con un molde redondo. Obtienen 32 galletas, y $^{1}/_{4}$ de la masa sobra. Si siguen trabajando con la masa sobrante, ¿cuántas galletas adicionales pueden producir?

*8) El señor Astete dejó como herencia 84'000.– a sus tres hijos. En su testamento definió que Alberto recibiese la mitad de lo que recibe Alfredo, y Alfredo la mitad de lo que recibe Aldair. ¿Cuánto recibe cada uno de ellos?

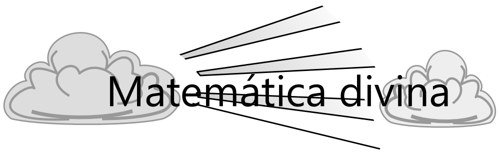
Nota: ¡Cuidado con conclusiones equivocadas!

Si en el problema no.4 te salió 4750.–, entonces tienes que averiguar qué significa "ganancia".

Si en el problema no.6 llegaste a 24 uvas, entonces no leíste bien la pregunta.

Si en el problema no.7 tu respuesta es 8 galletas, entonces hay una circunstancia que no has tomado en cuenta.

(Pautas adicionales en el Anexo A.)



Impuestos justos

Desde tiempos muy antiguos, los impuestos, multas, y otras contribuciones se expresan como “una fracción de” los ingresos de las personas. Así por ejemplo en el antiguo Israel, se daba 1/10 de las cosechas para el mantenimiento de los levitas, quienes no tenían tierras propias.
(Ese 1/10 no es ningún “número sagrado” que tuviera que aplicarse en otras circunstancias y naciones. Mas bien tiene una relación matemática con el hecho de que los levitas constituían 1/12 de la población. Más sobre eso en el tomo aparte, “Matemática divina”.)

Según la ley de Moisés, un ladrón tenía que restituir el monto que robó, y añadirle 1/5 del valor. (Levítico 6:1-5). Eso no fue una “multa” para el gobierno, sino una indemnización a la persona a quien dañó.

En todos estos casos, aplicar un monto fijo no sería justo: sería una carga demasiado pesada para los pobres, y un monto muy pequeño en comparación con las posibilidades de los ricos. Es más justo, cobrar una fracción determinada de los ingresos o ganancias.

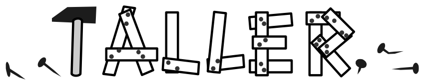
Unidad 39 - Fracciones equivalentes; amplificar y simplificar

Prerrequisitos:

- Concepto de fracción.
- Divisores comunes; MCD *(Unidad 17)*.

Materiales necesarios:

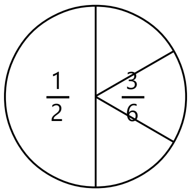
- Material de fracciones (sectores de círculos), de preferencia hasta $\frac{1}{12}$ o más allá.



Círculos de dos colores

Con el material de fracciones (sectores circulares) formen círculos con piezas de ***dos*** colores diferentes. Dibujen algunos de estos círculos, y anoten las sumas correspondientes.

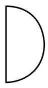
Ejemplo: $\frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 1$



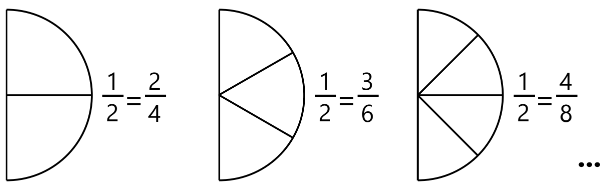
Observen cuáles combinaciones funcionan y cuáles no. (¿Pueden combinar tercios con cuartos? – ¿Tercios con sextos? – ¿Cuartos con sextos? – etc.)
Tomen suficiente tiempo para probar diversas combinaciones, y dibujen o anoten las que "funcionan".

¿Pueden descubrir qué tienen en común las combinaciones que funcionan? (Esta pregunta es quizás un poco difícil en este momento. Pero podrán descubrir la respuesta en el transcurso de las actividades que siguen.)

Combinaciones del mismo tamaño

Intenten formar $\frac{1}{2}$ =  con otras fracciones, pero todas iguales. O sea, pongan sobre la mesa una pieza de $^1/_2$, y después pongan sobre esta pieza por ejemplo unas piezas de $^1/_6$. ¿Pueden acomodarlas de tal manera que tengan juntas el mismo tamaño como la pieza de $^1/_2$? ¿Cuántas piezas de $^1/_6$ necesitan para eso?

¿Pueden formar $^1/_2$ con tercios? ¿Con cuartos? ¿Con quintos? etc. – ¿Cuáles combinaciones funcionan, cuáles no? – Dibujen y escriban.



En el transcurso de esta actividad podemos introducir informalmente la expresión "fracciones equivalentes". Por ejemplo: "Sí, con 3 piezas de $^1/_6$ podemos formar $^1/_2$. $^3/_6$ son equivalentes a $^1/_2$."

Después hagan lo mismo con una pieza de $\frac{1}{3}$.

Prueben si pueden hacer coincidir piezas de cuartos, de quintos, de sextos, etc, con el tamaño de 1/3. Aquí también, dibujen y escriban las combinaciones que funcionan.

Después hagan el mismo experimento con una pieza de $\frac{1}{4}$, y si tienen perseverancia, también con una pieza de $\frac{1}{5}$.

¿Descubren una ley de cómo convertir fracciones? – Anoten lo que encuentran.

(Tomen un tiempo para investigar, reflexionar y conversar acerca de estos asuntos, antes de pasar a las actividades siguientes.)

Hagan ahora lo mismo con unas fracciones que tienen un numerador mayor a 1. Por ejemplo, pongan sobre la mesa *dos* piezas de $\frac{1}{3}$. ¿Con cuáles fracciones más pequeñas pueden formar esta misma figura? – Dibujen y escriban los resultados.

Hagan lo mismo con $\frac{3}{4}$. (Con $\frac{2}{4}$ no necesitamos probar, porque ya hemos encontrado que eso es equivalente a $^1/_2$, entonces ya conocemos estas igualdades.)

Reflexionen y conversen también acerca de estos últimos experimentos: ¿Encuentran una regla fácil de cómo podemos convertir una fracción en otra equivalente?

(En las actividades siguientes se descubrirán las respuestas. Pero demos primero un tiempo a los niños para que lo piensen, quizás lo descubren por sí mismos.)

Amplificar fracciones

Analicemos los resultados de nuestros experimentos. Si han completado los experimentos del Taller, entonces deben tener ahora una lista de igualdades como las siguientes:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \dots$$
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots$$
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \dots$$
$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \dots$$
$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \dots$$

etc.

Probablemente ya descubrieron que los denominadores en la primera fila forman la tabla del 2, los de la segunda fila la tabla del 3, y así sucesivamente. O sea, para que una fracción combine con $^1/_2$, su denominador tiene que ser un múltiplo de 2. Para que combine con $^1/_3$, su denominador tiene que ser un múltiplo de 3. Etc.

Si observamos los numeradores, vemos allí la misma ley: Si el numerador es 1, los numeradores de esa fila siguen la tabla del 1. Para un numerador de 2 es la tabla del 2, y para un numerador de 3 es la tabla del 3.

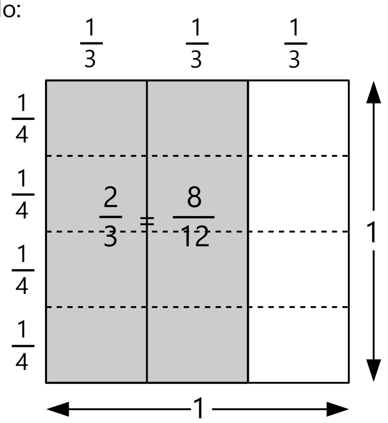
De ahí ya podemos asumir que la regla general para convertir fracciones tiene algo que ver con la multiplicación. Comparemos ahora una igualdad entre dos fracciones que no se siguen inmediatamente en la lista. Por ejemplo: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$. Construyan otra vez esta igualdad con el material y observen: Es como si hubiéramos partido cada tercio en 4 partes iguales. Por eso, el número de las partes (el numerador) se ha cuadruplicado. Pero también el denominador se ha cuadruplicado, porque las partes son ahora más pequeñas, por eso caben más de ellas en un entero. Entonces conseguimos una fracción equivalente si *multiplicamos el numerador y el denominador por el mismo número*. O sea, tenemos que hacer pasar el numerador y el denominador por la misma "máquina".

Podemos anotarlo de esta manera:

$$\begin{array}{ccc} & \overset{x4}{\longrightarrow} & \\ \dfrac{2}{3} & = & \dfrac{8}{12} \\ & \underset{x4}{\longrightarrow} & \end{array}$$

Llamamos a esto "*amplificar*" una fracción. Hemos amplificado la fracción $^2/_3$, porque la hemos escrito con números más "amplios", o sea más grandes.

Podemos ilustrar esta misma operación con la imagen de un rectángulo:



El rectángulo grande corresponde a un entero. Las franjas verticales corresponden a los tercios. Si partimos todo en cuatro partes iguales (con las líneas horizontales), entonces tenemos un total de 12 partes en el entero. Por eso, cada rectángulo pequeño vale $^1/_{12}$, y 8 de estos rectángulos pequeños están dentro de los dos tercios.

Ahora lo escribimos

Hagamos ahora unos ejemplos que no podemos representar con el material. Por ejemplo, queremos amplificar $\frac{4}{9}$. Si hacemos 2 partes de cada noveno, ¿cuántas partes tendremos? ¿Y cómo se llaman estas partes? (¿Cuántas de ellas formarían un entero?) – ¿Y si hacemos 3, 4, 5, ... partes de cada noveno?

Para descubrirlo, pueden usar un dibujo de rectángulo como arriba, si eso les ayuda. O quizás ya pueden calcularlo directamente, anotando las operaciones paralelas:

$$\begin{array}{ccc} & \overset{x5}{\longrightarrow} & \\ \dfrac{4}{9} & = & \dfrac{¿?}{¿?} \\ & \longrightarrow & \end{array}$$

Otro ejemplo: Queremos convertir $\frac{7}{10}$ en cincuentavos. Aquí no podemos elegir libremente con cuánto queremos amplificar. Tenemos que descubrir la operación necesaria: ¿Con cuánto tenemos que multiplicar para llegar de 10 a 50? Podemos anotarlo así:

$$\begin{array}{ccc} & \longrightarrow & \\ \dfrac{7}{10} & = & \dfrac{¿?}{50} \\ & \underset{x¿?}{\longrightarrow} & \end{array}$$

Más ejemplos para copiar y practicar:

Que cada niño haga tantos ejemplos como necesita para entender y poder aplicar el principio. Si estos ejemplos no son suficientes, entonces el niño no ha hecho suficientes actividades con el material concreto, o no tiene todavía la madurez mental necesaria para comprenderlo. En este caso, que haga más experiencias con el material concreto; o que espere con este tema hasta más tarde.

a. $\frac{5}{8} = \frac{\square}{32}$	e. $\frac{5}{6} = \frac{45}{\square}$	i. $\frac{31}{40} = \frac{\square}{160}$
b. $\frac{2}{7} = \frac{\square}{77}$	f. $\frac{4}{13} = \frac{24}{\square}$	j. $\frac{2}{195} = \frac{12}{\square}$.
c. $\frac{5}{3} = \frac{\square}{27}$	g. $\frac{12}{17} = \frac{60}{\square}$	k. $\frac{8}{9} = \frac{216}{\square}$
d. $\frac{7}{12} = \frac{\square}{84}$	h. $\frac{10}{9} = \frac{120}{\square}$	l. $\frac{999}{1000} = \frac{\square}{6000}$

Simplificar fracciones

Volvamos a observar nuestra igualdad $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$. Si desean, pueden construirla otra vez con el material. Arriba lo hemos anotado así:

$$\frac{2}{3} \xrightarrow{\times 4} \frac{8}{12} \qquad (2 \xrightarrow{x4} 8,\ 3 \xrightarrow{x4} 12)$$

$$\frac{2}{3} \underset{¿?}{\overset{x4}{\rightleftarrows}} \frac{8}{12}$$

Pero recordamos que podemos hacer correr las "máquinas" también en el sentido opuesto; o sea, invertir la operación. ¿A qué operación corresponde eso?

Esta es la operación que tenemos que aplicar para convertir $\frac{8}{12}$ en $\frac{2}{3}$. A eso lo llamamos "*simplificar*", porque escribimos $^8/_{12}$ con números más simples, o sea más pequeños. Es lo mismo como amplificar, solamente que usamos divisiones en vez de multiplicaciones.

Unos ejemplos para copiar y practicar:

Que cada niño haga tantos ejemplos como necesita para entender y poder aplicar el principio. Vea la nota arriba en los ejemplos para amplificar.

a. $\frac{30}{42} = \frac{\square}{7}$	e. $\frac{56}{98} = \frac{4}{\square}$	i. $\frac{13}{78} = \frac{\square}{6}$.
b. $\frac{45}{81} = \frac{\square}{9}$	f. $\frac{62}{68} = \frac{31}{\square}$	j. $\frac{68}{119} = \frac{4}{\square}$.
c. $\frac{64}{88} = \frac{\square}{11}$	g. $\frac{300}{800} = \frac{3}{\square}$	k. $\frac{327}{561} = \frac{109}{\square}$
d. $\frac{60}{108} = \frac{\square}{9}$	h. $\frac{400}{568} = \frac{50}{\square}$	l. $\frac{413}{826} = \frac{\square}{2}$.

Y unos ejemplos mixtos donde tienes que descubrir si hay que amplificar o simplificar:

a. $\frac{36}{87} = \frac{\square}{29}$	e. $\frac{7}{20} = \frac{24}{\square}$
i. $\frac{11}{600} = \frac{\square}{4800}$	b. $\frac{12}{144} = \frac{\square}{12}$
f. $\frac{15}{34} = \frac{60}{\square}$	j. $\frac{72}{104} = \frac{8}{\square}$
c. $\frac{17}{20} = \frac{\square}{100}$	g. $\frac{250}{900} = \frac{50}{\square}$
k. $\frac{3}{4} = \frac{324}{\square}$	d. $\frac{37}{90} = \frac{\square}{90}$
h. $\frac{74}{111} = \frac{9}{\square}$	l. $\frac{6}{10} = \frac{\square}{6270}$

Ojo: *Tres de los ejemplos arriba son "imposibles", o sea que no se pueden resolver con números enteros. Los niños deberán descubrir eso por sí mismos. Quizás unos niños querrán escribir algo como esto:*

$$\frac{7}{12} \xrightarrow{\div 6} \frac{\frac{7}{6}}{2}$$

La igualdad es matemáticamente correcta. Pero así no hemos "simplificado" nada, porque hemos convertido la fracción en una expresión más complicada: una fracción doble. Para que la fracción sea realmente simplificada, el numerador y el denominador de la nueva fracción deben ser números enteros.

Simplificar "hasta que ya no se puede más"

Simplificar fracciones es útil cuando tenemos fracciones con números grandes, y descubrimos que se pueden convertir en fracciones equivalentes con números más pequeños. Es complicado calcular con una fracción como $\frac{4995}{5550}$. Pero si descubrimos que 4995 y 5550 son ambos múltiplos de 555, entonces podemos simplificar, y vemos que nuestra fracción es equivalente a $\frac{9}{10}$. ¡Calcular con esta nueva fracción es mucho más fácil!

Este proceso de simplificar es difícil de representar con material concreto. Tenemos que volver a nuestros conocimientos acerca de los divisores y números primos *(Unidades 14 a 17)*. Podemos dar a los niños primero unos ejemplos sencillos y dejar que ellos mismos descubran cómo simplificarlos. A diferencia de las actividades anteriores, ahora ya no hay ninguna pauta acerca del numerador o denominador de la fracción simplificada. Los niños tienen que descubrir por sí mismos de qué manera se puede simplificar:

a. $\frac{8}{10} = \frac{\square}{\square}$ b. $\frac{20}{35} = \frac{\square}{\square}$ c. $\frac{11}{33} = \frac{\square}{\square}$

d. $\frac{18}{30} = \frac{\square}{\square}$ e. $\frac{40}{60} = \frac{\square}{\square}$ f. $\frac{45}{75} = \frac{\square}{\square}$

Las fracciones de la primera línea (a, b, c) permiten una sola manera de simplificar. Posiblemente los niños descubrirán pronto que tenemos que encontrar un *divisor común* del numerador y denominador, para poder dividir ambos entre el mismo número.

Las fracciones de la segunda línea pueden simplificarse de varias maneras. Por ejemplo en d), un niño podría decir que el resultado es $\frac{9}{15}$, dividiendo numerador y denominador entre 2. Otro niño puede decir que es $\frac{6}{10}$, dividiendo ambos entre 3. Y otro puede decir que es $\frac{3}{5}$, porque dividió ambos entre 6. Podemos darles tiempo hasta que descubran estas tres posibilidades, y después analizar y compararlas: Los tres resultados son correctos; son formas simplificadas de $\frac{18}{30}$. Pero una de ellas es "más simplificada" que las otras: la que tiene los números más pequeños. Pueden explorar las siguientes preguntas:

- Si tengo un resultado "parcialmente simplificado", ¿cómo puedo desde allí llegar al resultado "completamente simplificado"?

- ¿Hay una manera de encontrar desde el inicio directamente la forma "más simplificada"?

Podemos investigar las mismas preguntas para los ejemplos e) y f). Allí también podemos encontrar resultados "parcialmente simplificados", y un resultado que es "más simplificado" que todos los otros.

Diferentes formas de anotar el proceso de simplificar

Exploraremos ahora unas formas de anotar *sistemáticamente* este proceso de simplificar una fracción "hasta que ya no se puede más". Podemos presentar todas las alternativas, y después dejar que cada niño decida cuál procedimiento prefiere usar. O quizás un niño inventa su propio procedimiento.

A) El procedimiento escolar: Tachar y corregir sucesivamente.

En esta forma se dividen numerador y denominador por cualquier divisor común que se puede encontrar, y los números se reemplazan por los resultados de las divisiones. Se continúa así hasta que ya no se puede encontrar ningún divisor común:

$$\frac{\overset{7}{\overset{\cancel{21}}{\cancel{84}}}}{\underset{10}{\underset{\cancel{30}}{\cancel{120}}}}$$

Una ventaja de este procedimiento consiste en que es bastante rápido, y no requiere mucho trabajo escrito. Pero tiene la desventaja de que fácilmente pueden suceder errores por desconcentración; y una vez que sucedió un tal error, es difícil de detectar y enmendar. Por ejemplo, un niño divide el numerador entre 2, pero después se confunde y divide el denominador entre 3. O un niño divide el denominador, y después se olvida de dividir también el numerador. Cuando hay varias divisiones sucesivas, estos errores son difíciles de encontrar después de que todo ya está escrito.

Una variante más transparente, pero más trabajosa consiste en anotar los resultados de las divisiones sucesivas en orden:

$$\frac{84}{120} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

Niños que dificultan mucho en entender las operaciones o en mantener el orden, pueden anotar adicionalmente las "máquinas de división" que están usando. Esto da más trabajo, pero puede ayudar a evitar errores:

$$\frac{84}{120} \underset{\div 4}{\overset{\div 4}{=}} \frac{21}{30} \underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}} \frac{7}{10}$$

Nota: *Algunos profesores y libros escolares insisten en que se deba dividir solamente entre factores primos, y en orden: primero entre 2, después entre 3, después entre 5, etc. Eso permite resolver las operaciones de manera rutinaria, pero introduce complicaciones innecesarias. Por ejemplo, si podemos ver a primera vista que el numerador y el denominador son ambos múltiplos de 100, ¿para qué hacerse el trabajo de dividir primero entre 2, después otra vez entre 2, después entre 5, y otra vez entre 5? Podemos directamente dividir ambos entre 100.*
Así también en el ejemplo arriba, un niño que conoce la tabla del 12 podrá dividir directamente entre 12.

B) Anotando factores primos.

El numerador y el denominador se descomponen en factores primos, y después se eliminan los factores iguales entre sí. – Si introducimos este procedimiento, tendremos que explicar que "tachar" un factor en una multiplicación equivale a dividir entre ese factor, porque la división es la operación inversa de la multiplicación. Por ejemplo 2 x 3 x 5 = 30; si tacho el 2 tengo 3 x 5 = 15, eso es 30 ÷ 2.

$$\frac{84}{120} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times 7}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2\times\cancel{3}\times 5} = \frac{7}{10}$$

Este procedimiento muestra de manera transparente los principios matemáticos detrás del proceso de simplificar. Pero requiere un trabajo en exceso, porque muchas fracciones se pueden simplificar sin conocer sus factorizaciones completas. Como mencionamos arriba, si hay por ejemplo un divisor común de 100, no hay necesidad de descomponer eso en 2 x 2 x 5 x 5.

C) Calculando el MCD.

En el transcurso de estas actividades, quizás unos niños ya descubrieron que simplificar "completamente" significa dividir el numerador y el denominador entre su MCD. Por eso podemos simplificar una fracción, usando cualquiera de los procedimientos que hemos usado para calcular el MCD *(vea Unidad 17)*.

Si comparamos el proceso de calcular el MCD con el proceso de simplificar una fracción, vemos que en esencia es efectivamente *lo mismo*. Veamos por ejemplo esta tabla para calcular el MCD de 84 y 120:

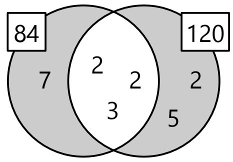
84	120	2
42	60	2
21	30	3
7	10	

$$\frac{\overset{\overset{\overset{7}{\cancel{21}}}{\cancel{42}}}{\cancel{84}}}{\underset{\underset{\underset{10}{\cancel{30}}}{\cancel{60}}}{\cancel{120}}}$$

Comparemos esto con el procedimiento A) arriba, en su forma más detallada:

Es exactamente lo mismo, solamente que hemos escrito los números según un arreglo diferente. En la tabla de calcular el MCD, aparecen en la última línea el numerador y el denominador de la fracción simplificada.

Lo mismo vemos si representamos los factores en un diagrama de Venn: Los factores que "sobran" por ambos lados son los que pertenecen a la fracción simplificada.



Con esta observación podemos sacar una conclusión adicional: Recordamos que al calcular el MCD hemos terminado cuando los números "sobrantes" son PESI. Pero estos "números sobrantes" son los que forman nuestra fracción simplificada. Por tanto:

Una fracción que no se puede simplificar más, es una fracción donde su numerador y denominador son PESI.

Llamamos una tal fracción "completamente simplificada" una ***fracción irreductible***.

Vocabulario matemático

Fracción equivalente: Una fracción que es igual a otra fracción, aunque esté escrita con otros números.

Ejemplo: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{3}{6}$ es equivalente a $\frac{1}{2}$.

Amplificar: Convertir una fracción en otra equivalente con números mayores.
(Método: Multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número.)

Simplificar: Convertir una fracción en otra equivalente con números menores.
(Método: Dividir el numerador y el denominador entre el mismo número.)

Fracción irreductible: Una fracción que no se puede simplificar más. O sea, su numerador y denominador son PESI.

¿Qué pasa cuando al simplificar no queda "nada"?

Rosa ha simplificado de esta manera (aquí anotado con el método de factorización):

$$\frac{15}{60} = \frac{\cancel{3}\times\cancel{5}}{2\times 2\times\cancel{3}\times\cancel{5}} = \frac{0}{4}$$

Con el método de "tachar y remplazar" se ve como a la derecha:

$$\frac{\overset{\cancel{5}}{\cancel{15}}}{\underset{\underset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{60}}}$$

Analiza este resultado: ¿Es razonable? ¿A cuánto equivale $^{0}/_{4}$? ¿Puede eso ser igual a $^{15}/_{60}$? ¿Qué ha ido mal? ¿Cuál es el resultado correcto? ¿Cómo explicarías a Rosa tu razonamiento?

Practicamos simplificar fracciones

Será necesario practicar este proceso con suficientes ejemplos. Que cada niño practique tanto como necesita hasta estar bien seguro en ello. Si hay niños que dificultan mucho en comprenderlo, quizás tendrán que profundizar primero los temas de divisores y factores primos *(Unidades 14 a 17)*.

La serie "Muy difícil" está marcada con una estrella. Estas fracciones son un desafío opcional para aquellos niños que tienen capacidades matemáticas sobresalientes, y/o les gusta factorizar.

Fáciles:

a. $\frac{20}{36}$ b. $\frac{28}{49}$ c. $\frac{8}{72}$ d. $\frac{99}{77}$ e. $\frac{25}{25}$

f. $\frac{48}{60}$ g. $\frac{120}{10}$ h. $\frac{36}{90}$ i. $\frac{25}{50}$ j. $\frac{42}{56}$

Medianos:

a. $\frac{72}{132}$ b. $\frac{126}{162}$ c. $\frac{135}{105}$ d. $\frac{23}{46}$ e. $\frac{31}{93}$

f. $\frac{700}{1200}$ g. $\frac{128}{192}$ h. $\frac{75}{125}$ i. $\frac{216}{288}$ j. $\frac{500}{625}$

Difíciles:

a. $\frac{26}{39}$ b. $\frac{49}{343}$ c. $\frac{241}{482}$ d. $\frac{11}{2310}$ e. $\frac{51}{85}$

f. $\frac{141}{291}$ g. $\frac{91}{187}$ h. $\frac{575}{736}$ i. $\frac{29}{377}$ j. $\frac{259}{999}$

*** Muy difíciles** – ¡para "expertos"!

a. $\frac{308}{1001}$ b. $\frac{847}{1331}$ c. $\frac{289}{803}$ d. $\frac{327}{763}$

e. $\frac{221}{1717}$ f. $\frac{403}{481}$ g. $\frac{127}{1651}$ h. $\frac{1207}{1633}$

Nota: En cada una de las series "difíciles" y "muy difíciles" hay exactamente una fracción que no se puede simplificar.
El *Anexo A* contiene unas pautas para resolver estos ejercicios más fácilmente. Pero inténtenlo primero sin consultar las pautas.
También hay pautas acerca de la pregunta anterior: ¿Qué pasa cuando al simplificar no queda "nada"?

Principios matemáticos

Más conexiones entre diferentes temas matemáticos

En las últimas actividades de esta Unidad hemos señalado cómo el proceso de simplificar fracciones está relacionado con el tema de la factorización en números primos, el MCD, y los números PESI. Es importante señalar a los niños estas conexiones, para que vean cómo diferentes temas están relacionados entre sí por los mismos principios básicos. Explorar estas interrelaciones no solamente es un desafío a razonar; también simplifica (¡!) la matemática: No hay necesidad de aprender el cálculo del MCD y la simplificación de fracciones como dos procesos separados; se puede aprender como uno solo.

Si los niños ya conocen el concepto de la *proporcionalidad (Unidad 20)*, entonces podemos investigar allí otra conexión: ***En fracciones equivalentes, el numerador y el denominador se encuentran siempre en la misma proporción.*** Y vice versa: Si en dos fracciones sus numeradores y denominadores son directamente proporcionales unos a otros, entonces las fracciones son equivalentes. Por ejemplo:

$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ porque en ambas fracciones, la proporción entre numerador y denominador es de 2 : 3. En las actividades de amplificar y simplificar fracciones hemos usado el esquema de las "máquinas paralelas". Es este mismo esquema que hemos usado también en el tema de la proporcionalidad directa.

Entender esta relación puede ayudar a simplificar ciertas fracciones que de otro modo son difíciles de "entender". Por ejemplo $\frac{347}{694}$: Si nos ponemos a factorizar 347, vamos a demorar mucho. Pero podemos darnos cuenta de que 694 es el doble de 347. O sea, el numerador y el denominador están en la proporción de 1 : 2, por tanto la fracción es equivalente a $^1/_2$.

En general, los problemas de proporcionalidad directa y los problemas con fracciones equivalentes se pueden resolver de la misma manera, porque se trata del mismo principio.

Ampliaciones

Simplificar por factores

A veces tenemos fracciones que contienen multiplicaciones, como esta: $\frac{26 \times 3}{3 \times 55}$. En este caso no necesitamos calcular los resultados de las multiplicaciones; podemos directamente simplificar los factores. Hemos visto eso antes en "Diferentes formas de anotar el proceso de simplificar", en el procedimiento B (Anotando factores primos): Tachar un factor significa dividir entre ese factor. Entonces podemos simplificar así la fracción en el ejemplo:

$$\frac{26 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times 55} = \frac{26}{55}$$

Eso equivale a dividir el numerador y el denominador entre 3.

Ya que la multiplicación es conmutativa, no importa el orden de los factores: podemos simplificar el segundo factor arriba con el primer factor abajo, y vice versa.

Lo mismo funciona cuando podemos simplificar los factores solo parcialmente:

$$\frac{\overset{2}{\cancel{14}} \times \overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{21}} \times \underset{5}{\cancel{25}}} = \frac{8}{15}$$

Esto es mucho más fácil que multiplicar primero y después simplificar.

Unos ejemplos para practicar:

$\frac{24 \times 77}{110 \times 21}$, $\frac{17 \times 45}{36 \times 34}$, $\frac{39 \times 50}{65 \times 42}$, $\frac{56 \times 189}{144 \times 147}$,

$\frac{130 \times 131 \times 132}{262 \times 180 \times 78}$, $\frac{55 \times 56 \times 57}{80 \times 99 \times 77}$, $\frac{355 \times 356 \times 357}{665 \times 544 \times 445}$.

Escribir resultados de manera más "simple"

Ahora que sabemos simplificar fracciones, podemos también escribir los resultados de otras operaciones de manera más "simple". Por ejemplo, hemos sumado:

$$\frac{3}{14} + \frac{4}{14} = \frac{7}{14}$$

Pero este resultado se puede simplificar. Escribámoslo entonces en su forma más simple:

$$\frac{3}{14} + \frac{4}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

Practica con las siguientes operaciones. Escribe cada resultado en su forma más simple; o sea, como fracción irreductible.

a. $\frac{13}{18} + \frac{17}{18}$

b. $\frac{23}{45} + \frac{32}{45} - \frac{28}{45}$

c. $\frac{63}{77} + \frac{49}{77} - \frac{35}{77}$

d. $1\frac{937}{1225} - \frac{1217}{1225}$

e. $12 \div 96$

f. $425 \div 75$

g. $\frac{28}{45} \times 5$

h. $9 \times \frac{34}{39}$

i. $\frac{121}{132} \times 7$

j. $\frac{108}{125} \div 30$

¿A dónde vamos desde aquí?

El tema de esta Unidad está muy relacionado con las proporciones *(Unidades 20 y 21)*. Si todavía no hicieron esas Unidades, pueden hacerlas ahora.

Con esta Unidad, los niños deben tener una base suficiente para comprender los temas del *Bloque V (Números decimales)*; entonces podrían pasar a esos temas y dejar las Unidades 40 a 44 para más tarde. Pero pueden también continuar de frente; o pueden intercalar un tema de geometría (*Bloque VI)*, razonamiento *(Bloque VII)*, u otro.

Unidad 40 - Comparar, sumar y restar fracciones heterogéneas

Prerrequisitos:
- Concepto y cálculo del MCM *(Unidad 19)*.
- Amplificar y simplificar fracciones *(Unidad 39)*.

Materiales necesarios:
- Material de fracciones (sectores circulares) – de preferencia hasta los duodécimos o más allá.

Para los educadores

Introduciendo un tema difícil

El tema de esta Unidad puede ser bastante difícil de comprender para algunos niños, porque requiere ya cierta capacidad de abstracción. La clave para entenderlo es el concepto del ***denominador común***. Introducimos este concepto poco a poco, con unos pasos intermedios, y mediante la observación de varios ejemplos instructivos. Aun así puede suceder que algunos niños no logren entenderlo. Para ellos podemos dejar este tema hasta el fin del período. Puede haber niños que lo entiendan recién cuando estén en el nivel de Secundaria.

En el caso de los niños que no llegan a comprender este principio, la tentación puede ser grande de enseñarles algún procedimiento mecánico (como por ejemplo el "multiplicar en cruz"), "para que puedan resolver las operaciones". Pero con eso causaríamos un "cortocircuito mental": los niños pensarían que ahora "saben" como se hace, mientras en realidad siguen sin entender. Con eso tendrán mayores dificultades de llegar al entendimiento más tarde. Es preferible en estos casos saltar este tema (y también en las siguientes Unidades saltar aquellos problemas que requieren encontrar un denominador común), y volver acá más tarde cuando el niño esté más maduro; aun si eso significa esperar hasta la secundaria.

Lo mismo aplica a las Unidades siguientes *(41, 42, 43)*.

Las operaciones más difíciles de esta Unidad tienen sus resultados en el *Anexo A*, para que los alumnos puedan comprobar sus resultados.

Detalles de la notación

Las operaciones que requieren homogenizar fracciones se pueden anotar de diferentes formas. No necesitamos insistir en una "única forma correcta", pero podemos mostrar diferentes alternativas. Por ejemplo, se puede escribir primero la operación original, después la operación "homogenizada", y finalmente el resultado:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

La operación se vuelve un poco más transparente cuando escribimos la operación "homogenizada" en una segunda línea por debajo de la primera. De esta manera se nota la correspondencia entre cada sumando de la operación original y el sumando "homogenizado":

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \\ = & \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15} \end{aligned}$$

Alternativamente podemos escribir los números "homogenizados" directamente sobre los números de la operación original, como lo hacemos al simplificar:

$$\frac{\overset{5}{\cancel{1}}}{\underset{15}{\cancel{3}}} + \frac{\overset{6}{\cancel{2}}}{\underset{15}{\cancel{5}}} = \frac{11}{15}$$

Eso da menos trabajo; pero es un poco menos transparente. Se recomienda hacerlo así solamente para aquellos alumnos que ya dominan bien las operaciones.

TALLER

Comparar fracciones heterogéneas

¿Cuál es mayor, $^3/_5$ ó $^4/_7$? – Podemos probarlo con el material de fracciones, y así vemos cuál es mayor. Pero ¿cómo podemos hacerlo cuando no se puede hacer con el material? ¿De qué manera podemos comparar fracciones de distintos tipos? Piénsenlo, conversen, intercambien ideas.

(Al conversar acerca de estas preguntas, podemos de manera informal introducir el término "fracciones heterogéneas": Cuando dos fracciones son de distintos tipos, decimos que son "heterogéneas".)

Examinen este ejemplo: ¿Cuál es mayor, $^6/_{10}$ ó $^3/_5$? – Si no lo descubren a primera vista, representen estas fracciones con el material, y pónganlas una sobre la otra. Podríamos haberlo visto también observando los números: Estas fracciones son equivalentes; o sea, son iguales.

Ahora, ¿cuál es mayor, $^3/_{10}$ ó $^2/_5$? – Con el material es fácil de ver. Pero si recordamos el ejemplo anterior, podemos quizás ver un camino de cómo hacerlo con los números: Los quintos se pueden convertir en décimos. Entonces estamos comparando $^3/_{10}$ con $^4/_{10}$, y eso podemos hacer sin usar el material.

En otras palabras, podemos "homogenizar" las fracciones. Podemos convertirlas en fracciones *con el mismo denominador*, y entonces es fácil compararlas.

Intenten los siguientes ejemplos. Mientras los niños todavía no entienden bien como funciona, represéntenlo con el material antes de escribirlo.

Compara:

$$\frac{3}{4} \text{ con } \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \text{ con } \frac{3}{8}, \quad \frac{5}{9} \text{ con } \frac{2}{3},$$
$$\frac{2}{3} \text{ con } \frac{9}{12}, \quad \frac{1}{2} \text{ con } \frac{6}{10}, \quad \frac{3}{4} \text{ con } \frac{8}{12}.$$

¿Puedes hacer los siguientes sin el material? Copia, homogeniza, y escribe el signo correspondiente (<, =, >):

a. $\frac{3}{4} \square \frac{14}{20}$ b. $\frac{4}{7} \square \frac{10}{21}$ c. $\frac{19}{30} \square \frac{57}{90}$

d. $\frac{17}{60} \square \frac{4}{15}$ e. $\frac{197}{280} \square \frac{5}{7}$ f. $\frac{4}{9} \square \frac{129}{297}$

Sumas y restas sencillas de fracciones heterogéneas

¿Cómo podemos sumar $^2/_5$ + $^3/_{10}$? – Representen esta suma con el material. Podríamos contar cuántas piezas tenemos: son 5 piezas. Pero eso no nos ayuda, porque las piezas están mezcladas entre quintos y décimos. No son $^5/_5$, pero tampoco son $^5/_{10}$. Es como si quisiéramos sumar manzanas con conejos: no se puede hacer así.

Pero recordemos la actividad anterior: podemos "homogenizar" las fracciones. Conviertan los quintos en décimos (háganlo con el material). Ahora tenemos $^4/_{10}$ + $^3/_{10}$, y eso sí podemos sumar: son $^7/_{10}$.

Practiquen de la misma manera los siguientes ejemplos con el material:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}, \quad \frac{2}{3}+\frac{1}{9}, \quad \frac{1}{2}+\frac{3}{10}, \quad \frac{5}{6}-\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}-\frac{5}{8}$$

Anoten las operaciones correspondientes. Por ejemplo así:

$$\frac{11}{12} - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{11}{12} - \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

¿Puedes ahora hacerlo sin el material? Practica con los siguientes. Simplifica los resultados donde se puede.

g. $\frac{1}{2} + \frac{5}{22}$ h. $\frac{3}{13} + \frac{7}{26}$ i. $\frac{3}{8} + \frac{53}{128}$

j. $\frac{5}{6} - \frac{29}{54}$ k. $\frac{341}{560} - \frac{11}{80}$ l. $\frac{4}{7} - \frac{171}{301}$

Comparaciones más difíciles

Regresemos ahora a nuestro ejemplo inicial: ¿Cómo comparamos $^3/_5$ con $^4/_7$? No podemos convertir los quintos en séptimos; y tampoco podemos convertir los séptimos en quintos. Pero aun así podemos encontrar un *denominador común*.

Quizás los niños pueden descubrirlo por sí mismos. Si no, entonces haremos la siguiente exploración:

Anotamos toda la lista de las "amplificaciones" de $^3/_5$, y por debajo anotamos las "amplificaciones" de $^4/_7$. Observamos los resultados y seguimos anotando, hasta que encontremos un denominador común; o sea, un denominador que aparece en ambas filas:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25} = \frac{18}{30} = \frac{21}{35} = \frac{24}{40} = \ldots$$
$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{12}{21} = \frac{16}{28} = \frac{20}{35} = \frac{24}{42} = \frac{28}{49} = \ldots$$

Notamos que el 35 es el primer denominador que aparece en ambas listas. Entonces podemos comparar:

$$\left(\frac{3}{5} = \mathbf{\frac{21}{35}}\right) > \left(\frac{4}{7} = \mathbf{\frac{20}{35}}\right)$$

¿Por qué el 35 es el denominador común? – Lógico: porque es 5 x 7.

Pero a veces encontramos un denominador común más pequeño. Comparemos $^5/_8$ con $^7/_{12}$. Podríamos pensar que tenemos que usar 8 x 12 = 96 como denominador común. Observemos las listas de las fracciones amplificadas:

$$\frac{5}{8} = \frac{10}{16} = \frac{15}{24} = \frac{20}{36} = \frac{25}{40} = \ldots$$
$$\frac{7}{12} = \frac{14}{24} = \frac{21}{36} = \frac{28}{48} = \frac{35}{60} = \ldots$$

El 24 ya es un denominador común. ¿Por qué encontramos aquí un denominador común más pequeño? – Reflexionen, conversen, exploren otros ejemplos.

Algunos niños deben acordarse ahora del concepto del MCM *(Unidad 19)*. El denominador común tiene que ser un *múltiplo* de los denominadores que tenemos. Y si queremos el denominador común *más pequeño*, entonces tenemos que usar el *mínimo* común múltiplo (MCM).

- En realidad no es "obligatorio" usar el MCM. Podemos usar cualquier denominador común. En el ejemplo anterior podríamos también calcular con 48 o con 96, y llegaríamos igualmente a la meta. Pero normalmente es más práctico calcular con números pequeños; por eso se prefiere usar el MCM.

Hagamos entonces un ejemplo donde calculamos directamente el MCM: Compara

$\frac{11}{24}$ con $\frac{19}{42}$. Calculamos el MCM, analizando los factores primos:

24 = 2 x 2 x 2 x 3
42 = 2 x 3 x 7

MCM (24, 42) = 2 x 2 x 2 x 3 x 7 = 168

$\frac{11}{24} = \frac{77}{168}$; $\frac{19}{42} = \frac{76}{168}$, entonces $\frac{11}{24} > \frac{19}{42}$.

Ahora, para hacer esta conversión de fracciones equivalentes, necesitamos saber cuánto por 24 da 168. Para saberlo, podríamos dividir 168 entre 24. Pero si ya hemos analizado los factores primos, entonces tenemos este resultado "gratis":

168 = (2 x 2 x 2 x 3) x 7 (eso ya lo tenemos anotado),
= 24 x 7.

Y lo mismo para el 42: sus factores también están dentro del 168. Por eso, el método de los factores primos es más práctico aquí.

Alternativamente podríamos comenzar con calcular el MCD, entonces la descomposición se vuelve un poco más sencilla:

MCD (24, 42) = **6**
24 = **6** x 4
42 = **6** x 7
MCM (24, 42) = **6** x 4 x 7 = 168
168 = (6 x 4) x 7 = 24 x 7
168 = (6 x 7) x 4 = 42 x 4

Quizás recordamos que el MCM es el producto de cada número con los "factores solitarios" del otro número: 24 x 7 (porque el "factor solitario" de 42 es 7), resp. 42 x 4 (porque el "factor solitario" de 24 es 4). (Podría ser bueno en este punto repasar las investigaciones hechas en la *Unidad 19*.)

Para practicar:

m. $\frac{5}{9} \square \frac{8}{14}$ n. $\frac{5}{12} \square \frac{13}{30}$

ñ. $\frac{111}{300} \square \frac{129}{350}$ o. $\frac{24}{52} \square \frac{25}{55}$

p. $\frac{103}{210} \square \frac{145}{294}$ q. $\frac{14}{25} \square \frac{9}{16}$

OJO: ¡Fíjate primero si quizás una de las fracciones se puede *simplificar* antes de comparar! Con eso te ahorras trabajo.

Sumas y restas más difíciles

Representa $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ con el material de fracciones. ¿Cómo podemos sumar esto? Tenemos el mismo problema como en la actividad anterior: No podemos convertir los tercios en cuartos; y tampoco podemos convertir los cuartos en tercios. Pero podemos encontrar un *denominador común*. ¿Cuál es el denominador común aquí? Haz la prueba con el material: Con las piezas del denominador común debes poder formar $^1/_3$ y también $^1/_4$. Entonces puedes sumar. ¿Cuál es el resultado? Escribe la operación.

Algunas otras sumas y restas que puedes practicar de la misma manera, usando el material:

$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$, $\frac{4}{5}-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$

Anota las operaciones correspondientes, como en la actividad anterior de sumas y restas.

¿Puedes ahora hacerlo sin el material? Practica con los siguientes. Simplifica los resultados donde se puede.

r. $\frac{4}{15} + \frac{3}{20}$ s. $\frac{4}{21} + \frac{3}{28}$ t. $\frac{14}{19} + \frac{6}{21}$

u. $\frac{1}{7} - \frac{1}{8}$ v. $\frac{10}{11} - \frac{9}{10}$ w. $\frac{64}{110} - \frac{14}{25}$

x. $\frac{475}{540} + \frac{50}{378}$ y. $\frac{87}{91} - \frac{97}{117}$ z. $\frac{38}{59} + \frac{18}{51}$

OJO: ¡Fíjate primero si quizás hay fracciones que se pueden simplificar *antes* de sumar o restar! Con eso te ahorras trabajo.

Ampliaciones

Sumas y restas de tres o más fracciones

Si tenemos tres o más sumandos, el denominador común es el MCM de todos los denominadores juntos. Analizando los números, a veces encontramos que eso es fácil. Por ejemplo:

$$\frac{2}{9} + \frac{13}{36} + \frac{1}{12}$$

Vemos que 36 es un múltiplo de 9 y también de 12; entonces el mismo 36 ya es el MCM:

$$\frac{2}{9} + \frac{13}{36} + \frac{1}{12} = \frac{8}{36} + \frac{13}{36} + \frac{3}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

O en este caso:

$$\frac{3}{8} + \frac{17}{30} - \frac{7}{40}$$

40 es un múltiplo de 8, entonces solamente necesitamos calcular MCM (30; 40) = 120.

$$\frac{3}{8} + \frac{17}{30} - \frac{7}{40} = \frac{45}{120} + \frac{68}{120} - \frac{21}{120} = \frac{92}{120} = \frac{23}{30}$$

Otros casos son más difíciles, por ejemplo este:

$$\frac{4}{15} + \frac{7}{18} + \frac{6}{35}$$

Aquí ningún denominador es múltiplo de otro. Necesitamos el MCM de los tres denominadores. Mencionaremos unas posibilidades de cómo se puede calcular eso:

A) Calcular el MCM de dos en dos:

Calculamos primero MCM(15; 18) con cualquiera de los métodos que ya conocemos; resultará 90. Después calculamos MCM(90; 35). El resultado es el MCM de los tres números.

B) Comparación de los factores primos:

Factorizamos los tres números, analizamos sus factores, y escogemos aquellos que son necesarios para que el producto contenga todos los factores de cada número:

15 = 3 x 5
18 = 2 x 3 x 3
35 = 5 x 7

El 2 aparece una sola vez. El 3 aparece dos veces en el 18; necesitamos dos veces el factor 3. El 5 y el 7 ocurren una sola vez en los números donde aparecen. Entonces el MCM es:

2 x 3 x 3 x 5 x 7 = 630.

C) Procedimiento escolar:

Este procedimiento es más rutinario y un poco menos transparente; pero lo mencionamos aquí porque muchos están acostumbrados a hacerlo así.
Como en el procedimiento para dos números, dividimos sucesivamente entre todos los divisores que encontramos en alguno de los números. Aquellos números que no son divisibles entre el divisor respectivo, se quedan como están. Anotamos los divisores en la última columna a la derecha:

15	18	35	3
5	6	35	5
1	6	7	

(En la primera fila hemos dividido el 15 y el 18 entre 3. El 35 queda porque no es divisible entre 3. – En la segunda fila hemos dividido el 5 y el 35 entre 5. El 6 queda porque no es divisible entre 5.)

Si entendemos bien los principios involucrados, entonces podemos detenernos aquí: Los factores restantes de la última fila (1, 6 y 7) ya no tienen ningún divisor común entre sí, entonces *todos ellos* tienen que aparecer en el MCM. El MCM es entonces el producto de los factores en la última columna, por los factores en la última fila: 3 x 5 (x 1) x 6 x 7 = 630.

Si esta manera de hacerlo les parece sospechosa o poco transparente, podemos continuar el procedimiento hasta el final, o sea, hasta que todos los factores sobrantes sean 1:

15	18	35	3
5	6	35	5
1	6	7	2
1	3	7	3
1	1	7	7
1	1	1	

Ahora tenemos todos los factores del MCM en la columna derecha: 3 x 5 x 2 x 3 x 7 = 630.

- Ahora necesitamos homogenizar las fracciones. Para eso necesitamos los factores de multiplicación que nos permiten llegar del 15, del 18 y del 35 al 630. Si hemos calculado el MCM con el procedimiento A) o C), probablemente tenemos que hacer ahora unas divisiones para poder completar las multiplicaciones: 15 x___= 630, etc.

Si hemos usado el procedimiento B), ya tenemos los datos necesarios: solamente tenemos que buscar los factores respectivos dentro de la factorización del 630:

Para el 15: 630 = 2 x 3 x **(3 x 5)** x 7 = 15 x 42.
Para el 18: 630 = **(2 x 3 x 3)** x 5 x 7 = 18 x 35.
(Con eso ya tenemos la respuesta para el 35 también.)

El procedimiento B) tiene entonces una ventaja si queremos usar después el MCM para homogenizar fracciones.

Concluyamos la operación:

$$\frac{4}{15} + \frac{7}{18} + \frac{6}{35} \quad \ldots$$
$$= \frac{4 \times 42}{630} + \frac{7 \times 35}{630} + \frac{6 \times 18}{630}$$
$$= \frac{168}{630} + \frac{245}{630} + \frac{108}{630} = \frac{521}{630}$$

Unos ejemplos para practicar:

a. $\frac{4}{15} + \frac{6}{16} + \frac{1}{40}$ **b.** $\frac{1}{35} + \frac{5}{21} + \frac{11}{15}$

c. $\frac{20}{84} + \frac{2}{119} + \frac{4}{51}$ **d.** $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$

e. $\frac{1}{26} + \frac{2}{39} + \frac{5}{52} + \frac{5}{78}$ **f.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$

OJO: ¡Fíjate siempre si quizás hay algún sumando que puedes simplificar *primero*!

***g.** ¿Cuántas fracciones de la siguiente serie hay que sumar para que el resultado sea mayor a 2?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots (\text{etc.})$$

¿Quién encuentra la operación más interesante?

Hagan un concurso de inventar operaciones interesantes con sumas y restas de fracciones. Puede ser un concurso individual, o entre grupos pequeños. Necesitarán un jurado que decide cuál es la operación más interesante. El jurado puede componerse de adultos, o de unos alumnos mayores que no participan.

