Hans Ruegg

Matemática activa

para familias educadoras y escuelas alternativas

Primaria I
6 a 9 años

Hans Ruegg

Matemática activa

para familias educadoras

y escuelas alternativas

Primaria I

(de 6 a 9 años aproximadamente)

Se ofrecen los siguientes libros de “Matemática Activa ...”:

Pre-Matemática (4 a 6 años aprox.) - con hojas de trabajo incluidos.

Primaria I (6 a 9 años aprox.)

Primaria I, Libro de trabajo

Primaria II (9 a 12 años aprox.)

Primaria II, Libro de trabajo

Secundaria I (12 a 15 años aprox.)

Secundaria II (Pre-universitario)

Matemática Divina (Complemento para educadores)

Matemática activa para familias educadoras y escuelas alternativas
Primaria I (de 6 a 9 años aproximadamente)

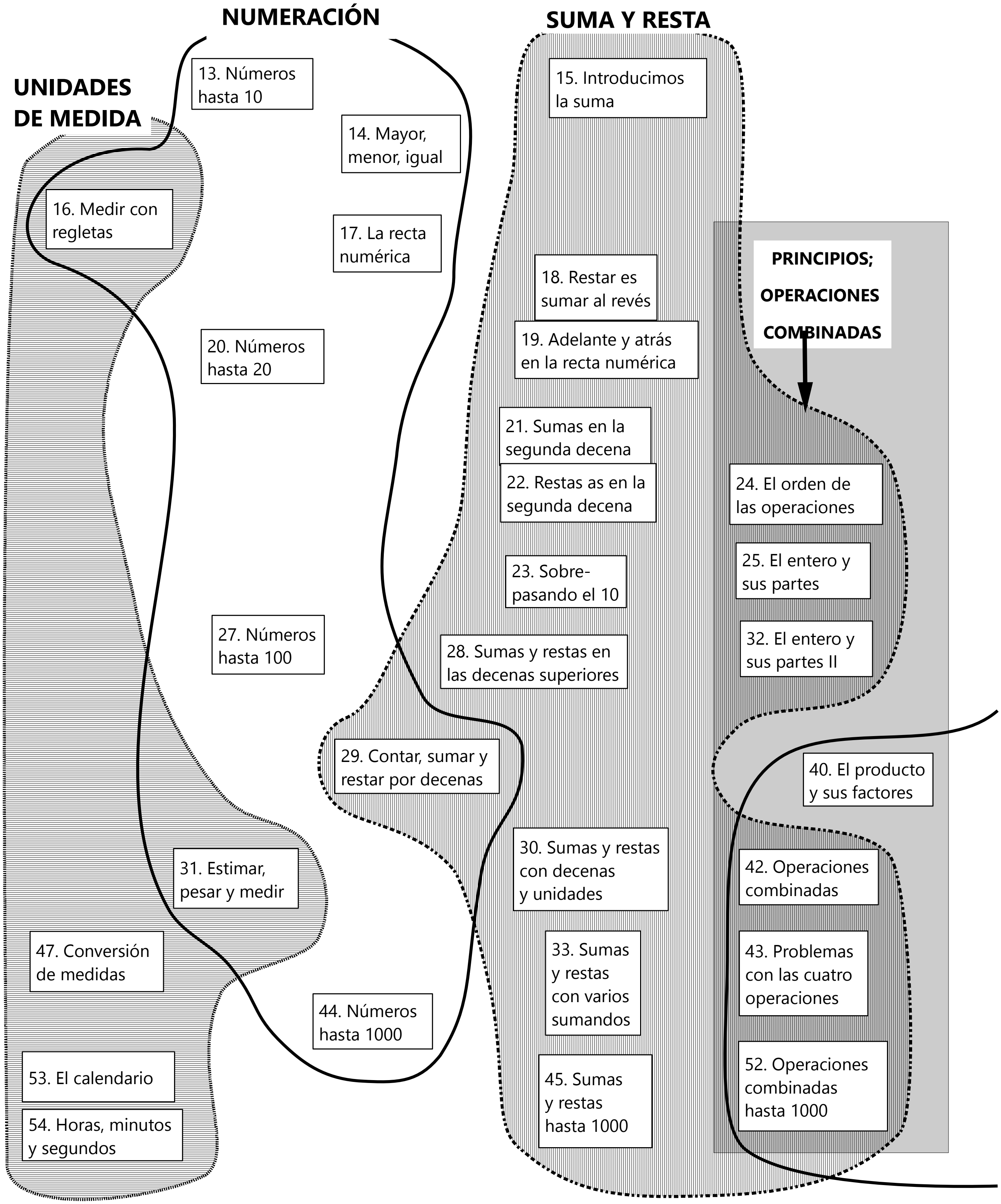
Edición digital 2023. Distribución gratuita. Prohibida su venta.

Contacto por internet para consultas:
https://educacionCristianaAlternativa.wordpress.com/libros-de-matematica-activa/

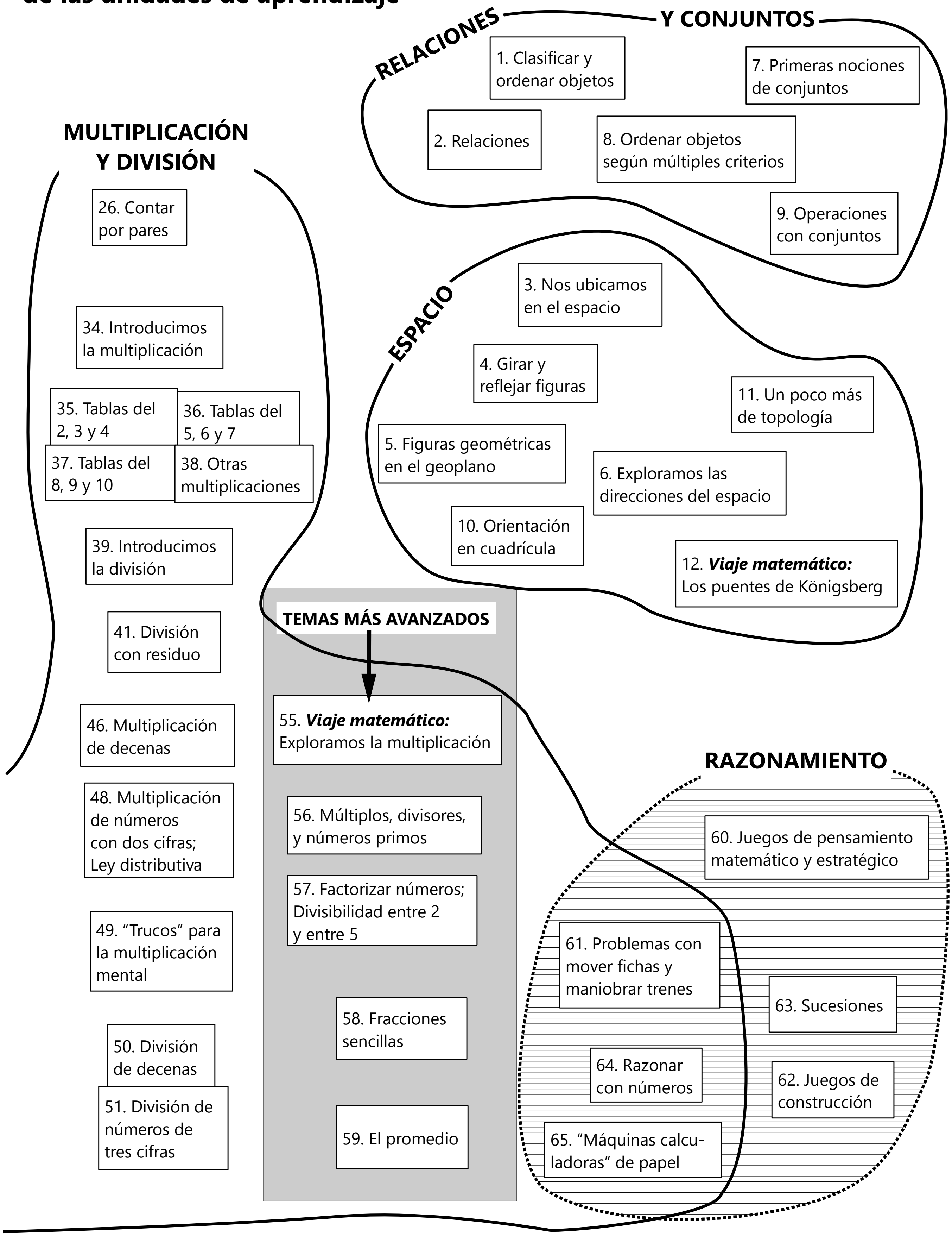
Unas demostraciones en video de los métodos de la matemática activa se encuentran en:
http://www.youtube.com/user/educadorDiferente

Índice de contenido

Mapa temático



de las unidades de aprendizaje



Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Dios, mi Padre celestial, por haberme dado fuerzas para la elaboración y publicación de este libro.
Agradezco a todos mis alumnos y las familias educadoras que participaron en la aplicación experimental de estos métodos y me permitieron desarrollarlos y mejorarlos.
Agradezco a los estudiantes de mis cursos a distancia, por sus comentarios y sugerencias.
Agradezco a todos los colaboradores de escuelas alternativas que me brindaron ideas, me abrieron las puertas de sus escuelas y compartieron su trabajo conmigo.
Agradezco a todos los amigos que contribuyeron a este proyecto con su apoyo económico y logístico.
Agradezco a mi esposa por todo su amor, ánimo y paciencia que me brindó durante los tiempos de trabajo intenso en este libro.

Nota lingüística:
Aprendí el idioma español en un tiempo cuando todavía se daba por sentado que un plural masculino incluye tanto a seres masculinos como femeninos, como es de hecho la regla oficial. Por tanto, para evitar complicaciones del lenguaje y para que nadie se sienta excluido, deseo aclarar desde el inicio que en este libro el plural "niños" incluye también a las niñas; el plural "padres" incluye también a las madres; el plural "educadores" incluye también a las educadoras; el plural "profesores" incluye también a las profesoras; etc; al igual como el plural femenino "personas" incluye también a los varones. Igualmente cuando se usan palabras como "el educador", "el niño", "una persona" en un sentido genérico, se incluyen tanto varones como mujeres. Algunas veces he diferenciado cuando me dirijo al lector o la lectora individual; pero por lo general he preferido ahorrarme los(las) "(os)" y "(as)" innecesarios(as), y librarme de malabares tales como: "Las y los educadores(as) buenos(as) son amigos(as) de los niños y las niñas pequeños(as)." Eso no implica menosprecio hacia nadie. La matemática no hace diferencia entre varones y mujeres; es igualmente accesible para todos.

Introducción pedagógica

¿Qué hay de especial en este libro de matemática?

Por favor tome el tiempo de leer esta introducción detenidamente. Aquí se explican los principios pedagógicos que hacen la diferencia entre este libro de matemática y otros libros. Sobre todo, si usted y sus niños quieren realmente beneficiarse de este método, ¡no use este libro como si fuera un "libro escolar" tradicional!

Aun si usted ya conoce este método desde el tomo anterior (Pre-Matemática), no pase por alto esta introducción, porque aquí encontrará unas pautas nuevas que se aplican al nivel de primaria en particular.

Este libro quiere ayudarle a descubrir nuevos caminos de enseñar y aprender matemática. Si usted aprendió matemática en una escuela tradicional, intente dejar atrás sus recuerdos escolares. Conviértase nuevamente en un(a) aprendedor(a) y descubridor(a). Olvídese de la rutina tediosa, de las presiones y de las humillaciones que demasiado a menudo acompañan el aprendizaje en las escuelas tradicionales. En cambio, desentierre nuevamente la curiosidad que usted tenía de niño(a) pequeño(a) por explorar un mundo fascinante alrededor de usted. Explore este mundo al lado de sus niños.

¡Atrévase a hacer matemática!

Al embarcarse a esta aventura de aprendizaje, es posible que usted como padre, madre, profesora o educador sienta temor: "Nunca he sido bueno(a) en matemática. ¿Cómo voy a enseñarla a mis niños?" Quizás surgen recuerdos de una jungla de símbolos incomprensibles, de exámenes desaprobados y de los castigos subsiguientes...

Si usted sufre de un "trauma matemático" debido a sus experiencias escolares, usted no está solo(a).

Si para usted la matemática siempre ha sido un experiencia positiva y emocionante, espero que las actividades de este libro le ayuden a transmitir su entusiasmo a sus niños. Y si no fue así, que esta nueva oportunidad de explorar la matemática junto a sus niños se convierta en un medio para usted mismo(a), de vencer el "trauma matemático". Como un primer paso hacia este fin, analicemos de dónde viene este trauma en primer lugar.

Cómo se origina el "trauma matemático"

Si un niño se queda "traumado" con la matemática, con mayor frecuencia eso se debe a métodos de enseñanza inadecuados:

La enseñanza de temas demasiado avanzados a una edad demasiado temprana.

Padres y profesores ambiciosos a menudo desean que los niños avancen rápidamente en sus conocimientos; entonces los presionan a asimilar conceptos que no están de acuerdo a su edad y su nivel de comprensión. Eso no les hace ningún bien a los niños; al contrario, tiene efectos dañinos. *(Explicaremos eso en las secciones siguientes acerca del desarrollo del niño. También se encuentran diversas citas de investigaciones al respecto en el Anexo B.)*

Uno de esos efectos es que el niño se queda de por vida con la impresión de que "la matemática es difícil; yo no puedo comprender la matemática". Pero eso no es cierto. La matemática le pareció demasiado difícil *porque el niño era demasiado joven al aprenderla*. Si los mismos conceptos se enseñaran al niño dos o tres años más tarde, cuando su cerebro haya madurado lo suficiente, entonces los comprendería con mucho más facilidad.

Castigos por no entender.

El niño que es castigado por "no entender", se siente culpable por ello y piensa: "Soy un niño tonto y malo." Pero ¡el "no entender" no es ninguna culpa del niño! Eso no es pereza y tampoco es maldad. Mas bien es una señal de que el educador está sobrecargando al niño, no está respetando su ritmo de desarrollo, o está usando un lenguaje que los niños no pueden comprender. Si un niño no comprende, es el educador quien debe corregirse.

Métodos demasiado abstractos de enseñanza.

Los niños de primaria todavía no piensan de manera abstracta. Enseñarles definiciones abstractas o hacerles manipular símbolos que no pueden asociar con experiencias concretas, es como si los hiciéramos memorizar palabras en chino: En vez de hacer entender, produce confusión.

Memorización de conocimientos aislados.