Una operación se puede considerar "interesante", por ejemplo:

- Si los sumandos son fracciones irreductibles, pero el resultado se puede simplificar. Como en:

$$\frac{7}{22} + \frac{17}{33} = \frac{5}{6}$$

- Si el resultado es un "número notable", como 1 entero, o $^1/_2$, ó 2 enteros, ..., o si de alguna otra manera es "sorprendente", como por ejemplo:

$$\frac{5}{8} - \frac{78}{125} = \frac{1}{1000}$$

- Si la operación contiene alguna simetría o regularidad interesante de las cifras, como en los siguientes ejemplos:

$$\frac{55}{12} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4} = 5$$
$$\frac{11}{234} + \frac{11}{65} + \frac{23}{78} = \frac{23}{45}$$

- Si se presenta alguna otra propiedad sorprendente. Como por ejemplo esta operación, donde la suma de los numeradores por sí sola es también una suma correcta (8 + 1 = 9):

$$\frac{8}{9} + \frac{1}{90} = \frac{9}{10}$$

¿Qué otras operaciones interesantes pueden encontrar? Necesitarán suficiente tiempo, ¡y perseverancia!

Problemas con fracciones

1) En el cumpleaños de Yanet, se repartieron $^{17}/_{24}$ de la torta a sus amigos, y Yanet comió un octavo. ¿Cuánto sobró?

2) En el cumpleaños de Jaime, sus amigos comieron $^{5}/_{6}$ de la torta, y Jaime comió un tercio de lo que ellos dejaron. ¿Cuánto quedó al final?

3) Las amigas Susana y Sabrina salen de sus casas al mismo tiempo para encontrarse en el camino. Susana ya avanzó $^{3}/_{8}$ del camino, y Sabrina $^{3}/_{10}$. ¿Qué fracción del camino las separa todavía?

4) En cierta ciudad, un tercio de los habitantes son menores a 18 años, y un octavo son mayores a 65 años. ¿Qué fracción de los habitantes tienen entre 18 y 65 años de edad?

Un problema hindú antiguo

El siguiente problema fue planteado por Bhaskara II, un matemático hindú que vivía en el siglo 12:

"De un enjambre de abejas, un quinto voló a las flores de Kadamba; un tercio voló al Silandhara; tres veces la diferencia de estos dos números voló a un árbol; y una única abeja seguía volando indecisa entre la fragancia del Ketaki y el Malati. ¿Cuántas abejas eran?"

La tumba de Diofanto

Diofanto fue un matemático griego que vivía en el siglo 3 y examinó muchas propiedades de los números. Después de su muerte, se colocó sobre su tumba un epitafio que cuenta la historia de su vida en forma de un problema como él mismo los solía plantear:

"Transeúnte, esta piedra cubre a Diofanto:
por el arte del difunto te enseña la edad que alcanzó.
Dios le concedió ser niño durante la sexta parte de su vida;
después de otra duodécima parte, su mejilla se cubrió con el primer bozo.
Una séptima parte más tarde se le prendió la luz del matrimonio;
y cinco años después le nació un hijo.
Pero ¡qué pena!, el pobre niño, solo alcanzó la mitad de los años que iba a vivir su padre; después el destino se lo quitó.
Todavía cuatro años consoló su dolor con la ciencia de los números,
hasta que también él concluyó su vida terrenal."

¿Puedes calcular cuántos años vivió Diofanto, y los otros datos de su vida?

(Inténtenlo primero por ustedes mismos. Si después de bastante tiempo no llegan a la meta, pueden consultar las pautas en el *Anexo A*.)

Unidad 41 - Multiplicación de fracciones

Prerrequisitos:
- Fracciones son divisiones *(Unidad 37)*.
- Multiplicación y división de fracciones con enteros *(Unidad 38)*.
- Amplificar y simplificar fracciones *(Unidad 39)*.
- Conmutatividad de multiplicaciones y divisiones combinadas *(Unidades 12 y 13)*.

Para los educadores

Como la Unidad anterior, esta también contiene unos conceptos que son difíciles de ilustrar con material concreto; tales como la conmutatividad de multiplicaciones y divisiones combinadas, y su efecto cuando se escribe en forma de una fracción.

El proceso de la multiplicación de fracciones en sí es muy fácil de mecanizar: se puede simplemente multiplicar "en paralelo". Pero queremos que los niños lleguen a un entendimiento de *por qué* funciona esta regla. Para este fin damos varios pasos de investigar y observar el "comportamiento" de los números; y usamos como ilustraciones las "máquinas" de operaciones, y la figura del rectángulo. Eso requiere ya cierta capacidad de abstracción. Por eso, para los niños que no se desarrollan tan rápidamente, es preferible que este tema se trate *hacia el final* del período.

TALLER

Investiguen la siguiente pregunta:

¿Cuánto es un quinto de un cuarto?

Reflexionen y conversen acerca de la pregunta, antes de continuar.

Podemos imaginarlo con una torta (o hacerlo con una torta verdadera): Sacar un quinto de un cuarto significaría tomar un cuarto de la torta, y partir este pedazo en cinco partes iguales. O sea, es una división: $^1/_4 \div 5$. Eso ya sabemos cómo calcularlo. (¿Cuánto es?)

Pero al mismo tiempo recordamos que "una fracción de algo" significa *multiplicar* el "algo" por la fracción. Entonces "un quinto de un cuarto" se puede también escribir así: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$.

Piensen en unos ejemplos similares: ¿Cuánto es un tercio de un octavo? ¿la mitad de un décimo? ¿un sexto de un séptimo?

Con eso hemos dado el primer paso hacia la multiplicación de una fracción por una fracción. Damos ahora el siguiente paso:

¿Cuánto son tres quintos de un cuarto?

Reflexionen y conversen acerca de la pregunta, antes de continuar.

Ya sabemos que *un* quinto de un cuarto es $^1/_4 \div 5$. Entonces *tres* quintos es el triple de esta cantidad; o sea $^1/_4 \div 5 \times 3$. Eso lo podemos calcular por pasos con las operaciones que ya conocemos. (¿Cuánto es?)

Pero ahora recordamos que si tenemos unas "máquinas" de multiplicación y división, podemos también intercambiar su orden, y el resultado queda igual:

$$\frac{1}{4} \xrightarrow{\div 5} \quad \xrightarrow{\times 3}$$

$$\frac{1}{4} \xrightarrow{\times 3} \quad \xrightarrow{\div 5}$$

Entonces podemos calcular también en este orden: $^1/_4 \times 3 \div 5$.

Y recordamos también que una fracción es solamente otra forma de escribir una división. O sea, $^3/_5 = 3 \div 5$. Entonces nuestra operación es realmente lo mismo como la multiplicación $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}$.

Reflexionen y calculen unos ejemplos similares: ¿Cuánto son dos tercios de un séptimo? ¿cinco octavos de un quinto? ¿cuatro novenos de un sexto?

> **Los dichos de Jaimito:**
>
> "Un quinto de un cuarto es algo como un cuarto de una quinta."

Y una pregunta más para pensar:

¿Cuánto son tres quintos de tres cuartos?

Reflexionen y conversen también acerca de esta pregunta, antes de continuar.

Tres cuartos son el triple de *un* cuarto. Entonces tenemos nuevamente el triple de la operación anterior. Si lo escribimos con las operaciones que ya conocemos: $^3/_4 \div 5 \times 3 = {}^3/_4 \times 3 \div 5$. (¿Cuánto es?) Pero eso es solamente otra forma de escribir $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5}$.

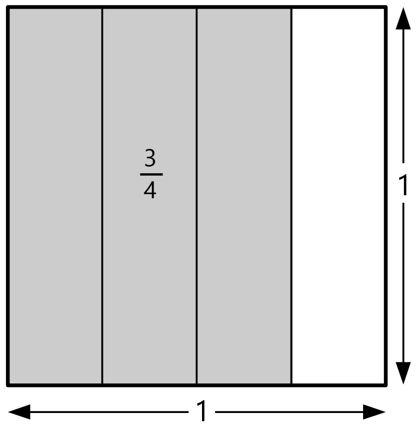
Observemos entonces lo que sucede con los números en esta operación. Cuando multiplicamos por 3, el *numerador* se multiplica por 3: $\frac{3}{4} \times 3 = \frac{3 \times 3}{4}$. Y cuando dividimos entre 5, el *denominador se multiplica* por 5: $\frac{3 \times 3}{4} \div 5 = \frac{3 \times 3}{4 \times 5}$. Entonces, ***se han multiplicado simplemente los numeradores y los denominadores entre sí:***

$\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{4 \times 5}$.

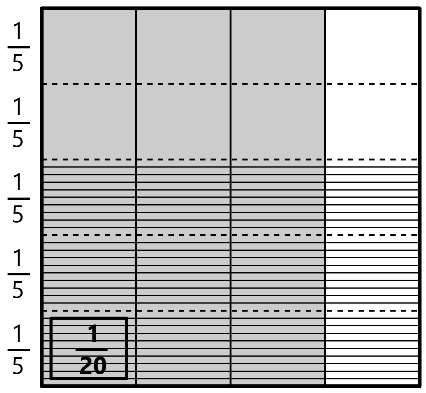
Otra ilustración: El rectángulo

Observemos otra ilustración: Tenemos una torta rectangular. El rectángulo grande significa la torta entera, o sea **1**.

La torta está partida en cuatro pedazos largos, o sea en cuartos. Tres de estos pedazos están sombreados: esos son $^3/_4$ de la torta.



Ahora queremos sacar $^3/_5$ de estos $^3/_4$. Partimos entonces todo en cinco partes iguales (horizontalmente). Cada "cuarto" de la torta se ha partido en cinco. Elegimos tres de esas cinco partes:



Los $^3/_5$ de los $^3/_4$ son los pedazos que tienen sombra y también rayas negras. Analicemos cuánto valen estas partes. Son 9 rectángulos pequeños, porque 3 x 3 = 9. Y la torta entera tiene 20 de esos rectángulos pequeños, porque 4 x 5 = 20. Entonces un rectángulo pequeño es un veintésimo; y los pedazos que hemos elegido son $^9/_{20}$.

Observa esta imagen y reflexiona cómo aquí también se han multiplicado los numeradores entre sí, y los denominadores entre sí.

Dibuja rectángulos similares para las siguientes operaciones, y escribe también las operaciones con números:

$\frac{6}{7} \times \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$, $\frac{4}{9} \times \frac{3}{10}$, $\frac{2}{5} \times \frac{5}{6}$.

Cuando entiendes como funciona, practica también con los siguientes ejemplos: (Simplifica los resultados donde puedes.)

a. $\frac{5}{9} \times \frac{6}{25}$ **b.** $\frac{4}{11} \times \frac{33}{32}$ **c.** $\frac{36}{49} \times \frac{56}{45}$

d. $\frac{198}{203} \times \frac{87}{110}$ **e.** $\frac{48}{65} \times \frac{52}{81} \times \frac{45}{64}$

f. $\frac{145}{154} \times \frac{49}{50} \times \frac{55}{56}$ **g.** $\frac{8}{9} \times \frac{35}{74} \times \frac{999}{1000}$

Nota: Recuerda que puedes simplificar por factores antes de multiplicarlo todo.

Ampliaciones

Unos problemas con fracciones

Razona, y haz un dibujo si es necesario. Piensa siempre: ¿Cuál es el "entero" al que se refieren las fracciones? Distingue también correctamente entre situaciones "aditivas" (suma y resta), y "multiplicativas" (multiplicación y división).

1) ¿Cuál es mayor, $\frac{3}{8}$ de $\frac{11}{5}$, ó $\frac{5}{8}$ de $\frac{4}{3}$?

2) El señor Duarte cosechó $^{6}/_{7}$ t de papas. Pero $^{1}/_{12}$ de las papas tenían gusanos; y de lo que sobró, $^{2}/_{11}$ se malograron en el almacén. ¿Qué cantidad le quedó para vender?

3) Carla, Claudia y Celia se reparten las ganancias de un negocio que hicieron juntas. Carla recibió $^{2}/_{5}$ de la ganancia y Claudia $^{2}/_{7}$. ¿Cuánto recibió Celia?

4) En la ciudad de Aritopia, $^{2}/_{5}$ de los varones y $^{3}/_{4}$ de las mujeres saben nadar. $^{4}/_{7}$ de los habitantes son mujeres. ¿Cuál es la fracción de la población total que sabe nadar?

5) El señor Felipe tiene que pagar en impuestos $^{1}/_{5}$ de lo que gana. Con $^{1}/_{8}$ de lo que sobra, ayuda a personas necesitadas. De lo que queda, usa $^{4}/_{5}$ para mantener a su familia. ¿Qué fracción de sus ingresos le queda para ahorrar?

Unidad 42 - División de fracciones; el valor recíproco

Prerrequisitos:
- Multiplicación de fracciones *(Unidad 41)*.

Materiales necesarios:
- Material de fracciones (sectores circulares).
- (Opcional) Material de números mixtos *(vea Unidad 36)*.

Para los educadores

La clave para entender los temas de esta Unidad es el concepto del ***valor recíproco***. Por tanto, tomamos bastante tiempo para introducir y explicar este concepto.

Investigación

Investigación preliminar

Investiguen juntos el siguiente problema. Sugieran diferentes maneras de llegar a la solución (calculando, dibujando, midiendo, razonando, ...):

Un albañil tiene 9 metros de alambre. Necesita pedazos de $^3/_4$ metros. ¿Cuántos de estos pedazos puede obtener de su alambre?

Después de resolverlo de varias maneras, analicen sus soluciones. ¿Pueden encontrar unas reglas de cómo se puede dividir entre una fracción?

Nota: Quizás algunos niños tienen la idea de convertir todo en centímetros. Así tenemos la operación 900 ÷ 75, y evitamos calcular con fracciones. Esto es completamente correcto, aunque quizás no es lo que se esperaba. Si queremos sacar de ello algún provecho respecto a nuestro tema, podemos pedir a esos niños que intenten ahora interpretar su solución en términos de fracciones. Más adelante volveremos a esta posibilidad de resolverlo.

TALLER

Operaciones con el valor recíproco

Volvamos a una pregunta que hicimos en la Unidad anterior:

¿Cuánto es un quinto de un cuarto?

Allí hemos visto que esta operación se puede escribir así: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$, o también así: $^1/_4 \div 5$. O sea, dividir entre 5 es lo mismo como multiplicar por $^1/_5$.

¿Funciona eso también "al revés"? O sea, **¿es *dividir* entre $^1/_5$ lo mismo como *multiplicar* por 5?** – Podemos verificarlo con la siguiente pregunta:

¿Cuántos quintos hay en 3 enteros?

Seguramente ya sabes la respuesta. (Si no recuerdas cómo hacerlo, saca el material de los números mixtos y analiza.)

Pero eso es efectivamente la operación $3 \div {}^1/_5$. Es similar a preguntar: ¿Cuántos pedazos de 4 cm puedo hacer de un alambre de 24 cm? La respuesta es una división, 24 ÷ 4. De la misma manera podemos preguntar: ¿Cuántos pedazos de $^1/_5$ m puedo hacer de un alambre de 3 m? Es la misma operación, una división. Y si comparamos los resultados, vemos que efectivamente dividir entre $^1/_5$ es lo mismo como multiplicar por 5:

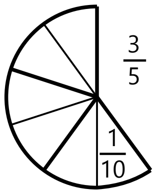
$$3 \div {}^1/_5 = 3 \times 5 = 15.$$

Parece entonces que existen ciertos "números milagrosos" que son capaces de convertir una división en una multiplicación. Hemos visto que 5 y $^1/_5$ son un tal par de "números milagrosos". Llamamos a estos números el ***valor recíproco***. 5 es el valor recíproco de $^1/_5$, y $^1/_5$ es el valor recíproco de 5.

Practica y verifica con los siguientes ejemplos: (Usa el material de números mixtos si es necesario; o dibuja círculos.)

$$4 \div \frac{1}{6}, \quad 2 \div \frac{1}{10}, \quad 7 \div \frac{1}{3}, \quad 11 \div \frac{1}{9}.$$

Lo mismo funciona con fracciones. Arma con el material de fracciones $^3/_5$. Queremos saber cuántos décimos hay en estos $^3/_5$. (Forma la fracción equivalente con décimos.)



Esto es la operación $\frac{3}{5} \div \frac{1}{10}$. Vemos que la respuesta es 6: dentro de los $^3/_5$ caben 6 décimos. Y esto es efectivamente lo mismo como multiplicar con el valor recíproco de $^1/_{10}$, con 10:

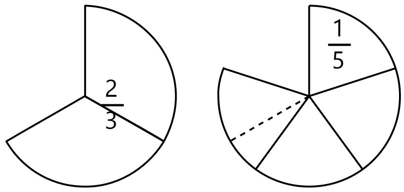
$$\frac{3}{5} \div \frac{1}{10} \;=\; \frac{3}{5} \times 10 \;=\; \frac{30}{5} \;=\; 6.$$

(Podríamos también haber simplificado el 10 con el 5 antes de multiplicar.)

Practica y verifica con los siguientes ejemplos: (Usa el material de fracciones.)

$$\frac{5}{7} \div \frac{1}{7},\quad \frac{3}{4} \div \frac{1}{12},\quad \frac{2}{3} \div \frac{1}{9},\quad \frac{6}{11} \div \frac{1}{11}.$$

Ahora, si hacemos estas operaciones con fracciones, no siempre obtenemos un número entero como respuesta. Preguntamos por ejemplo: ¿Cuántos quintos caben en $^2/_3$? – O sea, dividimos $\frac{2}{3} \div \frac{1}{5}$. Con el material no podemos representar eso, porque no podemos formar una fracción equivalente a $^2/_3$ con los quintos. Solamente podemos ver que la respuesta tiene que ser más que 3 y menos que 4.



Calculamos con el valor recíproco, y obtenemos:

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{5} \;=\; \frac{2}{3} \times 5 \;=\; \frac{10}{3}$$

¿Cómo interpretamos este resultado? – Dentro de $^2/_3$ caben $^{10}/_3$ de un quinto, ó 3 $^1/_3$ quintos. (Efectivamente es más que 3 y menos que 4.) Por si sospechamos de este resultado, podemos hacer la comprobación con la operación inversa. $^{10}/_3$ de un quinto deben ser igual a $^2/_3$:

$$\frac{10}{3} \times \frac{1}{5} \;=\; \frac{10}{3 \times 5} \;=\; \frac{2}{3}$$

Sí, esto es correcto.

Practica con los siguientes ejemplos. Puedes verificar los resultados aproximados con el material de fracciones. Haz también la comprobación con la operación inversa:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{5},\quad \frac{5}{8} \div \frac{1}{4},\quad \frac{2}{5} \div \frac{1}{7},\quad \frac{7}{10} \div \frac{1}{9}.$$

Unas propiedades del valor recíproco

Vamos a verificar matemáticamente nuestra regla del valor recíproco: *(Esto es un formalismo un poco abstracto. Algunos niños podrán entenderlo; otros quizás no.)* – Recordamos que una fracción es lo mismo como una división. Entonces:

$$3 \div 5 \;=\; 3 \times 1 \div 5 \;=\; 3 \times (1 \div 5) \;=\; 3 \times {}^1/_5$$

o sea, dividir entre 5 es lo mismo como multiplicar por $^1/_5$.

Y vice versa:

$$3 \div {}^1/_5 \;=\; 3 \div (1 \div 5) \;=\; 3 \div 1 \mathbf{\times} 5 \;=\; 3 \times 5$$

Aquí podría no ser claro de dónde aparece el signo de multiplicación. Es que aquí tenemos una "división doble" ("entre entre 5"), eso se convierte en multiplicación. Y ya sabemos que el resultado es correcto, porque ya hemos visto anteriormente que esta operación equivale a preguntar: "¿Cuántos quintos hay en 3 enteros?".

Como verificación adicional, podemos hacer la comprobación con la operación inversa: Si $3 \div {}^1/_5 = 3 \times 5$, entonces $3 \times 5 \times {}^1/_5 = 3$. Esto es correcto, porque $5 \times {}^1/_5 = 1$.

Entonces podemos establecer como regla:

Dividir entre un número equivale a multiplicar por su valor recíproco.

Y con la última operación, a la vez hemos visto otra propiedad:

Un número multiplicado por su valor recíproco da 1.

Verifícalo: $3 \times {}^1/_3 = 1$, $^1/_{10} \times 10 = 1$, $15 \times {}^1/_{15} = 1$, etc.

El valor recíproco de una fracción

Volvamos ahora al problema de la investigación preliminar. Allí había que dividir 9 entre $^3/_4$. Seguramente ya saben la respuesta. Y quizás ya encontraron una regla práctica de cómo hacerlo en otros casos similares. Si su regla sirve, pueden seguir usándola; pero compárenla con los métodos que veremos a continuación.

Sabemos ahora que dividir 9 entre $^3/_4$ es lo mismo como multiplicar 9 por el valor recíproco de $^3/_4$. El problema es que no sabemos cuánto es este valor recíproco. ¿Cómo podemos descubrirlo?

Sabemos también que un número multiplicado por su valor recíproco da 1. Buscamos entonces un número que multiplicado por $^3/_4$ da 1. ¿Cómo encontramos este número? – Piensen y conversen acerca de ello antes de continuar.

Si multiplicamos $^3/_4$ por alguna otra fracción, el numerador del resultado va a ser un múltiplo de 3, y el denominador del resultado va a ser un múltiplo de 4. Ahora, para que el resultado sea igual a 1, su numerador y denominador tienen que ser *iguales*. Buscamos entonces un número que sea un múltiplo de 3 y a la vez de 4, y usamos este número como numerador y denominador del resultado. Obviamente, este número es 3 x 4 = 12. Entonces tenemos:

$$\frac{3}{4} \times ¿? = \frac{12}{12} = 1$$

Los interrogantes indican el valor recíproco que buscamos. Podemos ver ahora que es $^4/_3$.

Observamos este resultado: Es la misma fracción como antes, solamente que ***el numerador y el denominador han intercambiado sus lugares.*** Pensando en eso, siempre tiene que ser así: Multiplicando una fracción por la fracción "invertida", obtenemos arriba y abajo el producto de numerador y denominador, entonces iguala a 1:

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1, \quad \frac{7}{9} \times \frac{9}{7} = \frac{63}{63} = 1, \quad \frac{13}{2} \times \frac{2}{13} = \frac{26}{26} = 1$$

Tenemos entonces la siguiente regla:

El valor recíproco de una fracción se obtiene intercambiando el numerador con el denominador.

Y lo mismo para los números enteros, porque éstos podemos escribir como fracciones con el denominador 1:

$$\frac{5}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1, \quad \frac{27}{1} \times \frac{1}{27} = \frac{27}{27} = 1, \quad \text{etc.}$$

Con eso podemos ahora calcular nuestro problema inicial, con el método del valor recíproco:

$$9 \div \frac{3}{4} = 9 \times \frac{4}{3} = \frac{9 \times 4}{3} = 3 \times 4 = 12$$

Un pequeño razonamiento aparte:

Vamos a comparar esta solución con la alternativa de "convertir todo en centímetros", y vamos a sacar unas conclusiones al respecto.

Nota: *Lo que hacemos ahora no es necesario para la comprensión de la operación. Si los niños se sienten confundidos por esta parte en vez de que les ayude, pasen al siguiente párrafo.*

Un centímetro es un centésimo de un metro. Entonces, quienes convirtieron la operación en centímetros, en realidad la han convertido en *centésimos*:

$$9 \div \frac{3}{4} = \frac{900}{100} \div \frac{75}{100} = 900 \div 75 = 12$$

En otras palabras, han *amplificado* ambos números para obtener fracciones homogéneas, como lo haríamos al sumar y restar. En una *división* se puede efectivamente hacer así, porque los denominadores iguales se anulan: 900 centésimos entre 75 centésimos es lo mismo como 900 enteros entre 75 enteros. Pero tengan cuidado con eso para que no se confundan; porque en una *multiplicación* no sirve eso: ¡allí no se anulan los denominadores, sino que se multiplican!

Si analizamos este método bajo la perspectiva de fracciones homogéneas, vemos que podríamos hacerlo con números menores: En vez de hacer centésimos, podríamos haber hecho cuartos:

$$9 \div \frac{3}{4} = \frac{9 \times 4}{4} \div \frac{3}{4} = 9 \times 4 \div 3 = 12$$

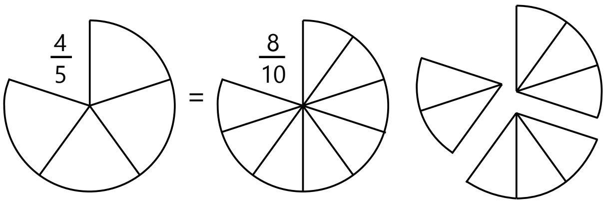
... y vemos que aquí los números hacen exactamente lo mismo como en el método del valor recíproco, porque $9 \times 4 \div 3$ es lo mismo como $9 \times {}^4/_3$.

Dividir una fracción entre otra fracción

En nuestro ejemplo hemos dividido un número entero. Pero ahora que entendemos los principios del valor recíproco, podemos aplicarlos también a la división de una fracción entre una fracción. Hagamos primero un ejemplo que podemos verificar con el material:

$$\frac{4}{5} \div \frac{3}{10}$$

Armamos 4 quintos con el material, los convertimos en décimos, y formamos grupos de 3 décimos. Podemos formar 2 grupos, y sobran 2 décimos. Entonces el resultado tiene que estar entre 2 y 3.



Calculamos con el método del valor recíproco:

$$\frac{4}{5} \div \frac{3}{10} \;=\; \frac{4}{5} \times \frac{10}{3} \;=\; \frac{4 \times 10}{5 \times 3} \;=\; \frac{4 \times 2}{3} \;=\; \frac{8}{3} \;=\; 2\frac{2}{3}$$

Hagan algunos otros ejemplos que se pueden verificar con el material:

$$\frac{3}{4} \div \frac{3}{8}, \quad \frac{2}{3} \div \frac{5}{9}, \quad \frac{3}{4} \div \frac{5}{12}, \quad \frac{4}{3} \div \frac{5}{12}.$$

Ahora intenten unas operaciones que no podemos hacer con el material. Si no están seguros de los resultados, hagan la comprobación con la operación inversa:

Ejercicios para practicar

a. $\frac{45}{28} \div \frac{25}{56}$ **b.** $\frac{176}{243} \div \frac{484}{513}$ **c.** $\frac{222}{211} \div \frac{259}{211}$

d. $\left(\frac{2}{7} \times \frac{9}{11}\right) \div \left(\frac{10}{21} \times \frac{27}{35}\right)$.

e. $\left(\frac{194}{187} \div \frac{91}{120}\right) \times \left(\frac{119}{44} \div \frac{45}{121}\right)$.

Ampliaciones

Fracciones dobles

A veces podemos encontrar fracciones escritas de esta manera: $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{10}}$

Sabemos que una fracción es una división. Entonces esta fracción doble es una división de fracciones; y ya sabemos cómo calcular eso. Podemos escribirlo así y simplificar: $\frac{3}{5} \div \frac{9}{10} = \frac{3 \times 10}{5 \times 9} = \frac{2}{3}$

Ejemplos para practicar:

f. $\dfrac{\frac{8}{33}}{\frac{16}{55}}$ **g.** $\dfrac{\frac{49}{50}}{\frac{224}{225}}$ **h.** $\dfrac{\frac{617}{1021}}{\frac{619}{2042}}$ **i.** $\dfrac{\frac{99}{100} \times \frac{143}{144}}{\frac{121}{120} \times \frac{39}{40}}$

¿Qué fracción de ... es ...?

En algunas situaciones deseamos expresar una cantidad como fracción de otra cantidad. Por ejemplo hacemos una caminata, y queremos saber: ¿Qué fracción del camino ya hemos caminado? ¿Más que la mitad? ¿o solamente un tercio? ¿o tres quintos? – Quizás encuentran una situación de la vida diaria que les sirve para introducir este tema. Si no, pueden usar un ejemplo ficticio con números, como el siguiente:

"Papá tiene que trabajar todo el mes de abril en un lugar lejano. Hoy es el 18 de abril. ¿Qué fracción del mes ya estuvo papá allí?"

Podemos razonar de la siguiente manera: El mes tiene 30 días, entonces un día es $^1/_{30}$ del mes. 18 días son entonces $^{18}/_{30}$, o simplificando, $^3/_5$.

O razonamos desde la operación inversa: "Una fracción de 30" significa esa fracción multiplicada por 30, y sabemos que el producto es 18. Entonces, para encontrar la fracción, tenemos que aplicar la operación inversa (o el principio del "producto" y sus factores): La respuesta es 18 ÷ 30.

Este segundo razonamiento es particularmente útil cuando todas las cantidades involucradas son fracciones:

"Andrea, Anita y Anastasia se comparten un trabajo en partes iguales. Andrea ya terminó $^1/_5$ del trabajo total. ¿Qué fracción de su parte ha cumplido?"

O sea, la pregunta es: ¿Qué fracción de $^1/_3$ es $^1/_5$? Si quisiéramos resolver esto según el primer razonamiento, tendríamos que dar bastantes vueltas. (Tendríamos que preguntar primero qué fracción de $^1/_3$ es 1, y desde allí dar el paso a $^1/_5$.) Con el segundo razonamiento entendemos que la respuesta debe ser $^1/_5 \div {}^1/_3$, o sea $^3/_5$.

Podemos practicar cálculos como estos, si de vez en cuando preguntamos: ¿Qué fracción del día ha pasado ahora? – ¿Qué fracción de la semana; del mes; del año?

Problemas diversos con fracciones

1. De una torta quedaron $^5/_6$. Se parte en pedazos que corresponden a $^1/_{18}$ de la torta original. ¿Cuántos pedazos salen?

2. Enumera las fracciones irreducibles con denominador 72 que se encuentran entre $^{10}/_{72}$ y $^{20}/_{72}$.

3. ¿Cuántos pedazos de $^4/_5$ m de largo se pueden cortar de una tela de 9 metros? ¿y cuánto sobrará?

4. Enumera las fracciones irreducibles con denominador 1800 que se encuentran entre $^1/_{60}$ y $^1/_{30}$.

5. Un panadero prepara pan con 10 kg de harina con sal, y 5 kg de agua con levadura. Forma panecillos de $^1/_{16}$ kg. ¿Cuántos panecillos resultan?

6. ¿Qué fracción del mes de septiembre son 8 días?

7. ¿Qué fracción del mes de septiembre son $8^4/_7$ días?

8. ¿Qué fracción del día ha pasado a las 9:20 de la mañana (contando desde la medianoche)?

9. ¿Qué fracción de una hora son 3 minutos y 20 segundos?

10. Un tronco pesa 250 kg más medio tronco. ¿Cuánto pesa un tronco y medio?

11. Un carro avanza un kilómetro en $^6/_7$ minutos.
a) ¿Cuánto tiempo necesita para avanzar 40 km?
b) ¿Cuál es la velocidad del carro en km/h?

12. Un ciclista avanza $^3/_8$ km en un minuto.
a) ¿Cuánto tiempo necesita para avanzar un kilómetro?
b) ¿Cuál es su velocidad en km/h?

(Algunos problemas tienen pautas en el Anexo A. ¡Pero intenta primero resolver los problemas por ti mismo! A menudo ayuda hacer un dibujo de la situación.)

Pregunta capciosa:

El obrero Jorge puede cavar 3 huecos en una hora. ¿Cuánto tiempo demora para cavar medio hueco?

(Respuesta en el Anexo A.)

Principios matemáticos

“Invertir” números

El concepto del valor recíproco es parte de un contexto más amplio, que los niños a este nivel todavía no necesitan entender completamente. Pero lo detallamos aquí para el beneficio de los educadores.

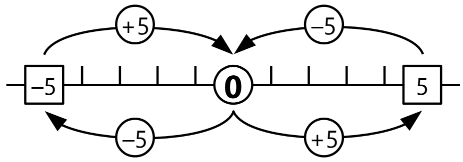
Hemos visto anteriormente que cada operación tiene su *elemento neutro*. (Vea en la introducción general al *Bloque I*.) Si efectuamos la operación respectiva con el elemento neutro, el efecto es nulo. El elemento neutro de la suma y resta es el cero: Sumar o restar cero no tiene ningún efecto. El elemento neutro de la multiplicación y división es el 1: Multiplicar por 1, o dividir entre 1, no tiene ningún efecto.

También conocemos el concepto de la *operación inversa*. Operaciones inversas se anulan mutuamente: Si a un número primero sumamos 5, y después restamos 5, tenemos otra vez el número original. Si un número se divide entre 7, y el resultado se multiplica por 7, tenemos otra vez el número original.

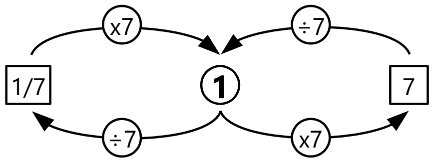
En otras palabras, una operación junto con su operación inversa tiene el mismo efecto como una operación con el elemento neutro. Eso nos permite definir para cada número un *elemento inverso,* respectivo a la operación que estamos considerando, de manera que el número junto con su inverso da el elemento neutro.

Respecto a la operación de la adición, el elemento inverso de cada número es el *número negativo* correspondiente. (Daremos una primera introducción opcional a los números negativos en la *Unidad 92*.) Por ejemplo, el inverso aditivo de 5 es –5, porque 5 + (–5) = 0. Vemos que sumar (–5) tiene el mismo efecto como restar 5. O sea, el elemento inverso tiene la capacidad de convertir una operación en su operación inversa: Restar 5 es lo mismo como sumar el inverso de 5, que es (–5). Y sumar 5 es lo mismo como restar (–5).

Podemos representar el elemento neutro como un ”centro de simetría”. Cada número es el reflejo de su inverso, respecto a este centro de simetría. Para la suma y resta, con el 0 como centro:



Lo mismo aplica al valor recíproco, pero respecto a las operaciones de la multiplicación y división: El valor recíproco de un número es su inverso multiplicativo, o sea el elemento inverso respecto a la multiplicación.



Vemos ahora como las propiedades del valor recíproco (respecto a la multiplicación y división) corresponden exactamente a las propiedades de los números negativos (respecto a la adición y sustracción):

Un número multiplicado por su valor recíproco da 1 (el elemento neutro).

Multiplicar por un número es lo mismo como dividir entre su valor recíproco, y vice versa.

En una fracción, el numerador es el número que ”se multiplica”, y el denominador es el número que ”se divide”. Por eso, si ponemos una fracción ”de cabeza”, obtenemos su valor reciproco: Hemos convertido la multiplicación en división, y la división en multiplicación.

Unidad 43 - Proporciones y fracciones

Prerrequisitos:
- Multiplicaciones y divisiones con fracciones *(Unidades 41 y 42)*.
- Proporciones *(Unidades 20 y 21)*.

Materiales necesarios:
- Objetos de la vida diaria.

TALLER

Proporciones con fracciones en la vida diaria

En la *Unidad 20* ya hemos mencionado diversas situaciones de la vida diaria donde ocurren proporciones. Allí quizás se toparon con algunas situaciones que requieren operaciones con fracciones; entonces podemos resolver esas ahora.

Sigan atentos a las oportunidades donde ocurren proporciones, como las que mencionamos allí: al ir de compras, al planear un negocio, al cocinar según receta, al hacer trabajos manuales, al ir de viaje, etc.

Calcular proporciones que contienen fracciones

A veces los mismos datos de una proporción contienen fracciones; o las operaciones requieren divisiones inexactas, entonces el resultado tiene que expresarse como fracción. En principio, estas operaciones no son diferentes de las operaciones con números enteros. Por ejemplo:

$^3/_4$ litros de jugo se venden a 2.70. ¿Cuánto cuestan $2^1/_2$ litros?

Podemos usar el precio de 1/4 litro como "puente", entonces tenemos:

$\mathbf{\frac{3}{4}}$ litros cuestan **2.70**.

$\downarrow \div 3$ $\qquad$ $\downarrow \div 3$

$\mathbf{\frac{1}{4}}$ litro cuesta **–.90**.

$\downarrow \times 10$ $\qquad$ $\downarrow \times 10$

$\mathbf{2\frac{1}{2} = \frac{10}{4}}$ litros cuestan **9.–**.

O en este caso: 3 personas hacen un trabajo en 45 minutos. ¿Cuánto tiempo demoran 4 personas? (Notamos que esta es una proporción inversa: A más trabajadores, menos tiempo.)

3 personas necesitan **45** minutos.

$\downarrow \div 3$ $\qquad$ $\downarrow \times 3$

1 persona necesita **135** minutos.

$\downarrow \times 4$ $\qquad$ $\downarrow \div 4$

4 personas necesitan $\mathbf{\frac{135}{4} = 33\frac{3}{4}}$ minutos.

Aquí los datos no contienen fracciones; pero necesitamos fracciones para expresar el resultado exactamente.

"Una sola máquina"

Ahora que conocemos las operaciones con fracciones, podemos expresar la combinación de dos máquinas como una sola. (Vea "Principios matemáticos" en la *Unidad 20*.) Hagámoslo con los mismos ejemplos como antes; y comenzamos con el segundo ejemplo:

3 personas necesitan **45** minutos.

$\downarrow$ x4/3 $\qquad$ $\uparrow$ x4/3 $\qquad$ $\downarrow$ ÷4/3 resp. $\downarrow$ x3/4

4 personas necesitan $\mathbf{45 \times \frac{3}{4} = \frac{135}{4} = 33\frac{3}{4}}$ minutos.

Recordamos que dividir entre una fracción es lo mismo como multiplicar por su valor recíproco. La operación es la misma como en la actividad anterior, solamente que la hemos expresado como una sola operación con fracciones.

Veamos ahora el primer ejemplo. Allí también podríamos hacer lo mismo como en la actividad anterior, solamente expresándolo en fracciones. Entonces la operación sería una multiplicación por 10/3. Pero esta operación no es tan obvia desde los datos. Para encontrarla, siempre tendríamos que definir el valor de 1/4 como "puente", y tendríamos que hacer todos los razonamientos involucrados en el primer método. Si ya conocemos las operaciones con fracciones, podemos usar otro camino:

Asumiendo que el "puente" fuera el precio unitario, o sea de un litro, entonces tendríamos que *dividir* entre el primer dato ($^3/_4$), y después *multiplicar* por el segundo dato ($2^1/_2$). Si aplicamos estas operaciones al precio dado (2.70), obtenemos directamente el resultado final. Podemos diagramarlo así:

$\mathbf{\frac{3}{4}}$ litros cuestan **2.70**.

$\div 3/4 \qquad \div 3/4$

1 litro cuesta **. . .**

$\times\ 2\ 1/2 \qquad \times\ 2\ 1/2$

$\mathbf{2\frac{1}{2}}$ litros cuestan **. . .**

O podemos escribirlo así:

$$2.70 \times \frac{2\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$$

... y ahora podemos transformar esta expresión según las reglas de las operaciones con fracciones, sin preocuparnos por la proporción original:

$$2.70 \times \frac{2\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = 2.70 \times \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2.70 \times 5 \times 4}{2 \times 3} = -.90 \times 5 \times 2$$

$$= 9.-$$

Por supuesto que podemos hacer lo mismo si los datos son números enteros.
Hagamos otro ejemplo:

Un ciclista avanza con 24 km/h. ¿Cuánto demora para avanzar 14 km?

24 km en **60** minutos

$\times\ 14/24 \qquad \times\ 14/24$

14 km en **. . .** minutos

$$60 \times \frac{14}{24} = \frac{60 \times 14}{24} = 35 \text{ minutos}$$

Para obtener el resultado, no necesitamos multiplicar 60 x 14 y después dividir entre 24: podemos simplificar por factores y tenemos 5 x 7.

Si se trata de una *proporcionalidad inversa*, entonces no hay que olvidar que la operación se invierte; o sea, multiplicamos por el valor recíproco. Así lo hicimos en el primer ejemplo de esta actividad. Hagamos uno más de este tipo:

En la familia Meléndez son 6 personas. El detergente para lavar los platos les alcanza para 30 días. Durante el verano se añaden 2 invitados a la familia. ¿Cuánto tiempo les durará el detergente ahora? (La proporcionalidad es inversa: Con más personas, el detergente dura menos tiempo.)

Para **6** personas alcanza **30** días.

$\times\ 8/6 \qquad \times\ 6/8$ **(¡!)**

Para **8** personas alcanza $\mathbf{30 \times \frac{6}{8} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}}$ días.

En este ejemplo podemos llegar también con otro razonamiento a la misma operación: Imaginémonos que estamos repartiendo el detergente en porciones que alcanzan un día para una persona. Si 6 personas pueden lavar con este detergente durante 30 días, esto equivale a 30 x 6 = 180 porciones. Ahora, si son 8 personas en vez de 6, estas 180 porciones tienen que repartirse entre 8 personas; entonces duran 180 ÷ 8 = $22^1/_2$ días.

(Vea en "*Principios matemáticos*" *en la Unidad 21*: En una proporción inversa, el *producto* de los datos correspondientes es constante. En nuestro ejemplo, este producto es 180: 30 x 6 = 180; $22^1/_2$ x 8 = 180. Para una sola persona, el detergente alcanzaría para 180 días: *180* x 1 = 180.)

Quienes aprendieron a resolver proporciones con el procedimiento escolar, habrán notado que en los ejemplos de esta actividad llegamos efectivamente a las mismas operaciones como con el procedimiento escolar. Solamente que hemos llegado a estos resultados no con un formalismo abstracto, sino con razonamientos más prácticos y concretos; y así esperamos que los niños puedan comprender el *por qué* de estas operaciones.

Si los niños entienden bien este procedimiento de "una sola máquina", que lo usen. Si están más conformes con el método de "dos máquinas" y un "puente", o con algún otro método que tiene más sentido para ellos, que usen el método de su preferencia. Todo procedimiento es válido, mientras respeta las leyes de la matemática.

Problemas con proporciones

En estos problemas, que cada niño use el procedimiento que le parezca el más apropiado. A veces ayuda hacer un dibujo de la situación. Algunos de estos problemas requieren razonamientos adicionales, aparte del cálculo de proporciones.

1) Yanet tiene dos gatos, y gasta 25.– al mes para alimentarlos. Yamila tiene tres gatos. En circunstancias iguales, ¿cuánto gastará Yamila en alimentos para sus gatos?

2) Si 5 kg de papas cuestan 12.–, ¿cuánto cuestan 12 kg de papas?

3) En la tienda de Antonia venden 7 panecillos a 2.–. En la tienda de Bárbara venden 10 panecillos a 3.–. ¿Dónde es más económico?

4) Un carro avanza $7^{1}/_{7}$ km en $4^{2}/_{7}$ minutos. ¿Cuál es su velocidad en km/h?

5) Un ciclista avanza a $22^{1}/_{4}$ km/h. ¿Cuánto tiempo necesita para 3.125 km?

*6) Susana y Sabrina salen de sus casas al mismo tiempo y se vienen al encuentro. El camino mide 2.760 km. Susana avanza 100 metros en 1 $^{1}/_{2}$ minutos. Sabrina camina 433 $^{1}/_{3}$ m en 5 minutos. ¿A qué distancia de la casa de Susana se encuentran?

*7) Pepe va al mercado. "¿Cuánto cuestan estas uvas?", pregunta a una vendedora. – "Las rojas son 8.– el kilo, y las blancas 12.– el kilo". – "Entonces deme dos kilos de uvas, de manera que cuesten 19.–", dice Pepe. La pobre vendedora no sabe cómo cumplir con este pedido. ¿Puedes ayudarle?

*8) Cuando Adriana pela las papas, termina en 30 minutos. Cuando Leo pela las papas, demora 40 minutos. Hoy están pelando ambos juntos; la cantidad de papas es la misma como siempre. ¿Cuánto demorarán?

¡Cuidado con conclusiones apresuradas!
Si en el problema no.8 llegaste a 70 minutos o a 35 minutos, piénsalo otra vez. Si los dos trabajan, ¡deberían demorar menos que Adriana sola!

Ampliaciones

Una forma frecuente de expresar proporciones

Cuando 15 huevos cuestan 6.–, entonces podemos decir: "La proporción entre el número de huevos y su precio en centavos es de 15 a 600" (o escrito así: 15 : 600). La proporción de 15 : 600 es lo mismo como la proporción de 1 : 40, porque un único huevo cuesta 40 centavos. Podemos escribir entonces: 15 : 600 = 1 : 40.
Llegamos de la primera proporción a la segunda, dividiendo ambos lados entre 15. Eso es exactamente la operación que hacemos en los problemas con proporcionalidad directa. (Recordemos las "máquinas paralelas".) Pero es también la misma operación como el amplificar y simplificar fracciones. Efectivamente, una proporción se puede interpretar como una fracción. Los dos puntos (:) que usamos al escribir una proporción, fueron originalmente un signo de división (÷), y éste a su vez es lo mismo como una fracción. Por tanto, la igualdad anterior se puede escribir también así:

$$\frac{15}{600} = \frac{1}{40}.$$

Vemos en este ejemplo que las operaciones con proporciones son matemáticamente lo mismo como las operaciones con fracciones. En particular, las proporcionalidades directas obedecen a las mismas leyes como las fracciones equivalentes.

Principios matemáticos

Vea la sección "Principios matemáticos" en la *Unidad 20*. Allí se mencionan algunos de los principios relacionados con proporciones.

Unidad 44 - Matemática y música

Prerrequisitos:

- Operaciones básicas con fracciones.
- Es ventajoso saber tocar un instrumento musical y saber leer el pentagrama; pero se puede estudiar la Unidad también sin este prerrequisito.

Materiales necesarios:

- Caja de madera y herramientas para trabajar con madera; cuerda, pita, o liga de jebe larga.
- Regla.
- (opcional) Guitarra; piano/teclado; otros instrumentos musicales.
- (opcional) Metrónomo.

Para los educadores

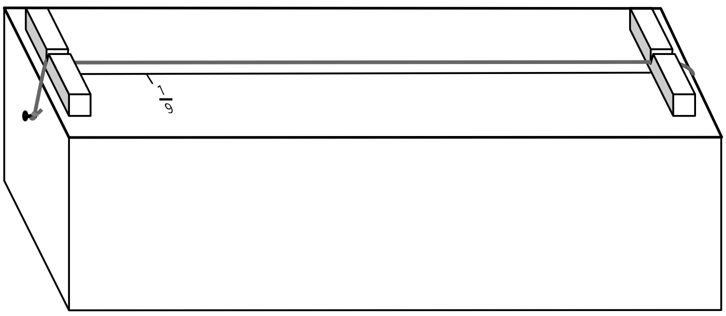
Esta Unidad es opcional. Contiene diversos ejemplos y experimentos que muestran cómo la matemática está muy relacionada con las expresiones musicales. La estudiarán de preferencia aquellos alumnos que ya tienen un interés en la música. Requiere un buen entendimiento de las operaciones con fracciones. Por tanto, es preferible que se estudie hacia el *final* del período de Primaria II.

TALLER

Construimos un monocordio

"Monocordio" significa un instrumento musical con una sola cuerda. Este instrumento nos ayudará a explorar las relaciones entre la escala musical y la matemática.

Consigue o fabrica una caja de madera con una base plana. Prepara dos listones de madera de 1 x 1 cm de grosor y 5 a 10 cm de largo. Hazles un corte delgado en forma de V en el medio de uno de sus lados, aproximadamente hasta la mitad de su grosor. Coloca la caja con la base hacia arriba. Fija los listones sobre la base con goma y clavitos, cerca de los extremos de la caja, y con los cortes hacia arriba. Para los cálculos posteriores será ideal que la distancia entre los listones sea un múltiplo de 18, por ejemplo 36 cm.



Clava un clavo en la parte superior de cada pared lateral de la caja, en la prolongación del corte en V del listón. Los clavos deben sobresalir por 1 a 2 cm.
Tiende una cuerda entre los listones, estírala bien y fíjala en los cortes, de manera que quede bien apretada en los cortes. Prueba la tensión de la cuerda: debe producir un sonido cuando la jalas un poco y la sueltas. Cuando la tensión de la cuerda está bien, ata sus extremos a los clavos sobresalientes.
Si no tienes una cuerda, puedes usar una pita o una liga de jebe del tamaño apropiado.

Debajo de la cuerda, sobre la base de la caja, mide y marca las siguientes distancias desde el listón izquierdo, en fracciones de la distancia entera:

$$\frac{1}{9},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{7}{15},\ \frac{1}{2}.$$

Por ejemplo, si la distancia entre los listones es 36 cm, entonces la primera marca estará a $\frac{1}{9} \times 36 = 4\text{cm}$.

Toca la cuerda tendida para hacerla sonar. Después presiona la cuerda firmemente con un dedo contra la base de la caja, en la posición donde está la marca de 1/9, y toca nuevamente la parte más larga de la cuerda. Después haz lo mismo con la siguiente marca, y así sucesivamente hasta la última (en 1/2). Si lo hiciste bien, los sonidos deben formar la escala musical: Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do.

Si quieres, puedes practicar tocar unas melodías sencillas con el monocordio.

¿Qué tienen que ver estas fracciones con la escala musical? – Haremos todavía otro experimento, después llegaremos a la explicación.

Medimos una guitarra

Si tienes una guitarra, puedes hacer el siguiente experimento:

Mide y anota la longitud de las cuerdas, entre los extremos donde están apoyadas (o sea, la longitud de la parte que vibra).

Multiplica esta longitud por las fracciones que están indicadas arriba para las marcas del monocordio. Anota los resultados.

Ahora mide en el diapasón de la guitarra estas distancias, empezando desde el extremo donde se apoyan las cuerdas. Si lo hiciste bien, deberías llegar exactamente al 2º, 4º, 5º, 7º, 9º, 11º y 12º traste, respectivamente.

Escoge una cuerda y tócala como lo hicimos en el monocordio: primero la cuerda entera, después apretándola sucesivamente en el 2º, 4º, 5º, 7º, 9º, 11º y 12º traste. Debe resultar nuevamente la escala musical.

Efectivamente, la guitarra funciona según el mismo principio como el monocordio: Las notas que suenan dependen de la longitud de la parte de la cuerda que vibra. Al apretar la cuerda sobre el traste, acortamos esta longitud, y así producimos notas diferentes. Los trastes ayudan a hacer esto con exactitud. Es más difícil acertar las notas exactas en un instrumento que no tiene trastes, como el monocordio o el violín.