En la matemática, los datos, propiedades, reglas y procedimientos no tienen sentido cuando se presentan aislados los unos de los otros. Por eso, los niños que fueron enseñados de esta manera memorística, están confundidos. (Una enseñanza *basada en principios* enmienda este error. Hablaremos de esto más abajo.)

Podríamos mencionar más ejemplos, pero estos sean suficientes para ilustrar lo que quiero decir: El "trauma matemático" no es un defecto del niño, ni es culpa de la matemática. Es producto de una *enseñanza inadecuada* de la matemática.

Entonces, para toda persona afectada por este problema, un primer paso para superarlo puede ser este pensamiento: Si estuve "mal en matemática", no es porque yo fuera incapaz. Tampoco es porque la matemática fuera algo horrible. Por tanto, *un nuevo comienzo es posible*.

Empoderados a hacer matemática

Pensar matemáticamente es una función fundamental de la mente humana. Por principio, toda persona humana es capaz de pensar matemáticamente. Entonces, ¡atrévase a hacerlo! Comience con temas elementales como los que se presentan en este libro. Haga las actividades concretas junto con sus niños, y sea creativo: Intente descubrir nuevas maneras de hacerlo. Observe el "comportamiento" de los números y de los objetos, e intente descubrir patrones, regularidades, propiedades nuevas. Aun las simples sumas y restas de números hasta 20 pueden dar lugar a unos descubrimientos interesantes, como veremos en las actividades del Bloque II.

No se deje limitar por los procedimientos preestablecidos de un libro escolar. – Para la mayoría de las operaciones y problemas descritos en este libro, se dan varias opciones de cómo se puede hacer. Así pueden escoger la forma más conveniente o la más entendible ... o pueden inventar su propio método.

Tome tiempo para probar, experimentar, descubrir. No exija resultados inmediatos – ni de los niños ni de usted mismo. Tengan paciencia con ustedes mismos, hasta que algo haga "clic" en la mente. Entonces alégrense, celebren el descubrimiento; y después pasen al siguiente desafío.

Pónganse tampoco bajo la presión de tener que "rendir" en un examen. En la matemática, el éxito no se mide por calificaciones en un examen. Se mide por las exploraciones y razonamientos que uno realiza para descubrir algo nuevo, y por el entusiasmo que uno experimenta a lo largo de estos "viajes de exploración". *(Para una forma de evaluar los progresos sin dar calificaciones, vea "El camino de aprendizaje", p.22.)*

De hecho, el hacer matemática resulta más satisfactorio cuando no nos dejamos limitar por nada y por nadie – ni por el tiempo, ni por las exigencias de un profesor o de un currículo, ni por nuestras propias expectativas acerca de lo que deberíamos alcanzar. Lo único que nos limita son las leyes de la matemática misma. De vez en cuando, estas leyes nos harán ver que alguno de nuestros razonamientos fue equivocado, o que algún procedimiento que intentamos no nos va a llevar a la solución que buscamos. Eso no es ningún fracaso; es una parte normal del proceso de aprendizaje, y nos da la oportunidad de aprender algo nuevo.

Atrévase a hacer matemática de manera "infantil"

Si usted está acostumbrado(a) a las formas escolares de enseñar matemática, algunas actividades sugeridas en este libro pueden parecerle demasiado "infantiles". ¿De verdad se puede aprender matemática como si fuera un juego?

– Sí, la matemática es efectivamente algo como un juego de la mente. Un juego es una actividad que sigue determinadas reglas, pero que permite aplicar ideas nuevas y estrategias propias dentro del marco de estas reglas; y que no necesita tener ninguna relación con la "vida real" (aunque a veces la tiene). Todo eso se aplica a la matemática. Por eso, hay un lado de la matemática que congenia muy bien con el deseo de los niños de jugar. Descubramos juntos este aspecto lúdico de la matemática.

En este camino quizás encontramos que nosotros mismos, los padres o profesores, hemos "desaprendido" el jugar y nos sentimos un poco incómodos. ¿Será porque hemos perdido el contacto con nuestra propia niñez? Aprovechemos la oportunidad de volver a establecer este contacto, y de aprender nuevamente a jugar, juntos con nuestros niños. Si quiero comprender a los niños, tengo que reconciliarme con el niño que yo mismo una vez fui.

Algunos adultos, al pensar en su niñez, espontáneamente se identifican con los adultos quienes los educaron; y aun si sus padres y profesores los humillaron y maltrataron, dicen: "Yo he salido bien, y voy a educar a mis hijos y alumnos de la misma manera." Pero ya no pueden recordar cómo se sentían ellos de niños cuando fueron maltratados; ni pueden recordar sus deseos y ambiciones de niños, sus juegos o pasatiempos favoritos – o sea, ya no pueden conectarse con el niño que ellos una vez fueron.

Si esto sucede, eso indica que inconscientemente han reprimido los recuerdos de su niñez; un mecanismo psicológico que entra en acción para evitar que nos quedemos abrumados por recuerdos demasiado dolorosos. Pero este mecanismo que protege el bienestar emocional de la persona afectada, a la vez impide que pueda comprender a los niños. Para poder edificar una relación sana y de confianza con los niños, es necesario poder ver nuestra propia niñez desde la perspectiva del niño que fuimos, y volver a identificarnos con este nuestro "yo infantil". Eso puede implicar enfrentarnos con recuerdos dolorosos, y buscar sanidad para esas heridas del pasado. *(Más sobre este tema en el libro aparte, "Matemática divina".)*

Principios de una matemática activa

Los métodos usados en este libro se basan en los siguientes principios:

1. Aprender matemática **con la actividad propia y con operaciones concretas.**

> *"Pero sean hacedores de la palabra y no solamente oidores, con lo cual se engañarían a ustedes mismos (en el cálculo)*."*

**Carta de Santiago 1:22. La palabra griega original en este pasaje significa literalmente "calcular falsamente (para engañar a alguien)".*

La matemática activa requiere de diversas maneras la *actividad propia* del niño:

- Los conceptos matemáticos se experimentan *manipulando objetos concreto*s (bloques de madera, semillas, cuentas, ábaco, regletas Cuisenaire, etc.) y jugando. Estas "operaciones concretas" tienen especial importancia en el nivel de primaria.

- Muchas experiencias prácticas se pueden hacer con los *quehaceres diarios del hogar* (cocinar, limpiar, hacer compras, etc.), o con pequeñas *manualidades*. Un buen educador identificará y aprovechará las oportunidades educativas que se dan durante estas actividades, para señalar (por ejemplo) ciertos conceptos matemáticos relacionados con la experiencia.

- Se presentan suficientes oportunidades para el *movimiento físico*, sobre todo en la edad preescolar y en los grados inferiores de la primaria.

- Se dan suficientes oportunidades para que el niño haga *decisiones propias* acerca de sus actividades. Por ejemplo, le presentamos diversas opciones de materiales con que trabajar (ábaco, cadenitas de cuentas, regletas Cuisenaire, etc.), y permitimos que el niño decida cuál quiere usar.
A medida que aumenta la capacidad de los niños de leer, ellos mismos podrán leer y comprender muchas de las instrucciones en este libro, y podrán participar en la elección de las actividades a realizar. Las actividades de este libro no son ninguna secuencia obligatoria, y es perfectamente posible adquirir los conocimientos matemáticos necesarios sin llevar a cabo todas las actividades sugeridas. (Más sobre eso en la sección "¿Cómo usar las unidades de aprendizaje en este libro?")

OJO: ¡La manipulación de "mundos virtuales" en videojuegos o programas "educativos" de computadora no tiene el mismo beneficio! Al contrario, los tiempos prolongados ante la pantalla tienen efectos dañinos en el desarrollo de los niños.[1)]

2. Aprender matemática **según las necesidades del niño, y su nivel de desarrollo.**

> *"Ustedes padres, no provoquen a vuestros hijos, para que no se desanimen."**

Para entender conceptos matemáticos, primero tienen que desarrollarse ciertas estructuras mentales en el niño. Eso es un proceso natural que necesita tiempo. (Vea los siguientes apartados acerca del desarrollo del niño.) Entonces **no apresuremos al niño**; no intentemos acelerarlo artificialmente. Hay que enseñarlo cuando está listo, no antes.

Los niños "acelerados" a una edad temprana, a menudo sufren problemas de aprendizaje más adelante. Han sido obligados a asimilar conceptos y conocimientos que su cerebro todavía no pudo comprender adecuadamente; en consecuencia sus estructuras cerebrales comenzaron a alterarse para adaptarse a las exigencias inadecuadas; y así dificultan en desarrollar y usar las estructuras más avanzadas que se desarrollan más tarde en la vida.[2)]

Cuando los niños tienen libertad de elegir entre diversas actividades y no han sido sometidos previamente a las presiones del sistema escolar, entonces normalmente elegirán actividades que están de acuerdo a su nivel de comprensión actual. Así ejercen una autorregulación de su propio aprendizaje, inconscientemente y de manera natural.

Los niños aprenden no todos de la misma manera. Algunos se desarrollan más rápidamente, otros necesitan más tiempo.

También existen **estilos de aprendizaje** variados, por ejemplo:

- *Aprendedores visuales:* Aprenden mejor con la ayuda de gráficos, dibujos, diagramas; o resaltando datos importantes con diferentes colores; etc.

- *Aprendedores auditivos o relacionales:* Aprenden mejor cuando alguien les explica las cosas individualmente, o cuando pueden dialogar con un educador o con otros alumnos.

- *Aprendedores cinestéticos:* Aprenden mejor mediante el movimiento físico, tocando y manipulando objetos, experimentando. Esos niños a menudo se caracterizan por estar moviéndose todo el tiempo mientras uno les habla. Eso no significa que no estén atentos, al contrario: Necesitan el movimiento para poder prestar atención. (La prueba está en que podrán repetir lo que uno les dijo.)

Asimismo existen diferencias en la manera como los niños *procesan* las informaciones o tareas:

- *Aprendedores secuenciales:* Necesitan hacer las cosas en su orden, uno por uno, empezando con el primero y terminando con el último. Se confunden cuando uno los interrumpe en su actividad.

- *Aprendedores aleatorios:* Hacen las cosas en cualquier orden: pueden p.ej. comenzar en el medio, saltar al final, después hacer lo del principio. Pueden hacer varias cosas a la vez.

Para tomar en consideración estas diferencias individuales, el aprendizaje activo de la matemática es **individualizado**. No sigue un currículo o cronograma normado; no obliga a los niños a hacer todos lo mismo, ni de la misma manera. Les **permite avanzar a cada uno a su propio paso.**

En una escuela alternativa, el avance individualizado no impide que se formen grupos de niños que trabajen juntos. Pero esos grupos no se forman artificialmente según la edad cronológica o el "grado" de los niños. Se forman de manera espontánea y natural por el hecho de que varios niños decidan trabajar juntos con el mismo material, o investigar y hacer preguntas acerca de los mismos temas. En cuanto al nivel de conocimientos, estos grupos pueden ser homogéneos (niños del mismo nivel que aprenden juntos los mismos conceptos) o también heterogéneos (niños de distintos niveles, donde los más avanzados ayudan y enseñan a los menos avanzados).

Los niños tienen también necesidad de **experiencias emocionales positivas**. Su aprendizaje es mucho más eficaz cuando se sienten aceptados y valorados, y cuando pueden ocuparse en temas y actividades que llaman su atención y les interesan personalmente.[3)]

Esta es una razón más por permitir que los niños elijan entre diversas alternativas en cuanto a los temas, materiales y actividades de aprendizaje.

Este aspecto influencia también la manera de evaluar los progresos de los niños. La forma tradicional de evaluar a los niños mediante exámenes normados y notas, es contraproducente para la mayoría de los niños: Los incentiva a hacerse la competencia todos contra todos, en vez de ayudarse mutuamente; desanima a los que no alcanzan una nota buena; y produce un orgullo malsano en los pocos que alcanzan buenas notas. En vez de comparar a los niños entre

---

1) Vea Nota 1 en el Anexo B.

* *Pablo a los colosenses, 3:21*

2) Vea Nota 2 en el Anexo B.

3) Vea Nota 3 en el Anexo B.

sí, una buena evaluación compara al niño consigo mismo y lo anima a seguir adelante. El ***"Camino de aprendizaje"*** (vea p. 22) presenta una alternativa de evaluación individualizada.

El sistema tradicional enfatiza sobre todo la ***cantidad*** de las horas académicas y de las tareas que los alumnos cumplen. Una educación alternativa, en cambio, enfatiza la ***calidad*** de sus experiencias de aprendizaje. Ha sido mi propia experiencia, y la de muchos educadores alternativos, que los niños pueden aprender mucho más, con mucho menos horas académicas, esfuerzo y estrés, cuando se les permite aprender de acuerdo a sus necesidades, sus intereses, y su nivel de desarrollo natural. La matemática activa tiene mucho menos necesidad de ejercicios rutinarios y repetitivos con lápiz y papel, pero es más eficaz.

3. Aprender matemática **basada en principios.**

*"El Señor fundó la tierra con sabiduría; afirmó los cielos con inteligencia."**

El sistema tradicional se enfoca mayormente en los *procedimientos*, o sea en el "cómo" se hace: "Este número se escribe aquí, este se suma con este, y este se escribe aquí ..." Los alumnos reproducen los procedimientos de manera mecánica. Desde el punto de vista de la matemática profesional, eso no es matemática propiamente dicho; es solamente una "técnica para calcular".

El sistema tradicional enfatiza también la memorización de propiedades matemáticas, como "trozos de conocimiento" desconectados entre sí. Eso tampoco es matemática en su sentido propio, y no ayuda al entendimiento.4)

La matemática verdadera se enfoca en el **"por qué"** de las propiedades matemáticas. Como dijo el matemático Paul Lockhart: **"La matemática es el arte de explicar."** Mientras el sistema tradicional hace memorizar a los alumnos que "los números divisibles entre 5 terminan con 0 ó con 5", la matemática activa les permite descubrir esta propiedad por observación propia; y después se interesa en saber ***por qué*** eso es así, y cómo se relaciona esta propiedad con otras reglas de divisibilidad, y qué otras aplicaciones tiene el principio que está detrás de esa propiedad.

Toda la gran variedad de propiedades matemáticas se puede deducir desde relativamente pocos principios fundamentales. Una vez que un alumno entiende estos principios y se ha acostumbrado a razonar, puede construir desde allí una gran parte de la matemática por sí mismo. Por ejemplo, si ha entendido los principios de las cuatro operaciones básicas, ya tiene las herramientas necesarias para descubrir por sí mismo las reglas de divisibilidad, las operaciones con fracciones, etc. (Algunos de estos principios básicos son por ejemplo: El significado de la suma y de la multiplicación; las leyes conmutativa, asociativa y distributiva; el principio de la operación inversa; y algunos otros.)

En eso, la matemática es distinta de todas las otras ciencias o campos del saber: En geografía o en historia, por ejemplo, dependemos de fuentes de información: Libros, profesores, viajeros ... Si vivo lejos de México y quiero saber cuáles son los principales ríos de México, no tengo posibilidad de saberlo sin que alguien me lo diga, o sin que lo pueda leer en un libro o en una página de internet. Pero las verdades de la matemática son absolutas, universales, y accesibles a todo ser humano tan solo por medio de su razonamiento. Lo único que se requiere es entender los principios fundamentales, y saber aplicarlos de manera lógica y consecuente.

Por tanto, la matemática activa entrena a los alumnos a razonar desde los principios. Muchas distintas propiedades matemáticas están relacionadas entre sí por los mismos principios básicos. Por eso, un alumno que entiende los principios, entenderá también el ***por qué*** de las propiedades matemáticas, y ya no tendrá necesidad de memorizarlas una por una. También entenderá el ***por qué*** de los procedimientos, y esos procedimientos adquieren sentido para él, y entonces serán mucho más fáciles de aprender.

La matemática activa invierte entonces mucho más tiempo en actividades que ayudan a entender los *principios,* y no se apresura en enseñar procedimientos mecánicos. Así tal vez los alumnos aprenderán los procedimientos más tarde que los alumnos del sistema tradicional; pero los aprenderán *con entendimiento*, y así tendrán una ventaja más adelante cuando la matemática se vuelve más compleja. Un educador de matemática activa no se impresionará mucho de un niño de seis años que ya sabe sumar números de siete cifras; le preguntará: "¿Realmente entiendes lo que haces?" Se impresionará mucho más de un niño de nueve años que es capaz de explicarle *por qué* la suma vertical funciona de la manera como funciona.

Principios, procedimientos y convenciones

La matemática escolar convencional no distingue entre principios (o leyes), procedimientos, y convenciones. Le da al alumno la impresión de que todas estas partes sean igual de importantes e igual de "absolutos". En realidad, eso no es así.

Los ***principios*** o ***leyes*** son absolutos y no se pueden cambiar. No surgen del antojo de algún matemático o profesor: son la esencia misma de la matemática. Aun si un matemático "inventa" algún nuevo objeto matemático, descubrirá después que ese objeto obedece a leyes lógicas que él, el matemático, no puede definir como quiere; solamente puede *descubrirlas*. Así se inventaron por ejemplo los números negativos; los números complejos; los conjuntos; etc. Pero apenas inventados estos objetos, los matemáticos descubrieron que su comportamiento se rige según unas leyes fijas que "siempre habían estado allí".

Por eso, el entendimiento de los principios y leyes *empodera al alumno a "hacer matemática" por sí mismo*, sin depender del dictado de un profesor.

Los ***procedimientos*** son maneras prácticas de realizar ciertas operaciones, aplicando los principios. *¡No existe un "único procedimiento correcto" para realizar una operación dada!* – Por ejemplo, la multiplicación 6 x 14 podría resolverse de una de las siguientes maneras:

"Lo multiplico cifra por cifra, tal como lo he aprendido en la escuela."

* *Proverbios de Salomón, 3:19*

4) Vea Nota 4 en el Anexo B.

"Sé que 6 x 10 es 60, ahora tengo que aumentar todavía 4 veces el 6:

60 + 6 + 6 + 6 + 6 = 84."

"Multiplico por separado: 6 x 10 = 60, 6 x 4 = 24, ahora sumo: 60 + 24 = 84."

"6 por 10 es 60, la mitad de 60 es 30, 60 + 30 = 90, resto 6: 90 – 6 = 84."
(Sí, este procedimiento tiene un fundamento lógico. Si 6 x 10 = 60, entonces la mitad de 60 es 6 x 5. Sumando ambos, resulta 6 x 15, y si a eso restamos 6, obtenemos 6 x 14.)

"14 + 14 + 14 = 42, eso es 14 x 3, entonces el doble de eso será 14 x 6: 42 + 42 = 84."

No obliguemos entonces a los alumnos a seguir procedimientos determinados. Un alumno puede encontrar un procedimiento alternativo que para él es más práctico que el "escolar". *Todo procedimiento es válido, mientras obedece a los principios y leyes de la matemática.*

Por último, en la matemática existen ***convenciones***, o sea *acuerdos comunes entre los matemáticos.* Estos afectan sobre todo ***las definiciones, las notaciones y los símbolos.*** Por ejemplo, cuando vemos escrito "3 x 2", sabemos que esto significa la multiplicación de tres por dos. Sabemos que la misma multiplicación podría escribirse también así: "3 · 2". Alguna vez los matemáticos tuvieron que ponerse de acuerdo para usar el símbolo 3 para el número tres, el símbolo 2 para el número dos, y el símbolo x (o el punto ·) para la operación de la multiplicación. No hay nada en la matemática misma que nos obligaría a usar exactamente estos símbolos. Podríamos ponernos de acuerdo para que de aquí en adelante, ⊥ significa dos, Δ significa tres, y ∟ significa multiplicar. Entonces nuestra multiplicación se escribiría así: "Δ ∟ ⊥".
Los símbolos y las notaciones no son principios matemáticos, y por tanto no son absolutos. Fueron inventados arbitrariamente, y en algún momento en la historia fueron establecidos como "normativos" mediante acuerdos entre los matemáticos, o por costumbre general. Estas notaciones cumplen entonces el mismo rol como las reglas de ortografía y gramática en el lenguaje: establecen la forma generalmente aceptada de *comunicar* la matemática. Entonces, es bueno conocer estas notaciones y usarlas correctamente para poder entender libros matemáticos, y para comunicar con otras personas acerca de la matemática. Pero las notaciones no son "la matemática en sí"; son solamente medios para expresarla.

Algo similar aplica a las ***definiciones***. Al hablar de matemática, usamos términos técnicos como "número entero", "número primo", "ángulo recto", etc. Con las definiciones aseguramos que todos entendemos lo mismo cuando usamos estas palabras. Las definiciones entonces no expresan verdades matemáticas; expresan acuerdos o convenciones de *cómo usar las palabras*.
Para aclarar la diferencia, daremos un ejemplo de una verdad matemática: "Si sumo cero a un número, el número no cambia." (Por ejemplo 7 + 0 = 7.) Esta verdad expresa una propiedad del número cero que es absoluta: vale en todas las circunstancias y por todos los tiempos.
Ahora un ejemplo de una definición: "Los números naturales son los números enteros positivos." Esta definición excluye, por ejemplo, el cero; entonces es correcto decir: "El cero no es un número natural." Pero eso no es una verdad matemática en el sentido estricto; es una *convención*. Esto significa que la definición podría cambiarse, si los matemáticos más influenciales del mundo se pusieran de acuerdo. Por ejemplo, podrían ponerse de acuerdo en incluir al cero entre los números naturales. Pero este cambio no alteraría las propiedades matemáticas del número cero. Seguiría cierto que un número más cero da el mismo número.
Entonces, en vez de decir: "El cero no es un número natural", podríamos decir más exactamente: "Los matemáticos decidieron no incluir el cero entre los números naturales". – Por el otro lado, no tendría sentido decir: "Los matemáticos decidieron que un número más cero da el mismo número." Eso no está en el poder de los matemáticos decidirlo. Ellos pueden cambiar definiciones; pero no pueden cambiar verdades matemáticas (principios, leyes).

Mantengamos clara la distinción entre principios, procedimientos y convenciones.

4. Aprender matemática por investigación propia.

> *"Gloria de Dios es encubrir un asunto; pero honra del rey es investigarlo."**

Hemos visto que la matemática entera se basa en relativamente pocos principios fundamentales, y en el razonamiento lógico. O sea, teoréticamente sería posible que un alumno reconstruya toda la matemática desde esos principios fundamentales, sin la ayuda de algún profesor o libro.

En la práctica eso es improbable porque le faltaría tiempo. Por eso siempre habrá necesidad de adelantarnos al razonamiento propio del alumno, demostrándole alguna propiedad matemática que él todavía no conoce. Pero queremos también, tantas veces como sea posible, darle la oportunidad de descubrir cosas nuevas por investigación propia. Queremos mostrar a los niños que la matemática no es una propiedad exclusiva de los profesores o de los libros de texto; es algo que ellos mismos pueden manejar. Queremos animar y empoderar a los niños para que hagan sus propias investigaciones. Por eso, este libro contiene preguntas de investigación. Algunas de estas preguntas no tienen simplemente "una respuesta correcta", sino que animan a explorar un nuevo y desconocido campo de la matemática.

Al inicio, esas investigaciones consistirán en simples observaciones acerca del "comportamiento de los números"; por ejemplo: "Tengo una suma. ¿Qué sucede con el resultado cuando cambio este número por un número mayor? – ¿Y qué sucede si hago lo mismo con una resta?" – En el transcurso de la primaria, poco a poco las tareas de investigación cobrarán más peso; y en el nivel de secundaria serán una herramienta indispensable para entrenar el pensamiento matemático y para fomentar un aprendizaje más profundo y duradero de las leyes matemáticas.

* *Proverbios de Salomón, 25:2*

Desarrollo del pensamiento matemático en los niños

El psicólogo Jean Piaget, quien investigó mucho acerca del desarrollo mental de los niños, distinguió tres clases básicas de razonamiento que se desarrollan en distintas etapas de la vida: el pensamiento intuitivo, el pensamiento concreto, y el pensamiento abstracto. A grandes rasgos, estas formas de pensar corresponden a la etapa preescolar, la etapa de la primaria, y la etapa de la secundaria, respectivamente.

El **pensamiento intuitivo** es la forma de pensar de un niño pequeño que prácticamente no razona. Para él, las cosas son como a él le parecen, intuitivamente. No saca conclusiones lógicas. Por ejemplo, un niño en esa etapa, cuando ve a un niño vecino con un pantalón igual a uno de los suyos, puede decir: "Mami, ese niño se ha puesto mi pantalón." O cuando ve en un libro un dibujo de un niño echado sobre una nube, pensará que de verdad uno puede echarse sobre una nube.

El **pensamiento concreto** es la primera forma de llegar a conclusiones lógicas: se basa en la manipulación de objetos concretos. El razonamiento del niño se desarrolla mientras arma bloques de madera, corta y pega papel, ordena piedras según su tamaño, etc. Pero los niños en esta etapa todavía no pueden razonar de manera consistente mientras no pueden hacer experiencias prácticas con objetos concretos relacionados con el problema, o si por lo menos han hecho tales experiencias en el pasado.

La mayoría de los niños entran a esta **"etapa de las operaciones concretas"** aproximadamente entre los 7 y los 8 años de edad. Pero tengamos presente que existen grandes diferencias individuales entre los niños: algunos niños alcanzan esta etapa a una edad mucho más temprana que otros.

El **pensamiento abstracto** comienza a desarrollarse recién en la adolescencia, en la mayoría de los niños. Es la capacidad de imaginarse unos procesos solamente en su mente, sin haber hecho alguna experiencia concreta. También la manipulación de símbolos abstractos sin relación con ningún objeto concreto (como por ejemplo en el álgebra) requiere la capacidad de pensar de manera abstracta.

Consecuencias de las distintas etapas en el pensamiento infantil

Es importante entender que el desarrollo de estas capacidades de razonamiento es un proceso *natural* que no se puede acelerar artificialmente. Aunque es posible que un ambiente emocionalmente positivo y con oportunidades para experiencias variadas beneficie el desarrollo de estas capacidades, gran parte de este proceso es controlado genéticamente. En particular, no se puede acelerar con un adiestramiento específico en "razonamiento". Es al contrario: Podemos incentivar al niño a razonar, *una vez que las estructuras correspondientes del cerebro se han desarrollado*.

Entonces, si queremos enseñar a los niños la matemática de acuerdo a su desarrollo natural, en primer lugar debemos saber *esperar el tiempo apropiado*. No hacemos ningún beneficio al niño si lo llenamos de conocimientos que todavía no puede procesar. Es lo mismo como si quisiéramos a la fuerza enseñar a un bebé de tres meses que camine. El bebé no puede pararse porque su cuerpo todavía no tiene la fuerza necesaria. Entonces, si lo obligamos a hacerlo, dañamos su cuerpo. De la misma manera se daña su cerebro cuando lo obligamos a realizar procesos demasiado avanzados.

Para los niños, las clases formales no son beneficiosas antes de que hayan entrado a la etapa de las operaciones concretas. Eso significa que debemos esperar con las actividades del nivel de primaria, hasta que los niños muestren señales de que se ha desarrollado su capacidad de procesar operaciones concretas. En particular, no podemos esperar de los niños que aprendan a manejar símbolos abstractos (por ejemplo los números) antes de entrar a la etapa operacional.

Aun durante los primeros años de primaria, los niños aprenden todavía muchas cosas de manera *informal*: mediante sus quehaceres diarios y su actividad física, mediante la exploración de su medio ambiente, mediante las preguntas que hacen, y mediante el juego.

El cerebro no existe de manera aislada; es una parte del cuerpo y está unido a él. Por eso, el cerebro necesita la actividad del cuerpo entero para poder desarrollarse. Las actividades manuales, el ejercicio físico, aun las impresiones sensoriales y emocionales – todo eso contribuye al desarrollo del cerebro.[5)]

No pensemos entonces que los niños aprenden bien cuando están sentados de manera inmóvil y el cerebro es la única parte activa de su cuerpo. Es al revés: Los niños pequeños aprenden casi todo mediante la actividad de sus manos, los movimientos de su cuerpo entero, tocando y manipulando objetos, etc. Eso es particularmente importante en la etapa preescolar, pero sigue siendo importante también durante la primaria. Entonces, no sometamos a los niños a la inmovilidad; eso estropea su desarrollo.

5) Vea Nota 5 en el Anexo B.

¿Está el niño listo para este nivel?

Actualmente, en la mayoría de los países, los niños entran a la escuela a los seis años o aun antes. Por eso existe la idea de que la "edad preescolar" termina a los cinco o al máximo a los seis años de edad. Pero en muchos niños, las características "preescolares" (o algunas de ellas) pueden persistir hasta los siete o aun ocho años de edad. No pensemos entonces que cada niño a sus seis años necesariamente tenga que pasar al "nivel de primaria". Puede que siga necesitando todavía por un buen rato el ambiente propio de la etapa preescolar.