Las mismas fracciones aparecen no solamente en los instrumentos de cuerdas; también en algunos instrumentos de viento. Por ejemplo, compara en una zampoña las longitudes de los tubos que componen la escala musical. (Aquí quizás no resulta tan exacto, porque la nota depende no solamente de la longitud, sino también del *grosor* de los tubos.)

Frecuencias y proporciones armoniosas

Las notas musicales que percibimos, dependen de la frecuencia de la vibración; o sea, cuán rápidamente vibra la cuerda. Una cuerda que vibra más rápidamente produce un sonido más agudo; si la vibración es más lenta, el sonido es más grave.

La frecuencia a su vez es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda: Si reducimos la longitud de la cuerda a la mitad, su frecuencia será el doble. Eso es la marca en la mitad del monocordio, y eso corresponde al intervalo de una octava (de una Do a la siguiente Do). Las otras fracciones nos dan las proporciones que corresponden a las otras notas de la escala.

A nuestro oído, algunas proporciones entre las frecuencias parecen más armoniosas que otras. Las proporciones más armoniosas son las que se pueden expresar con números enteros pequeños. Lo que es matemáticamente sencillo, lo percibimos como armonioso. Por eso usamos en la música una escala que corresponde a fracciones sencillas. Quizás notaste que los numeradores y denominadores de todas las fracciones en la escala son múltiplos de los números primos más sencillos: 2, 3 y 5. (7/15 parece ser una excepción; pero veremos que en realidad no lo es.) – En cambio, una música con notas en proporciones como 23/67 ó 41/73 nos parecería desafinada y caótica.

La escala musical que usamos hoy, ya está en uso desde hace más de 2500 años. La primera descripción conocida de esta escala proviene de Pitágoras, un matemático griego. Él describió exactamente las proporciones entre las notas, y concluyó que los números enteros son la base de todo lo hermoso, y de todo el universo. Pitágoras se imaginó incluso que aun los planetas debían producir una música armoniosa al moverse sobre el cielo, y que las notas de esa música debían corresponder a las proporciones entre los tamaños de sus órbitas.

Calculamos las frecuencias de la escala musical

Ahora podemos calcular las proporciones entre las frecuencias de la escala musical. Ya hemos visto que el intervalo de Do a la siguiente Do corresponde a una proporción de 2 : 1. La longitud de la cuerda es la mitad, entonces la frecuencia es el doble.

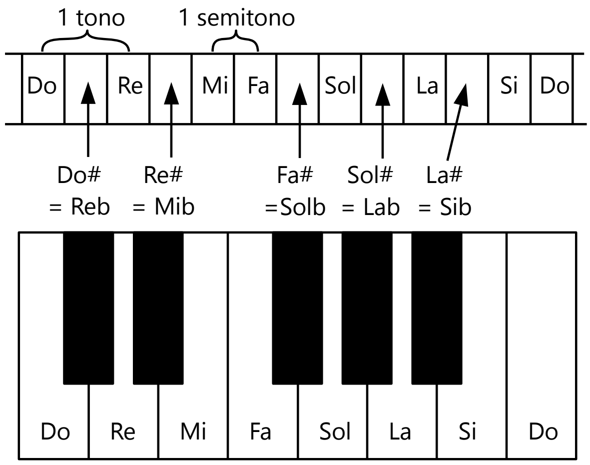
Para la nota Re hemos medido 1/9 de la cuerda. Pero la parte de la cuerda que hacemos vibrar es la parte más larga, o sea 8/9. Ahora, la frecuencia es *inversamente* proporcional a la longitud de la cuerda. Por eso, la frecuencia de Re es el valor recíproco de 8/9 en relación a Do; o sea 9 : 8.

Para Mi hemos medido 1/5 de la cuerda. Entonces la parte que vibra es 4/5, y la proporción de Mi a Do es de 5 : 4.

Calcula de la misma manera las proporciones de las otras notas.

Tonos enteros y semitonos

En el experimento con la guitarra te habrás dado cuenta de que no hemos usado todos los trastes. Entre las notas de la escala musical hay otras notas intermedias que se llaman "semitonos". Estos corresponden a las teclas negras en el piano. En la escritura en el pentagrama, los semitonos se indican con los signos de sostenido (#) o bemol (b). La escala completa, incluidos los semitonos, se ve como a la derecha:

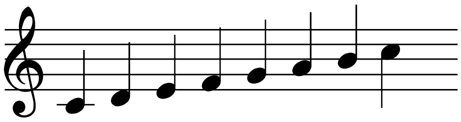


Vemos que los intervalos Mi-Fa y Si-Do son semitonos; todos los otros intervalos son un tono entero. En la guitarra, cada traste corresponde a un semitono. Por eso, cuando el intervalo es un tono entero, tenemos que saltar un traste.

Hasta ahora hemos calculado solamente las proporciones entre la nota Do y las otras notas. Pero ahora, con la ayuda de la escala completa, podríamos también calcular las proporciones entre otras notas de la escala. Si te interesa este tema, pasa a la sección "*Ampliaciones*".

La transposición de tonalidades como operación matemática

Toca en un piano o teclado la escala musical: Do – Re – Mi – Fa – Sol – La – Si – Do. Esta se llama la escala *"Do Mayor"*.

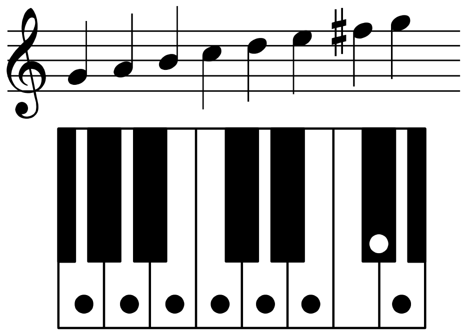


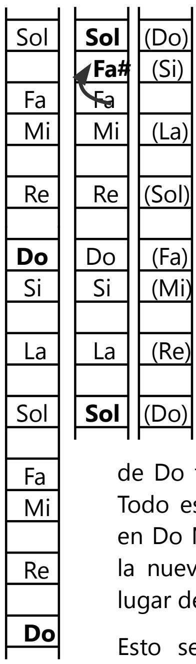
Ahora toca la escala comenzando y terminando con Re: Re – Mi – Fa – Sol – La – Si – Do – Re. Esta escala suena "extraña"; y al final suena "inconclusa". Esto es porque los intervalos no son los mismos como en la escala de Do Mayor.

Toca ahora la escala que comienza y termina con Sol: Sol – La – Si – Do – Re – Mi – Fa – Sol. Esta escala suena casi bien, con excepción de la penúltima nota (Fa). Esta nota hace que la escala suene inconclusa, como la anterior.

Toca la misma escala otra vez. Pero en vez de Fa toca ahora Fa# (Fa sostenido); esa es la tecla negra entre Fa y Sol.

¿Suena bien? – Esta escala tiene en todos sus pasos los mismos intervalos como la escala Do Mayor. Por eso suena igual. Esta es la escala *Sol Mayor:*





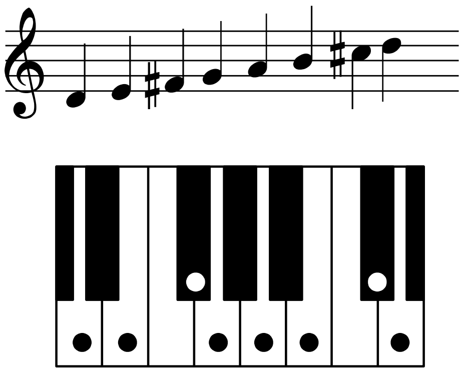
Si miramos el diagrama a la izquierda, vemos cómo se forman los intervalos de la escala Sol Mayor: Si tocamos solamente teclas blancas, todos los intervalos son iguales a la escala Do Mayor, con excepción de los dos últimos. Eso se corrige cuando tocamos Fa# en vez de Fa.

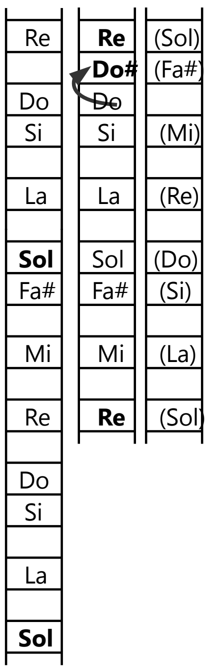
Si sabes tocar alguna melodía en Do Mayor (o sea, usando solamente teclas blancas), ahora puedes tocar la misma melodía en Sol Mayor: Lo tocas todo 5 teclas más a la derecha. En vez de Do tocas Sol, en vez de Re tocas La, etc. Todo es igual como en la melodía conocida en Do Mayor, con una excepción: Cuando en la nueva melodía aparece la nota Fa, en su lugar debes tocar Fa#.

Esto se llama *transponer* una melodía. La transponemos (o "trasladamos") desde la tonalidad Do Mayor a la tonalidad Sol Mayor.

La transposición de Do a Sol es la que requiere un mínimo de cambios: una sola tecla blanca se sustituye por una negra. Si contamos los intervalos, vemos que el intervalo Do-Sol corresponde a 3 tonos enteros y 1 semitono; o sea 7 semitonos. Podemos decir que esta transposición es una operación matemática, porque sigue una regla fija: Cada nota se traslada 7 semitonos "hacia arriba". En este proceso, todas las notas de la nueva escala caen nuevamente en una tecla blanca, excepto la séptima que cae en Fa#. (Cuenta los intervalos: La séptima nota de la escala Do Mayor es Si. Contando 7 semitonos desde Si, llegamos a Fa#.)

Entonces, si aplicamos la misma transposición otra vez, debe otra vez suceder lo mismo. Desde Sol, 7 semitonos hacia arriba, llegamos a Re. *(En vez de subir 7 semitonos, también podríamos bajar 5 semitonos, entonces tenemos lo mismo, solamente una octava más abajo.)* La escala Sol Mayor contiene Fa# en vez de Fa, entonces tenemos que tocar así también la escala Re Mayor: Re – Mi – **Fa#** – Sol – La – Si – Do – Re. Nos damos cuenta de que nuevamente el final de la escala suena mal: Tenemos que sustituir Do por Do# (Do sostenido; la tecla negra entre Do y Re). Ahora suena bien:

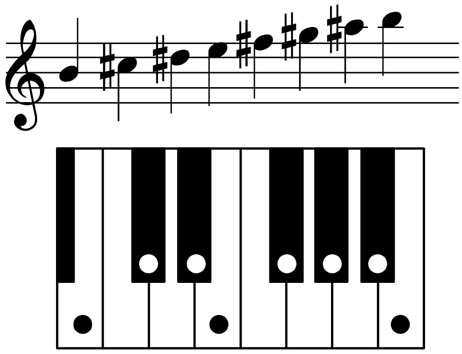




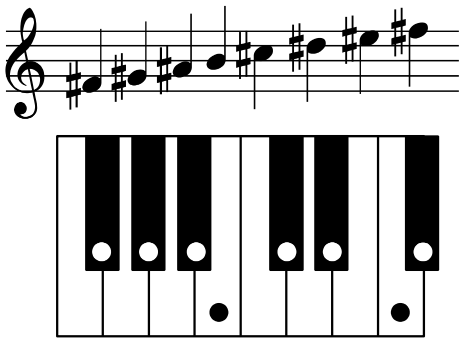
Los intervalos transpuestos resultan según el diagrama a la derecha:

¿Ya entiendes cómo continúa? Si aplicamos la misma operación otra vez, ¿dónde comienza la nueva escala? ¿y qué notas contiene? – Recuerda que la nueva escala mantiene las notas de la anterior; o sea, seguimos tocando Fa# en vez de Fa, y Do# en vez de Do. Pero ahora habrá otra nota más que tenemos que cambiar. ¿Cuál es?

Sigue transponiendo escalas de esta manera. Puedes dibujar diagramas como los de arriba, con los intervalos. Si entiendes el pentagrama, puedes escribir las escalas también en el pentagrama. Continúa así hasta que llegues a la escala Si Mayor. Si lo hiciste bien, debe verse así:

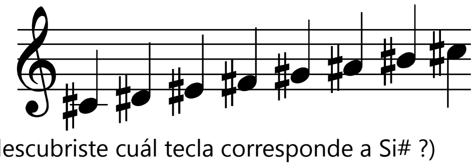


Ahora estamos usando todas las 5 teclas negras. ¿Qué sucederá en la siguiente transposición? – Vamos a ver: Desde Si, 7 semitonos hacia arriba, llegamos a Fa#. La nueva escala será entonces Fa# Mayor, y contiene todas las notas de la escala Si Mayor, excepto la séptima que tenemos que cambiar:
Fa# – Sol# – La# – Si – Do# – Re# – ***Mi#*** – Fa#. ¿Qué nota es Mi# (Mi sostenido)? No hay ninguna tecla negra allí. Pero la matemática siempre funciona: Mi# es un semitono después de Mi. Si subimos un semitono desde Mi, llegamos a Fa. Entonces Mi# = Fa. Pero en la escala no escribimos Fa, escribimos Mi#, para acordarnos que esta nota proviene de una Mi que se ha elevado por un semitono:



Requiere bastante concentración tocar esta escala, pero ¿quizás lo logras?

Hacemos la misma transposición una vez más, y llegamos a la escala Do# Mayor:
Do# – Re# – Mi# – Fa# – Sol# – La# – ***Si#*** – Do#



(¿Ya descubriste cuál tecla corresponde a Si# ?)

La operación matemática ha funcionado perfectamente: Después de aplicarla 7 veces, *cada nota* de nuestra primera escala (Do Mayor) se ha elevado por un semitono. Ninguna se quedó sin cambiar, y ninguna ha cambiado dos veces. La matemática asegura que todo quede en orden.

Apliquemos ahora la operación inversa: *Bajamos* 7 semitonos. Por supuesto que así llegamos a la escala anterior, Fa# Mayor. Y en vez de aumentar un semitono a la nota Si#, tenemos que *disminuirla* por un semitono.

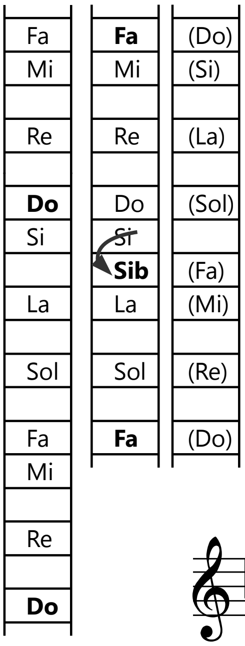
Solamente que en esta escala de Fa# Mayor, la nota Si no es la séptima nota; es la cuarta:

Fa# – Sol# – La# – ***Si*** – Do# – Re# – Mi# – Fa#

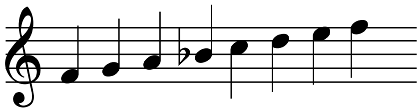
La "operación inversa" es entonces: Bajar 7 semitonos y tocar las mismas notas como antes, excepto la *cuarta* nota, la cual se *disminuye* por un semitono. *(En vez de bajar 7 semitonos, también podríamos subir 5 semitonos, entonces tenemos lo mismo una octava más arriba.)* Verifica que esto funciona así: Regresa por las escalas que ya hemos estudiado, hasta que llegues a Do Mayor, de donde hemos comenzado.

(...)

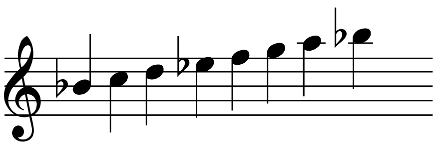
Ahora podemos continuar con esta "operación inversa": Bajamos 7 semitonos desde Do. ¿Adónde llegas? – Toca esta nueva escala, y no olvides disminuir la cuarta nota por un semitono.



En el pentagrama, la nota disminuida se señala con una letra ***b***, y se llama "bemol". En esta escala tenemos la nota Si***b*** *(Si bemol)*:



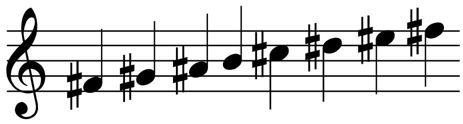
Bajamos otros 7 semitonos, y llegamos a la escala Si***b*** Mayor. Lógicamente, esta escala contiene la nota Si***b*** en vez de Si; y aparece un bemol adicional en la cuarta nota de la escala:



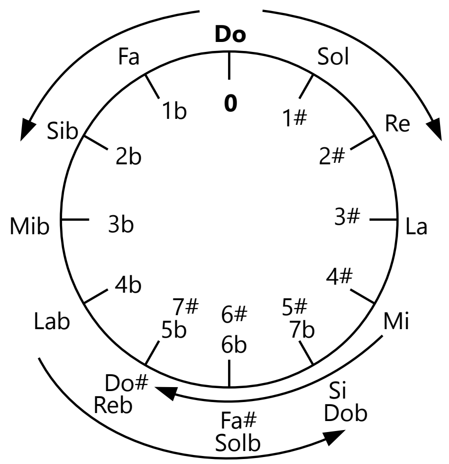
Si tienes perseverancia, continúa con esta operación hasta que tengas 7 bemoles.

(...)

Analizando los resultados, quizás habrás notado que después de 6 "subidas" hemos llegado al mismo lugar como después de 6 "bajadas": La escala Fa# Mayor es la misma como la escala Sol***b*** Mayor. En el piano son exactamente las mismas teclas; solamente que las dos escalas se escriben con signos diferentes:



En la teoría de la música, este esquema de transposiciones es conocido como el "círculo de las quintas" (porque en cada transposición saltamos a la *quinta* nota de la escala anterior). Como hemos visto, se basa enteramente en leyes matemáticas.



El ritmo y compás: Fracciones del tiempo

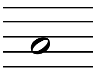
Un ritmo constante es una división del tiempo en intervalos iguales. Para que varios músicos toquen juntos, tienen que tocar en el mismo ritmo. Un buen músico sabe mantener el ritmo por sí mismo. En una orquesta, el conductor indica el ritmo para todos. Otra ayuda para mantener el ritmo es el *metrónomo*: un aparato que emite sonidos de "clic" en intervalos regulares.

La velocidad de una pieza musical se mide en tiempos por minuto. Un "tiempo" significa la duración de una "nota básica"; eso es normalmente la que se escribe como "nota negra". (Más adelante explicaremos esto más exactamente.) En otras palabras, cuando das palmadas en el ritmo de la música, normalmente vas a dar una palmada en cada "tiempo". Por ejemplo, si la velocidad es 60 por minuto, das una palmada cada segundo.

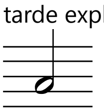
Si tienes un metrónomo, puedes probar con él las diferentes velocidades: ¿Cómo suena un ritmo de 60 por minuto? ¿de 40 por minuto? ¿de 100 por minuto? – Algunos teclados electrónicos permiten también seleccionar la velocidad de sus ritmos automáticos.

Las notas del pentagrama indican no solamente cuál nota tocar; indican también en qué momento y por cuánto tiempo, o sea el ritmo. La duración de las notas se expresa en fracciones del "tiempo" básico. Como en las *frecuencias* de las notas, también en los *ritmos* se trata de fracciones sencillas: se componen de múltiplos de 2 y de 3, con muy pocas excepciones. Fracciones con otros denominadores se perciben como un ritmo "desordenado".

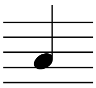
El ritmo se indica con los siguientes símbolos de notas:



La nota ***redonda*** dura 4 tiempos. Se llama también "nota entera", porque en muchas piezas musicales, un compás dura 4 tiempos; entonces la nota redonda dura un compás entero. (Más tarde explicaremos lo que es el compás.)

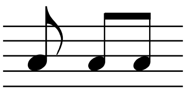


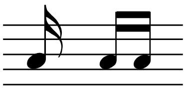
La nota ***blanca*** dura 2 tiempos, o sea, la mitad de una redonda.



La nota ***negra*** dura 1 tiempo, la mitad de una blanca.

La ***corchea*** dura $^1/_2$ tiempo, la mitad de una negra. (La forma con "colita" se usa cuando una corchea está sola. Cuando hay varias, se unen con una barra gruesa como a la derecha.)

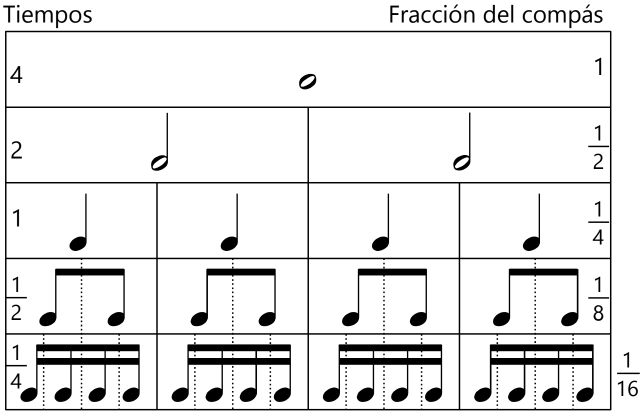




La ***semicorchea*** dura $^1/_4$ tiempo, la mitad de una corchea.

El siguiente diagrama muestra la duración de estas notas en conjunto:

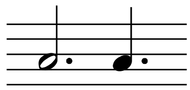
Tiempos Fracción del compás



Sinfonía de ritmos

En esta actividad deben participar por lo menos 4 a 6 personas. Una persona es "conductor(a)" de la orquesta y cuenta los tiempos, no muy rápido, pero en un ritmo constante: "1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, ..." De las demás personas, cada una representa una de las notas que acabamos de presentar, y da palmadas en el ritmo que corresponde a su nota: La nota redonda da una palmada cada 4 tiempos; o sea, solamente cuando el conductor dice "1". La nota blanca da una palmada cada 2 tiempos; o sea, en "1" y en "3". La nota negra da una palmada cada tiempo; o sea, en el mismo ritmo como cuenta el conductor. La corchea da dos palmadas en cada tiempo; o sea, con cada número que se cuenta, y también en el medio entre dos números. Si alguien de los participantes es muy ágil, puede hacer las semicorcheas: ¡tiene que dar cuatro palmadas en cada tiempo! – Si son pocas personas, el conductor puede a la vez dar las palmadas para una de las notas (por ejemplo la redonda). Probablemente la "orquesta" necesitará algunos ensayos hasta que funcione.

Si tienen uno o varios pianos o teclados, en vez de dar palmadas pueden también tocar notas en los ritmos indicados. Usen de preferencia unas notas que armonicen entre sí, por ejemplo Do – Mi – Sol – Do, o La – Do – Mi – La.



Notas punteadas

Un punto detrás de una nota indica que se le añade la mitad de su duración. Por ejemplo, la blanca dura 2 tiempos; si tiene un punto detrás, significa que se le aumenta 1 tiempo más: dura 3 tiempos. La negra dura 1 tiempo; con un punto dura la mitad más, o sea $1^1/_2$ tiempo. ¿Cuánto dura una corchea con punto?

¿Pueden dar palmadas, o tocar notas, según el siguiente ritmo?

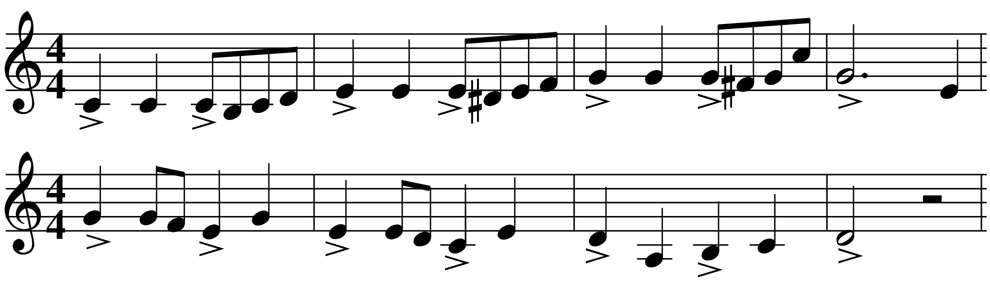
Intenten también hacer una "sinfonía" con este ritmo: Dos o tres personas tocan este ritmo, y otra persona toca al mismo tiempo un ritmo continuo de notas negras.

Inventen otros ritmos, toquen y escríbanlos.

El compás

En la "Sinfonía de ritmos" se habrán dado cuenta de que suena "rítmico", porque en ciertos momentos se produce un sonido más fuerte que en otros: El tiempo más "fuerte" es el 1, porque en ese momento *todos* dan una palmada. El segundo tiempo más fuerte es el 3; y los otros tiempos son menos fuertes. En cambio, si se dan palmadas que tienen todas la misma fuerza, no suena tan "rítmico".

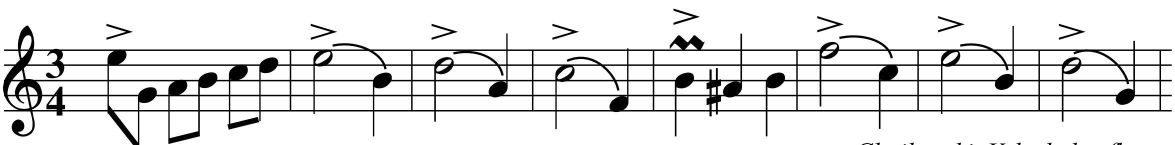
Las piezas musicales se dividen en *compases* para indicar esta "fuerza" del ritmo. Frecuentemente se usa un compás de $^4/_4$, o sea, cada compás contiene 4 tiempos, como en este ejemplo:



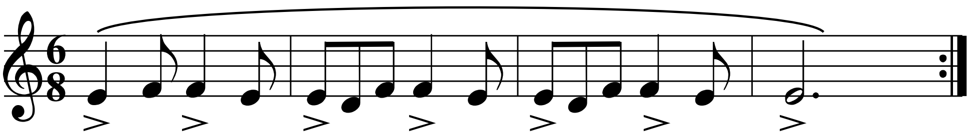
Meacham, La patrulla americana.

La primera nota de cada compás se toca más fuerte. En un compás de $^4/_4$, frecuentemente se toca también el tiempo "3" un poco más fuerte. (En el pentagrama anterior, las notas "más fuertes" se señalan con un acento >.) Los músicos que tocan según notas, tienen que entender las fracciones del tiempo, para tocar las notas en la duración correcta, y para saber cuáles son las notas que reciben el acento. Si sabes tocar un instrumento, intenta tocar la melodía arriba.

Otros compases usuales son el de $^3/_4$ y de $^2/_4$ (en esos solamente el tiempo 1 es más fuerte), y el de $^6/_8$. En este último se cuentan las corcheas ("octavos") como un tiempo, y los tiempos 1 y 4 se tocan con más fuerza.



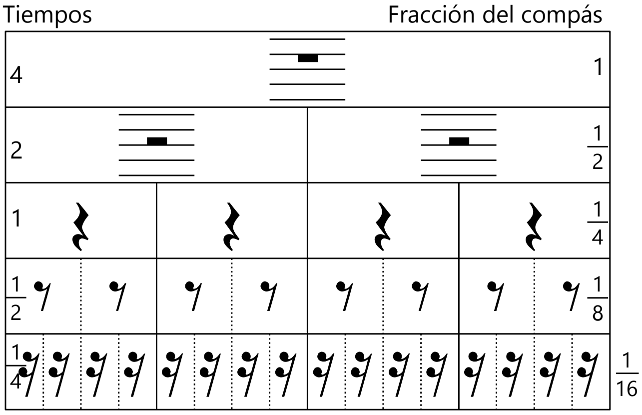
Chaikovski, Vals de las flores.



Offenbach, Barcarole.

Silencios

Tiempos   Fracción del compás



Al anotar una pieza musical, se anotan también los silencios. Esos son tiempos donde no se toca ninguna nota. El diagrama a la izquierda muestra los símbolos de los silencios que corresponden a las notas que ya conocemos.

El primer ejemplo arriba ("La patrulla americana") tiene al final un silencio de blanca, o sea un silencio que dura dos tiempos.

Hoja de trabajo 44.1:

Arriba (no. 1 a 4): Marca con un acento las notas que se tocan más fuerte, de acuerdo al compás indicado.

Abajo (no. 5 a 8): Estos compases están incompletos. Complétalos con notas o silencios, tales que su duración total sea la indicada. (Fíjate en los números al inicio de cada línea que indican el compás.)

Ampliaciones

Calculamos más proporciones entre notas

Las explicaciones en esta sección pueden ser demasiado difíciles de entender para alumnos de primaria. Se presentan aquí para los interesados en el tema.

Hemos calculado las proporciones entre las frecuencias de las notas Re, Mi, Fa, etc, en comparación con Do. Pero ¿cuál es por ejemplo la proporción entre Si y Mi? Recuerda que una proporción es lo mismo como una fracción o una división. Tenemos que dividir entonces la frecuencia de Si entre la frecuencia de Mi:

$$\frac{15}{8} \div \frac{5}{4} = \frac{15}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{2}.$$

El resultado es el mismo como la proporción entre Sol y Do. Si comparamos la escala musical completa, con los semitonos, vemos que efectivamente de Do a Sol son 7 semitonos, y de Mi a Si también son 7 semitonos:

Do		Re		Mi	Fa		Sol		La		Si	Do

Podemos ahora también calcular cuál es la proporción que corresponde a un semitono. Calcula la proporción entre Fa y Mi, o entre la Do superior y Si. (Debe dar el mismo resultado en ambos casos.)

Pero no con todos los intervalos funciona así. Calculamos la proporción entre La y Re. Con eso llegaremos a los límites del sistema de las armonías sencillas:

$$\frac{5}{3} \div \frac{9}{8} = \frac{5}{3} x \frac{8}{9} = \frac{40}{27}.$$

Este intervalo tiene 7 semitonos. Esperaríamos entonces que el resultado sea igual al intervalo Do-Sol, o sea 3/2. ¡Pero no lo es! Comparemos las dos fracciones, buscando un denominador común:

$$\frac{3}{2} = \frac{81}{54} \qquad \frac{40}{27} = \frac{80}{54}.$$

O sea, las dos fracciones son casi idénticas, pero hay un pequeño error. (De hecho, el error es tan pequeño que solamente con un oído muy bien entrenado se podría notar una diferencia entre las dos notas.) Pero ¿de dónde viene este error?

El problema está en el plan de Pitágoras de establecer la escala entera sobre proporciones entre números enteros. En realidad, este plan no funciona, porque los números enteros y las fracciones no son los únicos números que existen. Este es un tema que exploraremos recién en el nivel de Secundaria I; pero podemos ahora ya ver donde está el problema:

La proporción más sencilla, aparte de la octava (2:1), es el intervalo Do-Sol (3:2), o sea 7 semitonos. Si desde Sol subimos otros 7 semitonos, llegamos a la siguiente Re. Esta nota debe entonces tener la frecuencia $\frac{3}{2} x \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$. La Re inferior, una octava más abajo, debe entonces tener la mitad de esta frecuencia, o sea $\frac{9}{4} \div 2 = \frac{9}{8}$. Por eso hemos asignado esta proporción al intervalo Do-Re, o sea un tono entero.

Pero la octava entera, desde Do a la siguiente Do, corresponde a 6 tonos enteros. Entonces deberíamos poder expresar la octava entera como la combinación de 6 proporciones de 9 : 8. Eso es 9/8 de 9/8 de 9/8 de ... etc, o sea, una multiplicación sucesiva:

$$\frac{9}{8} x \frac{9}{8} x \frac{9}{8} x \frac{9}{8} x \frac{9}{8} x \frac{9}{8} = \frac{531441}{262144}.$$

Eso se supone que es igual a la octava entera, o sea 2 : 1. Pero no es igual; esta fracción no se puede simplificar. Como en el ejemplo anterior, el error es tan pequeño que solamente un músico muy bien entrenado puede notarlo con el oído. Sin embargo, hay un error. La escala musical como la describió Pitágoras no es perfecta, porque las proporciones entre números enteros no alcanzan para describir toda la armonía del universo.

Notas adicionales: De hecho, Pitágoras intentó construir la escala entera únicamente sobre múltiplos de 3/2. Entonces, en su sistema no aparecen los múltiplos de 5 como en Mi (5/4), La (5/3) y Si (15/8). Él asignó a Mi la frecuencia 81/64, a La 27/16, y a Si 243/128. (Si deseas, puedes calcular cuánto es la diferencia entre las fracciones de Pitágoras, y las que usan múltiplos de 5.)

El sistema que usa los múltiplos de 5, se basa en los "*sobretonos*": Cuando una cuerda vibra, se escucha no solamente su nota básica. Con menor intensidad se escuchan también las notas que corresponden a los múltiplos enteros de su frecuencia. Entonces, si la cuerda suena Do, la frecuencia 2 corresponde a la siguiente Do, 3 corresponde a Sol de la segunda octava, y 4 corresponde a la Do de la tercera octava. La frecuencia 5 ya no aparece en el sistema de Pitágoras, pero está muy cerca de 81/16, la Mi de la tercera octava. (5 = 80/16.) Por eso se puede asignar a la Mi de la primera octava la frecuencia 5/4, y así obtenemos una proporción en números más sencillos. De allí resultan 5/3 para La y 15/8 para Si.
Si continuáramos con los sobretonos, la frecuencia 6 corresponde a Sol de la tercera octava, y la frecuencia 8 es la Do de la cuarta octava; pero la frecuencia 7 definitivamente no es parte de la escala musical.

El pequeño error de estos sistemas de afinación se manifiesta también al definir los semitonos. Aplicando consecuentemente las proporciones con números enteros, por ejemplo la nota "Do sostenido" y la nota "Re bemol" resultan similares, pero no exactamente iguales. Esto presenta un problema en los instrumentos con teclas como el piano, porque no sería práctico tener dos teclas diferentes para dos notas casi idénticas.

Para investigar: Intenta expresar las frecuencias de los semitonos de la escala con fracciones en números pequeños. Puedes usar diversos intervalos para obtener diversas posibilidades, y compáralas entre sí. Por ejemplo, la nota Re# se puede expresar como Re (9/8) más un semitono (16/15):

$$\frac{9}{8} x \frac{16}{15} = \frac{6}{5}.$$

Pero también se puede expresar como Do (1) más tres semitonos. El intervalo de tres semitonos se encuentra por ejemplo entre Re(9/8) y Fa(4/3), entonces sería:

$$\frac{4}{3} \div \frac{9}{8} = \frac{4}{3} x \frac{8}{9} = \frac{32}{27}.$$

Tenemos una ligera diferencia entre estas dos representaciones de la nota Re#. (¿Cuánto es la diferencia?) En otras palabras, el tono entero Do-Re más un semitono "normal" de 16/15 no es exactamente lo mismo como los tres semitonos entre Re y Fa. – Investiga otros intervalos de la misma manera.

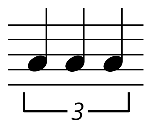
Por causa de estos pequeños errores, hoy en día la gran mayoría de los instrumentos musicales no se afinan según la afinación pitagórica ni según el sistema de los sobretonos, sino según la "afinación temperada" que fue popularizada por J.S.Bach. Esta escala divide la octava en 12 intervalos exactamente iguales. Pero de esta manera, las proporciones entre las frecuencias resultan en números irracionales: un semitono corresponde a $\sqrt[12]{2}$, y un tono entero a $\sqrt[6]{2}$. Lo asombroso es que estas proporciones irracionales se encuentran tan cercanas a las fracciones sencillas, que nuestro oído las percibe todavía como armoniosas.

Como ejemplo, comparemos las frecuencias de las notas Mi y Si (ambas en respecto a Do) según los diferentes sistemas, calculadas en decimales:

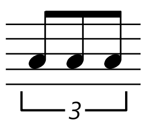
Nota	Pitagórica	Sobretonos	Temperada
Mi	81/64 ≈ 1.2656	5/4 = 1.25	$\sqrt[3]{2}$ ≈ 1.2599
Si	243/128 ≈ 1.8984	15/8 = 1.875	$\sqrt[12]{2048}$ ≈ 1.8877

Tresillos

En cuanto a la duración de las notas, hasta ahora hemos examinado solamente aquellas donde los denominadores son múltiplos de 2. Pero algunos ritmos requieren dividir un intervalo de tiempo en *tres* partes iguales. Esto se indica con los mismos símbolos de notas; pero se juntan tres notas con una línea o un corchete y el número 3, para indicar que la división es entre 3 y no entre 2. Esto se llama *tresillo*.

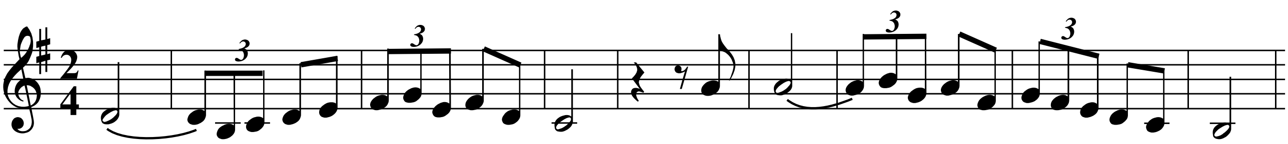


El tresillo de negras dura como 2 negras, o sea 2 tiempos, pero se divide entre 3.



El tresillo de corchetes dura como 2 corchetes, o sea 1 tiempo, pero se divide entre 3.

¿Pueden dar palmadas o tocar notas según el ritmo de la siguiente melodía?



Yradier, La Paloma.

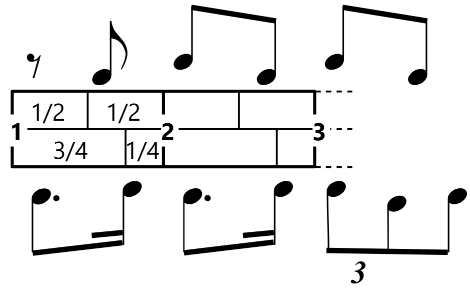
Un ritmo muy difícil

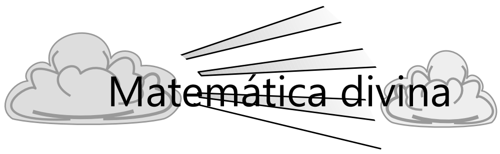
Algunas piezas musicales para piano requieren tocar un ritmo "normal" con una mano, y al mismo tiempo tresillos con la otra mano. Esta es una situación difícil que requiere mucha práctica para tocarlo correctamente:

Ponchielli, Danza de las horas.

Analiza cómo tienen que seguirse las notas en este caso. Puedes dibujar dos tiras o rectas numéricas que representan el ritmo de la mano derecha y de la mano izquierda, respectivamente, y marca dónde exactamente comienza cada nota *(vea a la derecha)*:

Si sabes tocar piano, ¿logras tocar este ritmo?





La música celestial

Pitágoras, al hablar de la "música de los planetas", no estaba tan lejos de una verdad que se expresa también en la Biblia:

"Los cielos cuentan la gloria de Dios,
y la expansión (el espacio) anuncia la obra de sus manos.
Un día emite palabra al otro día,
y una noche a la otra noche declara sabiduría."

(Salmo 19:1-2)

¿Y cuál es el lenguaje que usan los cielos para contar la gloria de Dios? – Los fundadores de la ciencia moderna estaban convencidos de que ese lenguaje es la matemática. Así lo expresan en sus obras Juan Kepler, Isaac Newton, y otros descubridores de las leyes científicas que rigen el movimiento de los planetas. Ellos dijeron que Dios creó un mundo ordenado y armonioso, y por eso debía ser posible describir sus leyes mediante la matemática. Newton descubrió que una sola fórmula matemática, la Ley general de la gravedad, permite calcular todos los movimientos de los planetas. Y él dijo que eso comprueba que el universo es la creación de un Dios inteligente y poderoso, quien creó también la matemática, y nos dio una mente capaz de entender la matemática.

Bloque V: Números decimales (Unidades 45 a 53)

Para entender bien las actividades de este bloque, es indispensable tener un buen entendimiento del sistema decimal y del valor posicional con números enteros (*Unidades 2 y 8*), saber calcular con números hasta un millón *(Bloque III)*, y conocer por lo menos los conceptos básicos de las operaciones con fracciones *(Unidades 34 a 39)*. Algunas Unidades más avanzadas de este bloque requieren todas las operaciones con fracciones que se introducen en el Bloque IV.

El uso de las unidades de medida es una buena preparación para el cálculo con decimales. Por eso, la primera Unidad de este bloque repasa este tema y lo relaciona con las fracciones. Las Unidades siguientes introducen el concepto de los números decimales y las operaciones básicas con estos números. En este contexto se introduce también el cálculo con porcentajes.

En términos del sistema convencional, los Bloques I a V cubren los temas necesarios para el nivel de Primaria (hasta 6to grado) en cuanto al cálculo numérico (aritmética). Aunque los libros escolares usuales para este nivel contienen temas adicionales (p.ej. potencias, raíces, ecuaciones, ...), es preferible dejar esos temas para el nivel de Secundaria, porque requieren para su entendimiento un razonamiento más abstracto, el cual en la mayoría de los alumnos despierta recién en la adolescencia. Además, esos temas más avanzados se usan muy poco o nunca en la vida diaria; por lo cual no hay necesidad de estudiarlos a una edad temprana. Sin embargo, para los alumnos interesados y de desarrollo rápido, algunos de estos temas se introducen en las Unidades opcionales del Bloque VIII.

Unidad 45 - Conversión de unidades de medida (Repaso y ampliación)

Prerrequisitos:
- Operaciones con números hasta un millón *(Bloque III)*.
- Operaciones con fracciones *(Unidades 34 a 39)*.

Materiales necesarios:
- Cinta métrica, balanza, litrera.

TALLER

Escribir medidas de otra manera

Hagan unas actividades de **"Estimar y medir"** como en las *Unidades 7 y 31*. Repasen las tres posibilidades de escribir una medida que se compone de unidades de medida mixtas, como por ejemplo 3m 72cm = 3.72m = 372cm. Pregunte a los niños si pueden encontrar otra manera más de escribir esta misma medida, pero sin usar otras unidades aparte de metros y centímetros.

Por si los niños sugieren algo como 2m 172cm, podemos decirles que esto sí es la misma medida; pero está escrita en forma de una operación que no se ha terminado de calcular, porque tenemos 2 metros escritos, pero los 172cm contienen otro metro entero, entonces esta forma de escribirlo requiere hacer un cálculo: 2m 172cm = 2m + 1m 72cm = 3m 72cm; y esa es ahora una de las formas que ya tenemos.

Si los niños no tienen otras ideas, hágales recordar que ellos saben calcular con fracciones. ¿Podemos usar fracciones para expresar nuestra medida?

Que lo piensen y conversen por algún tiempo. Quizás ellos mismos descubren que podemos escribir 1cm como $^{1}/_{100}$ m. Entonces nuestra medida puede escribirse también como $3\,^{72}/_{100}$ m, o como $^{372}/_{100}$ m.

Quizás los niños recuerdan también que las fracciones se pueden amplificar o simplificar. Entonces podríamos escribir también $3\,^{18}/_{25}$ m, resp. $^{93}/_{25}$ m; o también $3\,^{720}/_{1000}$ m resp. $^{3720}/_{1000}$ m.

Practiquen escribir con fracciones las medidas que encuentran en sus actividades de estimar y medir. Hagan lo mismo con kilogramos y gramos, litros y mililitros, etc. Por ejemplo, en las recetas de cocina podemos encontrar datos como: " $^{1}/_{4}$ kg de harina", " $^{3}/_{4}$ *l* de leche", etc. Conviertan estas medidas en gramos resp. mililitros. Por el otro lado, cuando dice p.ej. "350 g", conviértanlo en una fracción de un kilo.

Ejemplos para practicar

Si han hecho suficientes actividades con medidas concretas, practiquen ahora con estos ejemplos para ver si lo entendieron bien:

Escribe con fracciones:

a) 9kg 437g	b) 7t 53kg	c) 10*l* 350m*l*
d) 2km 80m	e) 5m 55cm	f) 6m 66mm
g) 16kg 9g	h) –.65	i) 7m 5cm

Escribe con la unidad mayor, y con unidades combinadas:

Ejemplo: $4\frac{23}{100}\,m = 4.23\,m = 4\,m\ 23\,cm$

j. $8\frac{298}{1000}$ km	k. $33\frac{3}{10}$ cm	l. $4\frac{43}{1000}$ l
m. $\frac{67}{1000}$ kg	n. $25\frac{25}{1000}$ t	ñ. $7\frac{9}{100}$ m
o. $2\frac{77}{200}$ km	p. $8\frac{21}{25}$ m	q. $39\frac{7}{8}$ km

Convierte de manera adecuada para poder sumar o restar:

Ejemplo:
$$6.340\,km + \frac{356}{1000}\,km = 6340\,m + 356\,m = 6696\,m = 6.696\,km$$

r. $5\frac{303}{1000}$ kg – 488g s. 7m 55cm + $2\frac{89}{100}$ m

t. 392kg + $4\frac{737}{1000}$ t u. $\frac{6789}{1000}$ l – 5l

v. 12.500km – $2\frac{129}{250}$ km w. $\frac{131}{40}$ l – 2.830l

Ampliaciones

Problemas para pensar, y convertir medidas

1. Un supermercado es abastecido con 200 kg de naranjas, $^{3}/_{8}$ t de papas, y 0.165 t de zanahorias. ¿Cuánto pesan estos productos juntos?

2. Para llegar a su trabajo, el señor Abril camina $^{7}/_{10}$ km hasta la estación del bus, viaja 3.760 km en bus, y después camina 350 metros hasta su lugar de trabajo. ¿Cuánto mide el camino entero?

3. De 25 metros de tubo, se usaron $^{93}/_{5}$ m para renovar las instalaciones de la casa, y 247 cm para hacer un experimento con los niños. ¿Cuánto mide lo que quedó del tubo?

Medidas del tiempo como fracciones

Podemos hacer lo mismo con las medidas del tiempo. *(Solamente que eso ya no tiene relación con los números decimales; porque las medidas del tiempo no se convierten según el sistema decimal.)*
Por ejemplo, en vez de "3 horas 25 minutos" podríamos escribir: "3 $^{25}/_{60}$ horas". O también, simplificado: "3 $^{5}/_{12}$ horas". O también " $^{205}/_{60}$ horas", resp. " $^{41}/_{12}$ horas".

Durante el día, practiquen decir la hora de esta manera: "Son las 9 y $^{17}/_{60}$." – "Son las 3 y $^{11}/_{15}$." Etc.

Escribe con fracciones:

a) 7 h 36 min b) 19 min 52 sec

c) 456 min d) 2432 sec

e) 11 días 9 horas f) 9 h 55 min

g) 3 meses 12 días h) 9 semanas 3 días

Escribe con la unidad mayor, y con unidades combinadas:

Ejemplo: $4\frac{23}{60}\text{ min} = 4\text{ min } 23\text{ sec}$

i. $9\frac{37}{60}$ h j. $18\frac{4}{5}$ min k. $4\frac{5}{6}$ días

l. $7\frac{1}{7}$ semanas m. $\frac{7}{15}$ meses

Convierte de manera adecuada para poder sumar o restar:

Ejemplo:
$$18\text{ h} + \frac{5}{8}\text{ días}$$
$$= 18\text{ h} + 15\text{ h}$$
$$= 33\text{ h} = 1\text{ día } 9\text{ h}$$

n. $3\frac{7}{12}$ h + 26 min

ñ. 59 h + $5\frac{5}{12}$ días

o. $4\frac{3}{5}$ meses + $6\frac{6}{7}$ semanas

p. $3\frac{2}{3}$ min − 199 sec

¿A dónde vamos desde aquí?

La Unidad siguiente *(46)* provee una vía de acceso a los números decimales mediante la investigación propia del sistema decimal y del tablero posicional. La *Unidad 47* continúa con el tema de las unidades de medida, e introduce los números decimales desde esta perspectiva. Según las preferencias y necesidades de los alumnos se pueden hacer ambas Unidades, o solamente una de ellas.

Unidad 46 - El sistema decimal (III)

Viaje de exploración matemática

Prerrequisitos:
- Principios básicos del sistema decimal *(Unidades 1 a 8)*.
- Operaciones básicas con fracciones *(Unidades 34 a 39)*.

Materiales necesarios:
- Tijera, cúter, cinta adhesiva, goma.
- Plumones no permanentes (para pizarra acrílica)

Para los educadores

Esta Unidad continúa los "viajes de exploración" anteriores acerca del sistema decimal *(Unidades 2 y 8)*. Como esas, presenta diversos desafíos de investigación, para que los alumnos descubran por sí mismos las propiedades del sistema decimal; en este caso su ampliación más allá de las unidades.

TALLER

Descubrimos los números decimales

En la *Unidad 29 (División entre números de varias cifras)* hemos dividido números entre 10, entre 100, etc, hasta que "ya no se puede más". Supongo que te detuviste cuando tus cifras llegaron a las unidades, porque allí termina el tablero posicional. Pero si has aprendido a calcular con fracciones, entonces sabes que las unidades se pueden dividir en partes aun más pequeñas – sí, las fracciones. Si las unidades fueran cubitos de madera, podrías tomar una sierrita y cortar cada cubito en partes más pequeñas, digamos 10 partes de cada cubito. Entonces cada parte sería un décimo.

¿Cómo se escribe esto en el sistema decimal? – Simplemente continuamos de manera lógica. Si dividimos un número entre 10, cada cifra se desplaza por una posición hacia la derecha. Entonces, si quisiéramos dividir unidades entre 10, las cifras saldrían afuera, más allá del margen derecho del tablero. Pero no hay ningún problema con eso; ¡simplemente añadimos unas columnas adicionales a la derecha!

Eso es lo interesante en la matemática: ¡es infinita! No hay por qué detenernos al borde del tablero. Cuando llegamos al límite, podemos definir algo nuevo más allá del límite. Solamente tenemos que hacer eso de manera lógica: las leyes antiguas tienen que seguir funcionando. Entonces, si pasamos más allá del borde derecho del tablero, el valor posicional debe seguir dividiéndose entre 10. Piensa rápidamente, antes de seguir leyendo: ¿Cuál es entonces el valor posicional inmediatamente a la derecha de las unidades? ¿y dos posiciones a la derecha de las unidades?