Entonces, no nos impacientemos "que mi niño ya entre a este nivel, que ya haga cosas de primaria". Eso le beneficiará solamente si su cerebro ya tiene la madurez suficiente. – Por el otro lado, si un niño por sí mismo empieza a leer, escribir y calcular, y lo hace alegremente y sin estrés, entonces tampoco hay que frenarlo. Si eso corresponde a su interés y a su nivel de desarrollo, ¡que siga adelante!

Jean Piaget desarrolló diversos experimentos que permiten tener una idea aproximada, de si un niño ya está entrando a la etapa de las operaciones concretas. Estos experimentos evalúan el entendimiento de ciertos conceptos que suelen desarrollarse al inicio de esta etapa:

La conservación del número
Se refiere al hecho de que una cantidad determinada de objetos sigue siendo la misma cantidad, aun si se arreglan de una forma distinta.
Por ejemplo, se colocan dos filas paralelas de 8 tarjetitas sobre la mesa, contándolas junto con el niño. Si las dos filas tienen la misma longitud, los niños no dudarán en decir que ambas contienen la misma cantidad de cartas. Enseguida acercamos las cartas de una fila un poco más las unas a las otras, y la otra fila estiramos, alargando un poco los espacios entre las cartas. Preguntamos al niño si las dos filas siguen conteniendo la misma cantidad de cartas, o si ahora en una de las filas hay más cartas que en la otra. Los niños en la etapa intuitiva responderán que en la fila más larga hay más cartas. Solamente al entrar a la etapa operacional entenderán que el número de cartas sigue igual en ambas filas.
Se puede hacer un experimento similar con monedas: Se forman dos pilas iguales de 8 a 10 monedas (contándolas junto con el niño). Después se estira una de las pilas en una fila sobre la mesa, y se pregunta si el número de monedas es igual en la pila como en la fila estirada.

La conservación de la masa
Se refiere al hecho de que una cantidad de cualquier material, mientras no se aumenta ni se quita nada, no altera su masa, aunque cambie su forma.
Podemos formar dos bolas de plastilina o de arcilla de igual tamaño. Se puede hacerlo junto con el niño, hasta que el niño afirma que ambas bolas contienen la misma cantidad de plastilina o arcilla. Después aplanamos una de las bolas y preguntamos si la cantidad de plastilina sigue igual en ambas. Nuevamente, un niño que está todavía en la etapa intuitiva, probablemente responderá que una de las dos bolas contienen más plastilina que la otra; mientras un niño en la etapa operativa entenderá que las cantidades siguen iguales.
Para otro experimento similar necesitamos dos vasos transparentes iguales, angostos, y otro vaso transparente más ancho. Echamos agua en los dos vasos angostos hasta la misma altura y preguntamos si la cantidad de agua en los dos vasos es igual. Después echamos el agua de uno de los vasos al vaso más ancho, y preguntamos si sigue habiendo la misma cantidad de agua en el vaso ancho como en el angosto. Los niños en la etapa intuitiva pensarán que en el vaso ancho hay menos agua porque sube menos alto.

La seriación
La seriación es el orden sucesivo de varios objetos, por ejemplo según su tamaño. Matemáticamente, eso corresponde a la ley de la transitividad. (Si $A<B$ y $B<C$, entonces $A<C$.)
Los niños en la etapa intuitiva normalmente pueden comparar solamente dos objetos a la vez entre sí, pero no varios. Podemos evaluar la capacidad de la seriación con los siguientes experimentos:
Alistamos tres tiras de papel de diferentes colores y de ligeramente diferentes longitudes. Mostramos al niño las dos más cortas de ellas, mientras mantenemos la más larga escondida, y preguntamos cuál de ellas es más larga. Digamos, la roja es más larga que la amarilla. Entonces escondemos la tira amarilla y mostramos la más larga (digamos que es azul), y preguntamos nuevamente: ¿Cuál de ellas es más larga? – Tenemos entonces una tira roja más larga que la amarilla, y una tira azul más larga que la roja. Mientras seguimos teniendo escondida la tira amarilla, preguntamos: ¿Y cuál es más larga, la azul o la amarilla? – Los niños en la etapa intuitiva dificultarán en sacar la conclusión correctamente.
Como alternativa, podemos alistar varias tiras de papel (por lo menos cinco) de longitudes ligeramente diferentes. La diferencia debe ser tal que se nota claramente al poner dos tiras lado a lado, pero que no se nota a simple vista cuando las tiras están sobre la mesa en cualquier orden. Le damos al niño las tiras en desorden y le pedimos ordenarlas sobre la mesa, de menor a mayor. Esta tarea también requiere que el cerebro del niño ya tenga la madurez necesaria para procesar operaciones concretas.

La reversibilidad de una operación

Se refiere a la capacidad de observar o llevar a cabo un proceso, y después imaginarse este mismo proceso ocurriendo al revés. Esta es otra capacidad esencial para poder sacar conclusiones lógicas y correctas a partir de operaciones concretas.

Un experimento para evaluar esta capacidad es el siguiente: Necesitamos tres canicas de colores distintos, y un tubo corto y delgado, de un diámetro apropiado para que las canicas puedan pasar por él. Tapamos un extremo del tubo con la mano y hacemos entrar las tres canicas por el otro extremo. El niño debe poder ver bien el orden en que entran las canicas. Si es necesario, enfatizamos el orden: "Mira, pongo primero la canica azul, ahora la amarilla, y ahora la negra." O podemos dejar que el niño mismo ponga las canicas. Entonces preguntamos: "Si suelto mi mano aquí abajo, ¿cuál canica va a salir primero?" O también: "¿En qué orden saldrán las canicas?" – Después de que el niño haya respondido, soltamos cuidadosamente la mano para dejar salir las canicas una por una, para verificar la respuesta.

A continuación ponemos las canicas nuevamente en el tubo como la primera vez; pero esta vez tapamos también el extremo por donde entraron las canicas, e inclinamos el tubo de manera que ese extremo quede abajo. Eso es ahora la "operación inversa". Preguntamos nuevamente al niño: "Si ahora dejo salir las canicas por este lado donde entraron, ¿cuál canica va a salir primero?" O: "¿En qué orden saldrán las canicas?" – Los niños que están todavía en la etapa intuitiva, dificultarán en predecir el orden inverso sin poder ver las canicas.

Los experimentos de Piaget no son pruebas de rendimiento.

En este punto es importante distinguir entre *la maduración natural del cerebro* por un lado, y *los aprendizajes adquiridos* por el otro lado. La maduración del cerebro no es un resultado de los aprendizajes. Al contrario, es un *prerrequisito* para poder realizar aprendizajes.6)

Los experimentos de Piaget no miden aprendizajes adquiridos; miden la madurez del cerebro. No son "pruebas de rendimiento". O sea, no son "exámenes" para los cuales un niño tuviera que "prepararse". Son mas bien comparables con un diagnóstico médico, el cual evalúa simplemente el estado actual de salud. Intentar "preparar" a un niño para una evaluación piagetiana, sería tan insensato como querer "prepararlo" para un examen médico (por ejemplo haciendo que su temperatura sea más baja, o su pulso más rápido). Eso solamente distorsionaría el diagnóstico y causaría que el médico aplique un tratamiento inadecuado.

De la misma manera, no se puede "enseñar" a un niño las "respuestas correctas" a los experimentos de Piaget. Eso solamente causaría que el educador o psicólogo sugiera la aplicación de métodos educativos inadecuados para el niño. –Además, si un niño no ha alcanzado todavía la etapa de madurez correspondiente, las "respuestas correctas" le parecerán ilógicas y sin sentido, así que esto no avanzaría de ninguna manera su comprensión. El propósito de la evaluación piagetiana consiste en que el niño dé aquellas respuestas *que tienen sentido para él,* por más que sean equivocadas desde un punto de vista objetivo.

En otras palabras, una evaluación según Piaget nos permite saber aproximadamente *qué aprendizajes serán posibles* para el niño, y por cuál camino, de acuerdo a las capacidades mentales que actualmente tiene desarrollado. Estas capacidades se desarrollan de manera natural, e independientemente de si el niño recibe "clases" o no, asiste a una escuela o no.

Estos experimentos no lo son todo.

En realidad, un buen educador no tendrá mucha necesidad de los experimentos de Piaget para evaluar la madurez mental de un niño. Si usted tiene una relación cercana con sus niños y pasa bastante tiempo a su lado en sus actividades diarias, entonces ya tendrá una idea aproximada de su nivel de madurez. Son dos aspectos sobre todo que nos dan una impresión bastante clara:

Las reacciones del niño. Sus preguntas y sus respuestas, su manera de hacer decisiones y de resolver situaciones de la vida diaria, todo eso nos permite ver a qué nivel está razonando. También podemos fijarnos en las situaciones y tareas que le causan estrés: Si una tarea es estresante para el niño, muy probablemente es demasiado exigente para su nivel actual.

Las actividades que el niño elige por sí mismo. Cuando los niños tienen libertad de elegir entre diversas actividades, normalmente escogen algo que es de acuerdo a su nivel actual de madurez. Si fuera algo demasiado fácil, les parecería aburrido; y si fuera demasiado difícil, dirán: "No entiendo eso." – Así sucede, por lo menos, en niños que han podido desarrollarse de manera saludable. En alumnos del sistema escolar tradicional eso ya no es un criterio seguro, porque ellos fueron entrenados a "elegir" lo que piensan que es de acuerdo a las exigencias del profesor. Ellos necesitarán un tiempo de "desintoxicación" para volver a encontrar su equilibrio natural y para poder apreciar sus capacidades de manera realista.

6) Vea Nota 6 en el Anexo B.

La matemática al nivel de primaria (I)

Al inicio de la primaria todavía es importante el desarrollo de conceptos básicos como el orden, el clasificar y relacionar, la orientación en el espacio, y similares, que no necesariamente están relacionados con números o con matemática formal. También empieza a cobrar importancia el desarrollo del razonamiento estratégico, el cual se manifiesta sobre todo al jugar juegos de estrategia como damas, nim, molino, etc. Es esta capacidad que permitirá más adelante al alumno analizar problemas, enumerar combinaciones y posibilidades, y descubrir caminos variados hacia una solución. Por eso, los juegos de estrategia son importantes para el desarrollo del pensamiento matemático.[7)]

En cuanto a los números, el nivel de Primaria I se centra en **operaciones sencillas con números pequeños que pueden representarse mediante objetos concretos.** Es mediante estas operaciones que el niño experimenta y comprende los principios que gobiernan las cuatro operaciones básicas de la aritmética (suma, resta, multiplicación y división). Vale la pena detenerse por suficiente tiempo en estas operaciones sencillas con material concreto, porque es allí donde se construye el entendimiento de los principios fundamentales que facilitarán más tarde la comprensión de operaciones más complejas y más abstractas, por ejemplo con números grandes. Si se avanza demasiado rápidamente hacia esas operaciones abstractas, los niños se encontrarán bajo una fuerte presión de rendir algo que todavía no pueden entender. En consecuencia, realizarán esas operaciones mecánicamente sin entenderlas, y aparentarán tener conocimientos que en realidad todavía no tienen. En el peor caso, eso puede bloquear el acceso de los niños a la matemática por todo el resto de su trayectoria escolar; y se quedarán de por vida con la idea de que "la matemática no se puede entender".

Por esta razón, el nivel de Primaria I todavía no introduce conceptos y procedimientos demasiado abstractos. El sistema escolar convencional, sobre todo en las Américas, sobrecarga a los niños pequeños con procedimientos abstractos y así los confunde en vez de hacerles entender. ¡No caigamos en este mismo error!

En particular, los siguientes conceptos tendrán que esperar hasta el nivel de Primaria II, o sea, hasta que los niños tengan por lo menos nueve años en la mayoría de los casos:

Sumas "llevando" y restas "prestando", cifra por cifra. – Este procedimiento desmiembra los números en cifras aisladas que se tratan como si no tuvieran ningún valor posicional, y así el niño pierde el vínculo concreto con los números. Para entender por qué funciona este procedimiento, como mínimo se necesita primero un buen entendimiento del sistema decimal; y eso a su vez presupone el entendimiento de la multiplicación, más allá de la simple tabla de multiplicar. De un niño promedio de ocho años no se puede esperar eso. Si este procedimiento se introduce a una edad demasiado temprana, los niños pierden de la vista el significado de los números, y eso impide que desarrollen su sentido numérico. – Lo mismo aplica a la multiplicación y división de números grandes por escrito.

Operaciones con fracciones. – Los niños de los grados inferiores pueden entender fracciones sencillas que encuentran en contextos concretos, como por ejemplo en una receta de cocina: "media taza de harina", "un cuarto de litro de leche", etc. Pero por lo general no pueden todavía entender operaciones como la suma de fracciones o su multiplicación, porque las fracciones no se pueden "contar" por objetos como los números enteros, y por tanto un niño de este nivel todavía no puede percibirlas como "números".[8)]

Ecuaciones y expresiones algebraicas. – Este tema corresponde al pensamiento abstracto, y por tanto no debería introducirse hasta que los alumnos hayan alcanzado la madurez necesaria para el nivel de secundaria. Es también un tema que está alejado de la vida diaria: las actividades cotidianas normales no requieren resolver ecuaciones ni usar álgebra. Es en contra de una buena pedagogía, exigir tales operaciones de los niños de primaria; peor todavía en los grados inferiores.

A padres y profesores acostumbrados al sistema convencional les puede parecer extraño, "demorar" tanto a los niños. Pero no los estamos haciendo demorar; simplemente respetamos el desarrollo natural de su cerebro. Tomamos el tiempo de fortalecer las conexiones que corresponden a su desarrollo *actual e inmediato*, y no intentamos anticipar lo que corresponde a un desarrollo *posterior*. Así colocamos un fundamento firme de experiencias concretas y de principios; y es precisamente este fundamento que garantiza un mejor desarrollo en el futuro. Así aprenden los niños sin presiones y sin estrés innecesario.

Puede ser difícil defender este método en un entorno donde todo el mundo intenta "acelerar" a sus hijos. Yo mismo he experimentado como mis hijos fueron considerados un poco "atrasados" durante sus años de primaria, porque se ocupaban con conceptos matemáticos más sencillos que los niños escolares de su edad. Pero a partir de los trece años, cuando despertó su razonamiento abstracto, su aprendizaje comenzó a despegar, y desde allí cubrieron en cada año los temas matemáticos de dos años escolares. Muchas otras familias que aplicaron métodos de aprendizaje natural y de acuerdo al desarrollo del niño, hicieron experiencias similares. Entre tanto, sus amigos de su misma edad en el sistema convencional se estancaban, porque sus cerebros ya estaban agotados y no podían asimilar más.

Entonces, la paciencia que invertimos ahora al esperar que nuestros niños maduren, trae sus beneficios más adelante. No solamente serán nuestros niños más felices y menos estresados; también tendrán ventajas académicas más adelante.

7) Vea Nota 7 en el Anexo B.

8) Vea Nota 8 en el Anexo B.

No usamos un currículo fijo según edades cronológicas.

Tengamos presente que nada de lo dicho debe interpretarse a la manera de un currículo fijo por edades. Por ejemplo, el hecho de que el álgebra corresponde al nivel de la secundaria, no implica que "ningún niño menor a doce años deba hacer álgebra". Quizás encontramos a un niño de diez años que ya está avanzado en su madurez mental hasta un nivel donde puede efectivamente comprender los principios matemáticos que rigen las ecuaciones, y puede aplicar estos principios entendiendo lo que hace, y sin que eso le cause estrés. Entonces no vamos a impedir que ese niño haga álgebra. Pero en este caso, ese niño ya no es un alumno de primaria. En cuanto al aprendizaje de la matemática, a pesar de su corta edad habrá que tratarlo como a un alumno de secundaria. Y eso no implica que los otros niños de diez años también tengan que hacer álgebra.

Por el otro lado, si un niño de ocho años todavía no llega a comprender las sumas de los números hasta diez, tampoco lo obligaremos a hacer lo que hacen los otros niños de ocho años. Le permitiremos trabajar a su propio nivel; que tome el tiempo que necesita para comprender las sumas hasta diez, y después avance desde allí. No lo hacemos "repetir el grado"; pero le permitimos tomar el tiempo que necesita para completar el "primer grado". Eso es algo fundamentalmente diferente: El sistema convencional clasifica a los niños por grados y los hace repetir el grado cuando no alcanzan las metas. Eso se basa en la idea de que todos los niños de ocho años tengan que alcanzar las mismas metas, y si un niño no las alcanza, ha "fracasado". – Una educación basada en el desarrollo del niño, en cambio, está consciente de que no todos los niños de ocho años tienen la misma madurez mental. Algunos de ellos reciben su mayor beneficio cuando resuelven tareas de segundo grado (según el currículo oficial), otros cuando resuelven tareas de tercer grado, y otros cuando resuelven tareas de primer grado. Mientras cada uno de ellos avanza y está con buen ánimo, ninguno de ellos ha "fracasado". Por eso, la evaluación según el ***"Camino de aprendizaje"*** no considera grados ni edades; solamente considera el progreso individual de cada niño.

Algunas otras características de los niños de primaria

- Su perseverancia crece, pero todavía necesita ser incentivada.

En los primeros años de la primaria, los niños todavía tienen pocas fuerzas, y su tolerancia a las frustraciones es baja, aunque aumenta poco a poco. Esta es la etapa de aprender perseverancia. Por un lado, los niños necesitan ser animados a terminar lo que comienzan. Por el otro lado, debemos cuidar de no sobrecargar a los niños (ni que ellos mismos se sobrecarguen) con tareas que están todavía más allá de sus posibilidades; porque con eso se desanimarán y se acostumbrarán a rendirse.

En la matemática, la perseverancia es más importante que la rapidez. El matemático Keith Devlin, de la universidad de Stanford, dice:

> "Nosotros los matemáticos profesionales nos desesperamos por los sistemas escolares que imponen estrechos límites de tiempo sobre los exámenes de matemática, y obligan a trabajar rápidamente. ***La verdadera matemática requiere tiempo.*** "

Los concursos de decir la respuesta correcta "rápidamente", quizás incentivan la memoria, pero no incentivan el pensamiento matemático. Pensar matemáticamente implica reflexionar profundamente acerca de un problema novedoso, e intentar diversas maneras de solucionarlo, hasta encontrar una que funcione. Los matemáticos profesionales no resuelven problemas al estilo de los libros escolares. Ellos reflexionan por meses, quizás años, sobre problemas novedosos que para su solución requieren fórmulas y métodos que todavía nadie descubrió. Esto significa perseverar, y aguantar tiempos de frustración. Es importante que los niños aprendan perseverancia. Los problemas de investigación pueden contribuir a este fin.

- Empiezan a identificarse con un grupo.

Poco a poco crece su capacidad y su deseo de participar en actividades grupales, juegos en equipo, etc. Esta es una buena etapa para incentivar la solidaridad y colaboración entre los niños.

Para la matemática, esto significa fomentar en primer lugar la colaboración mutua, no la competencia de todos contra todos. No se trata de "quien es el mejor", sino de ayudarnos mutuamente para que cada uno aprenda algo. Los problemas de investigación pueden servir para eso también, cuando se resuelven en grupos de varios niños. En los grados inferiores todavía puede ser necesaria la presencia de un adulto en los grupos. – Otra forma de trabajo en equipo se practica con aquellas actividades donde un niño propone tareas o problemas para que otro(s) niño(s) los resuelva(n), y después se intercambian los papeles. – También se pueden de vez en cuando jugar juegos competitivos entre equipos, enfatizando más la colaboración en el equipo que la competencia o el "ganar".

Juegos de competencia individual (como damas o molino) pueden presentarse también bajo el aspecto del "entrenamiento en equipo", para no sobreenfatizar el aspecto de "ganar" o "perder". Que los niños aprendan a actuar con integridad, sea ganando o sea perdiendo, y a sobrellevar la frustración al perder.

Por el otro lado, puede ser problemático exponer a un niño solo ante un grupo (por ejemplo para que recite algo de memoria, o para que presente los resultados de una tarea). Estas situaciones conllevan un nivel de competencia, tensión y estrés que algunos niños de esta edad todavía no pueden manejar. Si un niño se niega a hacerlo, habrá que respetar su negativa. A partir de los nueve o diez años eso ya será más fácil.

- Cada niño es diferente. Aunque podemos ver las características descritas en muchos niños de seis a nueve años, no podemos generalizarlo todo, ni mucho menos normar el desarrollo del niño por edades. No existe el "niño promedio". Por tanto debemos respetar los intereses, talentos y características individuales de cada niño, y permitirle aprender a su manera y a su paso. No hay necesidad ni provecho en querer "nivelar" el aprendizaje de todos los niños de un grupo.

¿Cómo usar las unidades de aprendizaje en este libro?

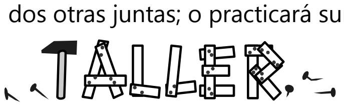
Ya que los niños no se desarrollan todos al mismo paso, **no se indican edades** para las actividades de este libro. Observe a sus niños para que pueda entender cuáles actividades están apropiadas para el nivel de desarrollo donde se encuentra cada uno de ellos.
Esto significa que la secuencia de las unidades en este libro **no es obligatoria**. Usted y sus niños pueden hacer las actividades en el orden que desean, según los intereses y necesidades de los niños. Tampoco es obligatorio hacer "todas" las actividades o resolver "todos" los ejercicios en este libro. **Que cada niño haga lo que necesita.**
Para ayudar a evitar "saltos ilógicos", las unidades indican los prerrequisitos necesarios para entenderlas. Entonces, si un niño todavía no entiende esos temas, puede hacer primero las unidades indicadas en los prerrequisitos.

Los niños aprenden muchas cosas no en lecciones formales, sino de manera informal y natural: en el transcurso de los quehaceres diarios del hogar, al conversar durante las comidas, o al jugar. Por eso, las unidades de aprendizaje contienen también actividades que se pueden realizar de esta manera informal en la vida diaria de la familia, o durante un tiempo de actividad libre en una escuela alternativa.

Desde lo concreto hacia lo abstracto

Para corresponder a las características de los niños de primaria, introducimos cada nueva propiedad matemática mediante actividades prácticas con material concreto, siempre y cuando sea factible. Desde allí procedemos poco a poco a la formulación abstracta y simbólica. Este camino desde lo concreto hacia lo abstracto puede seguir aproximadamente los siguientes pasos:

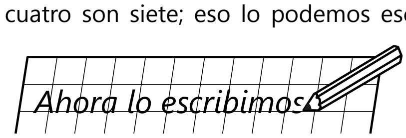
1. Manipulación de objetos concretos. Por ejemplo al introducir la suma, el niño contará cantidades de diversos objetos y las cantidades que forman juntos; juntará cadenitas de cuentas o regletas Cuisenaire e intentará buscar una cadena o regleta con la misma longitud como dos otras juntas; o practicará sumas en el ábaco.



Cada unidad contiene sugerencias para actividades prácticas en la sección titulada **"Taller"**. ¡Dé suficiente tiempo para estas actividades! Las descripciones pueden ser cortas; pero realmente hacerlo consumirá bastante tiempo. No piense que es tiempo perdido si los niños "juegan" por horas con los materiales. ¡Es allí donde sucede la mayor parte de su aprendizaje!
Usted puede ampliar los talleres con sus propias ideas y las ideas de los niños. Y aun más importante: **Adáptelos a las necesidades de los niños.** No todos los niños necesitan hacer lo mismo. Ellos tienen distintos ritmos de desarrollo, distintos estilos de aprendizaje, distintos intereses, talentos, fortalezas y debilidades.
No hay necesidad de "dirigir" todas las actividades de los niños. Al contrario, hemos visto en los "Principios de una matemática activa" que mucha "actividad" sucede cuando los niños tienen bastante libertad de elegir sus propias actividades. Siempre se presentarán oportunidades para relacionar estas actividades de los niños con alguno de los temas matemáticos presentados en este libro.
Siguiendo este método, usted se sorprenderá de cuán poca enseñanza formal necesitan los niños para comprender los conceptos matemáticos.

2. Formular la operación. Después de hacer estas actividades prácticas por un tiempo, podemos introducir unos términos matemáticos y expresar con palabras lo que hace el niño: "Esto se llama una suma. Sumamos tres más cuatro. Tres más cuatro son siete." El niño aprende a usar estas expresiones mientras sigue practicando las operaciones concretas.

3. Leer y escribir las operaciones realizadas con material concreto. Un próximo paso consiste en introducir los símbolos que se usan para escribir la operación: "Tres más cuatro son siete; eso lo podemos escribir así: 3 + 4 = 7".



Pero los símbolos están todavía relacionados con la operación con el material concreto que el niño tiene delante de sí mientras lee o escribe estos símbolos. Por ejemplo, podemos dar al niño una operación escrita en una tarjetita y pedirle que la represente con regletas Cuisenaire o en el ábaco. O representamos una operación con el material concreto y pedimos al niño que la escriba.

De este paso se ocupa la sección **"Ahora lo escribimos"**, que aparece en muchas unidades. También algunas de las **hojas de trabajo** se relacionan con esta etapa. Recuerde dar este paso siempre en conexión con el material concreto; no debe ser pura teoría.

Algunos problemas o tareas están marcados con un asterisco *. Esto significa que son tareas un poco más difíciles, para niños a quienes les gusta un desafío más fuerte.

4. Realizar las operaciones sin el material concreto. Si el niño domina todos los pasos hasta aquí, entonces puede dar el último paso donde llega a la capacidad de realizar la operación sin usar el material concreto. Eso puede suceder por escrito o de manera puramente mental. Por ejemplo, el niño puede calcular mentalmente las operaciones que tiene escritas en tarjetas. O puede resolver una **hoja de trabajo** sin la ayuda de material concreto.

El trabajo escrito en el cuaderno o con hojas de trabajo pertenece entonces a este último paso. El trabajo escrito **no es donde sucede el aprendizaje.** Mas bien, el trabajo escrito sirve para recordar y afianzar un aprendizaje que *ya sucedió antes*, mediante las experiencias concretas.

Fíjese en no dar este último paso prematuramente. Por ejemplo, si un niño usa sus dedos para sumar, o dibuja palitos en un papel para contarlos, es un indicio claro de que todavía necesita un material concreto. Entonces, que siga usándolo.

La importancia del cálculo mental

Hoy en día, muchas escuelas descuidan el cálculo mental. Pero el cálculo mental es un paso intermedio importante entre la actividad concreta y los símbolos abstractos: Primero, el niño practica manipular los números con sus manos. Cuando ha entendido como funciona, puede hacer lo mismo en su mente. Así adquiere *sentido numérico*. Y finalmente traslada al papel lo que hace en su mente.

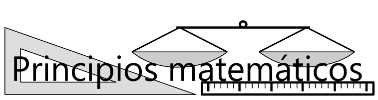
"Cálculo mental" no significa reproducir en la mente la operación escrita. Al contrario, es un proceso que debe *preceder* el aprendizaje de operaciones escritas. Calcular mentalmente implica formarse una imagen mental de las *cantidades* (¡no necesariamente de los números escritos!), y manipular estas cantidades en la mente, de la misma manera como se manipulan bloques de construcción o regletas Cuisenaire con las manos.

Por ejemplo, un niño que sabe sumar mentalmente números de tres cifras, no lo hará de la misma manera como al "sumar llevando" por escrito. El niño que suma "llevando", solamente ve cifras abstractas. Pero el niño que tiene sentido numérico y suma mentalmente, percibe que las centenas son muy distintas de las decenas, y estas son distintas de las unidades. Las imágenes mentales que usan los niños van a diferir de un niño a otro; pero de alguna manera van a percibir una centena como algo mucho más "pesado" o "voluminoso" que una decena. El trabajo con material concreto prepara la formación de tales imágenes mentales.

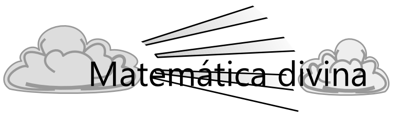
El cálculo mental incentiva también el proceso de "comprimir" las operaciones; o sea, la capacidad de resumir varios pasos similares, elementales, en forma de un único paso de un nivel superior. (Vea en las *Unidades 20, 27, 29* acerca de este tema.) Esta es una capacidad esencial para poder llegar a niveles más avanzados en la matemática.

Un libro para padres, profesores y niños

Al inicio serán sobre todo los educadores quienes hacen uso del libro e instruyen a los niños en las actividades presentadas. En los apartados **"Para los educadores"** se dan explicaciones pedagógicas adicionales para padres y profesores. Las secciones **"Principios matemáticos"** también se dirigen a los educadores, dando una perspectiva matemática un poco más profunda. Las secciones de **"Taller"**, en cambio, pueden también ser usadas directamente por los niños. A medida que ellos maduran, ellos mismos podrán leer y practicar las instrucciones. Así el libro se convertirá poco a poco en un "guía de viaje" para niños y adultos juntos, en sus exploraciones compartidas en el país de la matemática.