Así podemos añadir tantas columnas como queremos a la derecha, y podemos seguir dividiendo números entre 10. Si nuestras unidades fueran cubitos de madera y siguiéramos cortándolos, las partes pronto serían tan pequeñas que tendríamos nada más que aserrín. Pero en la matemática eso no importa, podemos "inventar" partes tan pequeñas como queremos.

En el siguiente ejemplo comenzamos con el número 4700 y lo dividimos sucesivamente entre 10:

÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10

	M	**C**	**D**	**U**	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	...
	4	**7**						...
4700 ÷ 10 =		4	7					...
÷ 10 =			4	7				...
÷ 10 =				4	7			...
÷ 10 =					4	7		...
÷ 10 =						4	7	...

Ahora queremos escribir eso en números "normales". Pero tenemos un problema: Si escribimos solamente 47, no sabemos si eso significa 47 unidades, o 47 décimos, o 47 centésimos o milésimos o partes aun más pequeñas. Tenemos que marcar dónde terminan las unidades (o sea, los números enteros), y comienzan las fracciones. Para eso sirve *el punto decimal*. El punto decimal se coloca siempre detrás del último entero (o sea, detrás de las unidades), y delante del primer dígito decimal (o sea, el de los décimos).
Además, aquí también tenemos que rellenar los espacios vacíos con ceros donde es necesario. Entonces, los números del tablero se escriben así:

4700

470

47

4.7 (4 unidades y 7 décimos, resp. 47 décimos)
0.47 (4 décimos y 7 centésimos, resp. 47 centésimos)
0.047 (4 centésimos y 7 milésimos, resp. 47 milésimos)
(Algunos prefieren escribir una coma en vez del punto.)

Ahora tenemos que entender que las "partes" se vuelven más pequeñas, cuanto más avanzamos hacia la derecha, porque dividimos cada vez entre diez. Entonces, si escribimos un número decimal muy largo, en realidad no es ningún número "grande", mientras todas esas cifras están detrás del punto decimal. Mira por ejemplo este número:

0.3902783053478218789

Este número "grande" es menor a 1, porque a la izquierda del punto decimal tenemos un cero – o sea, no tenemos *ni una sola unidad*, solamente partes fraccionarias (el "aserrín").

Aun si añadimos más ceros a la izquierda del punto decimal, eso no aumenta en nada el valor del número:

00000000.3902783053478218789

Este es el mismo número como antes – no hay unidades, ni decenas, ni centenas ... solamente "aserrín". Por eso se dice de una persona inútil que es "*un cero a la izquierda*": no añade nada al valor total.

Los números decimales se inventaron más tarde que el sistema decimal: recién en el siglo 16. Pero una vez que el sistema decimal estaba en uso, era lógico que alguna vez alguien lo iba a usar también para escribir fracciones.

En realidad ya conoces los números decimales desde las unidades de medida. Por ejemplo, si alguna vez midieron tu estatura, quizás te dijeron que mides 1.43 metros. Eso se puede leer como "un metro y 43 centímetros". Pero los centímetros no son otra cosa que los *centésimos* de un metro. Entonces podríamos decir también: "un metro entero y 34 centésimos".

Tarea 1. Ahora vamos a ver si sabes aplicar las leyes antiguas acerca de la multiplicación y división por 10, 100, 1000, etc. aun "más allá del borde", o sea, con los números decimales.

a) Dibuja un tablero posicional con varias columnas por ambos lados del punto decimal. Escribe un número con varias cifras dentro del tablero y divídelo entre 10, entre 100, entre 1000 ... Escribe los resultados primero en el tablero, y después también aparte en notación normal.

b) Escribe un número decimal con varias cifras detrás del punto decimal y multiplícalo por 10, 100, 1000 ... (Como arriba, primero en un tablero posicional, y después escribe los resultados también como números "normales".)

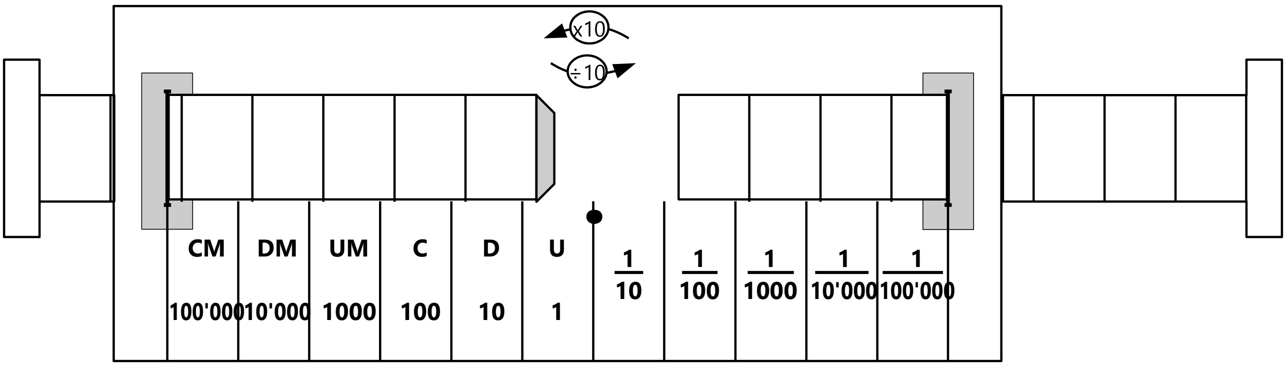
c) Observa: ¿Qué sucede con la posición del punto decimal (o sea, qué *parece* suceder), cuando multiplicas un número decimal por 10? ¿Y cuando lo divides entre 10?

La tira móvil de valores posicionales *(Hoja de trabajo 46.1)*

Corta la hoja base (la que tiene indicados los valores posicionales). Si deseas, puedes pegarla encima de una cartulina para que sea más fuerte.

Las dos líneas verticales gruesas indican dónde hacer cortes con un cúter. Refuerza el área alrededor de estas líneas con cinta adhesiva transparente antes de hacer los cortes.

Corta las dos partes de la tira delgada. Si deseas, puedes pegar éstas también sobre cartulina. Introdúcelas por ambos lados desde atrás por los cortes de la hoja base, para que se encuentren delante de la hoja:

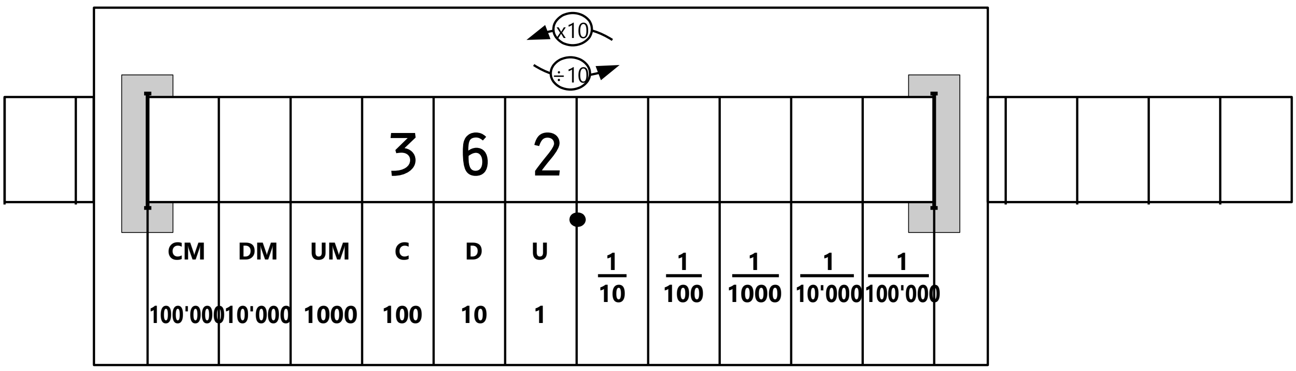


Pega las dos partes de la tira delgada entre sí, poniendo goma en la parte sombreada.

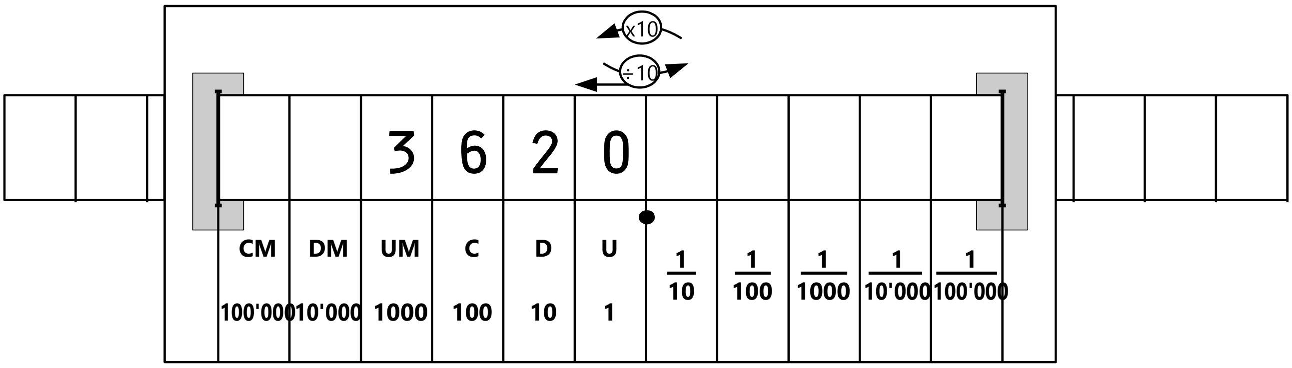
Plastifica la tira delgada en su cara anterior con cinta adhesiva transparente.

Ahora puedes practicar con esta tira las propiedades del sistema decimal:

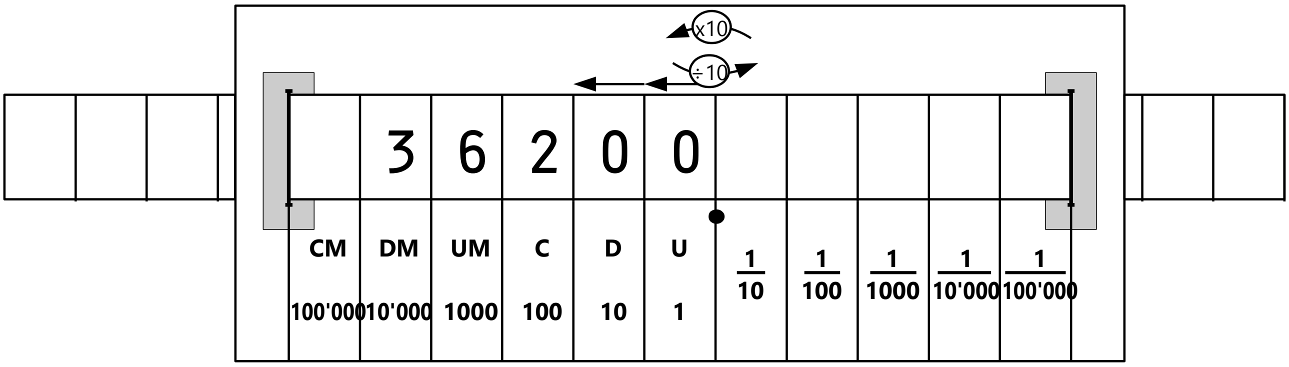
Pon la tira en posición media y escribe encima algún número con un plumón para pizarra acrílica (los que pueden borrarse fácilmente).



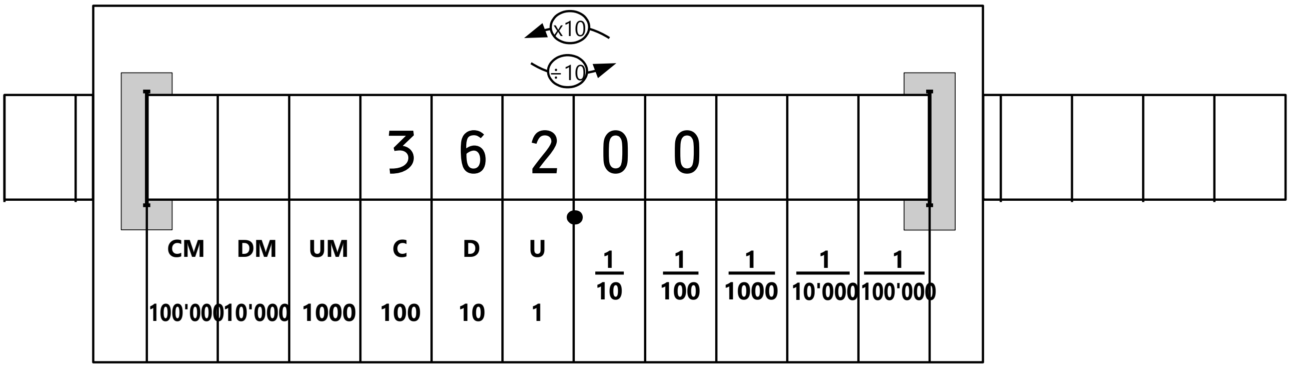
Mueve la tira una posición hacia la izquierda (en la dirección de la flecha que dice "x10"). Tu número se ha multiplicado por 10. Lo único que falta es completar un cero en la posición que quedó vacía entre tu número y el punto decimal:



Haz lo mismo una vez más. Tu número original se ha multiplicado por 100:

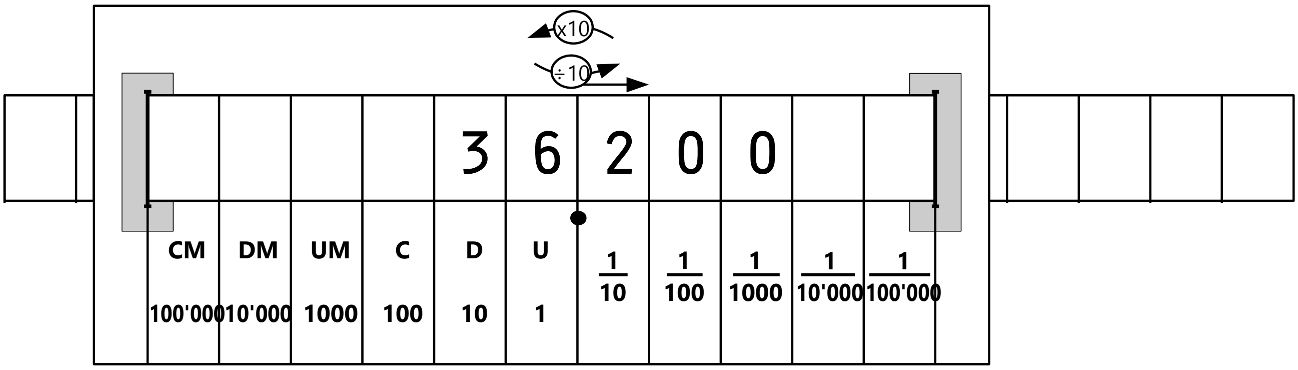


Si deseas, puedes continuar así mientras quede espacio en la tira. Después regresa la tira a su posición original:

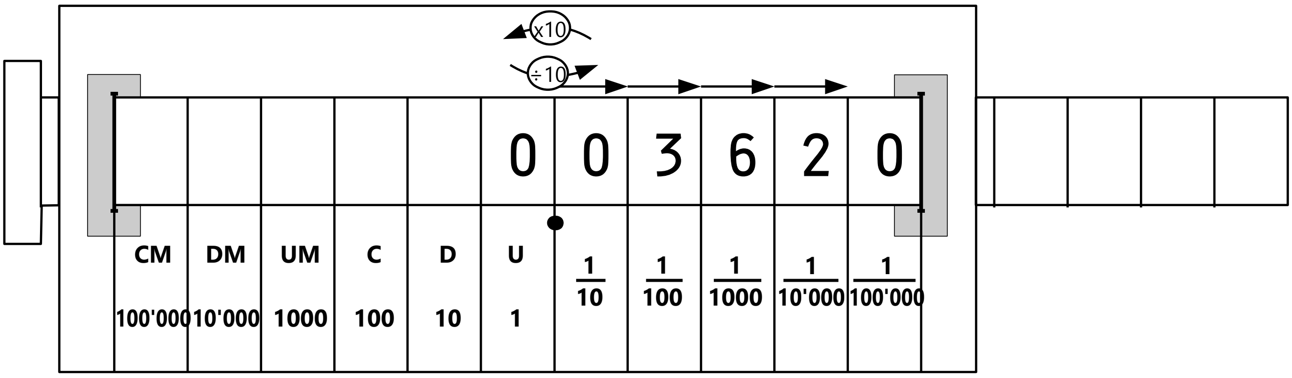


Tenemos ahora esos ceros detrás del punto decimal, pero eso no hace nada. Sigue siendo tu mismo número del inicio; los ceros detrás de la coma no cambian nada en su valor. (Si te molestan, puedes borrarlos.)

Mueve ahora la tira una posición más hacia la derecha (en la dirección de la flecha que dice " ÷10"). Tu número se ha dividido entre 10:



Sigue haciendo lo mismo algunas veces más. Ahora tu número está dividido entre 10'000:



En esta posición de la tira quedó una posición vacía detrás del punto decimal; tuvimos que completar un cero allí. También por delante, en la posición de las unidades, normalmente se escribe un cero cuando no hay nada, para que el número no comience con un punto.

Tarea 2. Experimenta un poco con esta tira, usando diferentes números. Observa y responde:

a) ¿En qué se convierten las unidades cuando se dividen entre 10? ¿y entre 100? ¿y entre 1000?

b) ¿En qué se convierten las *decenas* cuando se dividen entre 100? ¿y entre 1000? ¿Puedes explicar *por qué*?

c) ¿Entre cuánto hay que dividir las *centenas* para que se conviertan en *centésimos*? ¿Por qué?

d) ¿En qué se convierten los décimos cuando se multiplican por 10? ¿por 100? ¿por 1000? ¿Puedes explicar por qué?

e) ¿Por cuánto hay que multiplicar los *milésimos* para que se conviertan en *centenas*? ¿Por qué?

(Pautas en el Anexo A)

Tarea 3. Multiplica y divide un número decimal varias veces por 10. Observa lo que sucede con las cifras del número en la tira, y con la posición del punto decimal cuando escribimos los números. Por ejemplo, comienza con un número que tiene 3 dígitos decimales (detrás del punto decimal), y multiplícalo sucesivamente por 10, hasta que lo hayas multiplicado por 100'000. Escribe el resultado de cada paso en papel o en la pizarra, uno debajo del otro.

a) ¿Cómo describirías el movimiento de las cifras en la tira al multiplicar? ¿y al dividir?

b) ¿Cómo describirías el movimiento del punto decimal en los números escritos al multiplicar? ¿y al dividir?

c) Cuando multiplicamos un número entero (sin decimales) por 10, ¿puedes describir este resultado también como un movimiento (aparente) del punto decimal? ¿Y cuando escribimos un número entero que termina con 0, y lo dividimos entre 10?

Ampliaciones

Practica multiplicaciones y divisiones por 100, 1000, etc.

A continuación hay unos ejemplos para aplicar las observaciones que hiciste en la investigación:

1. 5789 ÷ 100	10. 3.704 x 1000
2. 40'800 ÷ 1000	11. 2.9 x 10'000
3. 67'550 ÷ 100'000	12. 290 x 10'000
4. 905'000 ÷ 100	13. 0.000037 x 1000
5. 28 ÷ 1'000'000	14. 1.000037 x 100'000
6. 289.034 ÷ 100	15. 0.0908 x 1'000'000
7. 3000.6 ÷ 1000	16. 7855.23 x 1000
8. 0.023 ÷ 100	17. 30.04 x 100'000
9. 40.07 ÷ 10'000	18. 0.102003 x 10'000

Cómo leer números decimales

Acostumbrados a la lectura de números enteros, algunos leen 0.47 como "cero punto cuarenta y siete". Pero esta manera de leer números decimales conduce a malentendidos, como vemos en el siguiente ejemplo:

"Cuál es mayor, cero punto nueve o cero punto once?"

Piénsenlo por unos momentos, antes de seguir leyendo.

"Cero punto nueve" se escribe así en cifras: 0.9
Este número vale $^{9}/_{10}$, o si lo amplificamos, $^{90}/_{100}$.

"Cero punto once" se escribe así: 0.11
Este número vale $^{11}/_{100}$, y eso es mucho *menor* que $^{90}/_{100}$. O sea, "cero punto once" es menor que "cero punto nueve".

Es que el número 0.9 se puede escribir también así: 0.90
El cero adicional no cambia nada en el valor del número; sigue siendo $^{9}/_{10}$ = $^{90}/_{100}$. Pero si quisiéramos leerlo como leemos los números enteros, el primer número se leería "cero punto nueve", mientras el segundo se leería "cero punto noventa". Entonces ¿"cero punto nueve" es lo mismo como "cero punto noventa"? Esta manera de expresarse confunde, y por tanto es mejor no usarla.

Tenemos otra ambigüedad cuando consideramos el número 0.09: ¿Esto también se leería "cero punto nueve"? Al hablar así, no podemos distinguir entre 0.9 y 0.09, o entre 0.47 y 0.047.

Al ver el número 0.09, probablemente diríamos ***"cero punto cero nueve"***; o sea, ***enumeramos los dígitos uno por uno***. Entonces, para evitar malentendidos y ambigüedades, ¡usemos esta forma de expresarnos de manera consecuente!

0.9 = "cero punto nueve"
0.09 = "cero punto cero nueve"
0.47 = "cero punto cuatro siete"
0.047 = "cero punto cero cuatro siete"
0.0563 = "cero punto cero cinco seis tres"

Así hay una correspondencia exacta entre lo que está escrito y lo que leemos, y evitamos confusiones.

Alternativamente podemos leer los números decimales ***como fracciones***:

0.9 = "nueve *décimos*"
0.09 = "nueve *centésimos*"
0.47 = "cuarenta y siete *centésimos*"
0.047 = "cuarenta y siete *milésimos*"
0.0563 = "quinientos sesenta y tres *diezmilésimos*"

Si usamos esta última forma, podemos leer los números como si fueran enteros, y sin embargo no hay confusión, porque la fracción nos indica en cuál posición del tablero posicional se encuentran las cifras. Solamente que tenemos que hacer mentalmente la conversión del número decimal a una fracción.

Escribe en decimales:

1. veintitrés centésimos
2. setenta y nueve milésimos
3. setenta y nueve cienmilésimos
4. seiscientos seis milésimos
5. trescientos veintiocho centésimos
6. ocho mil ocho diezmilésimos
7. cuarenta y cinco mil cincuenta y cuatro millonésimos

Unidad 47 - Números decimales y las unidades de medida

Prerrequisitos:
- Expresar medidas en forma de fracciones *(Unidad 45)*.
- *(para unos cuantos ejercicios):* Medidas de áreas *(Unidad 32)*.

Materiales necesarios:
- Cinta métrica.

Para los educadores

Encuentre sus propias actividades concretas

Esta Unidad no contiene muchas sugerencias para actividades concretas. Pero usted puede introducir los conceptos de esta Unidad en cualquier contexto que involucra medidas: Actividades de estimar y medir; pesar ingredientes para una receta de cocina; pesar alimentos que están comprando; hacer las mediciones necesarias para un trabajo manual; efectuar las mediciones y los cálculos necesarios para el proyecto del plano de la casa *(Unidad 67)*, etc. Use cualquier oportunidad de mediciones que se presente, para proveer un contexto concreto para los conceptos de esta Unidad.

TALLER

Las medidas como números decimales

(***Nota:*** Los alumnos que hicieron la *Unidad 46*, posiblemente no necesitan las explicaciones en este apartado. Para quienes no hicieron la *Unidad 46*, lo que sigue será su primera introducción a los números decimales.)

Observemos una vez más esta igualdad:

3m 72cm = 3.72 m = $3\ {}^{72}/_{100}$ m

Quizás recuerdas que entre los centímetros y los metros hay otra unidad de medida poco usual, el "decímetro" (dm) que equivale a 10 cm. Entonces podemos escribir también:

3.72 m = 3m 7dm 2cm.

Pero 1dm viene a ser igual a ${}^{1}/_{10}$ m. Entonces podemos interpretar nuestra medida así:

3.72 m = 3m + ${}^{7}/_{10}$ m + ${}^{2}/_{100}$ m.

O sea, cada cifra después del punto significa una fracción aparte: La primera cifra después del punto (7) significa décimos, y la siguiente cifra (2) significa centésimos.

¿Qué pasa si añadimos milímetros?

3m 72cm 4mm = ¿?

Podemos convertir los centímetros en milímetros, entonces tenemos 3m 724mm, o escrito con una fracción, $3\ {}^{724}/_{1000}$ m. Parece lógico que esto puede escribirse como 3.724 m. Si lo escribimos en un tablero posicional, los milímetros están en la siguiente posición después de los centímetros, entonces el 4 tiene que seguir inmediatamente al 2. *(Vea en la actividad más abajo, "El tablero posicional como ayuda")*.)

Entonces tenemos:
3m 72cm 4mm = 3.724 m
= $3\ {}^{724}/_{1000}$ m = 3 m + ${}^{7}/_{10}$ m + ${}^{2}/_{100}$ m + ${}^{4}/_{1000}$ m

Y podríamos continuar de la misma manera: Si tuviéramos la posibilidad de medir fracciones de un milímetro, entonces podríamos añadir otra cifra detrás del 4, que significaría *diezmilésimos* de metros (resp. décimos de milímetros); y así sucesivamente. Las cifras detrás del punto son una ampliación del sistema decimal donde aplican las mismas reglas como en los números enteros: Cada vez que pasamos una posición hacia la derecha, el valor posicional se divide entre 10.

Ahora, lo mismo podemos hacer con fracciones que no expresan medidas, con tal que sean fracciones *decimales* (décimos, centésimos, milésimos, ...) Por ejemplo, en vez de escribir "${}^{3}/_{10}$ tortas" podemos escribir "0.3 tortas". La cifra detrás del punto decimal siempre significa décimos, no importa si se trata de décimos de un metro, o décimos de una torta.

Ceros al final de un número decimal:

Al final de un número decimal, los ceros no tienen significado. Por ejemplo "300 milímetros" se podrían escribir así en metros: 0.300 m . Pero 300 milímetros equivalen a 30 centímetros, entonces podemos escribir 0.30 m . También equivalen a $^{3}/_{10}$ metros; entonces sería también correcto escribir 0.3 m .

Observen las siguientes igualdades paralelas:

$$\frac{300}{1000} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$
$$0.300 = 0.30 = 0.3$$

0.3 significa "tres décimos". Si detrás de este número escribimos todavía "cero centésimos, cero milésimos", etc, eso no aumenta ni quita nada del valor del número. Esos ceros son superfluos.

Podemos entonces escribir, por ejemplo, 0.7 kg. Como número decimal, eso es correcto, aunque no existe ninguna unidad de medida usual que corresponda a $^{1}/_{10}$ de un kilo. *(Para pensar: ¿Cuántos gramos son 0.7 kg?)*

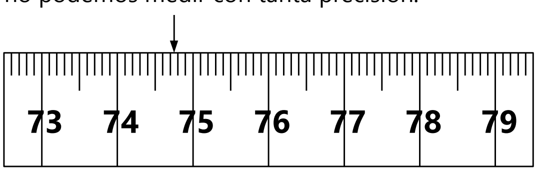
Números decimales en la cinta métrica y en la recta numérica

Mide con una cinta métrica un objeto de tamaño regular como una mesa, una cómoda, una caja grande, etc. Podemos interpretar la cinta métrica como una recta numérica, con los centímetros como unidades. Pero la cinta métrica nos permite medir con una precisión de milímetros. O sea, entre las unidades hay divisiones más pequeñas que son décimos de la unidad. Si tu objeto mide por ejemplo 74.8 cm, entonces entre los números 74 y 75 hay un lugar exacto en la cinta métrica que corresponde al número decimal 74.8.

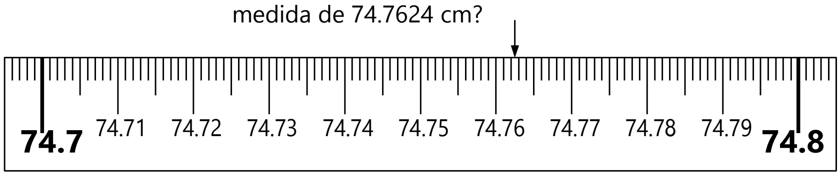
Pero es más probable que 74.8 cm tampoco sea la medida *exacta* de este objeto. Quizás mide una fracción de un milímetro más, o una fracción de un milímetro menos. Podríamos imaginarnos que existe una cinta métrica más exacta, que indica también los décimos de milímetros. Si tuviéramos ojos microscópicos (o una lupa fuerte), podríamos distinguir esas marcas de décimos de milímetros, y entonces podríamos indicar el tamaño del objeto con mayor precisión.

En nuestra imaginación podemos continuar este proceso y pensar en una cinta métrica que mide centésimos de milímetros, o aun milésimos de milímetros. Entonces podríamos decir, por ejemplo, que nuestro objeto mide 74.7624 cm. ¿Dónde exactamente en la escala estaría esta medida?

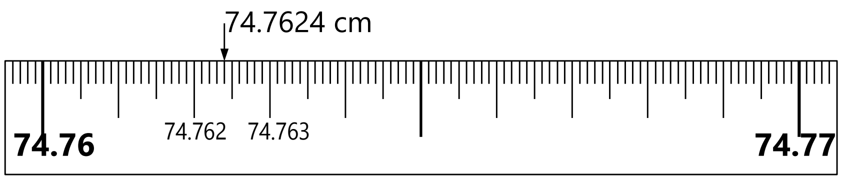
En la cinta métrica real solamente podemos decir que está entre 74.7 y 74.8 cm. Los decimales que siguen no nos ayudan en la situación real, porque no podemos medir con tanta precisión.



Hagamos ahora un dibujo agrandado de nuestra imaginaria "cinta métrica de alta precisión". La agrandamos a una escala de 100:1, o sea cien veces el tamaño que tiene en realidad. El extremo izquierdo y el extremo derecho del dibujo muestran marcas de milímetros que existen en la cinta métrica real: a la izquierda tenemos 74.7 cm y a la derecha 74.8 cm. Todas las otras líneas son marcas imaginarias de décimos y centésimos de milímetros. ¿Dónde se encuentra la medida de 74.7624 cm?



Tiene que estar dentro del dibujo, porque es mayor a 74.7 cm, pero menor a 74.8 cm. Analicemos los décimos de milímetros: Nuestra medida es mayor a 74.76 cm, pero menor a 74.77 cm. Ahora, entre estas dos marcas hay otra vez diez divisiones. La segunda de estas marcas pequeñas significa 74.762 cm. Sabemos que nuestra medida es un poco mayor a eso, pero menor a 74.763 cm. Entonces se encuentra entre estas dos marcas. Para decir *exactamente* dónde, tenemos que agrandar el dibujo aun más, para poder ver aun las marcas de los milésimos de milímetros. Este dibujo ahora ya no muestra ninguna marca real de milímetros. El espacio entero del dibujo corresponde a tan solamente un décimo de milímetro – el tamaño de un punto que apenas se podría distinguir con el ojo:



Si siguiéramos agrandando el dibujo, podríamos ubicar aun más decimales de precisión. Pero el dibujo representaría cada vez una porción menor de la escala entera.

Practica ahora con la ***Hoja de trabajo 47.1*** ubicar números decimales en una recta numérica.

El tablero posicional como ayuda

En la *Unidad 31* ya hemos usado el tablero posicional para la conversión de las unidades de medida. Ampliaremos esta idea para incluir los números decimales.

Si definimos el metro como unidad básica, entonces el tablero posicional de las medidas de longitud se ve así:

1000 (km)	100	10	1 **m** •	$^1/_{10}$	$^1/_{100}$ (cm)	$^1/_{1000}$ (mm)
5	0	4	7	0	8	5

El punto grueso indica dónde tenemos que colocar el punto decimal: entre las unidades y los décimos. Entonces, los números puestos como ejemplo se escriben así: **5047.085 m**

Como siempre, podemos leer en el tablero posicional cuántos hay de cada unidad; entonces podemos escribir la misma medida también así:

5 km 47 m 8 cm 5 mm

Pero ahora sabemos que los centímetros y milímetros se pueden escribir como fracciones de un metro. Entonces podríamos escribir también:

5047 m + $^8/_{100}$ m + $^5/_{1000}$ m,

o más sencillo: 5047 $^{85}/_{1000}$ m.

Las dos formas son iguales, como demuestra esta operación con fracciones:

$$\frac{8}{100}+\frac{5}{1000} = \frac{80}{1000}+\frac{5}{1000} = \frac{85}{1000}$$

O sea, hay dos formas de interpretar las cifras en el tablero posicional:

A) Las interpretamos cifra por cifra: Hay un 8 en la posición de los centésimos ($^8/_{100}$), y un 5 en la posición de los milésimos ($^5/_{1000}$).

B) Leemos todos los decimales como un solo número. Su valor posicional corresponde entonces a la posición del *último* dígito de ellos: Hay 85 en la posición de los milésimos ($^{85}/_{1000}$).

Cambio de la unidad básica

Hagamos ahora un cambio de unidad: Definimos el kilómetro como nueva unidad básica. Entonces el punto decimal viene detrás de los kilómetros, y todas las otras unidades se expresarán como fracciones de un kilómetro:

km •			m		cm	mm
5	0	4	7	0	8	5

Entonces nuestra medida se escribe así: **5.047085 km**

Con esta nueva definición de la unidad básica, los valores posicionales de nuestro tablero se ven así:

1 **km** •	$^1/_{10}$	$^1/_{100}$	$^1/_{1000}$ (m)	$^1/_{10'000}$	$^1/_{100'000}$ (cm)	$^1/_{1'000'000}$ (mm)
5	0	4	7	0	8	5

Los 47 metros corresponden a $^{47}/_{1000}$ km, los 8 cm son $^8/_{100'000}$ km, y los 5 milímetros son $^5/_{1'000'000}$ km. O resumiendo todo como una única fracción, tenemos 5 $^{47'085}/_{1'000'000}$ km.

Por si hubiera alguna duda acerca de esta última expresión, vamos a verificarlo otra vez con una operación con fracciones:

$$\frac{47}{1000}+\frac{8}{100'000}+\frac{5}{1'000'000}$$
$$=\frac{47'000}{1'000'000}+\frac{80}{1'000'000}+\frac{5}{1'000'000}=\frac{47'085}{1'000'000}$$

Usen el tablero posicional para escribir diversas medidas que están midiendo. Escríbanlas también como números decimales. Observen los cambios que ocurren cuando cambia la unidad básica: Escriban una misma medida en metros, en centímetros, en kilómetros...
Hagan lo mismo también con pesos (t, kg, g), con volúmenes (*l*, *ml*), y con áreas.

Escribimos medidas con números decimales

Practica con los siguientes ejercicios escribir diversas medidas en números decimales. Puedes usar el tablero posicional como ayuda.

Ejemplo: Escribe 5 t 742 kg 18 g en toneladas. Respuesta: 5.742018 t

1. Escribe 6 km 53 m en kilómetros.
2. Escribe 18 *l* 400 *ml* en litros.
3. Escribe 37 cm 8 mm en metros.
4. Escribe 8 t 55 kg 600 g
   a) en toneladas
   b) en kilogramos.
5. Escribe 86'032 mm
   a) en centímetros
   b) en metros
   c) en kilómetros.

6. Escribe 6 km 740 m 7 cm 9 mm
   a) en kilómetros
   b) en metros
   c) en centímetros.

7. Escribe 64 m^2 19 dm^2 8 cm^2 25 mm^2
   a) en m^2
   b) en dm^2
   c) en cm^2
   d) en mm^2

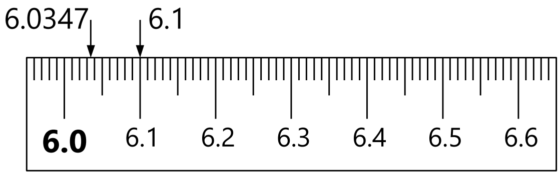
*8. Escribe 5 ha 79 m^2 6 cm^2
   a) en km^2
   b) en ha
   c) en a
   d) en m^2
   e) en dm^2

Ampliaciones

Comparar números decimales

¿Cuál es mayor, 6.0347 ó 6.1 ?

El primer número parece "mayor", porque tiene más cifras. Pero tenemos que fijarnos en su *valor posicional*. Ambos números tienen 6 enteros, entonces la diferencia entre ellos es muy pequeña. El primer número tiene 0 décimos. O sea, en una escala de décimos se encuentra entre 6.0 y 6.1. El segundo número tiene 1 décimo, entonces es mayor. Con la ilustración de la recta numérica o cinta métrica:



Practica con los siguientes ejemplos. (Haz tantos como necesitas.) Copia *(no escribas dentro del libro)* y escribe el signo correcto (<, >, =):

34.549 __ 34.55	8.9253 __ 89.244
9.801 __ 9.7999	0.036700 __ 0.0367
12 __ 11.3921	4.0456 __ 4.4
0.57021 __ 0.5702	16.6060 __ 16.0606

Matemática divina

La virtud de la exactitud

Los números decimales nos permiten expresar medidas y cantidades con mucha precisión. En muchos asuntos de la vida diaria no nos importa si por ejemplo un clavo mide 5.083 cm ó 5.084 cm. Pero la exactitud es una virtud importante en ciertas actividades: Para un cirujano o dentista, un error de un décimo de milímetro puede hacer daño al paciente en vez de curarlo. Para un piloto que tiene que aterrizar en la neblina, una desviación de su rumbo por un décimo de un grado puede significar la muerte. La música de una orquesta sufre una distorsión si un músico está atrasado en el ritmo por tan solo un décimo de un segundo.

Dios también actúa con precisión. "Cuando vino el cumplimiento del tiempo, Dios envió a su Hijo ..." (Gálatas 4:4), en el momento preciso, ni antes ni después. Siglos antes, por medio del profeta Daniel, anunció el año de la crucifixión (Daniel 9:25-26). – Jesús dijo que aun los cabellos de nuestra cabeza son todos contados (Lucas 12:7).

Se ha dicho que la matemática es la ciencia más exacta. Así que la matemática puede darnos una idea de la exactitud de Dios.

Unidad 48 - Suma y resta de números decimales

Prerrequisitos:

- Entender los conceptos del sistema decimal y de los números decimales.
- Suma y resta vertical, cifra por cifra.

Materiales necesarios:

- Material de canje en base 10 (tapas de botellas o similares).
- Cartulina grande para el tablero posicional.
- Ábaco.

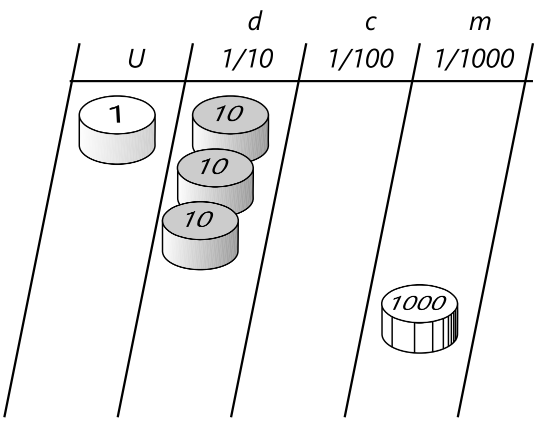
TALLER

Suma y resta en el tablero posicional

Alisten un tablero posicional grande en cartulina, como en las *Unidades 3 y 27*. Esta vez tenemos que incluir también los decimales, por lo menos hasta los milésimos, pero aun mejor hasta los millonésimos. Si quieren volver a usar el tablero de las actividades anteriores, entonces tendrán que extenderlo por el lado de los decimales.

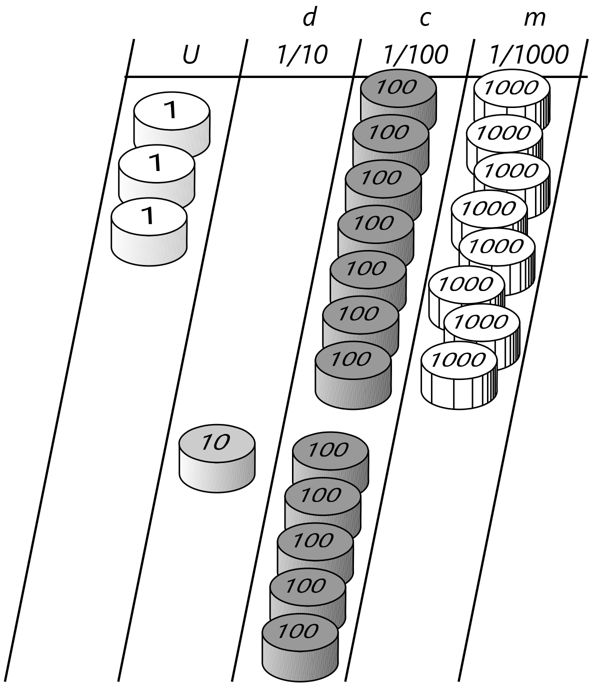
Usen material de canje, como por ejemplo el material de las tapas de botellas, para representar sumas y restas en el tablero. Si tienen suficientes colores distintos de tapas de botella, pueden definir nuevos colores para décimos, centésimos, etc, y rotularlos de acuerdo a sus valores. Si no pueden hacer eso, entonces pueden redefinir el material que ya tienen: Para esta actividad, las tapas marcadas con "10" van a valer un décimo, las con "100" un centésimo, etc. (En este caso, el mayor valor que tenemos son las unidades; y no vamos a poder hacer operaciones con decenas, centenas, etc.)

Vamos a sumar 1.3 + 0.001 . Colocamos los sumandos en el tablero como corresponde:



En este ejemplo podemos simplemente juntarlos, y vemos que el resultado es 1.301 .

Otro ejemplo: 3.078 + 0.15



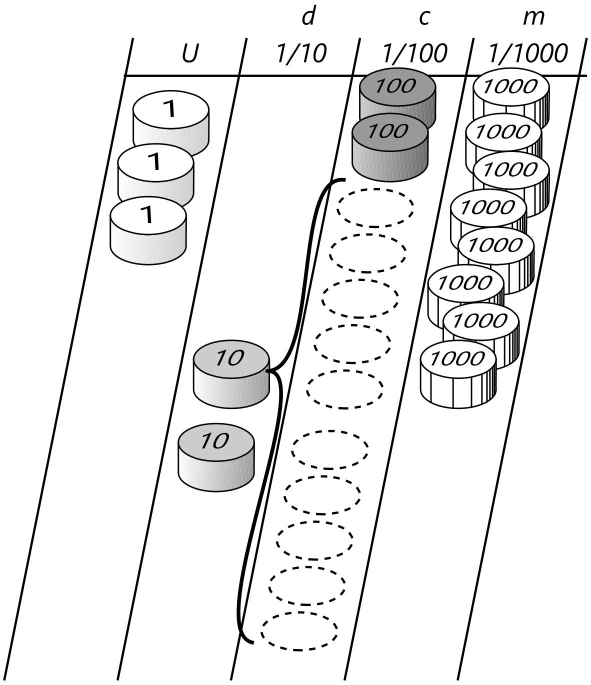
En este caso tenemos un total de 12 centésimos. Tenemos que hacer un canje. Si hemos redefinido los valores de las tapas, hay que recordar que el canje es ahora "al revés", porque calculamos con fracciones: 10 centésimos se canjean por un décimo (¡no por un milésimo!); entonces tenemos 3.228 . *(Vea el dibujo siguiente.)*

Intenten unos ejemplos un poco más difíciles, como por ejemplo:

4.987 + 0.0345 5.0234 – 0.125

1.555 + 1.00666 7.7 – 0.0021

3.8407 – 2.4

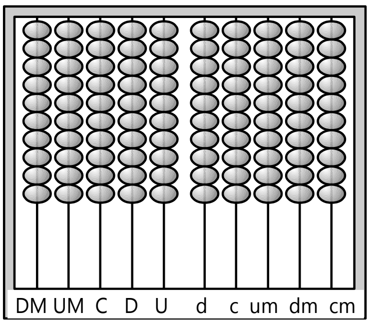


Vemos que todo funciona exactamente igual como en la suma de números enteros. Como en los números enteros, tenemos que fijarnos en juntar siempre lo que tiene el mismo valor posicional: enteros con enteros, décimos con décimos, centésimos con centésimos, etc. Y al final no debemos olvidar de colocar el punto decimal donde corresponde.
Los canjes se hacen en la misma dirección como en los números enteros: 10 elementos en una posición del tablero valen igual como un único elemento en la posición siguiente hacia la izquierda. Realmente no hay nada nuevo aquí.

La ***Hoja de trabajo 48.1*** contiene unos ejercicios para practicar cómo escribir estas operaciones correctamente en el tablero posicional.

Suma y resta en el ábaco

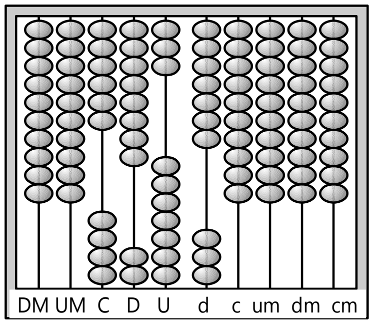
En el ábaco tenemos que redefinir los valores posicionales para poder hacer estas operaciones. En un ábaco corriente de 10 columnas podemos definir que la mitad izquierda significa enteros, y la mitad derecha significa decimales. Así tenemos los siguientes valores posicionales:



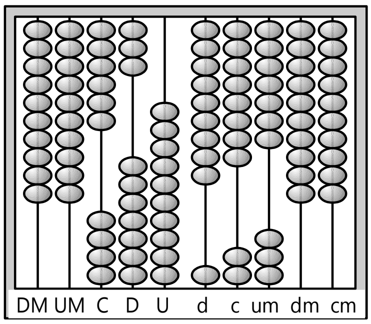
(Las abreviaciones significan: d = décimos, c = centésimos, um = milésimos, dm = diezmilésimos, cm = cienmilésimos.)

Así no podemos representar un segundo sumando simultáneamente en el ábaco. Pero podemos tener la operación escrita por delante, y aumentar o quitar en el ábaco lo que corresponde al segundo sumando.

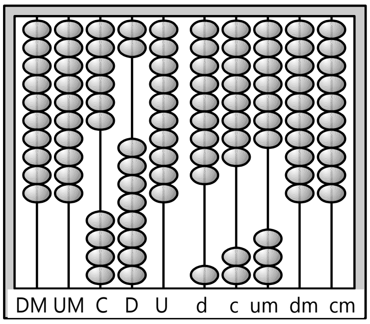
Por ejemplo 427.3 + 52.823: Representamos 427.3 en el ábaco:



Aumentamos sucesivamente el segundo sumando: 5 decenas, 2 unidades, 8 décimos... Solamente podemos aumentar 7 décimos, y tenemos que hacer un canje: 10 décimos se canjean por 1 entero (unidad). Después podemos aumentar el último décimo:



Pero observamos en esta imagen que hay 10 unidades; entonces tenemos que hacer otro canje, y así tenemos una decena adicional. Después aumentamos los centésimos y milésimos del segundo sumando:



Ahora tenemos el resultado: 480.123 .

La operación hubiera sido exactamente igual, si hubiéramos definido los valores posicionales para números enteros como siempre, y hubiéramos sumado 42730000 + 5282300. Hubiéramos puesto las cuentas en exactamente los mismos lugares, y hubiéramos hecho exactamente los mismos movimientos. La única diferencia consiste en que al escribir el resultado, hay que colocar el punto decimal.

Hagan algunos ejemplos propios y represéntenlos en el ábaco.

Ahora lo escribimos

En la operación escrita tenemos que recordar que usamos la cuadrícula del papel como tablero posicional. Lo que tiene el mismo valor posicional, debe escribirse en la misma columna. Esto tiene el efecto de que todos los puntos decimales se encuentran uno debajo del otro (y el del resultado también). Así tenemos una regla fácil para verificar si la operación está escrita correctamente: Todos los puntos decimales deben encontrarse en una misma recta vertical. (En los números enteros tenemos que imaginarnos que tienen su punto decimal al final.)

- En las restas tenemos que recordar que donde no hay “nada”, podemos rellenar con ceros.

Ejemplo: 647 + 0.473 + 3533.2

		6	4	7			
			+	0.	4	7	3
+	3	5	3	3.	2		

Practiquen con los siguientes ejemplos:

a) 0.0333 + 0.333 + 3.33

b) 9490.23 + 9.309 + 500.46

c) 10'000 – 0.0001

d) 45.00003 – 0.0003 – 44.99

Ampliaciones

Unos problemas:

1) De un costal con 25 kg de harina se sacaron sucesivamente las siguientes cantidades: 1.6 kg, 250 g, 5 kg, 675 g, 3.8 kg. ¿Cuánto de harina queda en el costal?

2) Mamá hizo compras. Pagó con 500.– y recibió 1.40 de cambio. ¿Cuánto costaron sus compras?

3) La familia Valverde camina a su lugar favorito al borde del río, una distancia de 7.31 km. Al regreso toman otra ruta que mide 0.625 km menos. ¿Cuántos kilómetros caminaron en total?

Unidad 49 - Multiplicación de números decimales

Prerrequisitos:
- Entender los conceptos del sistema decimal y de los números decimales.
- Multiplicación grande *(Unidad 28)*.
- Multiplicación y división de fracciones *(Unidades 41 y 42)*.

Materiales necesarios:
- Tira móvil de los valores posicionales *(Hoja de trabajo 46.1)*.
- Material de canje en base 10 (tapas de botellas o similares).
- *(Opcional):* Ábaco.

Para los educadores

Continúa el viaje de exploración

Esta Unidad y la *Unidad 51* continúan de cierta manera el "viaje de exploración" por el sistema decimal *(Unidad 46):* Varias propiedades se descubren mediante preguntas de investigación, observando el "comportamiento" de los números.