En los tomos de Primaria, las instrucciones que se dirigen directamente a los niños están escritas en un tipo de letra más grande. Pero eso no debe entenderse como una distinción estricta: Algunos niños más maduros se interesarán también por las explicaciones que se dan a los educadores, y podrán leer esas también. Por el otro lado, unos niños con menor comprensión de lectura podrán necesitar que los educadores leamos y expliquemos las instrucciones para ellos.



Las secciones de **"Matemática divina"** son un intento de presentar de vez en cuando una perspectiva espiritual y bíblica acerca de ciertos temas de la matemática. Esta es la perspectiva que a mí personalmente me ayudó más a entender el propósito y significado más profundo de la matemática. Encontré que efectivamente, la matemática tiene mucha afinidad con los valores bíblicos. Eso ya se evidencia en la actitud de los grandes pensadores que colocaron las bases de la ciencia y matemática moderna: Kepler, Newton, Leibniz, Napier, Pascal, Euler, aun Descartes (a pesar de su escepticismo filosófico) – todos ellos se refieren en sus escritos explícitamente al Dios de la Biblia, al universo como su creación, y a la matemática como una expresión del orden divino del universo.
Deseo aclarar que con eso no me refiero a la tradición de ninguna iglesia en particular. Mi punto de referencia es el testimonio de los relatos originales en la Biblia; no lo que los hombres hicieron de ello posteriormente.
No todos los lectores compartirán esta perspectiva. La expongo para aquellos que la encuentren útil. Lectores interesados encontrarán más detalles en el volumen "Matemática divina" que acompaña esta serie de libros y se dirige a los educadores.

Al final de las unidades se encuentra un pequeño apartado titulado **"Adónde vamos desde aquí?"** Ya que la secuencia de las unidades no es fija ni obligatoria, doy allí unas sugerencias de otras unidades que continúan o amplían el tema de la unidad respectiva, por si desean continuar allí.

¿Cuánto tiempo debe durar una unidad?

Tanto tiempo como se mantenga el interés de los niños. Eso depende de muchos factores: la cantidad de contenido y la dificultad de la unidad; la madurez de los niños; los estilos de aprendizaje de los niños; la rapidez con que los niños comprenden los contenidos; etc. Así puede una unidad durar desde pocos días hasta varias semanas; y un niño puede ocuparse con una actividad desde pocos minutos hasta una hora o más, dependiendo de su interés y perseverancia. No nos hagamos esclavos de un cronograma; dejémonos guiar por las necesidades de los niños. En realidad no existe fundamentación pedagógica para establecer cronogramas fijos y currículos normados. Esos obedecen únicamente a necesidades administrativas, pero no pedagógicas.

Organización de las unidades por bloques

Para facilitar la ubicación de temas determinados, las unidades están estructuradas en siete bloques grandes.

El Bloque I, "Orden y espacio", contiene temas que incentivan principalmente el **razonamiento espacial y relacional:** Geometría, teoría de conjuntos, y temas afines. Estos temas se pueden esparcir a lo largo del entero período de tres años.
Los Bloques II a VI incentivan principalmente el **razonamiento numérico** y el entendimiento de las **operaciones aritméticas**; además contienen actividades relacionadas con las **unidades de medida**.
El Bloque VII, "Juegos y problemas diversos", incentiva principalmente el **razonamiento estratégico**, la capacidad de **solucionar problemas**, y contiene algunos temas que en el sistema tradicional se resumen bajo el título de "Razonamiento matemático".

En realidad no es posible separar los temas tan claramente, porque existen numerosas interrelaciones entre los temas de bloques diferentes. Algunas de estas interrelaciones se indican en el Mapa Temático al inicio del libro, y en las secciones "Prerrequisitos" y "¿Adónde vamos desde aquí?" de cada unidad.
Por ejemplo, la medición de longitudes está relacionada tanto con el cálculo numérico como con la geometría. En este libro la tratamos mayormente en relación con los números.

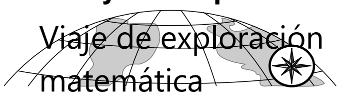
La organización por bloques no significa que se deban trabajar los bloques estrictamente el uno después del otro. Al contrario, después de trabajar unos temas de cálculo numérico, es recomendable intercalar un tema de "Orden y espacio" o de razonamiento estratégico. Las actividades del Bloque VII se prestan para ofrecerlas como actividades "relajantes" de elección libre.

Los Bloques II a VI (cálculo numérico) son ordenados según dificultad creciente; los temas principales de cada bloque son prerrequisitos para el bloque siguiente. Entonces, entre las actividades de estos bloques sí se recomienda mantener el orden del libro, por lo menos para aquellos temas que son esenciales.

También dentro del Bloque I hay a grandes rasgos un orden de dificultad creciente; las actividades hacia el fin del bloque serán demasiado complejas para principiantes. Pero en este bloque el orden es menos estricto que en los Bloques II a VI.

La receta más segura para la planificación de las actividades es que haga uso de su sentido común y de su comprensión por las necesidades de los niños. Mientras dure el interés de un niño por un tema específico, no lo interrumpa. Cuando una actividad se vuelve tediosa, ofrezca otra en su lugar. Si un niño siempre va por lo más fácil, desafíelo a intentar algo un poco más difícil. Si un niño se sobrecarga a sí mismo con ambiciones demasiado exigentes, ayúdele a relajarse y a ser más realista en la estimación de sus capacidades.

Los viajes de exploración matemática y las investigaciones



Un "viaje de exploración matemática" es una unidad de aprendizaje que se enfoca más profundamente en un tema específico, y desafía al alumno a explorar este tema haciendo sus propias observaciones e investigaciones. Algunos de estos "viajes" incluyen relatos históricos acerca de matemáticos famosos del pasado, y siguen los razonamientos de ellos.
Este libro contiene dos de estos "viajes": "Los puentes de Königsberg" *(Unidad 11)*, y "Exploramos la multiplicación" *(Unidad 55)*. La sección "Para los educadores" en la *Unidad 55* contiene unas pautas generales de cómo trabajar una tarea de investigación con los niños.

Algunas unidades contienen adicionalmente unas preguntas de investigación para explorar algún asunto de esta misma manera. En la mayoría de estas preguntas, la respuesta debe ser fácil de encontrar para un adulto; pero nuestra meta es que los niños la descubran *por sí mismos, mediante su razonamiento propio*.
El ***Anexo A*** contiene pautas adicionales (pero normalmente no soluciones completas) para aquellos problemas que pueden ser un poco difíciles aun para adultos. Pero es mejor aguantar primero la tensión de no saber cómo resolverlo, y de intentar diversas ideas, antes de mirar las pautas. La investigación matemática necesita perseverancia. Deseo al respecto citar un consejo muy bueno que encontré en el foro de discusión de un curso de matemática por internet. Se trata de una respuesta a una estudiante que se sintió desanimada porque no pudo encontrar las soluciones de diversos problemas, y dijo que tenía ganas de tirar el lápiz por la ventana y rendirse. Ella recibió el siguiente consejo:

"En tu lugar yo tiraría el lápiz por la ventana después de trabajar en un problema durante, digamos, una hora (o más, si te parece necesario). Pero al día siguiente yo iría afuera, recogería el lápiz, y lo intentaría otra vez. Yo haría esto durante tres días por lo menos. Entonces estarás totalmente enganchada al problema. Te concentras en él durante esa hora diaria; pero estarás pensando en el problema constantemente (mientras caminas en la calle, mientras intentas dormir, ...). Entonces llegará el momento donde o descubres la respuesta, o te das cuenta de que realmente no podrás solucionarlo. Si es lo último, en ese punto lo sabrás. Y en ese punto, leer la solución será algo bueno y no algo malo. Es que si llegas a ese punto, habrás pasado tanto tiempo pensando en el problema que la solución será muy significativa para ti, y nunca la olvidarás."
(Paul Reiners, colaborador del curso "Introduction to Mathematical Thinking" por Keith Devlin.)

La evaluación según el "Camino de aprendizaje"

En el Libro de trabajo, al inicio de cada bloque se encuentra una hoja titulada "Camino de aprendizaje". Esta hoja enumera las capacidades que se esperan adquirir mediante las unidades contenidas en el bloque respectivo, y las representa gráficamente en forma de cuadros o "estaciones" a lo largo de un camino. Cada cuadro indica en paréntesis el número de la unidad relacionada con la capacidad respectiva. Generalmente se representan al lado izquierdo del camino las capacidades "técnicas" tales como leer, escribir y resolver operaciones; y al lado derecho las capacidades relacionadas con la comprensión de los principios matemáticos. Los cuadros sombreados indican capacidades "opcionales", o sea que en este momento no son requeridas para poder progresar en el camino.
Estas hojas pueden quedarse en el poder del educador, o también pueden pegarse en un lugar visible en la pared. Cada vez que el niño demuestra que domina una de las capacidades mencionadas en el camino, el educador dibuja una cara feliz o pone un estíquer en el cuadro correspondiente. Si desea, puede también añadir la fecha. Así pueden ambos, educador y niño, observar su progreso.
La diferencia esencial con la evaluación convencional consiste en que en este sistema no hay niños "desaprobados". Todos los niños aprueban; solamente que no todos trabajan los mismos temas al mismo tiempo. Eso evita mucha frustración en los niños.

Para que este sistema funcione realmente como incentivo y no para desanimar, se recomienda tomar en cuenta los siguientes puntos:

El camino no está cronogramado. Cada niño demuestra sus capacidades individualmente cuando está listo, y *es el niño quien decide cuándo está listo.* Así permitimos a cada niño avanzar a su paso personal.
Entonces, si por ejemplo un niño ha practicado la tabla de multiplicación y piensa que la domina, puede decirnos: "Creo que ya sé eso". La evaluación puede consistir en un pequeño examen formal (oral, escrito, o práctico), o también en una observación informal de cómo resultan las tareas del niño cuando las hace sin ayuda. Si domina el tema, recibe su "carita feliz" y puede proceder a otro tema. Si no lo domina, no ha "desaprobado"; simplemente sigue practicando y recibe otra oportunidad cuando lo pide.
Como educadores podemos preguntar a un niño: "¿Crees que ya puedes eso?"; o animarle: "Me parece que ya puedes hacerlo"; pero si el niño responde que todavía no está listo, respetamos su decisión y le damos más tiempo para practicar.
Las capacidades "técnicas" (del lado izquierdo del camino) son las más fáciles de evaluar: se observa si el niño es capaz de resolver ejercicios correspondientes sin ayuda (sea con material concreto o con hojas de trabajo). Las capacidades de comprensión (del lado derecho del camino) pueden evaluarse mientras el niño resuelve ejercicios, haciéndole preguntas del estilo *¿Por qué ...?, ¿Qué pasa si ...?*, etc.

Cada niño se compara solamente consigo mismo, no con otros niños. Muchos niños se desaniman cuando los comparamos entre sí: "Este es mejor; este está atrasado; este está en primer lugar; este en último lugar ..." – El "Camino de aprendizaje" compara a cada niño solamente con su propio nivel anterior. Entonces, cada vez que un niño demuestra una nueva capacidad, es un éxito, independientemente de los logros de los otros niños; porque el niño ha superado su propio nivel anterior.
Si las hojas del "Camino de aprendizaje" están en un lugar visible para todos los niños, hay que evitar que hagan comentarios despectivos como: "¿Todavía no has avanzado más?" Es más fácil evitar eso cuando los niños no están separados por grados, porque entonces no están formando esa idea de que deba existir una relación fija entre la edad cronológica y los progresos en la matemática. Si aun así surge una competencia malsana entre los niños, es preferible que no tengan acceso a los "Caminos de aprendizaje" de otros niños; o sea que no se exhiban públicamente.

El camino no es siempre lineal. En muchas partes del camino existen desvíos y alternativas; no existe una única secuencia para avanzar. Por supuesto que ciertos temas deben seguirse en un orden específico: no tiene sentido calcular hasta 100 antes de saber calcular hasta 20. Pero muchos temas permiten caminos variados. Por ejemplo, las reglas de divisibilidad podrían aprenderse inmediatamente después de aprender la multiplicación, o también recién después de saber multiplicar y dividir números grandes. Al nivel de Primaria I, los temas de geometría son independientes de los temas del cálculo numérico; entonces un niño podrá decidir si prefiere avanzar en geometría o en aritmética. Algunos temas son completamente opcionales. Por ejemplo, el saber jugar damas o resolver sudokus ayuda a desarrollar la capacidad de razonar; pero no es necesario para seguir progresando en la matemática.
Tampoco es necesario completar todos los temas de un bloque para poder continuar con otro bloque. Normalmente un niño avanzará paralelamente en los caminos de Relaciones y de Geometría (Bloque I), en uno de los caminos de cálculo numérico (Bloques II a VI), y en el camino de Razonamiento (Bloque VII).
Esta variabilidad permite que los niños escojan su camino individualmente. Así estarán también menos propensos a compararse entre sí de manera desfavorable.

Nota: Si el estado exige calificaciones con notas (como en el caso de escuelas alternativas sujetas a las autoridades estatales), estas pueden elaborarse sin problema a base de los logros documentados en el "Camino de aprendizaje". Estas calificaciones no necesitan servir para otro fin que la documentación frente al estado; no es necesario que los niños se enteren de ellas.
Si el estado exige que los niños den exámenes estandarizados (como en el caso de las familias educadoras en algunos países), se recomienda buscar un arreglo de tal manera que el niño dé su examen al nivel que corresponde a sus conocimientos actuales. Normalmente existe cierta tolerancia en cuanto a la edad normada para cada grado.

¿Y la disciplina?

Escribo esto especialmente para aquellos profesores que desean aplicar estos métodos en su salón de clases, pero que desde un trasfondo de escuela tradicional temen que estos métodos quebrantarían la disciplina en la clase: "¿Cómo podré mantener la disciplina si permito a los niños moverse y desplazarse como quieren? ¿Cómo puede una clase ser disciplinada si cada niño puede escoger sus propias actividades?"
La escuela tradicional cree que la disciplina se puede mantener solamente cuando todos los niños hacen lo mismo al mismo tiempo y de la misma manera, y todos están sentados en silencio. Una educación activa, en

cambio, enfatiza otros aspectos de la disciplina: La *concentración* del niño en su propia actividad, y su *respeto* por las actividades de los otros niños.
Así es perfectamente posible que dentro de un salón de clases dos niños jueguen juntos con un ábaco, mientras algunos otros pinten sus dibujos, y otro grupito construya un castillo de bloques de madera. Mientras cada niño está concentrado en su actividad y no molesta a los demás en sus respectivas actividades, no existe ningún problema disciplinario.
Es asombroso ver la capacidad de concentración de un niño, si ha encontrado una actividad que le interesa y que requiere toda su atención. En este caso, un niño puede mantenerse ocupado hasta por horas, con muy poca necesidad de supervisión adulta.

– "Pero así no se pueden dictar clases", dirá el profesor de escuela tradicional. Cierto; pero los niños de esta edad tienen poca necesidad de "clases". Mucho más aprenden mediante su *actividad propia*, y también mediante la *atención individual* que les brindamos.
Entonces, durante el tiempo de actividades libres, un buen educador irá de un niño a otro, observando lo que hace; tratando de entender cuáles son los pasos de desarrollo que el niño está dando en este momento; explicándole individualmente o a un grupo pequeño el uso de un material nuevo; brindando ayuda o ideas adicionales donde fuera necesario; ayudando a aquellos niños que todavía no pudieron decidirse por una actividad, a que encuentren algo conforme a sus intereses y necesidades; y ayudando a solucionar conflictos entre los niños donde fuera necesario.

En el transcurso de la primaria aumentará poco a poco la necesidad (¡y también el beneficio!) de reunir de vez en cuando a todos los niños para explicarles algo en conjunto, o para dialogar acerca de algún tema con el grupo entero. Se observará que los niños responden mucho mejor a esos momentos, si por lo demás tuvieron suficientes oportunidades para el movimiento físico y para elegir actividades según sus intereses y necesidades.
No es cierto que los niños sean "indisciplinados" por naturaleza. La mayoría de los problemas disciplinarios en las escuelas tradicionales se deben a que ese sistema no toma en cuenta las necesidades naturales de los niños; sobre todo su necesidad de movimiento físico, y su necesidad de poder aprender de acuerdo a su nivel actual de desarrollo y comprensión. Cuando estas dos necesidades son satisfechas, además de brindar un ambiente emocional positivo, los problemas disciplinarios se reducen grandemente.

Es cierto que las escuelas alternativas en su mayoría tienen clases más pequeñas, de entre 7 a 15 alumnos por educador (dependiendo de la edad de los alumnos), para poder implementar mejor una pedagogía individualizada y activa. Pero se pueden también encontrar soluciones alternativas para números más grandes de alumnos; por ejemplo encargando a algunos alumnos mayores como "tutores" para alumnos menores.

Me limito a estas pocas pautas, porque no es posible en el marco de este libro dar una descripción extensa de pedagogías alternativas. Recomiendo a profesores interesados, visitar escuelas alternativas o leer literatura correspondiente; p.ej. "El método Montessori" por María Montessori, o "Educar para ser" por Rebeca Wild. – Padres educadores podrán interesarse por la "Fórmula Moore" desarrollada por Raymond y Dorothy Moore. (Descripciones y pautas en inglés se pueden encontrar en *http://www.moorefoundation.com* y en los libros de los Moore. Al idioma español fue traducido únicamente su libro "Mejor tarde que temprano".)

¿Por qué el contenido de tres años en un solo tomo?

Los libros tradicionales que avanzan por grados, contienen muchas repeticiones. Cada año repiten los mismos temas, solamente a un nivel un poco más avanzado. Estas repeticiones son necesarias cuando los temas se introducen a una edad demasiado temprana: La primera y la segunda vez el alumno todavía no entiende el tema, porque no tiene la madurez mental necesaria; por eso necesita que el tema se repita una tercera y una cuarta vez para que (quizás) lo pueda entender.
La obra presente se basa en un enfoque diferente: Esperamos hasta que el cerebro del alumno haya madurado lo suficiente para poder entender el tema. A menudo ese es el momento cuando también despierta su interés propio por el tema. Entonces se lo enseñamos a fondo, y mediante actividades prácticas y concretas. Así lo aprende bien, y en un contexto emocional positivo, y eso hace que los conocimientos sean mucho más duraderos que los que se adquieren en el sistema convencional. Por tanto, ya no hay necesidad de repetirlos tantas veces, y los alumnos alcanzan el mismo aprendizaje con mucho menos horas académicas.
Aquella repetición que es necesaria para no olvidar un conocimiento ya adquirido, se da de manera *implícita* al proceder a temas más avanzados: En la matemática, cada tema avanzado se basa sobre varios temas anteriores. Por ejemplo, la operación de sumar vuelve a usarse al elaborar la tabla de multiplicación, al aprender la suma "llevando" de números grandes, al aprender la multiplicación de números grandes, y en otras oportunidades. Así el alumno la repite sin necesidad de una repetición explícita.
Los libros tradicionales contienen también muchos contenidos y terminología innecesarios, lo cual solamente

infla el volumen de los libros y hace que el aprendizaje se vuelva tedioso. Deseamos limitarnos a lo que es realmente necesario para entender los principios matemáticos; pero ofrecer una variedad de actividades concretas relacionadas con estos temas, para que los alumnos tengan opciones de elegir.

Con este concepto fue posible consolidar los contenidos de tres años en un tomo, sin sacrificar la calidad del aprendizaje. Aquí como en muchos aspectos de la vida y de la pedagogía, "menos es más".

Los únicos temas que se repiten explícitamente en la obra presente, son aquellos que se encuentran en el límite entre los contenidos de un tomo y otro. Así por ejemplo el nivel preescolar da una introducción a los números de 0 a 10, lo cual se repite en Primaria I. Al fin del nivel de Primaria I se da una breve introducción a los múltiplos y divisores y a las fracciones, temas que se desarrollarán extensamente en el nivel Primaria II.

Otra razón por juntar tres años en un tomo, es que a menudo resulta ventajoso dejar que niños de diferentes edades trabajen juntos, en vez de separarlos artificialmente por grados. (Un hecho señalado ya por María Montessori, y otros después de ella.) En este caso es práctico que puedan juntos usar el mismo material, aunque no necesariamente trabajando todos al mismo nivel de dificultad.

¿Por qué no hay clave de respuestas?

En primer lugar, porque no deseo fomentar el concepto tradicional de "un libro para el profesor y otro libro para el alumno". Ese concepto da lugar a la idea de que el profesor tiene acceso a cierta información exclusiva, "secreta", que le provee de ciertas ventajas sobre el alumno. En la matemática, eso no debe ser así. La matemática como verdad universal debe ser accesible para profesores y alumnos por igual. Por eso, este libro es tanto para alumnos como para padres y profesores. Contiene instrucciones para los alumnos y también pautas pedagógicas para padres y profesores; y no hará daño si a un alumno le interesan también las partes para educadores.

La ventaja del educador no debe crearse artificialmente mediante el acceso exclusivo a ciertos recursos que son "prohibidos" para los alumnos. Su ventaja debe basarse en lo que realmente le distingue del alumno: su madurez, sus conocimientos, su experiencia. Si un educador posee estas cualidades, no debería necesitar una clave de respuestas – por lo menos no al nivel de la primaria donde la matemática es todavía elemental.

Algunos materiales, por ejemplo las tarjetitas con operaciones, incluyen sus respuestas y así permiten al alumno comprobar sus propios resultados. Algunas tareas en las hojas de trabajo permiten el autocontrol mediante el patrón o dibujo que resulta si la tarea se resuelve correctamente. (Por ejemplo las Hojas 23.3, 36.2, 46.2-3, y otras.) También se enseñan métodos matemáticos de comprobar resultados (por ejemplo mediante la operación inversa). Así puede el alumno por sí mismo verificar si sus respuestas son correctas, y aprende que la verificación se basa en principios matemáticos y no en una misteriosa "clave de respuestas".

Para algunos problemas o tareas de investigación un poco difíciles, se encuentran pautas adicionales en el ***Anexo A***. Consulten este anexo si intentaron por mucho tiempo resolver un problema y no progresan. (Acerca del uso de las tareas de investigación y las pautas, vea también arriba bajo el título "Los viajes de exploración y las investigaciones", y en la *Unidad 55*.)

¿Por qué no hay preguntas de selección múltiple?

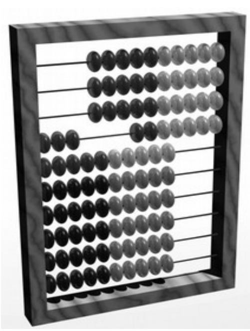
Las preguntas de selección múltiple fueron inventadas para la conveniencia del profesor o administrador que califica las tareas; pero tienen muy poca utilidad pedagógica. En la matemática, las preguntas de selección múltiple inducen al alumno a adivinar las respuestas sin emplear un razonamiento matemáticamente correcto. En la matemática se deben evaluar no solamente las respuestas, sino también el *camino* que el alumno tomó para llegar a las respuestas; o sea, su forma de razonar. Las preguntas de selección múltiple no toman en cuenta este aspecto.

En cuanto al autocontrol de las respuestas por el alumno, aplica lo dicho en el apartado anterior acerca de la comprobación de resultados.

Si un niño necesita practicar la resolución de preguntas de selección múltiple como preparación para algún examen oficial que tiene que dar, puede hacerlo mediante muestras obtenidas de libros escolares convencionales. Se trata en ese caso del entrenamiento de una destreza técnica, no matemática; por tanto no me pareció necesario incluirla en un libro de matemática.

Descripción de unos materiales frecuentemente usados

Existen algunos materiales manipulables que han sido usados con mucho éxito para introducir a los niños a la matemática. Los estaremos usando con mucha frecuencia en el nivel de primaria:



El ábaco

Es un instrumento muy útil para practicar las operaciones básicas. El modelo más frecuentemente usado tiene 10 hileras de 10 cuentas cada una.
Si no tiene la posibilidad de conseguir un ábaco, puede fabricar uno de manera casera con una caja de cartón grueso, cuerdas o alambres, y cuentas grandes.

Las cadenitas de cuentas

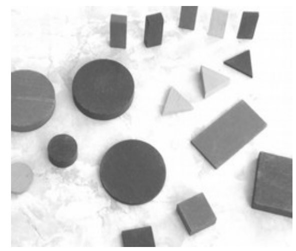
Un material práctico para introducir los números. Se puede fabricar fácilmente en casa, amarrando el número correspondiente de cuentas con cuerdas. Necesitamos cadenas de los tamaños de 1 a 10, diez cadenitas de cada tamaño. (Si varios niños necesitan usarlas al mismo tiempo, una cantidad mayor.)
Es recomendable elegir los colores que corresponden a las regletas Cuisenaire (vea abajo); o sea que la cadenita de 2 tenga el mismo color como la regleta Cuisenaire del 2, la cadenita de 3 el mismo color como la regleta del 3, etc.

Las regletas Cuisenaire

Son regletas que representan los números de 1 a 10, y se pueden encontrar en algunas tiendas de juegos y material didáctico. Si no puede conseguirlos, puede también encargar a un carpintero o ebanista con fabricarlas. Su grosor es de 1 x 1 cm, y la longitud corresponde al número que representa (1 = 1 cm, 2 = 2 cm, 3 = 3 cm, etc, hasta 10 = 10 cm.)
Su esquema de colores original, según su inventor Georges Cuisenaire, refleja unos principios matemáticos que explicaremos en la *Unidad 34*, y es el siguiente:

1 – blanco o madera natural sin pintar	6 – verde oscuro
2 – rojo	7 – negro
3 – verde claro	8 – marrón
4 – lila	9 – azul
5 – amarillo	10 – anaranjado.

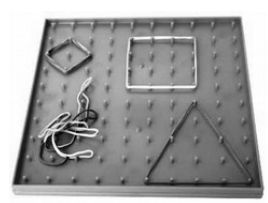
Los bloques lógicos



Es un juego de bloques de madera de diferentes formas, tamaños, y otras características. Sirve para entrenar capacidades de razonamiento, clasificación de objetos, conceptos de la teoría de conjuntos y combinatoria, etc.
El juego estándar consiste en todas las combinaciones posibles entre las siguientes características:

Forma:	Círculo, cuadrado, rectángulo, triángulo.
Color:	Rojo, azul, amarillo.
Tamaño:	Grande, pequeño.
Grosor:	Grueso, delgado.

Eso da un total de 4 x 3 x 2 x 2 = 48 bloques, porque cada combinación debe estar representada. Así tienen que existir por ejemplo cuatro cuadrados rojos: 1) uno grande grueso, 2) uno grande delgado, 3) uno pequeño grueso, y 4) uno pequeño delgado. Y lo mismo para todos los otros colores y formas.
Para poder realizar las actividades de la manera correcta, será esencial tener el juego completo. Desafortunadamente, en algunas tiendas se venden juegos bajo el nombre de “bloques lógicos”, pero que no cumplen con las características requeridas. Por eso se recomienda verificar los juegos que se venden, o fabricarlo uno mismo.
Este material se puede fabricar fácilmente, cortando las figuras de madera contrachapada (triplay) y pintándolas. O se puede encargar a un carpintero con hacerlo. Se necesitará una madera gruesa y otra delgada.



El geoplano

Es una tablita de madera con clavos puestos en un patrón regular. Normalmente se usa un patrón cuadriculado – filas y columnas en ángulo recto –, pero se pueden también usar otros diseños: triangular, circular ... Entonces se pueden tender ligas de jebe entre estos clavos para formar diferentes figuras geométricas.

Bloque I: Orden y espacio (Unidades 1 a 12)

Las actividades de este bloque incentivan principalmente el razonamiento espacial y relacional. Contienen unas nociones básicas de geometría, de la teoría de conjuntos, y temas afines.
El nivel de dificultad de las unidades aumenta hacia el fin del bloque, pero el orden no es estricto. Ayude a cada niño a elegir actividades según sus necesidades, su nivel de comprensión, y sus preferencias personales.
No es recomendable trabajar el bloque entero seguido; es preferible esparcir estos temas a lo largo del período de Primaria I. Aunque este bloque se encuentra al inicio del libro, esto no significa de ninguna manera que todas sus actividades sean aptas para niños de 6 años. Algunas actividades tendrán que esperar hasta que los niños tengan 8 ó 9 años (o aun más, dependiendo de su desarrollo individual). Deje que los niños descubran por sí mismos qué es lo que ya pueden hacer; y que esperen hasta más tarde con lo que todavía no pueden.

Acerca del uso del "Camino de aprendizaje" para medir el progreso del niño, vea en el capítulo "¿Cómo usar las unidades de aprendizaje de este libro?", p.22.