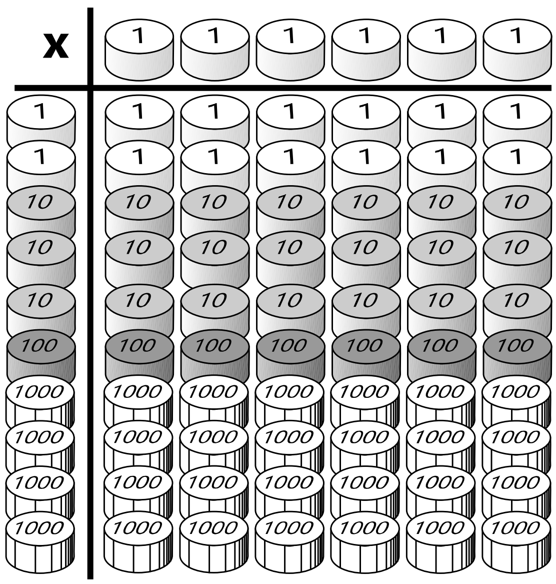
Estas Unidades ya no presentan operaciones en el ábaco. Los aficionados al ábaco podrán por sí mismos descubrir cómo hacerlo: Las operaciones funcionan igual como con los números enteros *(Unidades 28 y 29)*. Solamente tenemos que redefinir los valores posicionales, de manera que concuerden con los valores posicionales de los factores.

TALLER

Multiplicar decimales por enteros

Vamos a representar con tapas de botellas (o un material similar) la multiplicación 2.314 x 6. Como en la Unidad anterior, podemos definir que en esta actividad las tapas marcadas "10" valen décimos, las con "100" valen centésimos, etc.

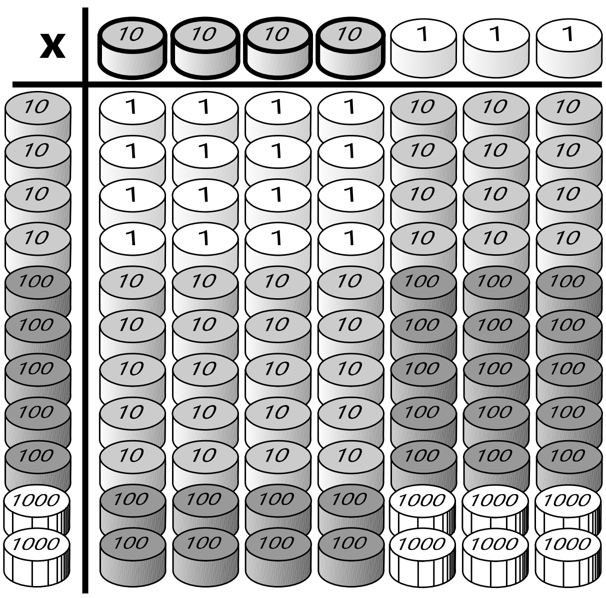
Ya que multiplicamos por unidades, los valores posicionales de los resultados no cambian: Décimos por unidades dan décimos; centésimos por unidades dan centésimos, etc:



Solamente tenemos que hacer los canjes necesarios, y tenemos el resultado: 13.884 .

Ya sabemos también cómo multiplicar decimales por 10, por 100, etc. Así podemos entender cómo se comportan los valores posicionales al multiplicar por números mayores:

0.452 x 43



*(Note que las tapas con borde grueso significan **decenas**, mientras que todas las otras significan fracciones: décimos, centésimos, milésimos. Si desea evitar toda confusión, use para las fracciones otros colores de tapas, y rotúlelos con 1/10, 1/100, etc.)*

La multiplicación de décimos por decenas da unidades, porque 0.1 x 10 = 1. Centésimos por decenas producen décimos, porque 0.01 x 10 = 0.1. Y la multiplicación de milésimos por decenas da centésimos.

Haciendo los canjes necesarios, obtenemos el resultado: 19.436 .

De la misma manera podemos representar multiplicaciones mayores si tenemos suficiente material. Inventen sus propios ejemplos. (Si el resultado tiene muchos enteros, necesitaremos también decenas y centenas, aparte de las unidades y decimales.)

Nota: Si desean practicar esta misma clase de operaciones con el **ábaco**, adapten los métodos de la *Unidad 28* a los números decimales, de la misma manera como lo hicimos con la suma y resta en la *Unidad 48*.

Investigación

Multiplicación con números decimales

Tarea 1. Ya sabes multiplicar decimales con números enteros. Vamos a investigar ahora lo que significa multiplicar un número por 0.1, por 0.01, etc. Copia el siguiente tablero y llena los resultados: *(No escribas en el libro.)*

	M	C	D	U	$^1/_{10}$	$^1/_{100}$	$^1/_{1000}$	...
6 x 100 =								
6 x 10 =								
6 x 1 =								
6 x 0.1 =								
6 x 0.01 =								
6 x 0.001 =								
. . .								

Si te parece difícil entender como funciona, la tira móvil de los valores posicionales *(Unidad 46)* te puede ayudar. – Haz lo mismo con el número 236:

	M	C	D	U	$^1/_{10}$	$^1/_{100}$	$^1/_{1000}$	...
236 x 1 =								
236 x 0.1 =								
236 x 0.01 =								
236 x 0.001 =								
. . .								

Escribe los resultados de estas multiplicaciones también con números "normales" (sin el tablero posicional).

Tarea 2. ¿Recuerdas que estas mismas operaciones hemos escrito anteriormente de otra manera? ¿Qué otras operaciones puedes escribir aquí para obtener los mismos resultados?

6 ______ = 0.6 236 _______ = 23.6

6 ______ = 0.06 236 _______ = 2.36

etc.

¿A qué operaciones equivale entonces el multiplicar por 0.1, por 0.01, por 0.001, etc.?

Tarea 3. ¿Puedes ahora multiplicar un número decimal por 0.1, por 0.01, etc? Completa el siguiente tablero en tu cuaderno:

	U	$^1/_{10}$	$^1/_{100}$	$^1/_{1000}$	$^1/_{10'000}$	$^1/_{100'000}$	...
0.47 x 1 =							
0.47 x 0.1 =							
0.47 x 0.01 =							
0.47 x 0.001 =							
. . .							

Escribe también estas multiplicaciones con números "normales".

Verifica las operaciones con la ayuda de fracciones:

$$0.47 \times 0.1 = \frac{?}{?} \times \frac{?}{?} = \frac{?}{?} = 0....$$

$$0.47 \times 0.01 = \frac{?}{?} \times \frac{?}{?} = \frac{?}{?} = 0....$$

$$0.47 \times 0.001 = \frac{?}{?} \times \frac{?}{?} = \frac{?}{?} = 0....$$

Tarea 4. Observa bien las operaciones anteriores. ¿Encuentras una ley que te permite predecir cuántos dígitos decimales tendrá el resultado?

Verifica tu ley con las siguientes operaciones:

a. 0.064 x 0.001 = $\frac{?}{?} \times \frac{?}{?} = \frac{?}{?}$ = 0....

b. 8.2 x 0.01 = $\frac{?}{?} \times \frac{?}{?} = \frac{?}{?}$ = 0....

c. 0.33 x 0.0001 = $\frac{?}{?} \times \frac{?}{?} = \frac{?}{?}$ = 0....

Y también con las siguientes:

d. 0.6 x 0.7 = $\frac{?}{?} \times \frac{?}{?} = \frac{?}{?}$ = 0....

e. 0.3 x 0.2 = $\frac{?}{?} \times \frac{?}{?} = \frac{?}{?}$ = 0....

f. 0.008 x 0.03 = $\frac{?}{?} \times \frac{?}{?} = \frac{?}{?}$ = 0....

g. 0.012 x 0.05 = $\frac{?}{?} \times \frac{?}{?} = \frac{?}{?}$ = 0....

Tarea 5. Compara los últimos cuatro ejemplos (**d, e, f, g**) con los resultados de las multiplicaciones "simples": 6 x 7, 3 x 2, 8 x 3, 12 x 5. ¿Qué observas?

¿Puedes ahora calcular todas las multiplicaciones con números decimales?

Intenta por ejemplo con las siguientes: (Obtendrás resultados interesantes.)

h. 0.74 x 0.12 **i.** 67.9 x 0.8 **j.** 1.875 x 0.16

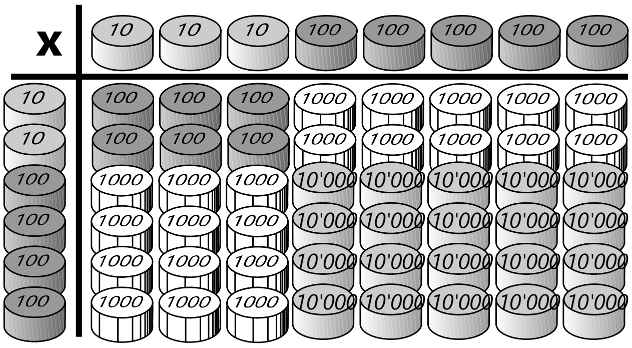
k. 1.111 x 1.111 **l.** 2.59 x 0.3861

Si todavía no te atreves a hacer estas multiplicaciones por escrito, haz primero la siguiente actividad del Taller, y después vuelve acá.

TALLER *(Continúa)*

Multiplicar decimales por decimales

Ahora que entendemos lo que pasa con los valores posicionales, nos atrevemos a multiplicar decimales por decimales con nuestro material de canje. Por ejemplo 0.35 x 0.24:



Arriba a la izquierda se multiplican décimos por décimos; eso da centésimos. Entonces este primer rectángulo tenemos que llenar con centésimos. En el siguiente rectángulo multiplicamos décimos por centésimos, eso da milésimos.
En la segunda fila tenemos al inicio centésimos por décimos, eso da otra vez milésimos. Y por fin tenemos centésimos por centésimos, eso da diezmilésimos.

De hecho se nos presenta el mismo cuadro como si las tapas significarían decenas y centenas, solamente en una orientación diferente. Así como 100 x 100 = 10'000, también $^1/_{100}$ x $^1/_{100}$ = $^1/_{10'000}$. – Hacemos los canjes necesarios y obtenemos el resultado: 0.0840 . Después de canjear ya no quedó ningún diezmilésimo, por eso tenemos un cero al final. Este cero no es necesario; podemos escribir 0.084 .

Hagan otros ejemplos similares, inventando sus propias multiplicaciones.

Principios matemáticos

Acercándonos a las potencias

En la Tarea 4 de la investigación descubrimos una ley matemática que corresponde a la ley de exponentes al calcular con potencias: Cuando multiplicamos dos potencias que tienen la misma base, sus exponentes se suman. Por ejemplo $10^5 \times 10^6 = 10^{5+6} = 10^{11}$.

No es tan sorprendente que esta ley aparezca aquí, porque efectivamente estamos calculando con potencias de 10. Todos los valores posicionales en el sistema decimal son potencias de 10.
Con los alumnos todavía no examinamos estas interrelaciones, porque a este nivel todavía no estudiamos la potenciación tan detenidamente. A un pleno entendimiento del sistema decimal llegaremos recién en el nivel de Secundaria I cuando examinaremos las leyes de las potencias, y los sistemas de numeración con otras bases.

Unidad 50 - División de números decimales entre enteros

Prerrequisitos:

- Multiplicación de números decimales *(Unidad 49)*.
- División cifra por cifra *(Unidad 12)*.
- Multiplicación y división de fracciones *(Unidades 41 y 42)*.
- Algunos ejemplos pueden requerir divisiones entre números de varias cifras *(Unidad 29)*.

Materiales necesarios:

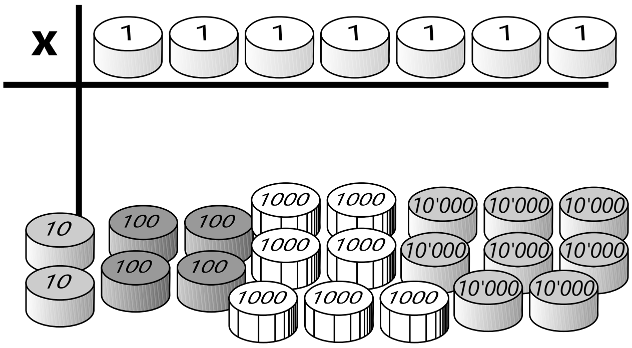
- Tira móvil de los valores posicionales *(Hoja de trabajo 46.1)*.
- Material de canje en base 10 (tapas de botellas o similares).
- (Opcional): Ábaco.

TALLER

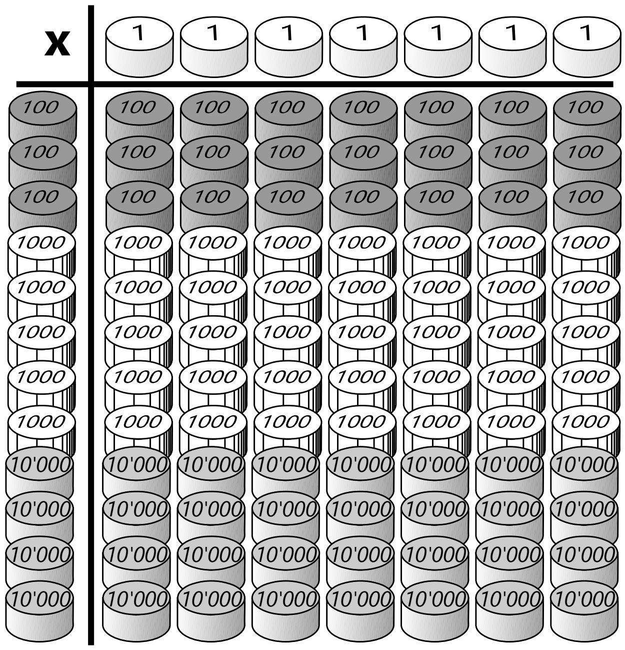
Dividir con material de canje

Vamos a representar unas divisiones con material de canje (tapas de botellas, o similares), como en la *Unidades 11 y 29*. Si no hay suficientes colores distintos de tapas para representar los valores de los decimales, podemos redefinir sus valores como en las Unidades anteriores: las tapas de 10 significan ahora décimos, las de 100 centésimos, las de 1000 milésimos, etc.

Representamos entonces la división 0.2478 ÷ 7. El divisor consiste en 7 unidades, y tenemos para repartir: 2 décimos, 4 centésimos, 7 milésimos y 8 diezmilésimos.



No podemos repartir los 2 décimos; los canjeamos por 20 centésimos. Entonces tenemos un total de 24 centésimos y podemos repartirlos a 3 en cada fila.
Los 3 centésimos que sobran, se canjean por 30 milésimos. Tenemos 37 milésimos y podemos repartirlos a 5 en cada fila.
Sobran 2 milésimos; los canjeamos por diezmilésimos. Eso da un total de 28 diezmilésimos. Los repartimos a 4 en cada fila, y no queda residuo: *(vea el dibujo siguiente)*



Ahora podemos ver que el cociente es 3 centésimos, 5 milésimos y 4 diezmilésimos, o sea 0.0354 .

Como en las otras operaciones, no hay nada aquí que sea realmente nuevo. Las mismas leyes que se aplican a los números enteros, funcionan también para los decimales.

Hagan un ejemplo de una división entre un número mayor, como por ejemplo 8.3 ÷ 25. (Para esta operación necesitamos dos decenas para marcar el divisor; pero verán que dentro del rectángulo ya no aparecerán decenas.) En el caso de esta división podemos hacer una observación interesante: Quedará un residuo de los décimos. Pero podemos canjearlos por centésimos y seguir dividiendo ... y así sucesivamente, hasta que salga exacto. ¡Descubran ustedes mismos cómo funciona!

Inventen algunos ejemplos propios. Pero ojo: Quizás se encuentran con unos casos donde nunca llegamos a un punto en que la división sale exacta. Investigaremos este hecho más tarde *(Pregunta 2 en la sección "Ahora lo escribimos").*

Nota: Si desean practicar esta misma clase de operaciones con el **ábaco**, adapten los métodos de la *Unidad 29* a los números decimales, de la misma manera como lo hicimos con la suma y resta en la *Unidad 48*.

Ahora lo escribimos

División mental

Pregunta 1. Observa la siguiente operación detenidamente. Intenta fundamentar para cada paso *por qué* se puede hacer así:

$$0.36 \div 3 \;=\; \frac{36}{100} \div 3 \;=\; (36 \div 100) \div 3$$
$$=\; (36 \div 3) \div 100 \;=\; \frac{12}{100} \;=\; 0.12$$

Entonces también en las divisiones podemos calcular como si fueran números enteros. Solamente tenemos que colocar el punto decimal en el lugar correcto:
En el ejemplo arriba podemos dividir 36 ÷ 3 = 12. Solamente que los 36 son *centésimos*, entonces el resultado es también *12 centésimos*.

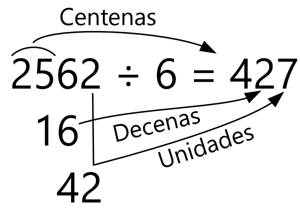
Practica con las siguientes. Intenta hacerlo primero de manera "rápida": Divide mentalmente como si fueran números enteros; después escribe el punto decimal (y llena con ceros donde es necesario). Si no estás seguro de tus resultados, entonces verifícalos, haciendo la operación con fracciones:

a) 0.72 ÷ 4 **b)** 0.098 ÷ 7

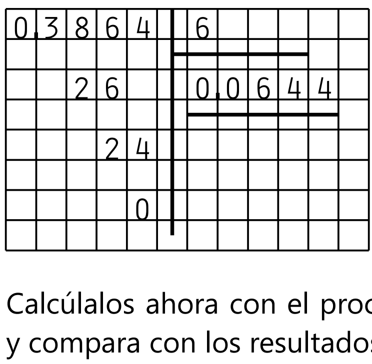
c) 63.6 ÷ 6 **d)** 0.104 ÷ 8

División por escrito

En el procedimiento escrito tenemos otra forma sencilla de saber dónde tiene que estar el punto decimal: Fíjate en el valor posicional de la última cifra que estás dividiendo. La cifra del resultado tiene el mismo valor posicional. Hemos usado este método de control al dividir números enteros: Si estamos repartiendo centenas, la cifra del resultado también significa centenas. Cuando llegamos a las unidades del dividendo, en el cociente también llegamos a las unidades.



Lo mismo aplica a las cifras detrás del punto decimal: Si repartimos décimos, en el resultado también tenemos décimos. Si repartimos centésimos, el resultado son centésimos. Entonces podemos desde el inicio definir los valores posicionales de las cifras del cociente. Por ejemplo 0.3864 ÷ 6: Lo primero que podemos dividir son 38 *centésimos*. Entonces el cociente comienza con 38 ÷ 6 = 6 centésimos, o sea 0.06. Desde allí podemos seguir calculando:



Verifícalo con los ejemplos **a, b, c, d** arriba que ya calculaste mentalmente.
Calcúlalos ahora con el procedimiento escrito, y compara con los resultados anteriores.

Después practica con los siguientes:

e) 4.578 ÷ 7 **f)** 8.715 ÷ 5 **g)** 0.03816 ÷ 8

h) 40.005 ÷ 9 **i)** 7.254 ÷ 13 **j)** 0.9392 ÷ 16

Seguir dividiendo cuando no sale exacto

Ahora que sabes calcular divisiones con decimales, podemos hacer algo nuevo: Cuando una división deja un residuo al final, no necesitas dejarlo así no más. Sabemos que podemos convertirlo en una fracción; pero ¡también podemos convertirlo en decimales! Simplemente seguimos dividiendo.

Entonces, cuando llegas a las unidades y queda un residuo, seguimos dividiendo. Para eso tenemos que "bajar" la siguiente cifra. En nuestro ejemplo, eso sería la primera cifra detrás del punto decimal, o sea los décimos. "Pero no hay nada allí", dirás. En la matemática, la "nada" también es un número. ¿Qué número es? – Bajamos entonces esa "nada", y seguimos dividiendo.

5	9		4			
1	9		1	4.	7	5
	3		0			
			2	0		
				0		

Pregunta 2. Practica con los siguientes ejemplos y observa lo que sucede. ¿Llegas siempre a un punto donde la división sale exacta? ¿O hay divisiones que *nunca* salen exactas? ¿Qué sucede en este caso? ¿y cómo *sabes* que nunca puede salir exacto?

k) 67 ÷ 2 **l)** 11 ÷ 8 **m)** 25 ÷ 6

n) 39 ÷ 5 **ñ)** 3.9 ÷ 5 **o)** 0.39 ÷ 5

p) 400 ÷ 9 **q)** 9.3 ÷ 6 **p)** 3 ÷ 32

Ahora, sabemos que las *fracciones* también son divisiones. Podríamos escribir los ejemplos arriba también así:

$\frac{67}{2}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{25}{6}$, $\frac{39}{5}$, $\frac{3.9}{5}$, $\frac{0.39}{5}$, $\frac{400}{9}$, $\frac{9.3}{6}$, $\frac{3}{32}$

Entonces conoces ahora un método cómo convertir una fracción en un número decimal: ¡Simplemente dividir!

Ampliaciones

Redondear resultados

En muchas situaciones prácticas no necesitamos números decimales muy largos, ¡mucho menos infinitos! Por ejemplo si medimos papel o cartulina para cortar, es suficiente saber la medida con una precisión de milímetros. (O quizás décimos de milímetros, si queremos ser *muy* exactos.)
Digamos que tengo una tira de papel de 31 cm de largo, y necesito cortarla en 7 pedazos iguales. La división da 4.428571... cm, y nunca termina. Podemos redondear el resultado a milímetros, o sea un dígito detrás del punto decimal: 4.4 cm. O si queremos una precisión de décimos de milímetros, podemos usar 4.43 cm. *(Para pensar: ¿Por qué 4.43 y no 4.42?)*
(Vea en la *Unidad 26* acerca del redondeo de números.)

Otra pregunta para pensar: *Si en esta tira de papel medimos pedazos de 4.4 cm, el sexto pedazo termina en 6 x 4.4 = 26.4 cm. Entonces el último pedazo mide 31 – 26.4 = 4.6 cm, no 4.4. ¿Por qué este pedazo se hizo más largo?*

En muchas situaciones prácticas no necesitamos calcular resultados con muchos decimales. Es suficiente calcular *un dígito más* que la precisión que necesitamos. (El dígito adicional nos dice si debemos redondear hacia arriba o hacia abajo.)

Calcula los siguientes ejemplos y redondea a una precisión sensata, de acuerdo a la situación:

1) El pastelero preparó 19kg de masa para hacer 15 tortas iguales. ¿Cuánto de masa tiene que usar para cada torta?

2) Una institución organiza una carrera de maratón popular con una longitud de 17km. Se quieren colocar puestos de refrigerio a $^1/_3$ y a $^2/_3$ del trayecto. ¿A qué distancias tienen que colocarse estos puestos?

3) En un plano con escala de 1 : 75, ¿con qué longitud debe dibujarse una sala que mide 6.80 m?

4) Para un evento infantil se compraron 10 litros de refresco para repartir a los niños. Asistieron 43 niños. ¿Qué cantidad de refresco recibe cada niño?

Otros problemas con decimales

5) Aproximadamente $^1/_{13}$ del cuerpo humano consiste en sangre. ¿Qué cantidad de sangre tiene una persona que pesa 49 kg?

6) ¿Cuántos minutos son 3.7 horas?

7) ¿Cómo expresaríamos 405 segundos en minutos con decimales?

8) La Tierra da una vuelta alrededor de su propio eje cada 24 horas. ¿Cuánto avanza un punto de su superficie en el ecuador en un segundo? (Longitud del ecuador = 40'000 km)

OJO: Si en el no.6 llegaste a 370 minutos, tendrás que repasar el tema de las horas y minutos. 187 minutos o 250 minutos tampoco es correcto.
De manera similar, en el no.7 la respuesta no es 4.05 minutos, y tampoco es 6.45 minutos.

Para los educadores

En los problemas de la actividad "Redondear resultados", pueden diferir las opiniones acerca de lo que es una "precisión sensata". Conversen acerca de las diferentes posibilidades y opiniones. Normalmente, la respuesta depende de la precisión de las herramientas que uno tiene a disposición.
Por ejemplo en el problema no.1: ¿Cuál será la precisión de la balanza del pastelero? 10 gramos podría ser una suposición realista. Entonces redondeamos el resultado a una precisión de 10 gramos, o sea 2 decimales detrás de los kilogramos.
O en el problema no.2: ¿Qué medios usará la institución para determinar la ubicación de los puestos de refrigerio? (Sería demasiado trabajoso, querer medirlo con un cordel que registra cada metro. Más probable es que medirán las distancias en un mapa; o quizás recorrerán el trayecto con un carro que mide el kilometraje. ¿Cuánta precisión se puede esperar en estos casos?)
De manera similar, conversen acerca de las opciones disponibles en los problemas no.3 y 4.

Fíjense también en oportunidades en la vida diaria donde pueden ocurrir preguntas similares acerca la precisión necesaria para una medición.

Unidad 51 - División entre números decimales

Prerrequisitos:
- Multiplicación y división de números decimales con enteros *(Unidad 50)*.
- División larga *(Unidad 29)*.
- Amplificar y simplificar fracciones *(Unidad 39)*.
- Operaciones básicas con fracciones, incluyendo la división entre una fracción *(Unidad 42)*.

Materiales necesarios:
- Tira móvil de los valores posicionales *(Unidad 46)*.
- Material de canje en Base 10 (tapas de botellas o similares).

Para los educadores

Muchos caminos para entender un resultado sorprendente

Los resultados de una división entre un número decimal como 0.01 son un poco sorprendentes. Desde nuestra experiencia con números enteros, esperamos que un número se vuelva menor cuando lo dividimos; sin embargo en este caso se vuelve mayor. Usemos la oportunidad para señalar a los niños que la matemática contiene muchos secretos emocionantes y sorprendentes, que solamente esperan para ser descubiertos por nosotros.

Por este efecto sorprendente, la actividad de investigación ofrece *cuatro formas distintas* de llegar al resultado, para que los alumnos puedan comprobar por varios caminos que efectivamente es así:
- mediante las propiedades del tablero posicional y del sistema decimal,
- mediante la comprobación con la operación inversa,
- mediante la operación de amplificar una fracción,
- y mediante la operación de la división entre una fracción.

En la práctica, la operación de amplificar una fracción será la más indicada para resolver divisiones de este tipo. Pero si a un niño le parece más práctico usar alguno de los otros caminos, que lo haga; con tal que entienda los principios detrás del procedimiento, y llegue a los resultados correctos.

Investigación

Tarea 1. a)

¿Cuánto es 600 ÷ 0.01 ? – Piénsalo primero. Después verifica tu respuesta mediante el siguiente tablero posicional. Encontrarás una regularidad en aquellas divisiones que ya conoces. Continúa esta regularidad: *(Copia el tablero; no escribas en el libro.)*

	Mll.	CM	DM	UM	C	D	U	$^1/_{10}$	$^1/_{100}$	...
600 ÷ 100 =										
600 ÷ 10 =										
600 ÷ 1 =										
600 ÷ 0.1 =										
600 ÷ 0.01 =										
600 ÷ 0.001 =										
. . .										

¿Te sorprende el resultado? – Vamos a verificarlo con dos otros métodos, para ver si realmente es correcto:

- b) Hacemos la comprobación con la operación inversa. Si pones tu resultado de 600 ÷ 0.01 en el espacio en blanco, la operación debe salir correcta: _______ x 0.01 = 600. ¿Correcto?

- c) Escribimos la división como una fracción. ¿Puedes convertir esta fracción en una fracción equivalente, de manera que el denominador es un número entero?

$$\frac{600}{0.01} = \frac{?}{?}$$

Tarea 2. a) En la Tarea 1.c) tuvimos una fracción con un número decimal en su denominador, y la convertimos en una fracción equivalente donde el denominador fue un número entero. Eso lo podemos hacer en cualquier situación similar. O sea, toda división entre un número decimal se puede convertir en una división equivalente entre un número entero. ¿Puedes completar los siguientes ejemplos?

$$15 \div 0.5 = \frac{15}{0.5} = \frac{?}{?} = ? \div ?$$

$$270 \div 0.09 = \frac{?}{?} = \frac{?}{?} = ? \div ?$$

$$0.008 \div 0.002 = \; . \; . \; . \; .$$

b) Una forma más de entenderlo: ¿Recuerdas cómo funciona la división entre una fracción? El ejemplo de la Tarea 1 puede escribirse también así: $600 \div \frac{1}{100}$. Resuelve esta división con las operaciones con fracciones que conoces. Compara el resultado con el resultado de la Tarea 1.

Escribe también los ejemplos de la Tarea 2.a) como divisiones entre una fracción, y aplica las operaciones con fracciones. ¿Obtienes los mismos resultados como en la Tarea 2.a) ?

Convierte las siguientes divisiones en divisiones equivalentes con un divisor entero. Después resuélvelas mentalmente:

$45 \div 0.09$, $4.5 \div 0.09$, $0.45 \div 0.09$, $3.84 \div 0.08$

Practica también con el procedimiento escrito:

a) $68.53 \div 0.007$	b) $999.999 \div 7.7$
c) $15 \div 0.271$	d) $5.45 \div 0.37$
e) $1 \div 1.28$	f) $0.0007 \div 0.03125$

Nota: El *numerador* no necesariamente tiene que ser un número entero. En la *Unidad 50* hemos aprendido cómo dividir números decimales. Solamente el denominador (o sea el *divisor*) tiene que ser entero, para que no nos confundamos con los valores posicionales del resultado.

Ampliaciones

Resuelve las siguientes operaciones:

g. $0.625 + \frac{5}{12}$ **h.** $\frac{7}{0.25} + 0.23$ **i.** $\frac{0.05}{0.1} - \frac{12}{25}$

j. $0.05 + \frac{1}{60} - \frac{4.5}{25}$ **k.** $\frac{0.3672}{0.0001} - \frac{46.92}{23.46} - 0.0001$

Nota: En estas operaciones hay que decidir sabiamente si queremos calcular todo con fracciones, o todo con decimales. Con decimales no siempre funciona, porque hemos visto que existen divisiones que no salen exactas en decimales. Con fracciones funciona siempre; pero a veces es más práctico usar decimales.

Unos problemas:

1) Una madera tiene un grosor de 3.8 cm por 3.8 cm, y una longitud de 2.30 m. La madera se corta en cubos. Con cada corte se pierde adicionalmente 1 mm de su longitud. ¿Cuántos cubos resultan?

2) Las computadoras antiguas tenían un reloj interno que generaba interrupciones 65'536 veces por hora, para medir el tiempo.
a) ¿Cada cuánto tiempo se generaba una interrupción, en segundos?
b) Si entre un evento y otro la computadora contó 5999 interrupciones, ¿cuánto tiempo pasó?

3) La bacteria Escherichia Coli, que vive en nuestros intestinos, tiene una longitud de 0.0032 mm. ¿Cuántas de estas bacterias caben en un centímetro?

4) En el agua, Escherichia Coli puede avanzar 0.2 mm por segundo. ¿Cuánto tiempo necesita para avanzar un metro?

5) ¿Cuál es mayor, la mitad de una manzana, o la 0.5ª parte de una manzana?

OJO: Algunos de estos problemas podrían llevar a conclusiones equivocadas. Pautas en el *Anexo A*.

Unidad 52 - Porcentajes

Prerrequisitos:
- Operaciones básicas con fracciones *(Bloque IV)*.
- Operaciones básicas con números decimales *(Unidades 48 a 51)*.
- Proporciones *(Unidades 20, 21, 43)*.
- *(para los gráficos circulares):* Ángulos *(Unidad 59)*.

Materiales necesarios:
- Envases de alimentos con información nutricional.
- Avisos comerciales de diarios, catálogos, etc, o en la calle.
- Diarios o informaciones de internet con estadísticas en porcentajes.

TALLER

Porcentajes en la vida diaria

Busquen informaciones expresadas en porcentajes. Por ejemplo, en muchos envases de alimentos podemos encontrar informaciones como estas: "Contiene 38% de carbohidratos, 2% de grasas, 5.6% de proteínas, ..." – En los avisos comerciales hay a veces ofertas que dicen: "¡ 10% de rebaja !", etc. – En los diarios o en internet podemos encontrar estadísticas que nos dicen cuánto por ciento de la población son menores de edad; cuánto por ciento fue la inflación desde el año pasado; cuánto por ciento de la población están a favor o en contra de alguna política del gobierno; etc. – Podemos también encontrar información acerca de las tasas de interés que diversos bancos ofrecen para ahorros, o lo que cobran para préstamos.

Para comprender estas informaciones, tenemos que entender lo que significa "por ciento". Esto es sencillo:

"Por ciento" significa "centésimos".

Por ejemplo, 1% de 300 es 3, porque $\frac{1}{100} \times 300 = 3$.

8% de 4000 es 320, porque $\frac{8}{100} \times 4000 = 320$.

En todo lugar donde dice "por ciento", podemos en su lugar decir "centésimos".

100% siempre es "el entero", porque $\frac{100}{100} = 1$. Así por ejemplo cuando en el envase de un aceite dice "100% vegetal", eso significa que el aceite *entero* es vegetal, y que no contiene otros ingredientes.

Con eso podemos ahora empezar a hacer unos cálculos con los porcentajes que hemos encontrado. Por ejemplo, si en un aviso dice "20% de descuento", ¿a cuánto equivale eso? – Si una estadística dice que en una determinada ciudad, 2.3% de la población son extranjeros, ¿a cuántas personas equivale eso? – Si en un paquete de galletas dice: "64% carbohidratos", ¿a cuántos gramos equivale esto en el paquete entero? ¿y en una sola galleta?

Nota: Muchos envases de alimentos declaran ciertos nutrientes en % de la cantidad diaria recomendada. Por ejemplo puede decir que 100g de un jugo de frutas contienen 25% de la cantidad diaria recomendada de Vitamina C. Entonces, ¿cuánto de este jugo tendrías que tomar para que ya no necesites más Vitamina C por todo el día? (Ya que 100% es "el entero", la cantidad diaria completa corresponde a 100%.) – Investiguen la información nutricional de los alimentos que tienen en casa.

Hagan cálculos similares con otros datos o estadísticas que encontraron.

Ahora lo escribimos

Calcular porcentajes simples

Si hicieron suficientes actividades como las sugeridas en el Taller, ahora ya deben saber calcular porcentajes. Por si no están seguros, pueden practicar con algunos de los siguientes ejemplos. Así vemos si saben hacer el cálculo, aun cuando no existe conexión con una situación concreta.

(Algunos de los siguientes ejemplos requieren expresar el resultado con decimales, o convertirlos a la siguiente unidad de medida menor.)

Calcula: *(Haz tantos ejercicios como necesitas para estar seguro(a) de que dominas la operación.)*

5% de 500 18% de 450 99% de 1010

2.5% de 800 kg 75% de 784 m

101% de 99 m 45% de 74.–

1000% de 68 cm 8.3% de 2670.–

Porcentajes y decimales

Sabemos que "por ciento" significa "centésimos". Podemos expresar esto también en decimales: **1% = 0.01** . Entonces todos los cálculos con porcentajes, en vez de usar centésimos, se pueden efectuar con decimales. Dos ejemplos:

19% de 50 = 0.19 x 50 = 9.5

0.3% de 0.4 = 0.003 x 0.4 = 0.0012

Calculen algunos de los ejemplos de la actividad anterior de esta manera, o inventen unos ejemplos propios.

Variación porcentual

A veces leemos que algún valor aumentó o disminuyó en tanto por ciento. ¿Qué significa esto?

Por ejemplo, una noticia dice que el precio del aceite aumentó en 7% respecto al año pasado. Si el año pasado una botella de aceite costaba 8.–, entonces la *variación* es 7% de 8.– = –.56. Ya que el precio aumentó, esto significa que ahora la botella de aceite costaría 8.– *más* –.56, o sea 8.56 .

O una lavadora que costaba 1300.– se vende con un descuento de 10%. El descuento es 10% de 1300.–, o sea 130.–. Entonces, aplicando el descuento, la lavadora cuesta ahora 1300.– *menos* 130.– = 1170.–.

En vez de hacer las sumas y restas con los datos efectivos, podemos hacerlas también con los porcentajes: Si el precio del aceite aumentó en 7% respecto al año pasado, entonces el precio del año pasado se toma como "el entero" (100%). Esto significa que el precio actual es *107%* del precio del año pasado. O calculando con decimales, es el precio anterior multiplicado por 1.07 .

Igualmente en el ejemplo del descuento: El precio entero corresponde a 100%. Aplicando el descuento de 10%, se paga ahora *90%* del precio original. O calculando con decimales, es el precio original multiplicado por 0.9 .

Hagan algunos cálculos de este tipo con los datos que coleccionaron en la actividad del Taller. *(Al final de esta sección hay problemas adicionales con porcentajes.)*

Porcentajes y fracciones

Así como podemos convertir fracciones en decimales *(Unidad 50)*, podemos convertirlos también en porcentajes. Una vez que tenemos el número decimal, se requiere solamente un pequeño paso para obtener el porcentaje: tenemos que leer a cuántos centésimos corresponde el número decimal. Por ejemplo: 0.23 es lo mismo como 23% (23 centésimos). 0.067 equivale a 6.7%.

Entonces, si queremos convertir $^3/_8$ en un porcentaje, podemos calcular primero la división: 3 ÷ 8 = 0.375 . Esto equivale a 37.5 centésimos, o sea 37.5%.

Otro razonamiento posible es el siguiente: Queremos convertir $^3/_8$ en centésimos; o sea, buscamos una fracción equivalente con denominador 100. Para llegar del denominador 8 a 100, tenemos que dividir entre 8 y multiplicar por 100. Entonces, esta misma operación tenemos que hacer con el numerador: 3 ÷ 8 x 100 = 37.5, como arriba. O multiplicamos primero, entonces tenemos 300 ÷ 8 = 37.5 .

A) $\underset{\div 8 \;\to\; \text{x}100}{\overset{\div 8 \;\to\; \text{x}100}{\dfrac{3}{8} \quad = \quad \dfrac{¿?}{100}}}$

B) $\underset{\text{x}100 \;\to\; \div 8}{\overset{\text{x}100 \;\to\; \div 8}{\dfrac{3}{8} \quad = \quad \dfrac{¿?}{100}}}$

Y podemos hacer este mismo proceso al revés, convirtiendo porcentajes en fracciones. Eso es más fácil de entender, porque un porcentaje *ya es* una fracción (centésimos). Solamente que a veces podemos simplificar o amplificar esta fracción. Con el ejemplo de arriba:

$$37.5\% = \frac{37.5}{100} = \frac{375}{1000} = \frac{75}{200} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

Unos ejercicios para practicar:

Convierte en fracción:

a. 80%, **b.** 75%, **c.** 52%,

d. 43.75%, **e.** $83^{1}/_{3}$%, **f.** 850%,

g. 12.8%, **h.** $142^{6}/_{7}$%, **i.** $3^{7}/_{11}$%

Convierte en porcentaje: (Los que no salen exactos se pueden redondear, o expresar con una parte fraccionaria como arriba $3^{7}/_{11}$%).

k. $\frac{17}{20}$, **l.** $\frac{17}{25}$, **m.** $\frac{17}{200}$, **n.** $\frac{17}{125}$, **ñ.** $\frac{17}{30}$,

o. $\frac{369}{1000}$, **p.** $\frac{4}{7}$, **q.** $5\frac{3}{55}$, **r.** $\frac{19}{13}$

Calcular el "entero" cuando conocemos un porcentaje

Hasta ahora hemos calculado porcentajes de un "entero". Pero a veces conocemos un porcentaje, y el "entero" es desconocido. Por ejemplo, un negociante quiere depositar una cantidad de dinero en un banco que le paga 6% de interés anual, y quiere obtener cada año 3000.– en intereses. ¿Qué cantidad tiene que depositar?

Podemos establecer la siguiente proporción:

6% corresponden a **3000.–**

¿? ¿?

100% corresponden a . . .

La "máquina" que nos lleva del 6 al 100 tiene que dividir entre 6 y multiplicar por 100. Entonces la operación es: $\frac{3000 \text{ x } 100}{6} = 50'000$ O sea, el negociante tiene que depositar 50'000.–.

Lo mismo podemos hacer en una situación con variación porcentual. Por ejemplo, una noticia dice que la cosecha de maíz en cierto lugar disminuyó en 8% respecto al año pasado, y que este año fue de 3910 t. ¿Cuánto fue la cosecha del año anterior?

El porcentaje es en referencia a la cosecha del año pasado. Entonces la cosecha pasada equivale a 100%, y la cosecha actual corresponde a 100 – 8 = 92%. Por tanto, la proporción es:

92% corresponden a **3910 t**

¿? ¿?

100% corresponden a . . .

De eso nos resulta la operación: $\frac{3910 \text{ x } 100}{92} = 4250\,\text{t}$

Quizás tienen en su colección algunos datos que les permiten hacer cálculos como esos. De otro modo, encontrarán unos ejemplos en los problemas abajo.

Unos problemas con porcentajes

1) De los 563'000 habitantes de una ciudad, 23% tienen un carro propio. ¿A cuántas personas equivale eso?

2) Un capital de 45'200.– se depositó a una tasa de interés de 5.5% anual. ¿Cuánto de interés genera este capital en un año?

3) Tadeo se comprometió a hacer un trabajo por un sueldo de 7200.–, pero pudo hacer solamente 86% del trabajo. ¿Cuánto le corresponde como sueldo?

4) La leche de vaca contiene 3.1% de proteínas, 3.5% de grasa y 4.7% de azúcar. ¿Cuántos gramos de proteínas, grasa y azúcar hay en un vaso de leche de 250g?

5) Carola, Fabiola y Gladiola hacen juntas un negocio. Carola aporta 29% de la inversión y Fabiola 41%. ¿Cuánto por ciento es la aportación de Gladiola?

6) En una tienda se vende una computadora que vale 1696.–, pero un letrero dice: "¡Oferta! 15% de descuento." ¿Cuánto se paga por la computadora, aplicando el descuento?

7) Tomás tiene 1200.–, Dimas tiene 1550.–. Dimas da 18% de lo que tiene a Tomás. ¿Cuánto tiene ahora Tomás, y cuánto tiene Dimas?

8) Si un sueldo básico en 2016 fue de 750.–, y en el año siguiente aumentó en 7%, ¿cuánto fue el sueldo básico en 2017?

9) Este año, el Sr.Paredes tuvo que pagar 1264.90 en intereses por un préstamo a 13% de interés anual. ¿Cuánto fue el monto del préstamo?

10) Una refrigeradora costó 1285.–. Después, su precio subió en 20%. Más tarde se aplicó un descuento de 20% a este nuevo precio. ¿Cuánto cuesta la refrigeradora ahora? – En comparación con su precio original, ¿el precio subió, bajo, o quedó igual? ¿Puedes explicar por qué sucedió eso?

TALLER (continúa)

Venta con descuento

Jueguen a la tienda y practiquen unas ventas con descuento: Fijen precios y apliquen descuentos de 12%, de 15%, etc.

Estadísticas propias

Hagan unas estadísticas propias que pueden expresar en porcentajes. Pueden ser simples conteos, o pueden ser proyectos más elaborados, tales como conducir una encuesta propia en el vecindario o en otro lugar.

Unos ejemplos, para darles unas ideas:

- Cuenten los carros que pasan por su calle, clasificándolos por colores. Preparen con anticipación un lista con las categorías "Amarillos", "Azules", "Rojos", "Negros", "Blancos", etc; después cuenten marcando palitos en el lugar correspondiente, cada vez que pasa un carro.

- Hagan una estadística de la altura de las casas en su calle o vecindario: ¿Cuántas casas de un único piso hay? ¿Cuántas casas de dos pisos? ¿de tres? Etc.

- Entrevisten a sus amigos, vecinos, u otras personas, acerca de las mascotas que tienen. ¿Cuántos tienen un perro? ¿un gato? ¿un conejo? ¿un canario? Etc.

Una vez que han coleccionado y tabulado sus datos, viene la pregunta: ***¿Cómo lo convertimos en porcentajes?***

Por ejemplo, tenemos los siguientes datos de una encuesta acerca del número de hijos que tienen las familias:

Parejas sin hijos	9
con 1 hijo	6
con 2 hijos	19
con 3 hijos	15
con 4 hijos	5
con más de 4 hijos	6
TOTAL	60

Recordamos que "el entero" siempre corresponde a 100%. En este caso, "el entero" es el total de las personas entrevistadas, o sea 60. Entonces tenemos la siguiente proporción:

$$\mathbf{60}\text{ personas} \xrightarrow{\times 10/6} \mathbf{100\%}$$

$$\mathbf{9}\text{ personas} \xrightarrow{\times 10/6} \mathbf{¿?\ \%}$$

$$\mathbf{6}\text{ personas} \xrightarrow{\times 10/6} \mathbf{¿?\ \%}$$

$$\mathbf{19}\text{ personas} \xrightarrow{\times 10/6} \mathbf{¿?\ \%}$$

En esta proporción, la operación que nos lleva desde el número de personas al porcentaje, es siempre multiplicando por $^{10}/_{6}$. *(Para una explicación por qué la operación se puede hacer también en esta dirección, vea en la Unidad 20, "Principios matemáticos".)*

Entonces tenemos:

9 personas: $\frac{9 \times 10}{6}\% = 15\%$

6 personas: $\frac{6 \times 10}{6}\% = 10\%$

19 personas: $\frac{19 \times 10}{6}\% = 31.7\%$ (*redondeado*)

etc.

Este razonamiento es muy similar al que usamos para calcular "¿Qué fracción de ... es ...?" *(Unidad 42)*. Solamente que ahora tenemos que expresar esta fracción en centésimos (= por ciento). Por ejemplo, 9 personas de 60 son $^9/_{60}$. Ahora tenemos que buscar una fracción equivalente con el denominador 100: $\frac{9}{60} = \frac{¿?}{100}$ Esto nos lleva a la misma proporción como arriba.

Podemos entonces completar nuestra tabla de datos con los porcentajes:

Parejas sin hijos	9	15%
con 1 hijo	6	10%
con 2 hijos	19	31.7%
con 3 hijos	15	. . .
con 4 hijos	5	
con más de 4 hijos	6	
TOTAL	60	100%

Una comprobación de los resultados consiste en que *la suma de todos los porcentajes debe dar 100%,* el entero.

Nota: Al hacer esta comprobación, a veces el resultado difiere de 100% solamente en pocos decimales, por ejemplo es 99.9% ó 100.2%. Si esto sucede, puede ser que los porcentajes sean correctos, y que se trate solamente de errores de redondeo. Si todos los porcentajes inexactos se redondearon "hacia abajo", esos redondeos se acumulan y hacen que la suma final sea un poco menor a 100%. Y de manera similar, si todos los porcentajes inexactos se redondearon hacia arriba.

Graficar porcentajes

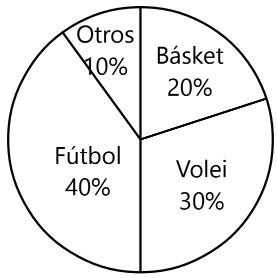
Con los datos que hemos coleccionado, podemos hacer unos gráficos. Ya sabemos cómo hacer un gráfico de barras. *(Vea Unidad 1.)* Podemos hacer también un gráfico lineal donde una única "barra" se divide en partes que corresponden a los porcentajes. La barra entera corresponde a 100%. Con los datos del ejemplo anterior:

Sin hijos 15%	1 h. 10%	2 hijos 31.7%	. . .

Si lo dibujamos en papel cuadriculado, es bueno definir una unidad práctica. Por ejemplo, podemos definir que un cuadrado equivale a 5%. Entonces la parte de 15% mide tres cuadrados. El gráfico entero ocupará 20 cuadrados, porque 20 x 5 = 100%.

Los datos con porcentajes se prestan para elaborar gráficos circulares, porque siempre se refieren a un "entero". Por eso podemos representarlos de manera similar a los dibujos de fracciones en forma de "pedazos de una torta".

En casos sencillos podemos estimar los tamaños relativos de los pedazos, usando fracciones conocidas. Como en este ejemplo:
En una actividad vacacional deportiva, 40% de los participantes decidieron jugar fútbol, 30% eligieron volei, 20% básket, y el resto diversos otros deportes.



Ya que el entero es 100%, "el resto" es 100 – 40 – 30 – 20 = 10%. Convirtiendo en fracciones, tenemos $^4/_{10}$ fútbol, $^3/_{10}$ volei, $^2/_{10}$ básket y $^1/_{10}$ otros. Podemos entonces dividir el círculo en décimos. Además podemos usar la circunstancia de que 30% + 20% = 50%, o sea la mitad: Dividimos el círculo en dos mitades, y cada mitad se divide de acuerdo a las fracciones dadas.

Cuando los números no son tan "fáciles", y queremos dibujar un diagrama con exactitud, necesitamos un transportador, y tenemos que convertir los porcentajes en grados. *(Acerca de la medición y construcción de ángulos, vea la Unidad 59.)* "El entero", los 100%, corresponden a los 360 grados del círculo entero. Tenemos que establecer entonces una proporción entre los porcentajes y los grados, donde la proporción es de 100 : 360. Por ejemplo: ¿A cuántos grados del círculo corresponden 32% ?

100% corresponden a **360º**

x32/100 ↓   ↓ x32/100

32% corresponden a . . .

O también:

x36/10 →

100% corresponden a **360º**

x36/10 →

32% corresponden a . . .

Calculamos:

$$\frac{360 \times 32}{100} = 3.6 \times 32 = 115.2º$$

(Notamos que podemos simplemente multiplicar el porcentaje por 3.6 para obtener los grados.)

Elaboren unos gráficos circulares con los datos estadísticos que han coleccionado.

Ampliaciones

¿Cuánto por ciento es?

En las actividades anteriores del Taller ya hemos convertido datos en porcentajes. Por ejemplo: 9 de 60 personas son $^{9}/_{60}$, eso equivale a $^{15}/_{100}$ ó 15%. Practica eso con los siguientes ejemplos:

38 = __% de 100	28 centavos = __% de 7.–
19 = __% de 50	360g = __% de 9kg
2 = __% de 400	4.83m = __% de 5m

Más problemas con porcentajes

1) Paula tenía 80 caramelos, Patricia 140. Patricia regaló unos caramelos a Paula, ahora Paula tiene 101. ¿Cuántos por ciento de sus caramelos regaló Patricia?

2) El Sr.Martínez compra una mesa que estaba en oferta: le dan un descuento de $^{1}/_{4}$. ¿A cuánto por ciento equivale eso?

3) ¿Cuántos por ciento del año han pasado hoy?

4) El Sr.Palacios tuvo 24'000.– en su cuenta bancaria. Le dieron 360.– de interés. ¿A qué porcentaje equivale eso?

5) En la ciudad A se reportaron 486 robos en el año 2017, y 504 robos en el año 2018. ¿En cuánto por ciento aumentaron los robos?

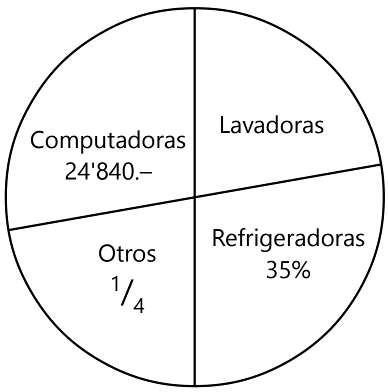
6) En la ciudad B hubo 740 accidentes de tránsito durante el año 2017, y 698 accidentes durante el año 2018. ¿En cuánto por ciento disminuyeron los accidentes?

7) Josué tiene 4350.–, Jaime tiene 3654.–. Josué da una parte de su dinero a Jaime, de manera que ahora ambos tienen la misma cantidad. ¿Qué porcentaje de su dinero dio Josué a Jaime?

8) Se quiere construir una carretera desde el pueblo de Llanos, a 568 m.s.n.m. al pie de un cerro, hasta el pueblo de Empinadas, a 2971 m.s.n.m. en la altura del cerro. Se requiere que la carretera no tenga en ningún lugar una pendiente mayor a 9%.* ¿Cuál es la longitud mínima que debe tener la carretera?

9) En la ciudad A, 15% de los habitantes tienen un negocio propio.
En la ciudad B, 40'800 de los 240'000 habitantes tienen un negocio propio.
En la ciudad C, $^{1}/_{6}$ de los habitantes tienen un negocio propio.
¿Cuál de estas ciudades tiene el mayor porcentaje de habitantes con un negocio propio?

10) Una tienda vende artefactos eléctricos. Se hizo una estadística de sus ventas recientes, y se elaboró el siguiente diagrama inexacto:



Total 108'000.–

Desafortunadamente, los datos no permiten hacer una comparación sensata, tal como están escritos.
a) ¿Puedes expresar todos los datos en porcentajes?
b) ¿Puedes expresar todos los datos en números absolutos (montos de dinero)?
c) ¿Cuánto sumaron las ventas de lavadoras?
d) Construye un gráfico circular exacto de acuerdo a los datos.

---

*) La pendiente de una carretera es la proporción entre los metros de subida y los metros horizontales. La pendiente es de 9% cuando a lo largo de 100 metros lineales, la carretera sube 9 metros.

Unidad 53 - Proyectos relacionados con unidades de medida

Prerrequisitos:

- Usar decimales con unidades de medida *(Unidad 47)*.
- Operaciones con decimales *(Unidades 48 a 51)*.
- Porcentajes *(Unidad 52)*.

Materiales necesarios:

- Según la actividad: Cinta métrica; reloj o cronómetro; litrera; etc.

TALLER

Mini-olimpiadas

Organicen unas mini-olimpiadas con varias disciplinas cuyos resultados se pueden medir. Por ejemplo: Salto largo; salto alto; carrera de corta distancia (80m ó 100m); carrera de mediana distancia (p.ej. 1km); carrera de obstáculos (usen su creatividad...); natación; ciclismo; etc...
Hagan una tabla de todos los resultados. Pueden hacer diversos cálculos con estas tablas. Por ejemplo:

¿Cuál fue el rendimiento promedio en cada una de las disciplinas?

Para las carreras a tiempo: ¿Cuál fue la velocidad de cada participante, en km/h?

¿En cuánto tiempo podrían los participantes correr un kilómetro, si fueran capaces de mantener la misma velocidad como en la carrera de corta distancia?

¿Cuál velocidad fue mayor: la de la carrera de ciclismo, o de la carrera de corta distancia?

Etc.

El consumo de electricidad

Averigüen el consumo de electricidad de los artefactos eléctricos que tienen en casa. Normalmente se indica su potencia en vatios (W). La cantidad de energía que se consume, se mide en kilovatios-hora (kWh), eso equivale a una potencia de 1000 W durante una hora. O sea, la cantidad de energía es la potencia multiplicada por el tiempo. Por ejemplo, si la plancha gasta 1200 W y se usa durante dos horas, se consumen 1200 x 2 = 2400 Wh, resp. 2.4 kWh.

Estimen o midan el tiempo que están usando diversos artefactos, y calculen su consumo diaria o semanal. Por ejemplo:

¿Cuántos vatios consume la computadora? ¿Cuántas horas al día está prendida? ¿A cuántos kWh equivale eso?

Si un foco eléctrico consume 30W y está prendido cinco horas al día, ¿cuántos kWh son eso en una semana?

¿Cuánto gasta la refrigeradora? ¿y cuánto tiempo al día está prendida?

Si están usando electricidad para calentar el agua de la ducha: ¿cuánta electricidad se consume si me estoy duchando durante 12 minutos?

Para tener una idea de cuánto es un kWh, podemos calcular también cuánto tiempo tendría que estar encendido cada uno de estos artefactos hasta gastar un kWh.

Etc.

Después de hacer estos cálculos, quizás pueden intercambiar unas ideas de cómo ahorrar energía.

Analizar las facturas de la electricidad y del agua

En estas facturas podemos encontrar unos detalles adicionales; por ejemplo el *costo* de un kWh.

Averigüemos nuestro consumo de electricidad del mes pasado, y de los meses anteriores. ¿Corresponde aproximadamente con lo que calculamos en la actividad anterior? ¿En cuál mes hemos consumido más? ¿Por qué? ¿En cuál mes hemos consumido menos?

Sabiendo el costo de un kWh, podemos calcular: ¿Cuánto cuesta la energía que consume la refrigeradora? ¿la plancha? ¿la ducha eléctrica? ¿la computadora? ¿la luz eléctrica? Etc. – Podemos calcular los porcentajes respectivos al consumo total.

Lo mismo podemos hacer con el consumo del agua: ¿Cuánto consumimos en un mes? – El consumo del agua normalmente se indica en m^3 (metros cúbicos). *(Vea Unidad 71 acerca de las medidas de volúmenes.)* ¿Cuánto nos cuesta un metro cúbico de agua? ¿Cuántas bañeras podríamos llenar con la cantidad de agua que gastamos en un mes? ¿en un día? ¿Cuánto gastamos al lavar, al ducharnos, en el servicio higiénico? ¿Cómo se compara esta cantidad de agua con la cantidad que necesitamos para beber?

Aquí también podemos intercambiar unas ideas para ahorrar: ¿Dónde podemos reducir el consumo del agua? ¿Podemos recoger agua de la lluvia para algunos propósitos (p.ej. regar las plantas)?

Ser buenos administradores del tiempo

También el tiempo es un recurso valioso. Podemos hacer un proyecto de averiguar en qué estamos usando nuestro tiempo. Que cada participante del proyecto anote durante una semana (o más, si desean), lo que está haciendo durante el día, indicando siempre la hora y la duración. Después categorizamos el uso del tiempo según trabajo, descanso, aseo y comidas, estudio, juego, pasatiempos, etc.
Por ejemplo:

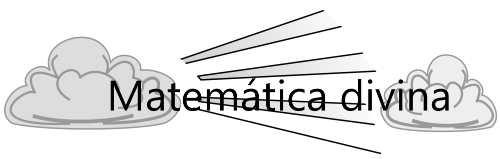
Martes: Lo que hice	Uso del tiempo:
Me levanté a las 6:30, aseo hasta las 6:50.	Aseo 20 min.
Ayudé a botar la basura y a preparar el desayuno hasta las 7:30.	Trabajos del hogar 40 min.
Desayuné hasta las 8:00.	Comer 30 min.
Cepillé los dientes y ayudé en la limpieza de la casa hasta las 8:30.	Aseo / Trabajos del hogar 30 min.
Estudié matemática hasta las 10:00.	Estudio 1h 30min.
Fui a jugar al parque hasta las 10:40.	Juego / Ejercicio físico 40min.
Acompañé a mamá al mercado, volvimos a las 11:20.	Trabajos del hogar / Estudio 40min.
Ayudé a cocinar hasta las 11:50.	Trabajos del hogar 30min.
Leí un libro hasta la 1:00pm.	Estudio 1h 10min.
Almorcé hasta las 1:40.	Comer 40min.
... (etc.)	

Al fin de la semana sumamos todo según categorías: ¿Cuántas horas a la semana he ayudado en trabajos del hogar? ¿Cuántas horas he estudiado? ¿Cuántas horas hice ejercicio físico? ¿Cuántas horas he descansado? etc.

Podemos hacer un gráfico de los resultados. Podemos convertirlos también en porcentajes: ¿Cuánto por ciento de mi tiempo estoy descansando? (etc.)

Analiza si estás contento con tu uso del tiempo. ¿Hay categorías que ocupan mucho más, o mucho menos tiempo de lo que pensabas? ¿Hay actividades que te hacen "perder el tiempo"? ¿Qué cambios deseas hacer en tu uso del tiempo? ¿Cómo puedes planificarlo mejor?

Si cada actividad se clasifica según una única categoría, entonces la suma final de todo debe ser igual al número de horas en una semana (¿cuánto es eso?). Pero hay actividades que podemos clasificar en varias categorías (¿son entonces actividades "más eficaces"?). En el ejemplo de arriba, acompañar a mamá al mercado fue un "trabajo del hogar", pero al mismo tiempo fue "estudio", porque la persona que lo hizo aprendió en ese tiempo acerca de los alimentos y su valor nutricional, y practicó comparar precios. Así también trabajar en el huerto puede ser un "trabajo del hogar" y al mismo tiempo "ejercicio físico", y quizás aun "estudio" si se aprendió algo de biología.
Si hay actividades doblemente clasificadas como estas, entonces el total de todas las categorías será mayor que el número de horas en una semana.



Administradores de la creación de Dios

Dios puso a Adán en el jardín de Edén “para que lo labrara y lo guardase” (Génesis 2:15). O sea, Adán tenía que cuidar y administrar los recursos de la creación de Dios. Esta es una responsabilidad que seguimos teniendo como humanos hasta hoy. Algunas de las actividades de esta Unidad pueden ayudar a concientizarnos acerca de esta responsabilidad, y a ser sabios en el uso de recursos como el agua, la electricidad, etc.

También el tiempo es un recurso que Dios nos da para administrarlo sabiamente:

"Miren entonces exactamente como viven, no sin sabiduría, sino como sabios, aprovechando al máximo el tiempo oportuno, porque los días son malos. Por tanto no se vuelvan insensatos, sino entendiendo cuál es la voluntad del Señor." (Efesios 5:15-17)

Anexo A: Pautas para problemas y preguntas de investigación

Pautas para el Bloque I

Unidad 1: Números con varios miles

Pregunta capciosa: El 50, porque es "sin-cuenta".

Unidad 2: El sistema decimal I

Tarea 2: ¿No puedes ver el problema? Entonces intenta escribir en este sistema griego por ejemplo el número ocho mil ocho cientos.

Tarea 3: Obviamente III (romano) no es el mismo número como 111. Pero ¿en qué radica la diferencia principal? Ambos números consisten en repeticiones del símbolo para "uno". Sin embargo, esta repetición de símbolos se interpreta de maneras distintas. ¿Qué significaba la repetición de los símbolos para los romanos? ¿Y qué significaba para los hindúes?

Tarea 5: Eso es en realidad no una pregunta matemática; es una pregunta "humana". ¡Mírate a ti mismo!

- El tablero posicional antes de la Tarea 6, completando los resultados, se verá como abajo. Opcionalmente se pueden añadir ceros a la derecha.

	M	C	D	U
				8
8 x 10 =			8	
x 10 =		8		
x 10 =	8			

Tarea 6. b) ¿No puedes verlo en el tablero posicional? Entonces puedes razonar así: Las unidades valen 1. 1 x 10 = 10, o sea que ahora tenemos decenas en vez de unidades. Si empezamos con decenas, tendremos 10 x 10 = ¿? ¿Qué es eso entonces? – Etc.

6. c) No es por 20. Si llegaste a esta respuesta, piénsalo otra vez. Estamos multiplicando, no sumando.

Tarea 7. a) ¿Qué es "multiplicación al revés"? – Si no puedes responder a eso, pruébalo con un ejemplo: 4 x 5 = 20. ¿Qué signo de operación tenemos que insertar para que la operación inversa sea correcta? 20 5 = 4.

Tarea 8. a), b) El "truco" aquí es que con números de puras centenas podemos calcular igual como si fueran unidades. Igualmente con números de puros millares. A eso se refiere el comentario después de la tarea.

Unidad 3: Suma y resta mental y con material concreto

Pregunta capciosa:
El resultado es que el barco hace agua y se hunde.

Unidad 6: Restar cifra por cifra

Sumar y restar 999

¿Pudiste ver que los resultados son siempre muy similares al primer número de la operación? ¿Puedes describir esta similitud de manera exacta? ¿Cuáles partes del resultado son exactamente iguales al primer número? Las partes que son diferentes, ¿de qué manera exactamente son diferentes?

Para explicar esta observación, nota que el 999 es muy cerca de 1000. ¿Qué hubiera pasado si hubiéramos sumado 1000? ¿o si hubiéramos restado 1000? ¿Y de qué manera cambia el resultado si usamos el 999 en vez del 1000?

Si lo has entendido, entonces tienes ahora un "truco" para sumar o restar 999 muy fácilmente.

Unidad 7: Sumas y restas con unidades de medida

Pregunta capciosa: Mil gramos son un kilo; cien centímetros son un metro. Entonces la respuesta es "un kilo-metro".

Unidad 8: El sistema decimal II

Tarea 1: Ya sabes multiplicar fácilmente por 10, por 100 y por 1000. Ahora, el 300 por ejemplo "contiene" el 100. Entonces la multiplicación 5 x 300 se puede convertir en una multiplicación por 100:

5 x 300 = 5 x (3 x 100) = (5 x 3) x 1000 = 15 x 100

... y eso es ahora fácil.

De la misma manera, una multiplicación por 2000 se puede convertir en una multiplicación por 1000. Una multiplicación por 60 se puede convertir en una multiplicación por 10. Una vez que entiendes cómo funciona, será fácil.

Nota: Al convertir las multiplicaciones de esta manera, estamos usando la *ley asociativa*.

Tarea 2: Si representas 1624 x 4 con material concreto, verás que necesitamos unos *canjes* para representar el resultado final. Pero tú ya sabes cómo resolver una suma como esta:

M	C	D	U		M	C	D	U
1	0	0	0	**x 4 =**	4	0	0	0
+	6	0	0		+2	4	0	0
+		2	0		+		8	0
+			4		+		1	6

Tarea 3:
a) Aquí se puede hacer el siguiente descubrimiento: Con las centenas podemos calcular igual como si fueran unidades. Si escribimos la operación según el valor efectivo del material, es 1600 ÷ 4 = 400. Pero con las centenas hicimos solamente la operación 16 ÷ 4 = 4, que es una operación muy fácil.
b) Estas divisiones se pueden resolver de la misma manera, repartiendo solamente centenas (resp. millares). – Notamos que 3000 ÷ 5 no se puede resolver de esta manera si usamos 3 millares; pero sí se puede si usamos 30 centenas. 6000 ÷ 3 en cambio se puede repartir usando 6 millares.
c) Con 3700 ÷ 7 no funciona de esta manera, porque queda un residuo de las centenas. Entonces, las divisiones "fáciles" son aquellas donde el número de centenas (resp. millares) se puede dividir sin residuo.

Tarea 4: Estas divisiones se pueden "descomponer" de una manera similar como las multiplicaciones en la Tarea 1. Dividir entre 200 es lo mismo como dividir primero entre 100 y después entre 2:

1600 ÷ 200 = 1600 ÷ 100 ÷ 2 = 16 ÷ 2 = 8.

Esta ya no es la simple ley asociativa, pero con unos experimentos encontrarás que efectivamente funciona así. (Daremos una explicación matemática más detallada a un nivel más avanzado.)

Unidad 13: Operaciones combinadas

Hoja de trabajo 13.1: *Cadenas de máquinas*

Si calculaste correctamente, la segunda cadena debe dar los mismos resultados finales como la primera. O sea, en una cadena de multiplicaciones y divisiones podemos intercambiar las operaciones, y los resultados siguen los mismos.

Por eso, esta combinación de máquinas puede remplazarse por una sola operación. Multiplicar por 4 y por 6 tiene el mismo efecto como multiplicar por ¿cuánto? – Y si eso lo dividimos entre 8, al final de cuentas hemos multiplicado por ¿cuánto?

La cuarta cadena contiene las mismas máquinas como la tercera. Sin embargo, en este caso observamos que los resultados no salen iguales. Eso es porque esta cadena contiene tanto operaciones del "primer piso" (suma) como del "segundo piso" (multiplicación y división). Cuando se mezclan operaciones de diferentes pisos, su orden sí importa. *(Vea en la introducción al Bloque I acerca de los principios matemáticos, "La casa de dos pisos".)*

Por la misma razón no vamos a encontrar aquí ninguna "máquina única" que podría remplazar las tres otras. Los resultados finales son menores que los números que entran, entonces la "máquina única" tendría que ser una resta o una división. Pero con ninguna de las dos funciona. Por ejemplo en la tercera cadena, entra 1431 y sale 530 al final. No existe ninguna división que produzca este resultado. Si lo intentamos con una resta, la operación sería "–901". Pero si intentamos aplicar esta máquina al segundo número, no funciona: Entra 3087 y sale 1082, la diferencia no es 901. Por eso, aquí no funciona con una máquina única.

Para investigadores aficionados: En la tercera y cuarta cadena, sin embargo es posible remplazar las tres máquinas por una cadena de *dos* máquinas; una que se puede aplicar a todos los números de la serie por igual. Pero en la cuarta cadena no será la misma combinación como en la tercera (obviamente, porque los resultados son diferentes). ¿Puedes encontrar estas combinaciones de *dos* operaciones que remplazan las tres?

"Ahora lo escribimos" - Ejercicios para el cuaderno:

b) Recuerda que la división es una operación del segundo piso; se resuelve antes que la suma (primer piso).

d) La multiplicación se resuelve primero (segundo piso). – Después tendrás una resta que no se puede resolver; tienes que cambiar el orden de las operaciones de la siguiente manera: 1277 + 1926 – (968 x 3).

***e)** No hay necesidad de multiplicar 2995 x 567. Mucho más fácil es en el siguiente orden: (2995 ÷ 5) x (567 ÷ 7 ÷ 9). Tenemos que asociar el 5 con el 2995, porque 567 no es divisible entre 5.

f) Puedes calcular esto en la cabeza, si recuerdas la ley distributiva:
8844 ÷ 6 – 2844 ÷ 6 = (8844 – 2844) ÷ 6.

***g)** La multiplicación será más fácil en este orden: 4 x 5 x (477 – 9) (si es que sabes multiplicar por 20). – Después de multiplicar, tendremos la misma dificultad como en la operación d), y podemos aplicar el mismo remedio como allí.

"Ampliaciones" - Problemas:

6) Podemos calcular la ganancia total que resulta de la venta de una docena; o sea la diferencia entre el costo de los materiales (13.80) y los ingresos por la venta (2.50 x 12). Según la primera pregunta, la mitad de esta ganancia sería para Marta, entonces Marta vendería la docena por 13.80 más su mitad de la ganancia.
***La segunda pregunta es un problema de reparto proporcional *(Unidad 21):* Si Marta gana "el doble de lo que gana la tienda", entonces la tienda gana 1 parte y Marta gana 2 partes; eso da un total de 3 partes. Entonces si queremos saber cuánto vale una "parte", tenemos que dividir la ganancia total entre 3; y Marta vende la docena a 13.80 más *dos* de estas "partes".

***7)** Podríamos calcular los gastos y el trabajo para una sola tarjeta; pero eso resultaría complicado porque tendríamos que dividir los gastos entre 100, y entonces tendríamos fracciones de centavos.
Mucho más práctico es calcular con 100 tarjetas: ¿Cuántas horas necesita Carla para fabricar 100 tarjetas? (Resultará un número entero.) Si quiere ganar 3.– por hora, ¿cuánto es entonces la ganancia mínima que debe resultar de la venta de 100 tarjetas?
A eso tenemos que añadir los gastos de los materiales, y así obtenemos el precio de venta para 100 tarjetas. Esta suma no será divisible entre 100, pero podemos redondearla hacia arriba: Carla quiere obtener una ganancia *mínima* de 3.– por hora, o sea, podemos calcular con una ganancia un poco mayor. Calculemos entonces con el siguiente número de centavos que es divisible entre 100. La división nos da el precio de venta de una tarjeta. (Si los niños dificultan en calcular con enteros y centavos, es preferible convertir todo en centavos.)

Pautas para el Bloque II

Unidad 14: Múltiplos y divisores

Investigación: Formamos rectángulos

c) No voy a dar las respuestas, pero para que puedan verificar su resultado: De los números dados, cinco son primos y cinco son compuestos. De los compuestos, casi todos pueden representarse como un rectángulo donde un lado tiene 3 piedritas. Uno de ellos requiere un rectángulo con un lado de 7 piedritas.

d) "Sistemático" significa sobre todo *ordenado*. ¿Cómo pueden probar *en orden* las posibilidades que pueden existir para formar un rectángulo? (Los rectángulos se pueden ordenar, por ejemplo, según el tamaño de uno de sus lados ...)

e) ¿Encontraron un método sistemático en la pregunta d)? ¿Sí? Entonces pueden usar el mismo método aquí. Un método que sirve para descubrir *una* posibilidad de formar un rectángulo, puede servir también para encontrar *todas* las posibilidades.

Si no encontraron ningún método sistemático, piénsenlo otra vez. Ojo: "Sistemático" no necesariamente significa "rápido". Si pensaban que existe alguna operación "mágica" que les da la respuesta con una sola operación, tengo que desilusionarlos: Un tal método no existe. Siempre será necesario probar *varias* posibilidades. Algunas resultarán y otras no. Pero este proceso de probar se puede hacer de manera *ordenada*, y así nos aseguramos de encontrar *todas* las posibilidades, sin pasar ninguna por alto.

f) Existen cinco números menores a 100 que tienen 12 divisores. ¿Los encontraron todos?

g) Para verificar si encontraron todos: Existen 25 números primos menores a 100. Sin contar el 1, porque el 1 no se cuenta entre los números primos. En la *Unidad 16* hablaremos acerca de una de las razones por qué.

Unidad 15: Divisibilidad entre 2, 3, 5 y 9

(Investigación) Divisibilidad entre 2 y entre 5:

***c)** Habrás observado que en algún momento, el patrón de las cifras "comienza de nuevo". ¿En qué momento exactamente comienza de nuevo? ¿Por qué exactamente allí? – Si entiendes eso, entenderás también por qué tiene que continuar así hasta lo infinito.

***f)** También en la tabla del 5 hay un momento donde el patrón de las últimas cifras "comienza de nuevo". ¿Dónde?
Ahora recuerda que escribimos nuestros números en el sistema *decimal*, o sea un sistema que se basa en el número 10. Escribimos los números en *decenas* y unidades. El 2 y el 5 tienen una propiedad especial que los otros números no tienen, respecto al 10. (Ahora te falta muy poco para llegar a la respuesta...)

(Ampliaciones) Divisibilidad entre 4 y entre 8:

l) Observa la sucesión de los dígitos de unidades: 0, 4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, ... En esta sucesión hay un grupo de cifras que son múltiplos de 4 (0, 4, 8), y otro grupo de cifras que no lo son (2, 6). Observa ahora los dígitos de decenas correspondientes. ¿Qué tienen en común las cifras de decenas que acompañan al primer grupo? ¿Y las otras?

m) Habrás visto que 100 es un múltiplo de 4. ¿Qué sucede entonces después del 100 con las *dos* últimas cifras de los resultados (o sea, decenas y unidades juntos)? – Si todavía no puedes verlo, compara por ejemplo 4 x 3 con 4 x 28; 4 x 4 con 4 x 29; 4 x 5 con 4 x 30; etc. ¿Cuál es la regla que podemos deducir desde allí?

***n)** Primero, recuerda que todos los múltiplos de 8 son también múltiplos de 4. Entonces tienen que cumplirse todas las condiciones para múltiplos de 4, las que encontraste en las preguntas **l)** y **m)**; pero tiene que haber una condición adicional.
Ahora, 100 no es un múltiplo de 8. Por eso, la condición adicional debe estar relacionada con la cifra de las *centenas*.
Por el otro lado, 1000 sí es un múltiplo de 8. Por eso, después de 1000 sucede en la tabla del 8 lo mismo que pasó en la tabla del 4 después del 100. (Aplica el mismo razonamiento como en la pregunta **m.**)

Unidad 16: Factorización; números primos

Entendiendo los factores primos:

Pregunta a) ¿Tenemos que probar con el 4 también?

Estamos hablando de *factores primos*. Pero el 4 no es un número primo, entonces no puede aparecer como factor primo. Eso ya debe indicarnos que no es necesario probar con el 4. Pero ¿cuál es la fundamentación matemática por qué no?

El 4 es 2 x 2. Entonces todos los múltiplos de 4 son a la vez múltiplos de 2. Entonces, si el número que examinamos fuera divisible entre 4, ya hubiéramos encontrado antes que es divisible entre 2. Lo hubiéramos dividido entre 2 (tantas veces sucesivas como fuera posible), y entonces el divisor 4 ya estaría incluido en los divisores 2 x 2.

Por la misma razón no necesitamos probar con el 6 (=2x3), ni con el 8 (=2x2x2), ni con el 9 (=3x3), ni con ningún otro número compuesto. Todos esos, si fueran divisores, ya los hubiéramos encontrado antes. Si buscamos factores primos, tenemos que intentar dividir solamente entre los números primos.

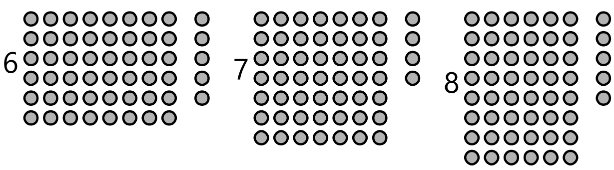
Practicamos la factorización en factores primos:

Pregunta b) *¿Hasta dónde tenemos que probar dividiendo, para saber que un número es primo?*

Observamos lo que sucede en el ejemplo del 53:

53 ÷ 2 = 26 R.1
53 ÷ 3 = 17 R.2
53 ÷ 5 = 10 R.3
53 ÷ 7 = 7 R.4
53 ÷ 11 = 4 R.9
53 ÷ 13 = 4 R.1
(...)

Observemos los cocientes: Disminuyen constantemente. Los rectángulos que intentamos formar, son primero muy largos y delgados, después se vuelven cada vez más cortos y gruesos. Cuando probamos con 7, tenemos un cuadrado (descartando el residuo). Después del 7, el rectángulo se vuelve más alto que largo.



Ahora, si 11 fuera un divisor, el otro divisor sería 4 (ó 5, redondeando "hacia arriba"). Pero estos divisores ya hubiéramos encontrado antes, al dividir entre 4 (resp. 2) y entre 5. Este mismo rectángulo ya hubiera aparecido en los intentos anteriores, solamente en forma "echada" en vez de "parada".

Si continuáramos con divisores mayores, el rectángulo se haría cada vez más delgado: Después del 13, solamente pueden aparecer cocientes menores a 4; pero esos ya los hubiéramos encontrado antes. Esto significa que podemos detenernos aquí: no encontraremos nada nuevo. Sabemos que no vamos a encontrar ningún divisor; 53 es primo.

Eso podríamos haber visto ya al dividir entre 7: El otro lado del rectángulo también fue 7. Entonces, con todo divisor mayor a 7, el otro factor sería menor a 7, y entonces lo hubiéramos encontrado antes. O sea: *Cuando nuestro rectángulo se convierte en cuadrado,* y no hemos encontrado ningún divisor, entonces podemos detenernos.

O aplicándolo a la operación con números: Si probamos los divisores en orden de menor a mayor, y *el cociente se vuelve igual o menor que el divisor,* entonces podemos detenernos.

Factores primos y divisores:

Pregunta c) A primera vista se puede notar que los factores primos son también divisores. (Lógico. Si 3 es un factor primo de 18, necesariamente tiene que ser un divisor de 18.)
- Ahora, ¿qué de los otros divisores? Por ejemplo el 6 y el 9, ¿de qué manera se pueden "construir" a partir de los factores primos? ¿Y el 18 mismo?
(En la *Unidad 24* aprenderemos un método cómo "construir" sistemáticamente todos los divisores de un número, a partir de sus factores primos.)

Preguntas acerca de la Criba de Eratóstenes:

Pregunta d) El primer múltiplo de 11 sin tachar debe ser uno que no es múltiplo de 2, ni de 3, ni de 5, ni de 7. O sea, debe ser el producto de 11 multiplicado por un número primo mayor a 7. Entonces es 11 ¿por cuánto? – Si no descubres la respuesta, haz el experimento con los números hasta 200.

Pregunta e) Esta pregunta está muy relacionada con la pregunta **d)**. Los múltiplos de 11 estaban todos tachados, porque todos son productos de 11 por un número *menor a 11*, y esos ya los hemos eliminado con los números primos menores a 11. ¿Qué nos dice eso acerca de los múltiplos de 13 que se encuentran en nuestra tabla? (Si tienes dificultades de entenderlo, repasa otra vez el razonamiento de la pregunta **b**.)

Una ley matemática acerca de los divisores

Pregunta g) Podemos hacer varios ejemplos, y veremos que la propiedad mencionada "funciona" con todos esos ejemplos. Pero aun una gran cantidad de ejemplos todavía no es una fundamentación o demostración matemática. Para demostrar que *siempre* es así, necesitamos un argumento generalizado. (Vea las explicaciones acerca de lo que es una demostración matemática, en la *Unidad 25* "Múltiplos de 11".)
Por ejemplo, podríamos razonar desde la operación de la multiplicación: Si un número tiene un divisor, entonces el número es el producto de multiplicar el divisor por algún otro número. Si el divisor a su vez tiene un divisor,

entonces el divisor es producto de multiplicar ese segundo divisor por algún número. Por tanto, el primer número es el producto del segundo divisor por algún número por algún otro número. ¿Qué podemos concluir desde aquí?

Investigación: Patrones interesantes en los números primos

Pregunta h) Primero toma en cuenta que la primera fila es una excepción (vea *Pregunta i)*. A partir de la segunda fila, los números primos ocurren solamente en la primera y en la penúltima columna.
Para entender esto, quizás es más práctico pensar dónde ocurren números *compuestos* en la tabla. Si aplicaste la "Criba de Eratóstenes", habrás notado que los múltiplos de 2 que tachamos, están ordenados por columnas: Tachamos todos los números de la segunda, cuarta y sexta columna. Y los múltiplos de 3 se encuentran en la tercera y en la sexta columna. O sea, después de tachar los múltiplos de 2 y de 3, solamente quedan la primera y la quinta columna sin tachar. Por eso, solamente en estas columnas pueden ocurrir números primos.

Pregunta i) Esta pregunta también puedes responder observando lo que sucede al aplicar la "Criba de Eratóstenes": Tachamos todos los múltiplos de 2, *excepto el 2*. Y tachamos todos los múltiplos de 3, *excepto el 3*. Por eso, el 2 y el 3 quedan como números primos en la primera fila; pero todos sus múltiplos después son tachados.

Pregunta j) La respuesta es similar a la *Pregunta h)*. Solamente que en este caso, también los múltiplos de 5 están ordenados por columnas. Verás entonces que después de tachar los múltiplos de 2, de 3 y de 5, solamente 8 columnas quedan sin tachar; por eso los números primos pueden ocurrir solamente en estas 8 columnas.

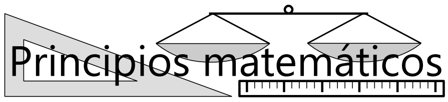
Para seguir pensando: Obviamente, *no todos* los números en estas 8 columnas son primos. ¿Por qué no? – Verás también que dentro de estas columnas ya no hay ningún patrón regular. ¿Por qué no?

Pregunta k) La respuesta es la misma como para la *Pregunta i)*. Solamente que ahora también el 5 está "fuera del orden".

Pregunta l) En las columnas de la tabla puedes observarlo bien. ¿Recuerdas las reglas de divisibilidad entre 2 y entre 5? La respuesta tiene que ver con esta regla.

****Pregunta m)*** Hemos visto que el orden de los números primos por columnas tiene que ver con los múltiplos de 2, de 3 y de 5. Las tablas tienen que ser diseñadas de tal manera que estos múltiplos caen siempre en las mismas columnas. Ahora, ¿qué tienen que ver el 6 y el 30 con los números 2, 3 y 5?

Para seguir pensando: Si quisiéramos hacer una tabla más grande, de manera que aun más múltiplos aparezcan de manera "ordenada", ¿cuántas columnas debería tener esa tabla?



Tablas de factores primos y congruencia modular

La investigación de esta Unidad (Preguntas e) a j) está relacionada con el principio de la congruencia modular. (Vea en la introducción al Bloque II.) Si clasificamos los números primos (mayores a 5) según su residuo "módulo 30", encontramos que todos son congruentes a uno de los números 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ó 29. (Estas son las ocho columnas de la segunda tabla que contienen primos.) Cualquier otro número (módulo 30) sería divisible entre uno de los números 2, 3 ó 5.

Dentro de esta propiedad ya está incluida también la propiedad de las cifras finales de los números primos; porque 30 es un múltiplo de 10, entonces después de cada período de 30 se repiten también las mismas cifras de unidades.

En los tiempos antiguos, cuando todavía no existían calculadoras ni computadoras, cada ingeniero, científico o matemático necesitaba una tabla de factores primos, para ahorrarse el trabajo de factorizar números grandes. Esas tablas podían llenar libros enteros, y contenían los factores primos de los números hasta 100'000 o más allá.

Leonardo Euler hizo la sugerencia, para reducir el tamaño de esas tablas, que se incluyesen en ellas solamente los números congruentes a 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29 (módulo 30), o sea, los que no son múltiplos de 2, de 3, ni de 5, porque esos múltiplos se pueden reconocer fácilmente con las reglas de divisibilidad. – Además sugirió que las tablas se organizaran en 8 columnas según esas clases de congruencia. Muchos autores después de él siguieron esta sugerencia. Una tal tabla se veía entonces más o menos así:

1	7	11	13	17	19	23	29
1=1	7=7	11=11	13=13	17=17	19=19	23=23	29=29
31=31	37=37	41=41	43=43	47=47	49=7·7	53=53	59=59
61=61	67=67	71=71	73=73	77=7·11	79=79	83=83	89=89
91=7·13	97=97	101=101	103=103	107=107	109=109	113=113	119=7·17
121=11·11	127=127	131=131	133=7·19	137=137	139=139	143=11·13	149=149
151=151	157=157	161=7·23	163=163	167=167	169=13·13	173=173	179=179
181=181	187=11·17	191=191	193=193	197=197	199=199	203=7·29	209=11·19
...	...	...	...	...	...	...	...

Unidad 18: El algoritmo de Euclides

La serie de prácticas (en "Ampliaciones") puede ser un poco difícil, por eso aquí unas pautas.

Para todos los ejemplos: Si usan la regla de divisibilidad entre 3, fíjense a la vez si es un múltiplo de 9. En este caso se pueden ahorrar una división: Dividan directamente entre 9, en vez de dividir dos veces entre 3.

256 y 800: Encontrarán que ambos números son fáciles de factorizar. Al final hay que contar correctamente los factores comunes.

972 y 864: Factorizando o con el algoritmo de Euclides, de ambas maneras llegarán a la meta sin dificultad.

119 y 812: 119 no es un número grande, entonces deben poder factorizarlo, aunque la factorización no es tan obvia. Después, para encontrar factores *comunes*, ¡con 812 ya no tenemos que probar con todos los factores posibles, solamente con los factores de 119!

600 y 975: Aquí hay un factor común bastante obvio. Factorizando o con el algoritmo de Euclides, encontrarán que ambos caminos son bastante fáciles.

616 y 765: Aquí es preferible factorizar. Con el algoritmo de Euclides demorarían bastante.

891 y 2187: Encontrarán que de cualquier manera no es tan difícil como parece.

984 y 1845: Ya que 1845 es aproximadamente el doble de 984, con el algoritmo de Euclides llegaremos rápidamente a un número bastante pequeño. Pero también factorizando funciona bien.

7000 y 8500: Aquí hay un divisor común muy obvio; no busquen demasiado lejos.

5000 y 8001: ¿Pueden imaginarse qué va a pasar si aplicamos aquí el algoritmo de Euclides? No necesitan hacerlo hasta el final, porque después de unos cuantos pasos ya podrán predecir cuál será el final. De todos modos no hay necesidad de factorizar 8001. Con un poco de experiencia, se puede incluso predecir desde el inicio, sin necesidad de calcular nada. Razonen...

Unidad 19: Múltiplos comunes

Introducimos el concepto del MCM – Para investigar:

Observarás que el "tren corto" se repite varias veces, hasta alcanzar la longitud del "tren largo". O sea, la longitud del "tren corto" es un divisor del "tren largo". (Con el ejemplo dado: 18 es un divisor de 54.) Entonces, la respuesta tiene algo que ver con la *divisibilidad* de los dos números. Sigue investigando...

Unos problemas con divisores y múltiplos:

1) Un problema de MCM: La cantidad de galletas que se busca, tiene que ser un múltiplo de 8 y también de 12.

2) Aquí buscamos el MCD: El lado de una baldosa tiene que ser un divisor tanto de 224 cm como de 308 cm.

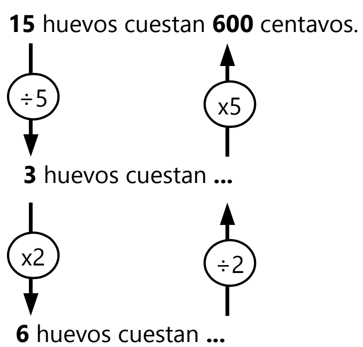
3) Aquí volvemos al MCM: El número total de soldados tiene que ser un múltiplo del número de soldados en cada compañía.

***4)** Si con filas de 15 y de 14 sobra una caja, entonces el número de cajas *menos uno* tiene que ser un múltiplo de 15 y también de 14. Ahora, entre estos múltiplos comunes de 15 y 14 tenemos que encontrar uno al que podemos sumar 1 (para obtener el número total de cajas), y entonces será divisible entre 13. Se necesita un poco de perseverancia para encontrarlo. Puedo revelar que 3991 es una solución ... pero hay otra menor.

Unidad 20: Proporciones

"Cuando no se puede calcular con una sola máquina":

Si no pueden "verlo", dibujen en el diagrama también las "máquinas al revés", o sea las operaciones inversas:



Desde ambos lados llegamos al "puente" mediante una *división*. Esto significa que el "puente" tiene que ser un *divisor* de ambos números (de 15 y de 6, en este caso).

Sin embargo, existe también otra posibilidad: Podríamos usar *primero* una máquina de multiplicación, y *después* una máquina de división. Exploren esta alternativa. ¿Qué propiedades debe tener el "puente" en este caso?

Problemas para practicar:

***11)** Si intentamos calcular cuánto come el gato en un día, encontramos que la división no sale exacta. No podemos despreciar el residuo así no más, porque el resultado no saldrá correcto. (El error no es grande, pero habrá un error.)
Los niños que ya saben calcular con fracciones, podrán resolverlo de esa manera. Para los demás, existe otro camino: ¿Por qué no multiplicar primero? Entonces la operación se ve así: 430 x 30 ÷ 7. También quedará un residuo de la división; pero los enteros saldrán correctos.

***12)** Una manera fácil de razonarlo es la siguiente: ¿En cuántos kilómetros se acorta la distancia entre los dos aviones cada hora? Entonces, ¿después de cuántas horas esta distancia se ha acortado en 4440km? Con eso sabemos el tiempo de vuelo hasta el encuentro; y con eso podemos ahora calcular también la distancia desde Santiago.
El problema requiere una operación de división que los niños a este nivel quizás no dominan todavía. Pero su resultado es exacto; por tanto pueden descubrirlo aun sin tener este conocimiento.

Pregunta capciosa:

Son solamente cuatro gatos, uno en cada rincón. De esta manera, cada gato mira los ojos de los gatos en los otros tres rincones. Y cada gato está sentado sobre su propia cola.

Unidad 21: Más proporciones

Pregunta capciosa: Los 3 pares de medias necesitan para secar exactamente el mismo tiempo como los 15 pares.

Problemas:

***9)** El cálculo de Mario es correcto, pero en la situación real su resultado no tiene sentido. ¿Cómo te imaginas meter a 1800 personas en la cocina para que laven los platos juntos?

***10)** El viajero dijo: "He recibido 80 dátiles de ustedes, y cada uno de ustedes se quedó con 80 dátiles. 70 dátiles he recibido de Bashar, y 10 de Amir. Por tanto he recibido de Bashar el valor de 7 monedas, y de Amir el valor de una única moneda. Según todas las reglas de un negocio honesto, esta es la repartición más justa que les puedo proponer."

Unidad 22: La regla del 9 y la ley del residuo

La prueba del 9 no es una garantía de un resultado correcto:

Unos comentarios acerca de estos últimos ejemplos:

En la *suma*, el segundo sumando se encuentra en una posición equivocada respecto a sus valores posicionales. Este tipo de error no afecta la suma de las cifras, y por tanto la prueba del 9 no puede detectarlo.

En la *multiplicación*, dos cifras del resultado están intercambiadas. Este error tampoco afecta la suma de las cifras, y por tanto no se detecta.

En una *división exacta entre 9* se puede escribir *cualquier* número como resultado, y la prueba del 9 siempre saldrá correcta (¿por qué?). Solamente si el alumno hubiera erróneamente obtenido un residuo, la prueba del 9 hubiera detectado el error.

Para conocedores del cálculo de probabilidades: ¿Por qué la prueba del 9 detecta 8 de cada 9 errores? – Porque existen 9 residuos posibles. Si un resultado es equivocado, solamente en uno de esos 9 casos posibles coincide su residuo con el residuo del resultado correcto. Por tanto hay una probabilidad de $^{1}/_{9}$ de que el error quede sin detectar, y $^{8}/_{9}$ de los errores se detectan.

Unidad 23: Divisibilidad entre números compuestos

Investigación:

a) ¿Ya encontraste la propiedad particular de los múltiplos de 15 en la tabla? Si no, mira otra vez: Cuando un número es divisible entre 15, ¿qué aparece entonces en sus columnas de "Divisible entre 3" y "Divisible entre 5"? ¿Cuál es entonces la regla para reconocer fácilmente los múltiplos de 15?
Para explicar esta propiedad, piensa: ¿Qué hay de especial en el 3 y el 5, respecto al 15? ¿Qué operación se puede formar con estos tres números?

b) Los números indicados (6, 12, 18, 20, 45) se componen de factores para los cuales conocemos una regla de divisibilidad "fácil". Por ejemplo: ¿Entre cuáles factores debe ser divisible un número, para que sea divisible entre 18? ¿Puedes entonces establecer una "regla del 18" similar a la "regla del 15" que encontraste en la pregunta **a)** ?

***c)** Comprueba la regla de Mario con algunos números, por ejemplo: 42, 44, 48, 60, 66, 72, 84, 88, ... ¿Funciona su regla siempre? ¿O encuentras excepciones donde su regla falla? – Si hubo casos donde su regla falló, examínalos: ¿Qué tienen estas excepciones en común? ¿Dónde podría entonces estar el error en la regla de Mario? ¿Y cuál sería la regla correcta?

Unidad 24: Diagramas de divisores

Pregunta 2) En la *Unidad 16* hemos descubierto que los divisores de un número consisten en todas las combinaciones posibles de los factores primos de ese número. Eso es exactamente lo que hace el diagrama de divisores: Representa de forma ordenada todas las multiplicaciones que se pueden formar con los factores primos del número en la punta. Ahora solamente te falta observar y verificar: ¿Cómo tiene que ser construido un diagrama para que efectivamente contenga todas estas combinaciones? ¿Por qué nuestros diagramas cumplen con esta condición?

Pregunta 3) Podemos razonar así: 50 es un divisor de 200. Entonces cada divisor de 50 es también un divisor de 200. Por tanto, todos los divisores de 50 tienen que aparecer en el diagrama de los divisores de 200.
O podemos expresarlo en el lenguaje de los conjuntos: Los factores primos de 50 son un *subconjunto* de los factores primos de 200. Por eso, todas las combinaciones de factores primos de 50 son un subconjunto de las combinaciones de los factores primos de 200. Lo mismo aplica a cualquier otro divisor de 200.

Pregunta 4) Hemos visto en las preguntas anteriores que los divisores de un número se forman a partir de los factores primos de ese número. Si usamos el 6 y el 9 como factores, ¿obtenemos con eso todas las combinaciones de factores primos del número en la punta? ¿Por qué sí, o por qué no?

Pregunta 5) ¿Has notado una similitud de los diagramas de divisores con ciertas figuras o cuerpos geométricos? Cuando hay solamente dos factores distintos, el diagrama se parece a un rectángulo. Cuando hay tres factores distintos, se parece a un "ladrillo" (prisma rectangular).

Si tienes un rectángulo de piedritas, ya sabes cómo calcular el número total de piedritas en el rectángulo. Puedes aplicar eso a los diagramas que se parecen a rectángulos.
Si tienes un prisma rectangular formado de cubitos (con piedritas no funciona bien...), quizás ya sabes también cómo calcular el número de cubitos que contiene. *(Vea Unidades 71, 81)*. Entonces puedes aplicar eso a los diagramas que se parecen a "ladrillos".
Y bueno, hay unos diagramas que son simples líneas rectas. (Por ejemplo el diagrama **l)** en la Hoja 24.3). Esos son sencillos.

Con todo eso, ¿puedes ahora formular una regla general? ¿Y puedes aplicarla también a los números que tienen *cuatro* o más factores distintos? (Con esos, la comparación con cuerpos geométricos ya no funciona de una manera tan sencilla...)

Unidad 25: Investigación: Los múltiplos de 11

1) Para encontrar una explicación lógica, solamente hay que observar por separado lo que sucede con las cifras de las unidades, de las decenas y de las centenas:

$$\begin{array}{r} 420 \\ +\ 42 \\ \hline 462 \end{array}$$

En el resultado, las unidades (2) vienen de las unidades del factor 42, y las centenas (4) vienen de las *decenas* de este factor. Las decenas del resultado (6), o sea la cifra del medio, es la *suma* de las dos cifras (2 + 4 = 6). Observando la operación escrita, es obvio que tiene que ser así.

2) Anotemos la operación de la misma manera para 58 x 11:

$$\begin{array}{r} 580 \\ +\ 58 \\ \hline {}^{1}638 \end{array}$$

En el principio es lo mismo. Solamente que la suma 8 + 5 = 13 causa un *canje* de 10 decenas por una centena. Por eso, las decenas del resultado (3) muestran solamente las unidades de esta suma, mientras las centenas del resultado se aumentan en 1, a causa del canje.

3) Anotamos el ejemplo 372 x 11 de la misma manera:

$$\begin{array}{r} 3720 \\ +\ 372 \\ \hline {}^{1}4092 \end{array}$$

Empezando desde la derecha (desde las unidades), tenemos en el resultado:
- las unidades de 372 (2),
- la suma de unidades más decenas (2+7 = 9),
- la suma de decenas más centenas (7+3 = 10, requiere canje),
- las centenas de 372 (3, más 1 por el canje).

Ya podemos ver cómo continúa para números aun más largos. El método abreviado se ve entonces así:

3 7 2
4092

Hay que empezar por las unidades, como en el procedimiento "normal" de suma o de multiplicación, para no equivocarnos en los canjes.

El mismo método se puede entender también desde la forma "normal" de multiplicar, pero usando de frente la tabla del 11, en vez de descomponerlo en (10+1):

$$\begin{array}{rcr} 300 \times 11 & = & 3300 \\ 70 \times 11 & = & 770 \\ 2 \times 11 & = & \underline{\quad 22} \\ & & 4092 \end{array}$$

o en la forma abreviada, "llevando":

$$\begin{array}{r} \underline{3\ 7\ 2 \times 11} \\ {}^{7\ 2} \\ 4\ 0\ 9\ 2 \end{array}$$

4) Para demostrar y explicar esto, tenemos que encontrar una manera de "generalizar" un número capicúa de 4 cifras. A un nivel más avanzado lo haríamos con álgebra; pero lo podemos explicar también con los números. Por ejemplo así:

Cada número capicúa de 4 cifras se puede descomponer en dos pares de cifras: las cifras "exteriores" y las cifras "interiores". Por ejemplo 4774 = 4004 + 770. Para que sea un número capicúa, las cifras exteriores tienen que ser iguales, y las cifras interiores también tienen que ser iguales entre sí. Por tanto, las cifras exteriores siempre representan un múltiplo de 1001, y las cifras interiores representan siempre un múltiplo de 110. (En nuestro ejemplo: 4004 = 1001 x 4, 770 = 110 x 7.)
Ahora, 1001 = 91 x 11. Por tanto, todos los múltiplos de 1001 también son múltiplos de 11. Y 110 = 10 x 11, entonces todos los múltiplos de 110 también son múltiplos de 11. Y si sumamos dos múltiplos de 11, el resultado es nuevamente un múltiplo de 11. Con esto, tú mismo puedes completar la demostración: ¿Qué consecuencias tiene esto para un número capicúa de 4 cifras? ¿Por qué?

5) Dos de los cinco ejemplos dados no son múltiplos de 11; entonces para esos casos ya podemos descartar la hipótesis. Recuerda: Si encontramos un único contraejemplo, la hipótesis es refutada.
Los ejemplos con 4 cifras iguales son a la vez números capicúas; entonces para esos aplica la ley que encontramos en la pregunta 4.
Quedan aquellos números que consisten en dos pares de cifras iguales, como 1144 ó 2266. ¿Puedes aplicar a estos números un razonamiento similar al que usamos en las pautas para la pregunta 4?

6) Para los números capicúas de 3 cifras es fácil encontrar contraejemplos.
La segunda pregunta es un poco ambigua: ¿se refiere a números que consisten en 3 cifras repetidas *y nada más*, o se incluyen números mayores que contienen 3 cifras repetidas y otras cifras más? – El contexto sugiere que se entiende lo primero; en este caso hay solamente 9 números para evaluar. En el segundo caso podrás encontrar ejemplos de tales números que no son múltiplos de 11, y otros que sí lo son. ¡Verifícalo!

***7)** Hemos tratado de dos temas: Números capicúas, y números que consisten en cifras repetidas. Habrá que examinarlos por separado.

Números capicúas: Un número capicúa largo puede construirse desde uno más corto, simplemente añadiendo cifras iguales por ambos lados. Por ejemplo al número 4774 podemos añadir un 5 por ambos lados, entonces tenemos el número capicúa 547'745. Ya sabemos que 4774 es un múltiplo de 11 (como todos los números de esta misma forma). ¿Podemos desde allí demostrar que 547'745 también tiene que ser un múltiplo de 11?
Vamos a ver. ¿Con qué operaciones matemáticas llegamos de 4774 a 547'745? ¿y como podemos generalizar estas operaciones?

El número 547'745 contiene el 4774 dentro de sí, pero se ha desplazado por una posición hacia la izquierda. Esto significa que se ha multiplicado por 10. A eso se ha sumado 500'005. O sea, 547'745 = 4774 x 10 + 500'005.
Podríamos comenzar con cualquier otro número capicúa, y siempre se multiplicaría por 10; entonces esta operación aplica en todo caso. Pero un múltiplo de 11, multiplicado por 10, siempre da otro múltiplo de 11.
El número que sumamos después podría ser otro; pero siempre consistirá en dos cifras iguales al inicio y al final, y cuatro ceros entre ellas. En otras palabras, siempre será un múltiplo de 100'001 (porque de otro modo no resultaría un número capicúa). ¿Es 100'001 un múltiplo de 11? (Verifícalo.) Si lo es, entonces el resultado final también será un múltiplo de 11, según el razonamiento que hemos usado en la pregunta 4.
Ahora tú mismo puedes investigar qué sucede si ampliamos nuestro nuevo número capicúa a uno de 8 cifras, de 10, etc.... Y también: ¿Qué sucede si comenzamos con un número capicúa de 3 cifras y aplicamos el mismo proceso? ¿Qué concluyes?

Números con cifras repetidas: ¿Puedes aplicar el razonamiento de la pregunta 5 a números mayores? – Entonces, ¿qué clases de números son con seguridad múltiplos de 11? (Es una única clase de números acerca de los cuales podemos decir algo definitivo. O quizás dos clases, si incluimos ciertos números que contienen ceros.)

8) Puedo sugerir dos caminos posibles para llegar a la respuesta:
a) Examina lo que sucede cuando en la multiplicación por 11 ocurre un canje. ¿Qué efecto tiene eso sobre la cifra del medio, y sobre la suma de la primera con la última cifra? ¿Qué relación existe entonces entre la suma de las cifras "exteriores", y la cifra del medio?
b) Recordando la regla de divisibilidad entre 9, allí encontramos que el número 9 (o un múltiplo de 9) está de alguna manera "escondido" en los múltiplos de 9. ¿Podemos encontrar una forma como el número 11 está "escondido" en los múltiplos de 11?

***9)** No voy a descubrir todo aquí, pero voy a dar por lo menos unas cuantas pistas:

- Podrías comenzar con aquellos números (por ejemplo de 4 cifras) de los que ya sabemos que son múltiplos de 11: números capicúas, o números que consisten en dos pares de cifras repetidas. Si a estos números sumamos 11 (o un múltiplo de 11 como 110 ó 1001), obtenemos otro múltiplo de 11. Al efectuar una de estas sumas, ¿qué sucede con las sumas o diferencias entre las cifras de nuestro número? (Probablemente tendrás que investigar por separado los casos donde no hay canje, y los casos donde la suma genera un canje.)

- O podrías investigar nuevamente lo que sucede con las cifras al multiplicar un número por 11 (Pregunta 3). Investiga primero los casos donde no hay canje. ¿Qué propiedad tiene que aparecer en las cifras del resultado? Si lo descubres, investiga después los casos donde hay canjes.

(Si no lo descubres, no te desanimes. Este tema se retomará y se ampliará en el nivel de Secundaria I.)

Pautas para el Bloque III

Unidad 26: Números hasta un millón

Pregunta capciosa:

12'111, porque once mil = 11'000, once cientos = 1100, once = 11, sumando eso da 12'111.

Unidad 27: Sumar y restar números grandes

Un truco de sumas:

Sería difícil dar una pauta sin descubrir ya casi todo. Me atrevo entonces a descubrir el secreto de Alberto: Observando los cinco sumandos de cada operación, vemos que el segundo y el cuarto se complementan a 99'999, y el tercero y el quinto también se complementan a 99'999. Encontrar tales números no es difícil: simplemente hay que complementar cada cifra del número original a 9. Entonces la operación entera se reduce a sumar dos veces 99'999 al primer número. Y eso ya debes saber cómo hacerlo rápidamente. *(Vea en la Unidad 6.)*

El experto añade:
Alberto cometió una pequeña imprudencia, en que resolvió ambas operaciones en el mismo orden. Eso hubiera permitido quizás a un observador muy perspicaz descubrir el secreto. Si quieres presentar este truco a tus amigos y te piden hacer varios ejemplos seguidos, entonces puedes variar el orden, como en estos ejemplos:

77'067	34'989
99'898	13'855
83'913	22'754
16'086	*65'010*
<u>22'932</u>	*<u>86'144</u>*
299'896	222'752

En el primer ejemplo, el cuarto número es el complemento del tercero, y el quinto número es el complemento del primero. El resultado es entonces la suma del *segundo* número más dos veces 99'999. (El complemento de 99'898 es 101. Si escribimos eso, tal vez el público reclama que hemos añadido un número "muy fácil".) – En el segundo ejemplo, el cuarto número es el complemento del primero, y el quinto número es el complemento del segundo; así que el resultado es la suma del *tercer* número más dos veces 99'999.
Solamente que si quieres variar el orden, tienes que concentrarte muy bien para no olvidarte cuáles números estás complementando, y cuál es el número que tiene que reaparecer en el resultado. Se recomienda practicarlo bien antes de presentarlo en público.

Unidad 28: Multiplicación con números de varias cifras

Estimamos cantidades grandes:

Estas actividades requieren encontrar una buena aproximación a los valores verdaderos, para poder verificar las estimaciones. Aquí unas ideas de cómo podríamos encontrar tales aproximaciones buenas:

Granos de arroz en un kilo, o granos de maíz en 50 kilos: Cuenten el número de granos en una cantidad pequeña (pesar con una balanza muy exacta), después multipliquen por el número necesario. Por ejemplo: granos de arroz en 10 gramos; multiplicar por 100. Granos de maíz en 100 gramos, multiplicar por 500.

Litros de agua en la piscina: Eso equivale a calcular el volumen de un cuerpo geométrico. (*Vea Unidad 71.)* Si la piscina tiene una forma completamente regular (un prisma rectangular), entonces se puede simplemente

multiplicar el ancho por el largo por la profundidad. Un litro equivale a un cubo de 10 cm de lado, entonces hay que hacer el cálculo en decímetros (1 dm = 10 cm), y así nos sale el número de litros. Por ejemplo con 25 metros de largo, 10 metros de ancho, 1.80 metros de profundidad: 250 dm x 100 dm x 18 dm = 450'000 litros. (En la mayoría de las piscinas públicas, sus medidas están indicadas en alguna parte; si no, hay que preguntar o medirlo.)
Si la piscina es rectangular, pero su profundidad cambia de un extremo al otro, entonces podemos hacer lo mismo, calculando con su profundidad promedia.
Si tiene una forma más irregular, habrá que intentar combinarla desde varias partes rectangulares.

Ladrillos que componen la casa: Tendrán que medir el tamaño de un ladrillo. Si los ladrillos no están visibles en ninguna parte, tendrán que hacer una suposición, basada en el tamaño de un ladrillo promedio. Después pueden medir los muros y así calcular cuántos ladrillos contienen aproximadamente. Tomen en cuenta el grosor de los muros: En los muros exteriores, que son más gruesos, normalmente se colocan los ladrillos en una orientación distinta de los muros interiores que son más delgados.

Cabellos en la cabeza (o pelos de un animal): Intenten contar los cabellos en una superficie pequeña, por ejemplo un centímetro cuadrado. Estimen cuántos centímetros cuadrados tiene la superficie entera, y multipliquen.
Si no logran contar los cabellos en un centímetro cuadrado, pueden contar cuántos cabellos crecen en un centímetro lineal, y multiplicar este número por sí mismo; eso les dará una aproximación del número de cabellos en un centímetro cuadrado.

Hojas de un árbol: Tres alternativas que pueden probar:
a) Cuenten las hojas en una rama pequeña. ¿Cuántas ramas de este tamaño componen una rama grande? ¿Cuántas ramas grandes como esta tiene el árbol? Así podrán aproximar el número por multiplicación. Pero tendrán que tomar en cuenta que las ramas tienen tamaños variados; tendrán que usar un buen promedio para que la aproximación sea buena.
b) Cuenten las hojas que se encuentran dentro de un espacio determinado (por ejemplo midiendo con una caja grande). Calculen el volumen de la caja. Estimen el volumen del árbol, midiendo su extensión y altura. Con la proporción entre el volumen de la caja y el volumen del árbol podrán calcular aproximadamente el número de hojas.
c) Si es una especie de árbol que pierde sus hojas en otoño, pueden en otoño coleccionar y guardar todas sus hojas. Cuenten un número razonable de hojas (por ejemplo 200) y pésenlas. Pesen también el total de las hojas. Así, usando el principio de la proporcionalidad, podrán calcular su número aproximado.

Casas en la ciudad: Unas alternativas posibles:
a) Averigüen o estimen el número promedio de personas que viven en una casa. El número de habitantes de la ciudad, dividido entre el número de personas que viven en una casa, les da el número aproximado de casas.
b) Consigan un plano exacto de la ciudad, o una foto satelital desde "Google Earth" o similar. Cuenten el número de casas en un área determinada. Midan el área urbana total, y calculen desde allí el total aproximado de casas.

Multiplicación árabe – ¿Por qué las cifras deben sumarse en dirección diagonal?

Piensa para algunos cuadros: ¿Qué valor posicional debe tener el número que escribimos allí? – Por ejemplo, si en un cuadro se multiplican centenas por decenas, ¿qué valor posicional tiene el resultado? – ¿Dónde se encuentran entonces todos los cuadros que contienen decenas? ¿dónde todos los que contienen centenas? – ¿Qué significa eso para la manera correcta de sumar?

Unidad 29: División entre números de varias cifras

Investigación: Encontrar multiplicaciones con resultados "interesantes"

El principio obvio consiste en descomponer algunos de esos "números interesantes" en factores primos, y desde allí construir las multiplicaciones posibles. Ahora, podemos escoger esos números y factores de una manera inteligente para no hacernos demasiado trabajo.

Si la meta consiste en encontrar multiplicaciones por números de una sola cifra *(como en la Unidad 10)*, entonces tenemos que probar solamente los números de 2 a 9 como divisores. En muchos casos no hay necesidad de hacer una descomposición en factores, porque podemos construir múltiplos, usando las reglas conocidas de divisibilidad:

Todo número que termina con 5, es múltiplo de 5. Por ejemplo 12345, ó 98765.

Múltiplos de 4 también pueden construirse fácilmente si recordamos las reglas de divisibilidad entre 4. Todos los números que terminan (por ejemplo) con 12, 32, 44, 56, 76, 88, 96, son múltiplos de 4: 65432, 123456, 6996, 9876, 445544, etc. (Algunos de estos son a la vez múltiplos de 8.)

Recordando la regla del 9, podemos construir múltiplos de 9 con poco esfuerzo:

- Los números 234, 567, 432, 765, 234567 y 765432 son múltiplos de 9.
- Igualmente sus combinaciones capicúas* 234432, 432234, 567765 y 765567.
- Podemos jugar también con combinaciones de las cifras 6 y 9. Estas son múltiplos de 9 si contienen la cifra 6 exactamente 3 veces, o exactamente 6 veces. Por ejemplo: 69696, 96669, 666666.
- Por supuesto que los números con puros nueves también son múltiplos de 9. Esos también son resultados "interesantes"; pero una multiplicación como 11111 x 9 no puede considerarse tan interesante para resolver.
- Si consideramos números mayores: Todo número que consiste en 9 repeticiones de una misma cifra, es múltiplo de 9: 111'111'111, 222'222'222, etc.

Por el otro lado, sería poco eficaz intentar descomponer un número como 56789 en factores primos, porque no contiene ningún factor "obvio".

Para encontrar "multiplicaciones interesantes" con factores de varias cifras, podemos usar primeramente aquellos números compuestos para los que existen reglas sencillas de divisibilidad: 15, 18, 24, 36, 45, etc. Para esos podemos construir múltiplos con métodos similares a los mencionados. Aparte de esos, existen unas factorizaciones "especiales" como 11'111 = 41 x 271, pero esas requieren mucho trabajo para encontrarlas.

*Un número capicúa es un número que se lee igual hacia adelante y hacia atrás.

Unidad 30: Investigaciones relacionadas con la multiplicación y división

Las multiplicaciones ingeniosas de los antiguos persas

a) Recuerda que por ejemplo 14 x 17 se puede escribir así: (10 + 4) x (10 + 7). ¿Cómo se puede escribir esto detalladamente? (Usa la ley distributiva.) ¿y cómo se relaciona esta operación con el método descrito?
Puedes también intentar representar estas multiplicaciones de manera gráfica, o con regletas Cuisenaire. Observando las figuras que resultan, quizás llegas a una explicación.
Si entiendes el caso de los números entre 10 y 20, puedes después investigar también los otros casos.

b) Las pautas para ***a)*** te pueden ayudar para adaptar estas leyes a números cercanos a 20. ¿O quizás para números aun mayores, o para números de dos cifras en general? (Se usará entonces no el 10, sino el 20 o algún otro número, para "descomponer" los factores en sumandos.)

Multiplicar rápidamente por 5, por 25 y por 15

a) Si comparas los resultados, seguramente encontrarás pronto una similitud notable. Eso te señalará el camino hacia la regla.

b) El "por qué" está relacionado con el hecho de que estamos usando un sistema de numeración con la base 10. Entonces, la fundamentación matemática tendrá algo que ver con el número 10.

c) Los números impares pueden interpretarse como "un número par más 1." Entonces puedes aplicar la regla a ese número par. (¿Cómo lo corregimos después para el "más 1"?)

d) Quizás te ayuda si consideras que 25 = 5 x 5. Multiplicar por 25 es entonces lo mismo como multiplicar dos veces seguidas por 5. Si aplicas la regla de ***a)*** dos veces seguidas, ¿a qué operación equivale eso? ¿y para cuáles números funciona eso sin problemas?

e) De manera similar como en c), los otros números pueden interpretarse como "un número 'fácil' más 'algo'. " Aplica la regla para el número "fácil", y después piensa cómo tienes que corregirlo para el "algo".

f) Recuerda que la división es la operación inversa de la multiplicación, o sea "multiplicación al revés". Con eso encontrarás las reglas rápidamente.

***g)** 15 es también un múltiplo de 5, entonces la regla será similar. Solamente que en este caso será un poco más complicada que en las preguntas anteriores.

Un experimento de división

a) Si experimentas con varios números, el resultado sugiere que sí funciona siempre. Pero para estar seguro, tendrás que descubrir la ley matemática que se pide en la pregunta b).

b) Si escribes un número de tres cifras dos veces seguidas, ¿qué operación matemática haces realmente con ese número?
- Obviamente, esta operación se anula mediante las divisiones sucesivas entre 7, entre 11 y entre 13. ¿Por qué? ¿A cuál operación (única) equivale esta serie de divisiones?

Unidad 31: Conversión de unidades de medida con números grandes

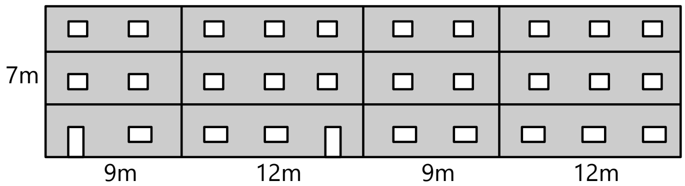
Problemas:

***8)** Si intentas calcular cuántos litros de agua consume una única persona, encontrarás que la división no sale exacta. Tendrás que aplicar entonces los principios de las proporciones *(Unidad 20),* y encontrar un "puente" más conveniente. Para eso necesitarás factorizar los números de habitantes. (A no ser que ya sepas calcular con fracciones o decimales.)

Unidad 32: Medidas de áreas

Problemas:

***6)** Puede ser de ayuda hacer un dibujo. La fachada se compone de 4 rectángulos, cada uno de 7m de altura. Dos de estos rectángulos tienen 9m de largo, los otros dos 12m, según las medidas de la casa. De eso se restan las áreas de las dos puertas y de las ventanas (8 ventanas del primer piso y 20 ventanas del segundo y tercer piso juntas).



Las medidas de las ventanas son múltiplos de 10cm, por tanto podemos calcular sus áreas en dm^2 y al final convertirlas en m^2: En el primer piso 8x10x15 dm^2, en el segundo y tercer piso 20x10x13 dm^2.

Estas pautas deben ser suficientes para poder calcularlo todo. Solamente hay que tener cuidado de no olvidar ningún dato.

8) Tienes que estimar el área superior de tu cabeza y hombros cuando estás parado. Aquí no se requiere un cálculo exacto; puedes asumir que el área fuera rectangular, medir las medidas aproximadas y calcular con esta base.

¿Por qué este peso no nos aplasta? (Resultará un peso que es varias veces el peso de tu propio cuerpo.) – Es porque el aire no solamente está encima de nosotros; nos rodea por todas partes e incluso desde adentro de nuestro cuerpo. Puedes compararlo con una botella de plástico sumergida debajo del agua: Si la botella está vacía y cerrada, el peso del agua la aplasta. Pero si la botella está abierta, se llena con agua por dentro, y así la presión del agua por dentro equilibra la presión del agua por fuera, y la botella no se daña.

Nuestro cuerpo es como la botella abierta y llena de agua, no como la botella cerrada y vacía.

Unidad 33: Medidas del tiempo

Pregunta capciosa: ¡Es hora de arreglar el reloj!

Pautas para el Bloque IV

Unidad 36: Número mixtos

Resultados de las operaciones con números grandes:

r. $4334\frac{24}{100}$, s. $200\frac{2}{5431}$, t. $8998\frac{188}{211}$, u. $\frac{6440}{6644}$.

"Para pensar": $\frac{3165}{3166}$ es "casi un entero". La operación puede escribirse así:
$3\frac{2687}{3166} + 1 - \frac{1}{3166}$, y ahora es fácil.

Unidad 38: Multiplicación y división de fracciones con enteros

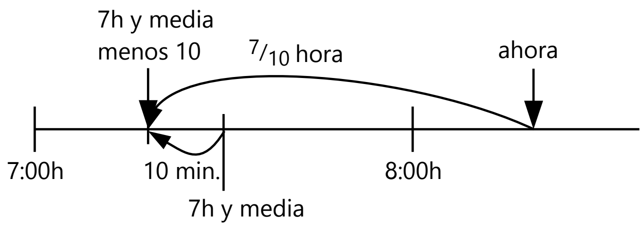
Problemas con fracciones:

***5)** Desde las 7:00 h tenemos que *retroceder* once sextos de una hora. Pero los once sextos contienen una hora entera: $^{11}/_{6} = 1\ ^{5}/_{6}$. Entonces retrocedemos primero una hora, y estamos a las 6:00 h. Para seguir retrocediendo, es más práctico que decimos que eso son las 5:00 y 60 minutos. De eso podemos ahora restar los $^{5}/_{6}$ de una hora, y llegamos al resultado.

***9)** Si Lisa regaló $^{1}/_{4}$ de sus caramelos, le quedan $^{3}/_{4}$. Pero sabemos que esos $^{3}/_{4}$ son iguales a 24 caramelos. ¿Cuánto es entonces $^{1}/_{4}$ de lo que tenía Lisa? Esa es la cantidad que Lisa regaló a Rosa. Entonces, antes de recibir los caramelos de Lisa, Rosa tenía 24 caramelos menos esa cantidad.
Cuando tengas tu respuesta, calcula también la cantidad de caramelos que Lisa tenía al inicio. Después repasa el proceso entero para comprobar tu cálculo. Si quieres, puedes hacerlo con caramelos verdaderos: Lisa regala a Rosa $^{1}/_{4}$ de lo que tiene. ¿Es cierto que ahora ambas tienen 24 caramelos?

***10)** No es difícil calcular cuánto es $^{8}/_{15}$ de una hora. Con eso sabes la hora cuando el trabajo comenzó. Un poco más difícil son los $^{15}/_{8}$, porque 60 ÷ 8 no sale exacto. Pero recordarás que puedes también calcular así: (60 x 15) ÷ 8. Quedará un residuo de la división, pero no importa: Carlos trabajó cierto número de minutos, más un "residuo de minutos", o sea, una fracción de minutos.

***11)** Un dibujo puede ayudar. Por ejemplo así:



¿Encuentras ahora la respuesta?

Más problemas con fracciones:

4) "Ganancia" es lo que queda de los ingresos *después de deducir la inversión*. Ahora hay dos maneras de calcularlo, una un poco más trabajosa y otra un poco más rápida. Podríamos calcular primero los ingresos, o sea $^{19}/_{14}$ de 3500.–, y después restar 3500.– de esta cantidad. Pero más fácil es si calculamos primero con las fracciones: La inversión entera es $^{14}/_{14}$, entonces la ganancia es $^{19}/_{14} - ^{14}/_{14} = ^{5}/_{14}$. Calcular $^{5}/_{14}$ de 3500.– es un poco más fácil que calcular $^{19}/_{14}$.

5) La diferencia entre el peso del balde lleno y del balde medio lleno corresponde a la mitad del agua que cabe en el balde, o sea $15 - 8^{1}/_{2} = 6^{1}/_{2}$kg. Entonces, si vaciamos el balde medio lleno, su peso disminuirá en otros $6^{1}/_{2}$kg, y con eso tendremos el peso del balde vacío.

***6)** La pregunta no dice que Ana recibe $^{1}/_{3}$ del total de las uvas; dice que ella recibe $^{1}/_{3}$ *de lo que Berta recibe*. Entonces Berta recibe 3 veces lo que Ana recibe; y el total de las uvas es la suma de la parte de Berta más la parte de Ana, o sea 3 + 1 = *4 veces* lo que Ana recibe. Entonces Ana recibe $^{1}/_{4}$ del total, o sea 18 uvas.

***7)** La masa sobrante es $^{1}/_{4}$ de la masa original, entonces podemos suponer que esta vez obtenemos 8 galletas. Pero igualmente debemos suponer que la relación entre galletas y desperdicios sigue la misma; eso significa que nuevamente va a sobrar $^{1}/_{4}$ de la masa que hemos usado ahora. Podemos volver a trabajar con esta masa, entonces resultarán $^{1}/_{4}$ de 8, o sea 2 galletas adicionales, eso da un total de 10.
Otro razonamiento posible es este: Si inicialmente sobró $^{1}/_{4}$ de la masa entera, entonces las 32 galletas corresponden a $^{3}/_{4}$ de la masa. El último $^{1}/_{4}$ de la masa corresponde entonces a 32 ÷ 3 = 10 $^{2}/_{3}$ galletas. (Las $^{2}/_{3}$ galletas son los desperdicios del último paso de trabajo, que ya no alcanzan para un galleta entera.)

***8)** Este problema se puede resolver casi sin fracciones, si hacemos el siguiente razonamiento: Si Alberto recibe "una parte" (que todavía no sabemos cuánto es), entonces Alfredo recibe 2 partes, y Aldair recibe el doble de Alfredo, o sea 4 partes. Por tanto, la herencia debe repartirse en 7 partes iguales (1 + 2 + 4), de las cuales Alberto recibe 1 parte, Alfredo 2 y Aldair 4. (Compara esto con el razonamiento que hicimos en el problema no.6, es una situación muy similar.)

- Se trata aquí de un reparto proporcional (vea *Unidad 21*).

Unidad 39: Fracciones equivalentes; amplificar y simplificar

¿Qué pasa cuando al simplificar no queda "nada"?

Simplificar significa *dividir* "arriba y abajo" entre el mismo número. (Cuando nos acostumbramos a "tachar números", a veces olvidamos que en realidad estamos dividiendo.) Entonces, la última operación en el numerador fue 5 ÷ 5, y eso da 1, no cero.
Matemáticamente, eso tiene que ver con el hecho de que el "elemento neutro" de la multiplicación y división es el 1, no el cero. Cuando en una operación de multiplicaciones y divisiones "se anula todo", entonces nos queda el 1, no el 0.
(En la suma y la resta, el elemento neutro es cero. Si la operación hubiera sido 5 – 5, entonces 0 hubiera sido el resultado correcto.)

Practicamos simplificar fracciones:

Prácticamente se trata se encontrar el MCD del numerador y denominador. Como en los problemas relacionados con el MCD *(Unidades 17, 18)*, hay varias maneras de hacerlo, y hay que observar primero los números para encontrar la manera más fácil.
- A veces hay un divisor común que se puede ver inmediatamente.
- A veces es más fácil factorizar los números. (Usa las reglas de divisibilidad que conoces, para ahorrarte unas divisiones.)
- A veces sólo uno de ellos es fácil de factorizar; factoriza ese primero. Entonces, en el número "difícil" necesitas solamente buscar los factores del número "fácil", porque esos son los únicos que pueden aparecer como divisores comunes.
- A veces es más fácil usar el algoritmo de Euclides *(Unidad 18)* para encontrar el MCD.

Unas pautas específicas para la serie "difícil":

c) Un factor de 482 puedes ver a primera vista. Factoriza, y entonces debes ver cuál es el MCD.

d) 11 es un número primo. Entonces hay una sola manera posible de simplificar: dividir 2310 entre 11 (si es que es divisible).

f) Hay un (único) divisor común, y lo puedes descubrir con una de las reglas de divisibilidad.

g) La factorización da $\frac{7 \times 13}{11 \times 17}$. No hay ningún factor común, entonces no se puede simplificar.

h) Hay muchos factores primos "fáciles", tanto en el numerador como en el denominador. Ninguno de esos es un factor común. Pero después de sacar todos esos factores "fáciles", sobrará uno "difícil" que los dos números tienen en común. – En vez de factorizar, el algoritmo de Euclides puede también llevar a la meta.

i) Razona como en **d)**. – Si no sabes dividir entre 29, anota la tabla del 29 (comenzando desde 29x10 para ahorrarte trabajo).

j) 999 es más fácil de factorizar, porque hay un divisor que puedes ver a primera vista, y después puedes continuar con reglas de divisibilidad. Después ya no necesitas probar muchos factores con 259, porque solamente necesitas probar aquellos que son factores de 999. – Alternativamente, usa el algoritmo de Euclides.

** Unas pautas específicas para la serie "muy difícil":*

a) 308 es fácil de factorizar. Después sabrás cuáles factores tienes que buscar en 1001.

b) Con un buen "ojo para números" (o probando divisiones) puedes ver que 847 es divisible entre 7. Después puedes seguir factorizando (¿conoces unas tablas de multiplicación de números mayores a 10?). Entonces, con 1331 tienes que probar solamente los factores que encontraste en 847.

c) La factorización da $\frac{17 \times 17}{11 \times 73}$. No hay factores comunes, entonces no se puede simplificar.

d) Con las reglas de divisibilidad puedes ver que 327 = 3 x 109. (109 es primo.) 763 no es divisible entre 3, pero ¿qué tal con el 109?

e) El número 1717 se ve "sospechoso" – claro, es 17 x 101. Entonces sabes cuáles factores tienes que buscar en 221.

f) Factorizando con paciencia, encontrarás un factor común (es menor a 20). Si no tienes paciencia para factorizar, usa el algoritmo de Euclides.

g) Si tuviste paciencia para factorizar 127, habrás descubierto que es un número primo. Entonces, se puede simplificar solamente si 1651 es un múltiplo de 127. Encontrarás que efectivamente lo es. (¿No sabes dividir entre 127? Entonces anota la tabla del 127, empezando desde 127x10 para ahorrarte trabajo.)

h) ¡Estos son realmente difíciles de factorizar! Mejor usa el algoritmo de Euclides. Después, para las divisiones, quizás necesitarás la ayuda de alguien que sabe dividir entre números grandes.

Las operaciones en la sección "Ampliaciones":

a), b) no deben presentar ningún problema. Sumar y restar de una forma práctica, y simplificar el resultado.

c) Se puede resolver como los anteriores. Pero te ahorras trabajo si observas bien los números: Todas estas fracciones se pueden simplificar *antes* de sumar y restar, entonces puedes calcular con números más pequeños.

d) Esta operación se vuelve más sencilla si observas que $\frac{1217}{1225}$ es muy cerca de un entero. ¿Recuerdas el "truco" de Alicia en la *Unidad 36* (Números mixtos)?

e) La división se puede escribir como fracción; y ya sabes cómo simplificar.

f) Igual como e). Solamente que este resultado se puede después convertir en un número mixto (opcional).

g) Es ventajoso escribir el resultado primero como una fracción que contiene una multiplicación: $\frac{28 \times 5}{45}$.
Ahora puedes simplificar por factores como en la actividad anterior; eso es más práctico que multiplicar primero y después simplificar. – El resultado se puede convertir en número mixto (también en h, i).

h) Como g). Aquí se puede simplificar sólo parcialmente (9 y 39 tienen el 3 como divisor común).

i) ¿Observaste bien? Con el 7 no podemos simplificar; pero 121 y 132 tienen un divisor común.

j) Como los anteriores; solamente que aquí el 30 viene abajo porque dividimos entre 30: $\frac{108}{125 \times 30}$ (Si no entiendes por qué, repasa la Unidad anterior acerca de la multiplicación y división de fracciones.) Ahora puedes simplificar por factores.

Unidad 40: Comparar, sumar y restar fracciones heterogéneas

Resultados de las operaciones a partir de g): (Si te salió un resultado con números mayores, verifica primero si quizás solamente te faltó simplificar.)

Sumas y restas sencillas:

g. $\frac{8}{11}$ h. $\frac{1}{2}$ i. $\frac{101}{128}$ j. $\frac{8}{27}$ k. $\frac{33}{70}$ l. $\frac{1}{301}$

Comparaciones más difíciles:

m. $\frac{35}{63} < \frac{36}{63}$ n. $\frac{25}{60} < \frac{26}{60}$ ñ. $\frac{259}{700} > \frac{258}{700}$

o. $\frac{66}{143} > \frac{65}{143}$ p. $\frac{721}{42 \times 5 \times 7} < \frac{725}{42 \times 5 \times 7}$ q. $\frac{224}{25 \times 16} < \frac{225}{25 \times 16}$

Sumas y restas más difíciles:

r. $\frac{5}{12}$ s. $\frac{25}{84}$ t. $1\frac{3}{133}$ u. $\frac{1}{56}$ v. $\frac{1}{110}$ w. $\frac{6}{275}$

x. $1\frac{1}{84}$ y. $\frac{8}{63}$ z. $\frac{1000}{1003}$

Sumas y restas de tres o más fracciones:

a. $\frac{2}{3}$ b. 1 c. $\frac{1}{3}$ d. $\frac{1}{32}$ e. $\frac{1}{4}$ f. 1

¿Quién encuentra la operación más interesante?

¡Este es un campo de investigación muy, muy amplio! En el contexto de tales operaciones se plantean incluso unas preguntas que los matemáticos hasta hoy no han podido resolver.

Nos limitaremos aquí a unas pocas observaciones y propiedades:

¿En qué casos se puede simplificar la suma de dos fracciones irreductibles?

Observa el ejemplo dado:

$$\frac{7}{22} + \frac{17}{33} = \frac{7 \times 3}{66} + \frac{17 \times 2}{66} = \frac{55}{66} = \frac{5}{6}$$

Los denominadores originales, 22 y 33, tienen un divisor común (11). Después de sumar, resulta que se puede simplificar con este divisor común. Cuando los denominadores no son PESI, en muchos casos se puede arreglar que salga así, escogiendo numeradores apropiados. ¡Inténtalo! por ejemplo con los denominadores 28 y 63.

Podemos preguntarnos si en el ejemplo de arriba se podrían escoger otros numeradores, de manera que el resultado se pueda simplificar con 2, con 3, o con 6. Pero probando y razonando encontraremos que eso no se puede:
En la suma, el primer numerador se multiplica por 3 y el segundo por 2. La primera multiplicación produce un múltiplo de 3. Si queremos que la suma entera sea un múltiplo de 3, entonces *el segundo numerador tendría*

que ser también un múltiplo de 3. Pero en este caso, la segunda fracción ya no sería irreductible, porque su denominador contiene el factor 3.
Por la misma razón, si quisiéramos que la suma sea un múltiplo de 2, en este caso la *primera* fracción ya no sería irreductible.
Por tanto, los únicos factores que pueden aparecer en la suma para poder simplificar, son los divisores comunes de los dos denominadores *que no aparecen en las multiplicaciones parciales*.
Por esta misma razón, algunos pares de denominadores no "funcionan" así, aunque no son PESI; por ejemplo 12 y 18. Sigue investigando ...

Con tres y más sumandos existen mucho más posibilidades; allí se pueden encontrar combinaciones más interesantes, pero requiere también más perseverancia encontrarlas.

¿En qué casos la diferencia de dos (o más) fracciones es $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, *etc?*

¿Qué condiciones tienen que cumplir los denominadores de los sumandos, para que el resultado salga así? ¿Y cómo podemos entonces encontrar los numeradores correspondientes? Investiga... (Ya tienes un ejemplo en la formulación del problema; puedes analizar este primero.)

- En el nivel de Secundaria, cuando sepamos álgebra, podremos investigar unas preguntas más profundas relacionadas con estos temas.

Un problema hindú antiguo

El enjambre entero se compone de todas las fracciones indicadas, más la única abeja que se quedó indecisa. Entonces, si calculamos la diferencia entre 1 entero y la suma de todas las fracciones dadas, llegaremos a una fracción del enjambre que corresponde a la única abeja.

Las fracciones dadas son $^1/_5$, $^1/_3$, y tres veces la diferencia de estas dos, o sea 3 x ($^1/_3$ – $^1/_5$). La única abeja corresponde entonces a 1 – ($^1/_5$ + $^1/_3$ + 3 x ($^1/_3$ – $^1/_5$)) del enjambre. Con esta ayuda debes poder terminarlo tú mismo.

La tumba de Diofanto

Este problema se puede resolver de manera similar como el anterior. Algunas etapas de la vida de Diofanto se indican en fracciones de su vida entera; otras se indican en años. Considerándolas aparte, tenemos:

5 años + 4 años = 9 años,

y $^1/_6$ + $^1/_{12}$ + $^1/_7$ + $^1/_2$ de su vida entera.

Lo que falta de esta suma de fracciones para un entero, corresponde entonces a 9 años. Desde allí debes poder calcular la edad de Diofanto, y con eso también los otros datos de su vida.

Unidad 41: Multiplicación de fracciones

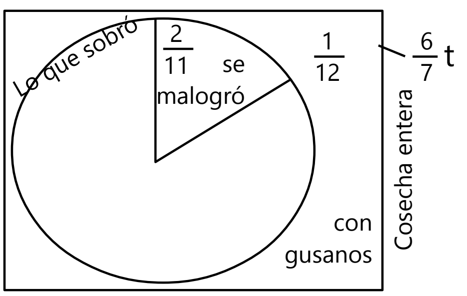
Resultados de los ejercicios:

a. $\frac{2}{15}$ b. $\frac{3}{8}$ c. $\frac{32}{35}$ d. $\frac{27}{35}$ e. $\frac{1}{3}$ f. $\frac{29}{32}$ g. $\frac{21}{50}$

Problemas:

Nota general: Aunque estamos en una Unidad sobre "Multiplicación de fracciones", ¡no por eso se debe asumir que todos los problemas tengan que ver con multiplicación! Hay que analizar cada problema razonando, y analizando si se trata de una situación aditiva o multiplicativa (o una combinación de ambas).

2) Los $^1/_{12}$ se refieren a la cosecha total (las $^6/_7$ t). Los $^2/_{11}$ en cambio se refieren a "lo que sobró". Entonces podemos dibujarlo así:

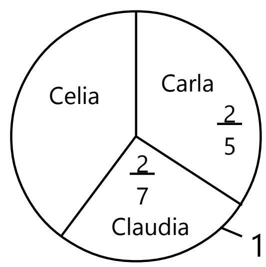


Una manera de resolverlo consistiría en calcular primero "lo que sobró" (lo que no comieron los gusanos): $\frac{6}{7} - \frac{6}{7} \times \frac{1}{12} = \frac{6}{7} - \frac{1}{14} = \frac{11}{14}$t. Después tomamos las $^{11}/_{14}$ t como el nuevo "entero", y calculamos cuánto de eso queda si $^2/_{11}$ de eso se malogró.

Razonando un poco, se puede encontrar una manera más eficaz de calcularlo: Si los gusanos comieron $^1/_{12}$ de un "entero", lo que *sobra* son $^{11}/_{12}$ de ese "entero". Y si de eso se malograron $^2/_{11}$, entonces lo que queda al final son $^9/_{11}$ de lo que dejaron los gusanos. Por tanto, el resultado final se puede calcular directamente como:

$$\frac{9}{11} \text{ de } \frac{11}{12} \text{ de } \frac{6}{7}\text{t}, \text{ resp. } \frac{9 \times 11 \times 6}{11 \times 12 \times 7}\text{t.}$$

3) El "entero" es la ganancia completa, y cada persona se lleva una parte. Entonces la situación se ve así:



4) “3/4 de las mujeres” son 3/4 de 4/7 de la población entera. De la misma manera podemos expresar la proporción de los varones que saben nadar, como “fracción de una fracción”. La suma de ambos nos da la fracción de la población total que sabe nadar.

5) Podemos calcularlo por pasos: Después de pagar 1/5 como impuestos, ¿cuánto sobra? ¿Cuánto es 1/8 de eso? ¿Cuánto queda después de gastar esa parte? Etc.

Alternativamente, se puede usar un razonamiento similar al no.2, para calcularlo de una manera más eficaz.

Unidad 42: División de fracciones

Resultados de los ejercicios:

a. $\frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$ b. $\frac{76}{99}$ c. $\frac{6}{7}$ d. $\frac{7}{11}$ e. $\frac{388}{39} = 9\frac{37}{39}$

Fracciones dobles:

f. $\frac{5}{6}$ g. $\frac{63}{64}$ h. $\frac{1234}{619} = 1\frac{615}{619}$ i. 1

Nota acerca de ***h)***: 2042 es el doble de 1021, esos se simplifican. 617 y 619 no pueden tener ningún divisor común porque su diferencia es solamente 2, pero 2 no es un divisor, ya que son números impares. Por eso ni siquiera tenemos que intentar factorizar estos números.

Problemas diversos con fracciones:

2) Para que una fracción sea irreducible, el numerador y el denominador no pueden tener ningún factor primo en común. El denominador (72) contiene el 2 y el 3 como factores primos. Por tanto, las fracciones irreducibles son aquellas donde el numerador no es divisible entre 2 ni entre 3. Busca los números entre 10 y 20 que cumplen con esta condición.

4) Igual como el problema no.2. Solamente que aquí tenemos que convertir primero las fracciones dadas en fracciones equivalentes con el denominador 1800. Así sabremos en qué rango se encuentran los numeradores que buscamos.

7) Tenemos que convertir los $8^4/_7$ días en puros séptimos, o sea, en una fracción impropia. Entonces podemos comparar esta fracción con los 30 días del mes entero. (Eso corresponde a dividir una fracción entre un número entero; eso ya no debe ser difícil a estas alturas.)

8) Hay dos maneras de calcularlo:
a) Convirtiendo todo en minutos. Entonces calculamos del número de minutos que equivale a 9 h 20 min, qué fracción es del número de minutos en un día entero.

b) Convirtiendo todo en fracciones de horas. Entonces calculamos con $9^1/_3$ horas y 24 horas. En este caso, la operación es similar al problema no.7.

10) Si el tronco pesa la mitad de su peso más 250 kg, entonces los 250 kg corresponden a la otra mitad del tronco. Por tanto, el tronco entero pesa 250 + 250 kg; y desde allí es fácil calcular el peso de un tronco y medio.

un tronco y medio

11.a) Esto lo podemos calcular de frente: El tiempo que el carro necesita para 40 km, es 40 veces el tiempo que necesita para 1 km.

11.b) Esto equivale a preguntar cuántos kilómetros avanza el carro en 60 minutos. O sea, cuántos "trozos" de $^6/_7$ minutos caben en 60 minutos. Entonces la respuesta se encuentra dividiendo $60 \div {}^6/_7$.

12.a) Esto equivale a preguntar cuántos "tramos de un minuto", o sea tramos de $^3/_8$ km, hay en 1 kilómetro. Entonces la respuesta se encuentra dividiendo $1 \div {}^3/_8$.

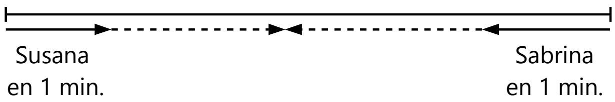
12.b) Esto lo podemos calcular de frente: La distancia que el ciclista avanza en 60 minutos, es 60 veces la distancia que avanza en 1 minuto.

Pregunta capciosa: ¿Por qué es una pregunta capciosa? – ¡Porque no existen medios huecos! Existen huecos grandes y huecos pequeños; pero aun un hueco pequeño es un hueco *entero*.

Unidad 43: Proporciones y fracciones

Problemas:

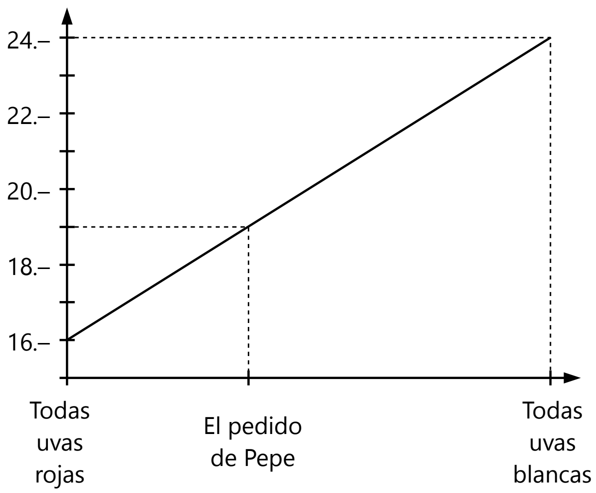
***6)** Si las niñas se vienen al encuentro, la distancia entre ellas se acorta por la suma de las distancias que *ambas* caminan. Para poder comparar estas distancias, tenemos que calcularlas respecto a un mismo tiempo. Por ejemplo, ¿cuánto camina cada una de ellas en un minuto? ¿o en una hora? Entonces la suma de estas dos distancias nos dice cuánto se acercan las niñas en un minuto, resp. en una hora.



Con este dato podemos calcular el tiempo que necesitan hasta encontrarse (o sea, para acercarse 2760 metros). Con eso podemos hacer otra proporción, usando la velocidad con la que camina Susana, para saber qué distancia caminó Susana.

Alternativamente podemos calcular la proporción entre la velocidad de Susana y de Sabrina; eso sería $\frac{100}{1\frac{1}{2}} \div \frac{433\frac{1}{3}}{5}$. Las distancias que cada una de ellas camina, tienen entre sí la misma proporción. Entonces se trata de repartir los 2760 metros en dos segmentos que tienen entre sí la proporción requerida; el primero de ellos corresponde a la distancia que caminó Susana.

***7)** Hay varias maneras de llegar a la solución. Una posibilidad consiste en examinar cómo se comporta el precio, dependiendo de la proporción entre uvas rojas y blancas. En un extremo tenemos únicamente uvas rojas, y en el otro extremo únicamente uvas blancas. Llegamos a lo siguiente:



(Vea en la *Unidad 70* acerca de las representaciones gráficas de proporciones.)

Vemos que el precio de las uvas rojas queda en 3.– por debajo del pedido de Pepe, mientras el precio de las blancas queda en 5.– por encima. Por tanto, la proporción entre uvas rojas y blancas debe ser de 5 : 3. (El gráfico te puede explicar por qué.)

Otro razonamiento posible sería el siguiente:

2 kilos de uvas rojas cuestan 16.–. Si remplazamos un kilo por uvas blancas, el precio sube en 4.–. Pero según el pedido de Pepe, el precio debe subir solamente en 3.–. Entonces, ¿cuántos kilos hay que remplazar por uvas blancas?

Para comprobar el resultado, puedes calcular los precios de las uvas rojas y blancas que resultan; su suma debe dar 19.–.

***8)** Puede ser una dificultad que no sabemos cuántas papas son. Pero eso no importa. Podemos simplemente calcular con la cantidad "entera" de papas; o sea, asumimos que el total de papas equivale a 1. Tomemos ahora como "puente" la unidad (de minutos): Adriana pela en un minuto $^1/_{30}$ de las papas; Leo pela $^1/_{40}$. Entonces, si ambos trabajan juntos, ¿qué fracción de las papas pelan en un minuto? ¿Cuántos minutos demoran entonces?
Si no te gusta calcular con tantas fracciones, puedes asumir que son 120 papas. En este caso, ¿cuántas papas pela Adriana en un minuto? ¿y Leo? ¿y ambos juntos? ¿Cuánto demoran entonces para pelar 120 papas? El resultado será el mismo como en la operación anterior.

Pautas para el Bloque V

Unidad 46: El sistema decimal (III)

Tarea 1. a) Un ejemplo de eso ya lo tienes en el tablero reproducido un poco antes. Pero para entender lo que sigue, es preferible que hagas tu propio ejemplo con un número de tres cifras o más.

b) Eso ya no debe ser difícil si recuerdas que la multiplicación es lo inverso de la división.

c) Si dificultas en esto, continúa no más a la siguiente actividad. Con la Tarea 3 deberás entenderlo mejor.

Tarea 2. a) Solamente tienes que observar lo que sucede al mover la tira, y contar y leer las posiciones. – El "por qué" se puede explicar mediante operaciones con fracciones: ¿Cuál es el resultado de 1 ÷ 10, 1 ÷ 100, 1 ÷ 1000 ?

b, c, d, e) Usa los mismos razonamientos como en la pregunta **a)**.

Tarea 3. a, b) Fíjate en lo siguiente: La tira nos demuestra que en realidad el punto decimal no se mueve. Se queda siempre en el mismo lugar, entre las unidades y los décimos. Lo que se mueve son los números que se desplazan por el tablero, porque están cambiando sus valores posicionales. En la operación escrita en papel, el punto decimal *parece* "moverse" en la dirección opuesta, porque normalmente comenzamos a escribir cada número en el mismo lugar. Pero si escribimos los números más ordenadamente, vemos mejor lo que realmente sucede:

```
               0.0123
...x 10 =    0.123
...x 10 =    1.23
...x 10 =   12.3
...x 10 = 123.
...x 10 =1230.
```

... y lo mismo para la división, solamente en la dirección opuesta.

c) Esto lo podrás entender mejor si escribes los números en papel cuadriculado, bien ordenadamente, un cuadradito para cada cifra. Si tenemos un número entero, ¿dónde hay que escribir el punto decimal si queremos escribirlo? Y si queremos mover este punto decimal una posición hacia la derecha, ¿dónde quedaría? ¿Cómo interpretarías este número?

Por si estas pautas no bastan, mira esto:

```
          245.
...x 10 = 245_.
```

(La rayita abajo en la segunda línea significa un cuadradito vacío en el papel.)

Unidad 47: Números decimales y las unidades de medida

Escribimos medidas con números decimales:

***8)** En realidad no es más difícil que los otros ejercicios. Solamente hay que llenar las posiciones del tablero ordenadamente, tomando en cuenta que en las posiciones de las áreas (a) y de los dm^2 quedan ceros. Entonces tenemos:

0 km^2 5 ha 0 a 79 m^2 0 dm^2 6 cm^2
= 0.0500790006 km^2
= 5.00790006 ha
= 500.790006 a
= 50079.0006 m^2
= 5007900.06 dm^2

Unidad 49: Multiplicación de números decimales

Investigación:

Tarea 1. Si la multiplicación 6 x 0.1 te parece desconocida, escríbela al revés: 0.1 x 6. Esta es una operación conocida desde el Taller de esta misma Unidad.

Tarea 2. No lo intentes con sumas o restas. Nos ocupamos aquí enteramente con operaciones del "segundo piso" (multiplicación y división).
Quizás recuerdas desde las operaciones con fracciones el concepto del valor recíproco *(Unidad 42)*. Eso permitía convertir divisiones en multiplicaciones, y vice versa. ¿A qué equivale entonces multiplicar por $^1/_{100}$?

Tarea 3. Los números decimales se desplazan en el tablero posicional según las mismas leyes como los números enteros. Entonces no hay ninguna diferencia significativa entre esta tarea y la anterior.
Si no entiendes como hacerlo en el tablero, entonces resuelve las operaciones primero con fracciones, y copia después los resultados al tablero. El principio debe hacerse obvio cuando observas lo que hacen las cifras 4 y 7 en el tablero.

Tarea 4. La cantidad de dígitos decimales está relacionada con la cantidad de ceros en el denominador de la fracción correspondiente: $^{777}/_{1000}$ = 0.777 (3 decimales); $^{22}/_{10'000}$ = 0.0022 (4 decimales), etc.
¿Qué sucede con la cantidad de ceros cuando multiplicamos tales fracciones? ¿Qué concluyes desde allí acerca de la cantidad de dígitos decimales?

Tarea 5. La comparación con las multiplicaciones "simples" ya no brinda ninguna información adicional acerca de la cantidad de los dígitos decimales. Para eso, la ley de la Tarea 4 es suficiente. ¡Pero las multiplicaciones "simples" te dicen *cuáles son* esos dígitos!
O sea, para hacerlo aun más claro: Los números decimales pueden multiplicarse como si fueran enteros. Por ejemplo para multiplicar 0.67 x 1.23, podemos multiplicar 67 x 123. Después aplicamos la ley de la Tarea 4 para saber dónde tiene que ubicarse el punto decimal en el resultado.
Para verificar los resultados de los ejemplos h, i, j, k, l puedes usar la pauta en el texto: Cada resultado tiene alguna propiedad "interesante", respecto a sus cifras. – Solamente que esta pauta no te dice en qué lugar tienes que poner el punto decimal. Para eso tienes que aplicar correctamente la ley que descubriste en la Tarea 4.

Unidad 50: División de números decimales entre enteros

Las preguntas de investigación en "Ahora lo escribimos":

Pregunta 1. El "por qué" de las igualdades se fundamenta cada vez en un principio matemático. Quizás algunos alumnos todavía no están acostumbrados a fundamentar propiedades matemáticas. Daremos entonces aquí las explicaciones, a modo de ejemplo:

$$0.36 \div 3 \;=\; \frac{36}{100} \div 3$$

- Convertimos el número decimal 0.36 en una fracción. Para eso aplicamos las reglas acerca del valor posicional de las cifras en un número decimal.

$$\frac{36}{100} \div 3 \;=\; (36 \div 100) \div 3$$

- Escribimos la fracción como división. Eso es la misma operación como antes, porque el símbolo ÷ significa exactamente lo mismo como la raya de la fracción.

$$(36 \div 100) \div 3 \;=\; (36 \div 3) \div 100$$

- En realidad, aquí no hay necesidad de escribir paréntesis, porque de todos modos las operaciones se resuelven una tras otra, en el orden como están escritas. Los paréntesis se usaron solamente para mostrar como estas operaciones están relacionadas con las fracciones que vienen antes y después.
La igualdad es entonces: 36 ÷ 100 ÷ 3 = 36 ÷ 3 ÷ 100 . Las dos operaciones son iguales por la conmutatividad de las operaciones del "segundo piso" (multiplicación y división), mientras cada número se mantiene junto a su signo. O dicho de manera más sencilla: Da lo mismo si dividimos primero entre 100 y después entre 3, o si dividimos primero entre 3 y después entre 100.

$$(36 \div 3) \div 100 \;=\; \frac{12}{100}$$

Primero se calculó el paréntesis: 36 ÷ 3 = 12. La operación queda entonces así: 12 ÷ 100; y eso se escribió en forma de fracción.

$$\frac{12}{100} \;=\; 0.12$$

Escribimos la fracción en forma de número decimal, según las reglas acerca del valor posicional.

Pregunta 2. Veamos este ejemplo:

37 ÷ 11 = 3.363
40
70
40

Observamos: El primer residuo es 4, con el cero que se baja es 40. Dos posiciones después tenemos otra vez un residuo de 4, y otra vez se baja un cero. Sabemos que siempre se van a bajar ceros, porque ya no hay más cifras en el dividendo. Operaciones iguales dan siempre resultados iguales. Entonces sabemos que a partir de ahora vamos a obtener lo mismo como desde la primera vez que ocurrió un residuo de 4: el siguiente residuo será 7, el siguiente otra vez 4, y así sucesivamente hasta lo infinito. Y en el cociente se repetirán las cifras 363636... hasta lo infinito.

Sabemos entonces que esto ocurrirá en toda división donde se repite uno de los residuos que ya ocurrió anteriormente, *después de que se acabaron las cifras del dividendo.*

Por el otro lado, si en el *cociente* ocurre una cifra repetida, eso todavía no es una señal segura de que desde aquí se repetirá todo. Veamos el siguiente ejemplo:

3 ÷ 17 = 0.17647...
130
110
80
120

En el cociente ocurre por segunda vez un 7, entonces podríamos pensar que desde aquí se repetirá. Pero el primer 7 fue el resultado de dividir 130 ÷ 17, y eso dejó un residuo de 11. El segundo 7, en cambio, es el resultado de dividir 120 ÷ 17, y eso produce un residuo de 1. Por tanto no se trata de la misma operación, y la continuación no es igual. Si seguimos dividiendo, tendremos: 0.17647058... (De hecho, en esta división necesitamos bastante perseverancia si queremos llegar hasta el momento donde todo se repite.)

Podemos aquí hacer otra pregunta interesante: *¿Hay una manera de predecir de antemano si una división alguna vez terminará (aunque sea después de muchos decimales), o si el resultado es un número decimal infinito?* – Investíguenlo, quizás encuentran una respuesta. Si no, tendrán que esperar hasta el nivel de Secundaria I; allí volveremos a este tema.

Otros problemas con decimales:

Escribir horas, minutos y segundos en decimales (no.6 y 7):

Como hemos hecho en la conversión de otras medidas, aquí también el camino es por medio de las fracciones. Solamente que aquí tenemos un denominador de 60, y eso ya no es tan fácil de convertir en decimales. Pero en esta Unidad hemos aprendido como hacerlo.

Por ejemplo, 14.3 horas son 14 $^3/_{10}$ horas. Si puedes convertir eso en una fracción equivalente con denominador 60, entonces tienes minutos.

3 horas 22 minutos son 3 $^{22}/_{60}$ horas. ¿Puedes convertir la fracción en decimales?

Si pudiste resolver estos ejemplos, debes haber entendido cómo resolver los problemas no.6 y 7.

Unidad 51: División entre números decimales

Investigación:

Tarea 1. Las preguntas **a)** y **b)** no deben necesitar pautas.

c) Queremos que el denominador sea un número entero. El denominador actual es 0.01, o sea mucho menor que un entero. Esto significa que tendremos que *multiplicarlo* por un número bastante grande para que llegue a ser siquiera un entero. ¿Por cuánto podemos multiplicarlo para que el resultado sea un número entero? – Con este mismo factor tendremos que multiplicar también el numerador 600.

Tarea 2. a) ¿Recuerdas cuando hemos multiplicado números decimales sucesivamente por 10? En algún momento, los resultados se volvieron enteros. Eso mismo podemos hacer aquí. Entonces no tienes que buscar lejos para encontrar con cuánto multiplicar el denominador: Siempre funciona con multiplicaciones sucesivas por 10 (o sea por 100, por 1000, etc). – A veces funcionaría también con otros factores; pero con el 10 siempre es más práctico.

b) Aquí tampoco hay que buscar lejos para convertir los números decimales en fracciones: con denominadores de 10, 100, 1000 etc. es más práctico.

Las operaciones en "Ampliaciones": Las fracciones con números decimales en el denominador no son prácticas; esas son en realidad divisiones entre números decimales. ¡Amplifica hasta obtener enteros! – Después quizás se puede simplificar otra vez; y quizás convertirlo en un número decimal "fácil" ... pero no siempre funciona eso.

Operación **k:** ¿Notaste que en la segunda fracción el numerador es el doble del denominador? O sea, se puede simplificar mucho...

Unos problemas:

1) Para que salgan cubos, tenemos que cortar la madera en piezas de una longitud de 3.8 cm. Junto con el milímetro de corte, se necesitan 3.9 cm de madera para cada cubo. Llegamos a la división 2300 ÷ 39 = 58 R.38.

Podríamos entonces pensar que salen 58 cubos. Pero el número de cortes es uno menos que el número de cubos. O sea, cuando cortamos el penúltimo cubo, hemos terminado, y ya no se pierde ningún milímetro para cortar el último cubo. Por eso, el "residuo" efectivo es 39 mm y no 38, y por eso resulta un cubo más, o sea en total 59 cubos.
(Si te parece difícil entenderlo, haz un dibujo de los cubos con sus cortes respectivos.)

2) Aquí no necesitamos dividir entre decimales: Una hora tiene 3600 segundos, entonces la división 3600 ÷ 65'536 nos da el número de segundos entre una interrupción y la siguiente.

5) La mitad de una manzana es 1/2, o sea 1 ÷ 2. "La 0.5ª parte de una manzana", en cambio, es 1 ÷ 0.5. ¿A cuánto equivale eso?

Unidad 52: Porcentajes

Unos problemas con porcentajes:

5) Aquí tenemos que recordarnos que la inversión entera corresponde a 100%.

9) 1264.90 corresponden a 13%. ¿Cuánto corresponde entonces a 100%? Ese es el monto (entero) del préstamo.

10) Hay que analizar cuál es el "entero" al que se aplican los 20% en cada caso. El precio original subió en 20%, entonces estos 20% de aumento se refieren al precio original de 1285.–. Pero el descuento que se aplica después, es 20% del "precio aumentado". Por eso, el aumento y el descuento no son iguales.

Más problemas con porcentajes:

5) El "aumento" se refiere al dato del año anterior. Entonces la pregunta es: ¿Cuántos por ciento de 486 es (504 – 486) ? – De manera similar hay que razonar en el no.**6)**.

7) Se recomienda calcular primero cuánto dinero tiene ahora cada uno. Así sabrás la cantidad que Josué dio a Jaime.

Anexo B: Citas y notas bibliográficas

1) En el período de Primaria I, los niños son todavía muy vulnerables a ciertos trastornos causados por un exceso de "tiempo de pantalla". Se recomienda que en niños de esta edad se limite su uso de la televisión, computadora, celular, etc. a una hora por día.

La Alianza por la Niñez dice al respecto:

"Hacer hincapié en el uso de las computadoras en la infancia puede exponer a los niños a un **mayor riesgo de sufrir lesiones** repetitivas por estrés, tensión visual, obesidad, y otras consecuencias dañinas de un estilo de vida sedentario. Algunos expertos en desarrollo advierten también que, el aumento del tiempo que los niños pasan frente a una computadora, (...) puede contribuir a los **retrasos en el desarrollo** de la habilidad para coordinar impresiones sensoriales y de movimiento y darse cuenta de los resultados. Ello podría llevar a su vez a retrasos en el habla y a otros problemas del aprendizaje."

"La psicóloga educacional y antes maestra Jane Healy, apunta que la creatividad involucra la habilidad para generar 'imágenes personales y originales, visuales, físicas o auditivas- imágenes de la mente, a decir de las propias palabras de un niño'. Sin embargo, ella agrega: 'Los maestros encuentran hoy en día que los niños inmersos en los videos no pueden formar en sus mentes imágenes originales, o desarrollar representaciones imaginativas. Los maestros de niños pequeños lamentan el hecho de que *muchos niños deben ser enseñados a jugar simbólicamente o a pretender* - un síntoma que antes se daba solo en jóvenes con desórdenes emocionales o mentales."

(Alliance For Childhood)

En la misma obra, los autores resumen los riesgos que conlleva la exposición prolongada de los niños a la pantalla:

"Riesgos físicos
• Daños osteomusculares
• Fatiga visual y miopía
• Obesidad y otras complicaciones de un estilo de vida sedentario
• Posibles efectos colaterales por emisiones tóxicas y radiación electromagnética
Riesgos emocionales y sociales
• Aislamiento social
• Lazos débiles con los maestros
• Falta de autodisciplina y automotivación
• Separación emocional de la comunidad
• Explotación comercial
Riesgos intelectuales
• Falta de creatividad
• Imaginación poco desarrollada
• Lenguaje y habilidades alfabetizadoras empobrecidos
• Pobre concentración, déficits de atención
• Poca paciencia para el trabajo duro del aprendizaje
• Plagio
• Distracción del significado
Riesgos morales
• Exposición a la violencia en línea, la pornografía, fanatismo y otros materiales inapropiados
• Énfasis en la información desviada de su contexto ético y moral
• Falta de propósito e irresponsabilidad en la búsqueda y aplicación del conocimiento"

---

2) Ya hace muchos años, educadores conscientes sospecharon que la enseñanza acelerada de los niños pequeños hace más daño que bien en su desarrollo. Los Moore mencionan los siguientes datos:

"El doctor David Metcalf de la escuela de Medicina de la Universidad de Colorado cree que la división de la labor entre los dos lados *(del cerebro)* probablemente se establece entre los siete y nueve años de edad. No debemos estar sorprendidos si el niño pequeño es más una 'criatura emocional' que una racional. (...) Pero la habilidad de razonar es básica para aprender a leer, dominar la aritmética, y deletrear.

Ocasionalmente, han surgido preguntas acerca de si la estimulación hace que madure más rápido el cerebro o si las tareas de la escuela se vuelven más fáciles al dejar el cerebro del niño madurar antes. Lo primero confirmaría la necesidad de la escolaridad temprana; lo segundo la negaría. (...) Basado en la investigación relacionada, **la estimulación temprana parece involucrar más riesgos para el niño pequeño** que si se le permite más tiempo para madurar. (...) Los hallazgos del doctor Paul Yakovlev de Harvard con respecto a la estructura y función del cerebro, y los estudios clínicos hechos por el psiquiatra de niños, Humberto Nagera de la universidad de Michigan, concuerdan estrechamente con las conclusiones ofrecidas por el psicólogo suizo, Jean Piaget, que **no se debe apurar el cerebro del niño pequeño** en el proceso del aprendizaje."

(Moore 1995)

Estos datos han sido confirmados por hallazgos más recientes de la neurología:

"El proceso de mielinización en los cerebros humanos no está completo hasta que la mayoría de nosotros tenemos más de veinte años. Aunque unas investigaciones con animales mostraron que la mielina total podría reflejar unos niveles de estimulación, los científicos creen que su orden de desarrollo es principalmente predeterminado por un programa genético.

(...) Antes de ser mielinizadas, las regiones del cerebro no operan de manera eficiente. Por esta razón, los intentos de "hacer" que los niños dominen habilidades académicas sin la madurez necesaria del cerebro, pueden resultar en desórdenes en sus patrones de aprendizaje. Como hemos visto, la esencia de la plasticidad funcional es que cualquier forma de aprendizaje – lectura, matemática, ortografía, caligrafía, etc. – puede ser realizada por cualquiera de varios sistemas cerebrales. Por supuesto deseamos que los niños conecten cada parte del aprendizaje con aquel sistema que es el mejor para la tarea específica. Pero si el sistema apropiado todavía no está disponible, o todavía no funciona adecuadamente, y los niños son forzados a aprender, entonces el cerebro se organiza en una forma donde los sistemas menos adaptivos e "inferiores" son entrenados a hacer el trabajo.

(...) Aquellas áreas que reciben la dosis más tardía de mielina, son las áreas de asociación que se responsabilizan de manipular conceptos muy abstractos, tales como símbolos (X, Y, Z; gráficos de funciones) que representan otros símbolos (relaciones numéricas) que a su vez representan cosas reales (aviones, trenes, manantiales). Esta clase de aprendizaje depende mucho de la experiencia *[concreta]*, y por tanto puede realizarse a través de muchas rutas neurales potenciales. Al obligar cerebros inmaduros a un aprendizaje de nivel superior, serán forzados a trabajar con sistemas de nivel inferior, lo que dañará la habilidad deseada.

Yo mantengo que **muchos de los fracasos escolares actuales resultan de expectativas académicas que fueron forzadas sobre los alumnos como con una niveladora, antes que sus cerebros estuvieran preparados para ello.**

(...) Las reglas abstractas de gramática y uso del lenguaje deberían enseñarse no antes de la escuela secundaria. Entonces, si son preparados para ello, los alumnos pueden incluso disfrutar de los desafíos de esta clase de razonamiento abstracto, lógico. Pero solamente si los circuitos *[cerebrales]* no están ya demasiado obstruidos por una enseñanza chapuceada de reglas."

(Healy 1990)

---

3) La afirmación de que las emociones positivas son importantes para el aprendizaje, también tiene fundamento neurológico:

"**La emoción es el guardián del aprendizaje.** (...) Los neurotransmisores responsables por el salto sináptico entre las células del cerebro, son los únicos de la categoría de "substancias informativas" que acarrean el proceso que llamamos aprendizaje. Las substancias informativas del segundo sistema paralelo, son una variedad de transmisores: péptidos, hormonas y proteínas ligadas. Viajando vía intercelular por sendas como el sistema sanguíneo, estas substancias llegan a los receptores en la superficie exterior de las células a lo largo del cuerpo.

Algunos neurocientíficos especulan que menos del 2% de la comunicación neuronal, realmente ocurre en las sinapsis entre neuronas del cerebro. El resto de la comunicación ocurre a través de estas substancias informativas.

(...) Un ejemplo de esta retroalimentación entre el cuerpo y el cerebro ocurre cuando un estudiante es el receptor final de desprecios o es humillado por los compañeros de clase cuando comete un error en público. Cuando los sistemas de comunicación química y eléctrica del cuerpo-cerebro detectan amenaza, puede activar una secuencia automática, que enfoca toda la atención en la amenaza percibida y una pequeña o nula atención a lo que el maestro está diciendo o haciendo."

(McGeehan)

Y el neurólogo alemán Gerald Hüther dice:

"El cerebro no es una máquina, pero tampoco es un músculo. No se lo puede entrenar como pensaba la sociedad del rendimiento. El cerebro es un órgano especial que me cuida para que yo esté bien. Y por eso tiene una especie de "sensor de importancia" que detecta lo que es realmente importante, y tiene que ser importante para mí, no para los demás. Y entonces el cerebro cambia. Si algo es importante, percibimos que nos emociona, nos entusiasma, nos interesa, nos concierne. Y cada vez que eso sucede, se activan ciertos centros emocionales en el cerebro medio, que se encuentra por abajo bien adentro. Esos centros emocionales tienen unas prolongaciones bien largas, y cada vez que se activan porque nos emocionamos, los extremos de esas prolongaciones segregan esos transmisores neuroplásticos, y esos actúan como fertilizantes para la red neuronal que se usó intensamente en el estado de entusiasmo, por ejemplo para solucionar un problema, para ganar un partido de tenis, o para crear una obra de arte especial.

Por eso, cada vez que hacemos algo con entusiasmo, mejoramos mucho en poco tiempo. Por eso también recordamos mucho mejor lo que nos emociona. Y por eso es tan importante que este mensaje llegue también a nuestro sistema escolar y a nuestro sistema educativo: No sirve esforzarse. Podemos esforzarnos tanto como queremos con memorizar y con hacer tareas en casa: eso entra por aquí y sale por allí, porque no entra a profundidad, y porque no está siendo fertilizado. Eso significa que deberíamos desarrollar una cultura donde ya no nos espantamos unos a otros todo el tiempo, sino donde nos entusiasmamos unos a otros. Deberíamos animarnos e inspirarnos para hacer cosas que nos emocionan."

(Hüther)

4) Acerca de la relación entre experiencias físicas y desarrollo de la inteligencia, la neurología dice:

"Inteligencia: Una función de la experiencia.

(...) Nuevas experiencias cambian físicamente al cerebro causando en las neuronas, células del cerebro principalmente involucradas en el conocimiento, el desarrollo de nuevas ramas o dendritas incrementando así la comunicación los entre espacios microscópicos llamados sinapsis. El pasaje sináptico de un impulso eléctrico entre el axón de una neurona y la dendrita de otra es la base física del aprendizaje y la memoria. Cuando un sendero de comunicación dentro de una red de neuronas es usado repetidamente, se incrementa su eficiencia y decimos que hemos aprendido algo. (...)

Los descubrimientos de neurocientíficos afirman la importancia de la experiencia en el desarrollo de dendritas y por consiguiente, en los resultados del desarrollo al cual llamamos aprendizaje y observamos como inteligencia. (...) Experiencias que proveen una ganancia sensorial enriquecida, más allá de la capacidad de un libro o papel de trabajo, tienen mayor oportunidad de disparar un crecimiento dendrítico e incrementar las conexiones sinápticas. Experiencias de primera mano en el mundo fuera de la escuela y con objetos reales dentro de la escuela evocan una rica entrada sensorial para el cerebro. Visitar el charco, inspeccionar el gusano de tierra de cerca, observar la semilla que se transforma en planta, son las experiencias que desarrollan redes nerviosas. Aprendiendo desde el inicio con experiencia práctica "estar ahí" le adiciona el poder a todas las otras clases de entradas, ya sea inmersión, práctica con objetos reales, práctica con modelos, segunda mano o simbólico. Entendiendo que esta red nerviosa, la cual es el sustrato del aprendizaje humano, depende primeramente de las experiencias de primera mano, proporciona a los educadores, nuevas y poderosas razones para dirigir un aula viva que comienza con el mundo real."

(McGeehan)

---

5) El matemático Paul Lockhart dice:

"¿Por qué deberían saber calcular los niños de tercer grado? ¿Quieres entrenarlos para que sepan sumar 427 + 389? Esa no es la clase de preguntas que hacen los niños de ocho años normalmente. Aun muchos *adultos* no comprenden realmente el valor posicional en el sistema decimal. ¿Y tú esperas de los niños de ocho años que tengan un concepto claro de eso? ¿O no te importa si lo comprenden o no? Es simplemente demasiado temprano para esta clase de entrenamiento técnico. Uno puede hacerlo; pero al fin de cuentas hace más daño que provecho a los niños. Sería mucho mejor esperar hasta que despierte su propia curiosidad natural acerca de los números.

- ¿Qué debemos entonces hacer con los niños pequeños en las clases de matemática?
- ¡Déjenlos jugar! Enséñenles ajedrez y go, hex y chaquete, nim, o cualquier otro. Inventen sus juegos propios. Resuelvan rompecabezas y adivinanzas. Confróntenlos con situaciones donde tienen que razonar de manera deductiva. No se preocupen por las técnicas y notaciones. Ayúdenles a convertirse en pensadores matemáticos activos y creativos.
- Esto me parece un riesgo terrible. Si después nuestros alumnos ni siquiera saben sumar y restar, ¿entonces qué?
- Pienso que es un riesgo mucho más grande, eliminar toda expresión creativa de las escuelas, y solamente dejar que los alumnos memoricen datos, fórmulas y listas de palabras."

(Lockhart)

Y Raymond Moore dice:

"El juego es un medio vital de aprendizaje para un niño. En cierto sentido, el juego es su trabajo. Jugar y trabajar le gusta por igual, hasta que alguien lo desilusione con una actitud negativa hacia el trabajo. El niño aprende a jugar tan pronto como puede ver algo o alguien con quien jugar. Y así descubre conocimientos para sí mismo que no se pueden enseñar fácilmente de otra manera. A través de sus sentidos, y su manipulación de objetos ordinarios, descubre ciertas cualidades de las cosas: pesos, texturas, tamaños, formas, colores – la base del aprendizaje académico. A través de la interacción con otros, y la observación e imitación de las personas en su alrededor, aprende acerca de la vida – las habilidades sociales. A través de las sencillas actividades y experiencias cotidianas, desarrolla poco a poco los conceptos básicos del tiempo, de los números y del espacio. Esto continúa durante los primeros nueve o diez años de su vida."

(Moore 1981)

6) Piaget dice lo siguiente acerca de la relación entre maduración del cerebro y aprendizaje:

"... el sistema nervioso y su maduración tardía (mielogénesis y principalmente citoendrogénesis) se limitan así a abrir un cierto campo de posibilidades dentro del cual habrán de actualizarse cierto número de conductas (...); pero esta actualización supone determinadas condiciones de experiencia física (manipulación de los objetos, etc., lo cual es esencial también para la lógica) y ciertas condiciones sociales (intercambio regulado de las informaciones, control mutuo, etc.), y estas diversas condiciones serán las que determinen el perfeccionamiento de lo que la maduración hace solamente posible."

(Piaget 1973)

O sea, la experiencia concreta y el apoyo por el ambiente social favorecen el aprendizaje; pero no se puede forzar un aprendizaje más allá del "campo de posibilidades" que la maduración natural del cerebro ya provee. – Los Moore relatan la siguiente respuesta de Piaget a la pregunta acera de la enseñanza acelerada en la niñez:

"Muchas veces han preguntado a Piaget si él apoya los programas en Norteamérica que proveen la instrucción formal cada vez más temprano. Según John L. Phillip, cuando se le preguntó si se puede apurar la mente del niño, dijo que esta fue la "pregunta americana". El pensó que "probablemente fuera posible, pero **no se la debe apurar.**"

(Moore 1995)

En el mismo contexto, los Moore aportan las siguientes informaciones:

"William Rohwer sugiere que para muchos niños, los esfuerzos por aumentar la percepción independiente o la habilidad cognitiva tendrán **más probabilidades de ser exitosos "si se los demorara ... hasta cerca del fin de los años primarios."** Rohwer sugiere también que se puede adquirir todo el aprendizaje "necesario para tener éxito en enfrentar las exigencias de la escuela secundaria en solo dos o tres años si se demorara la instrucción formal hasta esos años." (...)

El psiquiatra J.T.Fisher apoya a Rohwer basándose en su experiencia personal y clínica. **El doctor Fisher empezó la escuela a los trece años y terminó la secundaria a los dieciséis años.** Se sentía "desilusionado más tarde cuando descubrió que esto no demostró que él fue un genio". Más bien, él tuvo que aceptar lo que dijeron los psicólogos que "han demostrado que **un niño normal que inicia su educación académica en el período de la adolescencia, pronto puede llegar al mismo punto de progreso al cual hubiera llegado si hubiera iniciado la escuela a los cinco o seis años de edad."**

(...) En otras palabras, los padres no tienen que temer que ellos están desperdiciando los primeros años de sus hijos si no los mandan a la escuela. Al contrario, si se deja a los niños inventar o resolver cosas por sí mismos en un ambiente relativamente libre, podrán llegar a ser personas más creativas y tener mejores habilidades para resolver problemas. (...)"

(Moore 1995)

Acerca de las operaciones básicas de la aritmética, Piaget dice:

"Sabemos que durante la primera infancia solo los primeros números son accesibles al sujeto porque son números intuitivos que corresponden a figuras perceptibles. La serie indefinida de los números y, sobre todo, **las operaciones de suma (y su inversa, la resta)** y de multiplicación (con su inversa, la división) **no son, en cambio, accesibles por término medio hasta después de los siete años.**"

(Piaget 1973)

---

7) "Durante un período de varios años y en cientas de ciudades, el 'Comité de los Siete' investigó para determinar la edad mental a la que determinados temas podían enseñarse de manera 'acabada'. Típicamente, ellos encontraron que **la suma de fracciones homogéneas requirió una edad mental de 10 a 11 años, y la suma de fracciones heterogéneas, 14 a 15 años. La división entre números de dos cifras requirió una edad mental de 12 a 13 años.**"

En: "What does Research say about Arithmetic?" (¿Qué dice la investigación acerca de la aritmética?), por Vincent J. Glennon and C. W. Hunnicutt, Asociación Nacional de Educación de los EEUU, Washington D.C. - Citado en Bluedorn (sin fecha).

Bibliografía

ALLIANCE FOR CHILDHOOD (Alianza por la Niñez): "La ilusión educativa", http://drupal6.allianceforchildhood.org/fools_gold_spanish

BLUEDORN, Harvey: "Research on Teaching Math", http://www.triviumpursuit.com/articles/research_on_teaching_math.php

HEALY, Jane M.: "Endangered Minds, Why Children Don't Think and What We Can Do About It" (Mentes en peligro: Por qué los niños no piensan, y lo que podemos hacer acerca de ello), Nueva York, 1990.

HÜTHER, Gerald: "Begeistern statt entgeistern" ("Entusiasmar en vez de espantar") - Traducción de una entrevista televisiva, publicada en internet: https://www.youtube.com/watch?v=K0nud8EA0Ew

LOCKHART, Paul: "Lamento de un matemático"

Original inglés: "A Mathematician's Lament", accesible en:

https://www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament.pdf

Una traducción al español fue publicada en:

http://es.scribd.com/doc/47237369/Lamento-de-un-matematico-por-Paul-Lockhart

McGEEHAN, Jane: "Aprendizaje cerebro-compatible", publicado en internet: http://www.greenteacher.com/articles

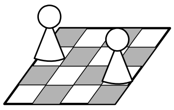
Original inglés: "Brain-compatible Learning"; publicado en: https://lms.manhattan.edu/pluginfile.php/109118/mod_resource/content/1/Brain Compatible learning.pdf

MOORE, Raymond y Dorothy: "Home Grown Kids" (Niños crecidos en casa), Word Publishing 1981

MOORE, Raymond y Dorothy: "Mejor tarde que temprano", Editorial Unilit, Miami 1995

PIAGET, Jean: "Problemas de psicología genética" y "El desarrollo mental del niño", en: "Seis estudios de psicología", Seix Barral, Barcelona 1973 (6ta edición)

Anexo C: Índice de juegos

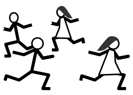


Juegos de mesa

¿Quién llega más cerca a mil?	Unidad 4
144 con 5 dados	Unidad 13
Yatzy	Unidad 13
Juego de múltiplos y divisores (con cartas)	Unidad 15
Juego de múltiplos y divisores (tipo Scrabble)	Unidad 17
El espejo teletransportador	Unidad 60
Retoños	Unidad 73
Konane (Ajedrez hawaiano)	Unidad 73
No hagas un cuadrado	Unidad 73
Cram	Unidad 73
Nim en dos dimensiones	Unidad 73
Cuarteto	Unidad 73
No hagas un triángulo	Unidad 73
Damas chinas	Unidad 73
Amazonas	Unidad 73
El juego de la L	Unidad 73
No hagas una suma	Unidad 73
Fútbol filosófico	Unidad 73
Hex	Unidad 73
El juego de las tuberías	Unidad 73
Ajedrez	Unidad 74
Sudoku por turnos	Unidad 75
El gato (Michi; Triqui; etc.)	Unidad 77
¿Quién llega a 100?	Unidad 78
Golf matemático	Unidad 79
Ley secreta (Bloques lógicos)	Unidad 85
Bingo de bloques lógicos	Unidad 86

Juegos en círculo

Jugar a la tienda	Unidad 5, 92
El instructor de dibujo	Unidad 54



Juegos movidos

Recta numérica grande	Unidad 1, 92
Búsqueda del tesoro con un mapa	Unidad 67
Subir y bajar gradas	Unidad 92

Anexo D:
Índice de temas matemáticos y pedagógicos

Nota: Este índice intenta enumerar todos los temas matemáticos significativos que intervienen de alguna manera en las Unidades de aprendizaje. Pero eso no significa que los niños tengan que aprender todos los temas o conceptos que figuran en este índice. Por ejemplo, si aparece la "Congruencia modular" como un tema en la Unidad 22, eso no implica que los niños tengan que aprender este término explícitamente; allí se lo menciona solamente para dar un poco de trasfondo a los educadores.

Ábaco	Unidad 1, 3, 4, 9, 11, 26, 28, 29, 48
Adición	Unidad 3, 4, 7, 27, 35, 40, 48, 59, 73, 75, 93
" de ángulos	Unidad 59, 95
" de fracciones	Unidad 35, 40
" de números decimales	Unidad 48
" vertical o suma llevando	Unidad 4, 7, 27, 48
Ajedrez	Unidad 74
Algoritmo de Euclides	Unidad 18
Altura (de figuras geométricas)	Unidad 94
Ampliación (en geometría)	Unidad 70
Amplificar (fracciones)	Unidad 39, 40, 51
Análisis de juego	Unidad 73, 77, 78, 79
Ángulo	Unidad 52, 59, 60 a 64, 68, 69, 95
" adyacente	Unidad 59, 95
" agudo	Unidad 59
" llano	Unidad 59
" obtuso	Unidad 59
" recto	Unidad 54, 56, 59, 62, 66, 67, 69, 72
"-s suplementarios	Unidad 95
Antecesor	Unidad 1
Aproximar números	Unidad 26, 50
Árbol (diagrama)	Unidad 73, 77, 85
Árbol genealógico	Unidad 85
Arco	Unidad 57, 58, 62
Áreas	Unidad 32, 61, 65, 67, 70, 94
Arista	Unidad 58, 72
Armonías (música)	Unidad 44
Arquitectura	Unidad 55, 58, 63
Arte matemático	Unidad 9, 54, 55, 57, 58, 60, 61, 63, 64, 69, 71, 72, 86
Astronomía	Unidad 91
Balanza	Unidad 5
Billón	Unidad 91
Brújula	Unidad 68
Cálculo mental	Unidad 3, 9, 11
Canje	Unidad 1, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 27, 28, 29, 36
Cara (de un poliedro)	Unidad 58, 72
Cartografía	Unidad 67
Centena de millar	Unidad 26
Centro (de un círculo)	Unidad 57, 62
Centro de simetría	Unidad 60
Cero	Unidad 2, 27, 46, 47
Cifras significativas	Unidad 31, 91
Cinta métrica	Unidad 5, 47, 65
Círculo	Unidad 54, 57, 62
Círculo de las quintas (música)	Unidad 44
Circunferencia	Unidad 57
Clasificar	Unidad 86
Colorear mapas	Unidad 76
Combinatoria	Unidad 81, 82
Comparación de números	Unidad 1, 26, 34, 40, 47
Compás (herramienta)	Unidad 57, 58, 59, 62
Compás (música)	Unidad 44
Complemento (numérico)	Unidad 6, 85
Complemento (de un conjunto)	Unidad 86, 87
Compresión mental	Unidad 3
Comprobación de resultados	Unidad 6, 12, 36
Cóncavo	Unidad 54
Congruencia (geometría)	Unidad 54, 58, 59, 60, 63, 69
Congruencia modular	Unidad 22
Conjuntos	Unidad 54, 86, 87
Cono	Unidad 57
Construcciones geométricas	Unidades 56 a 60, 62, 63, 67 a 70, 88, 95
Contabilidad	Unidad 7, 13
Conteo	Unidad 1, 26, 76
Convenciones	Unidad 16
Conversión de unidades de medida	Unidad 5, 7, 31, 32, 33, 45, 47, 70
Convexo	Unidad 54
Coordenadas cartesianas	Unidad 66, 67, 69, 70
Coordenadas polares	Unidad 68
Criba de Eratóstenes	Unidad 16
Criptogramas de cifras	Unidad 75
Crucinúmeros	Unidad 75
Cuadrado	Unidad 54, 61, 62, 64, 65, 73, 81, 89
Cuadriláteros	Unidad 54, 59
Cuatro colores (teorema)	Unidad 76
Cuerpos geométricos	Unidad 58, 63, 72, 89

Cubo	Unidad 58, 63, 71, 81, 89
Cubo Soma	Unidad 71
Decena de millar	Unidad 26
Decimales	Unidades 46 a 53
Demostraciones matemáticas	Unidad 22, 25, 72, 95
Denominador	Unidad 34
" común	Unidad 40
Descartes, René	Unidad 66, 69, 89
Descuento	Unidad 52
Deudas	Unidad 92, 93
Diagonal	Unidad 54, 62, 72, 95
Diagrama de árbol	Unidad 73, 77, 85
Diagrama de Venn	Unidad 17, 19, 86, 87
Diámetro	Unidad 57
Diez mil	Unidad 5
Diferencia (de conjuntos)	Unidad 86, 87
Dimensiones	Unidad 71
Dinero	Unidad 5, 7, 13, 20, 92, 93
Diofanto	Unidad 40
Disjunto	Unidad 86
Distancias	Unidad 5, 56, 57, 60, 67, 68
Distorsión (de coordenadas)	Unidad 69
Divisibilidad	Unidad 14, 15, 23, 25, 81
División	Unidad 8, 11, 12, 29, 30, 37, 38, 46, 50, 67
" de fracciones	Unidad 38, 42, 50, 51
" de números decimales	Unidad 50, 51
" , procedimiento escrito	Unidad 12, 29, 50, 51
Divisores	Unidad 14, 16, 17, 18, 24, 85
Divisores comunes	Unidad 17, 18
Dodecaedro	Unidad 63
Dodecágono	Unidad 54, 64
Eje de coordenadas	Unidad 66
Eje de simetría	Unidad 60, 62, 69
Elemento (de un conjunto)	Unidad 86, 87
Elemento inverso	Unidad 42
Elemento neutro	Unidad 39, 42
Entero (y fracciones)	Unidad 35, 36, 52
Entero y partes	Unidad 3, 5, 13, 35, 59, 87
Eratóstenes	Unidad 16
Escala (de un mapa)	Unidad 67, 91
Escala musical	Unidad 44
Escritura de números	Unidad 1, 26, 46, 47, 91
Escuadra	Unidad 56, 58
Espacio	Unidad 71
Espejo	Unidad 60
Estadística	Unidad 52, 83, 84, 87
Estimaciones	Unidad 5, 28, 29, 33, 45, 67
Estrategia	Unidad 73, 74, 77, 78, 79
Euclides	Unidad 18, 57, 89, 95
Euler, Leonardo	Unidad 6, 72, 86
Exponente	Unidad 89
Factores primos	Unidad 16, 17, 19, 24, 39, 40
Factorizar	Unidad 16, 17, 19, 24
Fibonacci	Unidad 2
Figuras geométricas	Unidad 54
Fracciones	Unidades 34 a 47, 51, 52, 65
" dobles	Unidad 42
" equivalentes	Unidad 39, 51
" heterogéneas	Unidad 40
" homogéneas	Unidad 35
" impropias	Unidad 36, 37
" irreducibles	Unidad 39
Frecuencia (de vibraciones)	Unidad 44
Geometría	Unidades 54 a 73, 94 a 96
Grados (ángulos)	Unidad 52, 59, 68
Gráfico circular (estadística)	Unidad 52, 83
Gráfico de barras	Unidad 1, 52, 83
Gráfico de proporcionalidad	Unidad 70
Hexágono	Unidad 54, 64, 65, 73
Homogenizar (fracciones)	Unidad 40
Huesos de Napier	Unidad 28
Icosaedro	Unidad 63
Intersección (de conjuntos)	Unidad 54, 86, 87
Intersección (de rectas)	Unidad 56, 68
Kakuro	Unidad 75
Laberintos	Unidad 71, 76
Lectura de números	Unidad 1, 26, 46, 91
Leonardo de Pisa (Fibonacci)	Unidad 2
Ley asociativa	Unidad 4, 27
Ley conmutativa	Unidad 93
Ley de los números grandes	Unidad 82
Ley distributiva	Unidad 2, 4, 8, 27, 93
Leyes de los signos	Unidad 93
Lógica proposicional	Unidad 86
Longitudes	Unidad 5
Mapas	Unidad 67, 68, 76
"Máquinas"	Unidad 6, 12, 13, 20, 21, 39, 43, 90
MCD (Máximo común divisor)	Unidad 17, 18, 19, 20, 21, 39
MCM (Mínimo común múltiplo)	Unidad 19, 20, 21, 40
Mediatriz	Unidad 58, 62
Mediciones	Unidad 5, 31, 32, 45, 53, 56, 59, 65, 67, 68, 71, 96
Meteorología	Unidad 83
Millares	Unidad 1, 2, 3, 26
Millón	Unidad 26, 91

Modelos matemáticos	Unidad 83
Multiplicación	Unidad 2, 8, 9, 10, 12, 25, 28, 30, 38, 41, 42, 46, 49, 75
″ árabe	Unidad 28
″ de fracciones	Unidad 38, 41, 42, 49
″ de números decimales	Unidad 49
″, procedimiento escrito	Unidad 10, 28, 49
Multiplicaciones persas	Unidad 30
Múltiplos	Unidad 14, 19, 25, 85
Múltiplos comunes	Unidad 19
Música	Unidad 44
Napier, John	Unidad 28
Negocios	Unidad 7, 13, 20
Notación científica	Unidad 91
Notación simbólica (ajedrez)	Unidad 74
Novecientos noventa y nueve	Unidad 6
Nueve	Unidad 22
Numerador	Unidad 34
Números, numeración	Unidad 1, 26
″ babilónicos	Unidad 80
″ decimales	Unidades 46 a 53, 67
″ egipcios	Unidad 80
″ figurativos	Unidad 81
″ griegos	Unidad 2
″ hindúes	Unidad 2
″ mayas	Unidad 80
″ mixtos	Unidad 36, 37, 38
″ negativos	Unidad 92, 93
″ pares	Unidad 15
″ primos y compuestos	Unidad 14, 16, 81
″ romanos	Unidad 2, 80
″ triangulares	Unidad 81
Octaedro	Unidad 63
Octágono	Unidad 54, 64, 65
Once	Unidad 25
Operación inversa	Unidad 6, 12, 21
Operaciones combinadas	Unidad 13, 88, 90
″ con conjuntos	Unidad 86
″ cruzadas	Unidad 75
″ incompletas	Unidad 75
Óptica	Unidad 60
Orientación en el campo	Unidad 67, 68
Origami	Unidad 34, 61
Origen (de coordenadas)	Unidad 66
Par ordenado	Unidad 66
Paradoja	Unidad 65, 71
Paralelas	Unidad 54, 56, 62, 63, 95, 96
Paralelogramo	Unidad 54, 56, 57, 61, 64, 94
Parentesco	Unidad 85
Paréntesis	Unidad 93
Patrones (lógicos, regulares)	Unidad 85
Pentágono	Unidad 54, 61, 63, 64, 81
Perfil de altura	Unidad 67
Perímetro	Unidad 65
Permutaciones	Unidad 82
Perpendicular	Unidad 54, 56, 68
Perspectiva	Unidad 71
Pesar	Unidad 5
PESI (Primos entre sí)	Unidad 17, 39
Pirámide	Unidad 58, 63, 72, 81, 96
Pitágoras	Unidad 66, 72, 81
Poliedros	Unidad 58, 63, 72
″ regulares	Unidad 63, 72
Polígono	Unidad 54, 59, 63, 64, 65, 70
″ regular	Unidad 59, 63, 64, 95
Porcentajes	Unidad 52, 82, 83
Potencias	Unidad 49, 71, 81, 89
Precedencia de operaciones	Unidad 13, 88, 90
Presupuesto	Unidad 7, 13
Prisma	Unidad 58, 71, 72, 81
Probabilidad	Unidad 82
Promedio	Unidad 84
Proporcionalidad	Unidad 20, 21, 33, 39, 43, 44, 52, 67, 70, 91, 96
″ cuadrática	Unidad 70
″ inversa	Unidad 21
Prueba del 9	Unidad 22
Punto (geometría)	Unidad 56
Punto decimal	Unidad 46
Punto medio	Unidad 62
Puntos cardinales	Unidad 68
Radio	Unidad 57
Raíces, radicación	Unidad 90
Razonamiento	Unidad 73 a 79, 85
″ numérico	Unidad 75, 78, 79, 81
Recta numérica	Unidad 1, 26, 35, 36, 47, 92
Rectángulo	Unidad 14, 38, 41, 54, 56, 58, 61, 63, 65, 68, 70, 81, 94
Rectas	Unidad 54, 56, 68
Redondear números	Unidad 26, 50
Reflejo	Unidad 60, 69
Regla (herramienta)	Unidad 56, 58, 67
Regla del 9	Unidad 22
Relaciones	Unidad 85
Reloj	Unidad 33, 34, 38
Reparto proporcional	Unidad 21
Residuo	Unidad 11, 12, 22, 29
Resta	Unidad 3, 6, 7, 27, 35, 40, 48, 59, 93
″ de ángulos	Unidad 59
″ de fracciones	Unidad 35, 40
″ de números decimales	Unidad 48
″ vertical o resta prestando	Unidad 6, 7, 27, 48
Ritmo	Unidad 44
Rombo	U. 54, 57, 62, 64, 94
Rompecabezas	U. 61, 65, 71, 75, 87

Rotación	Unidad 69
Sectores circulares	Unidad 34, 36, 39, 52, 83
Segmentos (lineales)	Unidad 13, 56, 61, 67, 87, 96
Semejanza geométrica	Unidad 70, 96
Sentido numérico	Unidad 16, 20
Separador de miles	Unidad 1
Signo	Unidad 4, 10, 92, 93
Simetría	Unidad 58, 60, 62, 63, 69
Simplificar (fracciones)	Unidad 39
Sistema decimal	Unidad 2, 8, 28, 29, 46, 49, 50, 51
Sonido	Unidad 44
Subconjunto	Unidad 86
Sucesiones	Unidad 85
Sucesor	Unidad 1
Sudoku	Unidad 75
Suma	Unidad 3, 4, 7, 27, 35, 40, 48, 59, 73, 75, 93
" de ángulos	Unidad 59, 95
" de fracciones	Unidad 35, 40
" de números decimales	Unidad 48
" vertical o suma llevando	Unidad 4, 7, 27, 48
Sustracción	Unidad 3, 6, 7, 27, 35, 40, 48, 59, 93
" de ángulos	Unidad 59
" de fracciones	Unidad 35, 40
" de números decimales	Unidad 48
" vertical o prestando	Unidad 6, 7, 27, 48
Tabla de multiplicación	Unidad 9
Tablero posicional	Unidad 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 26, 31, 32, 46, 47, 48, 49, 51, 71
Tangram	Unidad 61
Teorema de los 4 colores	Unidad 76
Teorema de Thales	Unidad 96
Teorema fundamental de la aritmética	Unidad 16

Tetraedro	Unidad 63, 81
Tetris tridimensionales	Unidad 71
Tiempo	Unidad 20, 21, 33, 34, 38, 44, 53
Topografía	Unidad 67
Topología	Unidad 73
Transformaciones (geométricas)	Unidad 69, 70
Transportador	Unidad 59, 63
Transposición (música)	Unidad 44
Trapecio	Unidad 54, 64, 68, 94
Traslación	Unidad 69
Triángulo	Unidad 54, 57, 58, 59, 61, 63, 64, 65, 69, 73, 94, 95
" acutángulo	Unidad 95
" equilátero	Unidad 57, 65, 95
" isósceles	Unidad 58, 62, 64, 95
" obtusángulo	Unidad 95
" rectángulo	Unidad 61, 64, 95
" semejante	Unidad 70, 96
Trillón	Unidad 91
Unidades de medida	Unidad 5, 7, 31, 32, 45, 47, 53, 67, 70, 71
Unión (de conjuntos)	Unidad 86, 87
Universo (conjunto)	Unidad 86, 87
Valor posicional	Unidad 1, 2, 26, 46
Valor recíproco	Unidad 42
Variación porcentual	Unidad 52
Vectores	Unidad 92
Velocidades	Unidad 20, 21, 33, 53, 84, 91
Venn, diagrama de	Unidad 17, 19, 54, 86, 87
Vértice	Unidad 54, 58, 59, 69, 72
Volúmenes	Unidad 5, 71

¿Cómo aprenden los niños la matemática?

Los métodos de la matemática activa, con éxito comprobado en la práctica, se orientan en las necesidades y características de los niños para un aprendizaje óptimo: Actividades lúdicas, movimiento físico, la representación de los principios matemáticos mediante materiales concretos, la conexión con la vida cotidiana, y todo eso en un ambiente alentador sin estrés.

Estos métodos son ideales para la educación en el hogar ("homeschooling") porque permiten adaptarse individualmente al desarrollo mental natural de cada niño. Usted no necesita conocimientos especiales en matemática; las explicaciones del libro le guiarán paso por paso.
Igualmente los alumnos y educadores de escuelas alternativas encontrarán aquí muchas ideas que enriquecerán su práctica.

Sumérjase con sus niños en una aventura de aprendizaje que les permitirá ver la matemática desde una perspectiva nueva.

Los tomos de Primaria II, para niños de 9 a 12 años aproximadamente, cubren las cuatro operaciones básicas con números grandes, con fracciones y con números decimales; los conceptos de múltiplos y divisores; construcciones geométricas en el contexto de proyectos prácticos; cálculos con unidades de medida; conceptos de la teoría de conjuntos; diversas habilidades de razonamiento que se entrenan mediante juegos de estrategia, rompecabezas de matemática recreativa, y desafíos de investigación matemática; y otros temas. Algunos capítulos relacionan la matemática con otros campos del saber, tales como la arquitectura, el arte, la música, la astronomía, y otros.

La serie completa de "Matemática Activa" consiste en los siguientes tomos:

- Pre-Matemática (4 a 6 años aprox.)
- Primaria I (6 a 9 años aprox.)
- Primaria I - Hojas de trabajo
- Primaria II (9 a 12 años aprox.)
- Primaria II - Hojas de trabajo
- Secundaria I (12 a 15 años aprox.)
- Secundaria II (Pre-Universitario)
- Matemática divina (Tomo complementario)

Hans Ruegg tiene más de 20 años de experiencia educando a niños y adolescentes, y desarrollando alternativas pedagógicas. Ofrece asesoramiento a familias y escuelas. Sus cursos por internet han inspirado a cientos de participantes. Junto con su esposa educaron a sus dos hijos en casa, desde los primeros pasos hasta el ingreso a la universidad.