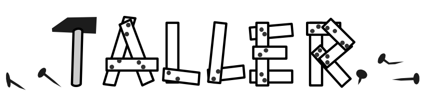
Unidad 1 - Clasificar y ordenar objetos

Materiales necesarios:
- Objetos comunes del hogar (cubiertos, servicios, ropa, frutas y verduras, juguetes, etc.)
- Bloques lógicos

Para los educadores

El concepto del ***orden*** es fundamental para el pensamiento matemático. Los niños lo practican desde pequeños si ayudan a ordenar platos y cubiertos, juguetes, ropas, y otros objetos del hogar.
El orden en el hogar se facilita mucho cuando **"cada cosa tiene su lugar"**. Y este mismo principio facilita también la comprensión de la matemática: Una vez que un objeto matemático está definido, sus propiedades siguen siendo las mismas; de la misma manera como los objetos del hogar se guardan siempre en el mismo sitio.
Los talleres de esta unidad continúan y amplían las actividades de la vida diaria del hogar, relacionadas con el orden, como se sugirieron en el libro de Pre-Matemática. Poco a poco se introducen conceptos un poco más complejos, tales como la negación de una propiedad; la combinación de dos o más propiedades; la seriación. Todo esto sucede mayormente en relación con las actividades diarias del hogar, complementado por unas hojas de trabajo.
Estos talleres no están sujetos a un cronograma; esta unidad no necesita tener un "inicio" y un "fin" definidos. Busque oportunidades para hacer estas actividades como una **parte natural de sus quehaceres diarios**.
De preferencia se usarán con mayor frecuencia aquellos objetos que más llaman la atención de los niños. Eso varía de un niño a otro. A unos les gustará mucho ordenar sus carritos o muñecas; otros preferirán las frutas, flores, o animales.

La **Hoja de trabajo 1.1, "Notas pedagógicas",** es para educadores: para que usted anote sus propias ideas y las experiencias hechas con los niños. En la columna "Experiencias y observaciones" puede anotar experiencias de aprendizaje resaltantes de algunos niños, características particulares que observa en ellos acerca de su progreso, su estilo de aprendizaje, etc. En la columna "Dificultades" puede anotar tanto las dificultades de los niños que observa, como también dificultades que usted mismo(a) tuvo con las actividades de la unidad. En "Ideas propias" anote sus propias ideas que tuvo para ampliar la unidad, y sugerencias para futuras actividades. Todo eso le ayudará a conocer mejor a los niños, sus características y necesidades, y a planificar futuras actividades de acuerdo a sus necesidades.
Puede copiar la hoja y usar un ejemplar para cada unidad.



El orden en la casa

En la vida cotidiana continuarán las actividades de ordenar y clasificar objetos del hogar, como las descritas en el libro de Pre-Matemática (Unidades 1 y 7): Ordenar servicios y cubiertos, guardar la ropa, clasificar frutas y verduras, clasificar juguetes, etc. Así, estos conceptos de estructuras ordenadas se integran de manera natural en la vida diaria. Eso es mucho más eficaz que aprenderlos mediante lecciones formales.
Busque oportunidades para considerar en estas actividades de la vida cotidiana los conceptos adicionales que se mencionan a continuación:
- Propiedades comunes de varios objetos,
- Negación de una propiedad,
- Combinación de dos y más propiedades,
- Seriaciones.

Propiedades comunes de varios objetos

Junte algunos objetos que tienen una propiedad en común. Que los niños indiquen cuál es la propiedad común. Comience con ejemplos fáciles. Por ejemplo, junte unas tazas de diferentes tamaños y colores: "¿Qué son todos estos?" – Claro, todas son tazas. – Haga otros ejemplos similares.
Después haga unos ejemplos más difíciles. Por ejemplo una muñeca, una pelota, un carrito y un rompecabezas: "¿Qué son todos estos?" – Son juguetes. – O un libro, una caja, una frazada y un teléfono celular. "¿Qué son todos estos? ¿Qué tienen en común?" – Eso ya es más difícil. Pero todos los objetos mencionados son *rectángulos*. Eso es su propiedad común.
Como último paso, puede hacer el juego de **"¿Cuál no pertenece?"**: Muestre cuatro o cinco objetos que tienen una propiedad en común, pero uno de ellos no tiene esa propiedad. Por ejemplo cuatro juguetes azules y uno rojo: el rojo es el que "no pertenece", porque todos los otros tienen el mismo color. – O un plato, un tenedor, una moneda, una canica, y un rollo de papel higiénico. (El tenedor "no pertenece", porque no es redondo.) – O un cucharón, una olla, una cajita de fósforos, un borrador, y una jarra. (El borrador "no pertenece", porque no se usa en la cocina.)
Deje que también los niños busquen objetos y que entre ellos se planteen problemas como estos.

Podemos hacer las mismas actividades con los ***bloques lógicos***. Presente unos bloques que tienen una propiedad en común (por ejemplo cuatro bloques rojos de distintas formas y tamaños; cinco bloques pequeños de distintas formas, colores y grosores; ...) Que los niños descubran cuál es la propiedad común.
Después juegue el juego de "¿Cuál no pertenece?" con bloques lógicos. (Use por lo menos cinco o seis bloques cada vez, para que la propiedad común se note claramente.)

La negación de una propiedad

En vez de buscar objetos que tengan una propiedad determinada, podemos también buscar objetos que *no* tengan dicha propiedad. Por ejemplo "los utensilios de cocina que no son redondos"; o "las ropas que no son de papá".

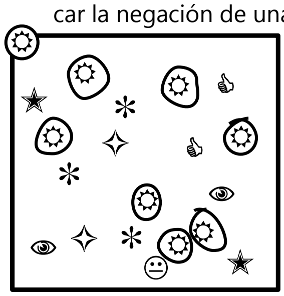
Esto es fácil donde se trata de un único par de características opuestas: Si tenemos "grandes" y "pequeños", entonces los "no grandes" son los pequeños. Si tenemos papas y zanahorias, las "no papas" son las zanahorias.
Más difícil es entenderlo cuando tenemos un mayor número de características posibles. Por ejemplo, tenemos juguetes de varios colores diferentes; ¿cuáles son los "no rojos"? – O tenemos diversas figuras geométricas; ¿cuáles son las "no redondas"?
(Vea en "Principios matemáticos" acerca del concepto del "tercero excluido".)

Lo mismo podemos hacer con ***bloques lógicos***: "Busca los bloques que no son gruesos"; "los que no son cuadrados"; "los que no son amarillos"; etc.

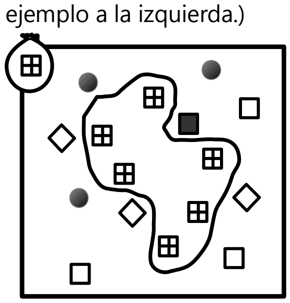
Hojas de trabajo

Recuerde: Las hojas de trabajo no son el medio para lograr experiencias de aprendizaje. El aprendizaje, a este nivel, sucede casi exclusivamente en las actividades prácticas con material concreto. Deles a los niños suficiente tiempo para estas actividades, y deles oportunidades para ampliar y adaptar las actividades según sus propios intereses e ideas creativas.
Después de que los niños adquirieron este fundamento de experiencias prácticas, las hojas de trabajo pueden servir para repasar y profundizar lo aprendido, y para expresarlo de una manera un poco más abstracta, usando dibujos y figuras geométricas en vez de objetos concretos.
Por eso, las hojas de trabajo son relativamente pocas. Si los niños han pasado suficiente tiempo con experiencias concretas y prácticas, no tendrán mucha necesidad de las hojas de trabajo.

Las hojas 2 a 6 de esta unidad contienen ejercicios para clasificar objetos según propiedades comunes, y para identificar la negación de una propiedad:



Hoja de trabajo 1.2 – Enciérralos en círculos.
En cada cuadro hay que encerrar en un círculo cada objeto que tiene la propiedad indicada en la esquina superior izquierda. (Vea el ejemplo a la izquierda.)

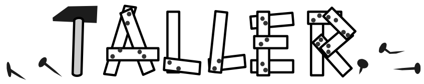


Hoja de trabajo 1.3 – Ponlos a la bolsa.
Similar a la hoja anterior. Pero en vez de encerrar a cada objeto en su propio círculo, se encierran todos los objetos correspondientes de un cuadro en una sola "bolsa" grande, dejando afuera los objetos que no pertenecen. - Matemáticamente, esta actividad es una preparación para la teoría de los conjuntos.

Hoja de trabajo 1.4. – Enciérralos en círculos (resp. en la bolsa).
Esta actividad es un poco más exigente que las hojas anteriores: Se exige ahora que el niño pueda deducir la característica común de los elementos de muestra, y que aplique esta característica a *otros* elementos dibujados. Por ejemplo, el primer cuadro tiene como muestra tres objetos que emiten luz: una vela, una estrella, y el sol. El significado es que el niño debe encerrar no solamente estos tres objetos específicos, sino *todos los objetos que emiten luz* (entonces también la lámpara y la linterna). – Igualmente en el segundo cuadro (arriba a la derecha) se deben encerrar no solamente los tres objetos mostrados, sino *todos los objetos oscuros*. – Lo mismo en los cuadros siguientes: Todas las figuras que tienen un relleno con olas de agua; todo lo que está dentro del agua; todo lo que flota sobre el agua; todo lo que es una planta de la tierra. (En lo que flota sobre el agua, podrían quedar unas inseguridades. ¿Una manzana flota o se hunde? – Quizás hay que hacer el experimento para saberlo.)

Hoja de trabajo 1.5.
Los primeros tres cuadros funcionan como los de la Hoja 1.4: Encierra los elementos que tienen la misma propiedad común como las muestras. – En los siguientes tres cuadros, las muestras se encuentran *afuera* de la "bolsa". Eso significa que hay que encerrar en la bolsa los elementos que *no* tienen la propiedad respectiva: los "no negros", los "no cuadrados", las "no-letras".

Hoja de trabajo 1.6. – ¿Cuál no pertenece?
Si han jugado "¿Cuál no pertenece?" varias veces con material concreto, pueden hacerlo de una manera un poco más abstracta con esta hoja de trabajo. En cada fila, los seis objetos o símbolos tienen una propiedad común – excepto uno que no la tiene. La tarea consiste en marcar en cada fila el objeto que no tiene la propiedad común de los demás.
Las series en la mitad izquierda de la hoja deben ser fáciles. Los últimos cuatro en la mitad derecha son bastante difíciles. (Si te parece que hay dos excepciones en vez de una, ¡entonces todavía no encontraste la propiedad común!)



(continúa)

Combinación de dos y más propiedades

Anime a los niños a que describan varias propiedades de un objeto: "Esta es una taza grande azul." – "Este es un plumón negro delgado." – "Esta es una silla blanca pequeña de plástico."
También pídales que identifiquen objetos según dos o más criterios: "Tráeme un plato hondo grande." – "Necesito una pequeña cuchara de plástico." – "¿Cuál juguete es rojo y de madera?"

Estas actividades podemos también hacer con ***bloques lógicos***: "Búscame un bloque azul pequeño." – "Tráeme un triángulo grande."
En un nivel más avanzado, se puede pedir a los niños que identifiquen un bloque específico según sus cuatro propiedades: "¿Cómo es este bloque?" – "Es amarillo, cuadrado ..." – "¿y qué más?" – "pequeño ... y delgado."
O también: "Búscame el rectángulo grande rojo grueso." – "Trae el círculo rojo grueso pequeño." – En el juego estándar de los bloques lógicos, para cada combinación de cuatro propiedades existe exactamente un bloque que las cumple.
– En vez de hacerlo oralmente, podemos preparar tarjetitas con diversas combinaciones de las cuatro propiedades. Cada niño saca una tarjeta e intenta encontrar el bloque descrito en la tarjeta.

Seriaciones

Busque objetos similares, pero de diferentes tamaños, para que los niños los ordenen desde el más pequeño hasta el más grande, o vice versa. Por ejemplo cuatro platos de diferentes tamaños; lápices de diferentes longitudes; libros de diferentes grosores; etc.
Quizás tiene unas muestras de papeles en diferentes matices de colores que se pueden ordenar, por ejemplo, desde claro hasta oscuro.
También las ***regletas Cuisenaire*** se pueden ordenar según su tamaño.

Algunas de estas tareas son relativamente fáciles porque se nota a primera vista si el patrón está equivocado. Por ejemplo al ordenar las regletas Cuisenaire, los niños pueden guiarse por el patrón de "escalerita". Al ordenar matices de color o niveles de gris desde claro hasta oscuro, se nota si en algún lugar el patrón "salta", o sea, la transición no es suave.
Más difícil es con objetos que son tan similares que es necesario compararlos desde cerca de dos en dos. Así por ejemplo con tiras largas de cartulina que difieren entre sí por solo unos poco milímetros. El ordenar libros de diferente grosor puede presentar una dificultad similar. Si en estos ejercicios se nota que un niño todavía no ha desarrollado la capacidad de la seriación (tal como la describe Piaget), entonces habrá que dejarlo para más tarde.

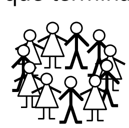
Los niños que ya conocen los números, pueden también ordenar tarjetitas con números, de menor a mayor o vice versa. Aquí también existen tareas "fáciles" y "difíciles": Si todos los números son seguidos (por ejemplo 4; 7; 5; 8; 6), la tarea es "fácil", porque se trata simplemente de buscar el sucesor de cada número. Es más difícil ordenar, por ejemplo, los números 20; 15; 10; 17; 12; porque aquí es necesario compararlos todos de dos en dos. Por supuesto que la dificultad aumenta con un mayor rango numérico. Adapte el rango numérico a lo que el niño puede entender.

Se pueden también ordenar conjuntos de diversos objetos, según el número de objetos que contiene cada uno. Por ejemplo, podemos alistar una cajita con 6 objetos, una con 3 objetos, una con 8 y una con 2. Que los niños las ordenen de "menos" a "más" o vice versa.

Podemos también buscar objetos que se pueden ordenar según otros criterios, por ejemplo según su *peso*. Eso ya es más difícil, porque los niños no se pueden guiar por la vista. – También podemos hacer una seriación "*liso – áspero*" (p.ej. con vidrio, papel, tela, un pan seco, y un pedazo de lija); o una "*blando – duro*" (p.ej. con un pedazo de esponja, una frazada, un pedazo de jebe, una madera, y piedra o metal).

Juego: ¡A formarse!

Una persona dirige el juego, los demás tienen que formarse en una fila según el criterio que indica la persona que dirige. Por ejemplo: "¡A formarse según tamaño, de alto a bajo!" – Entonces la persona más alta tiene que ponerse adelante, después la segunda persona más alta, y así sucesivamente hasta la persona más baja. – O: "¡A formarse según la edad, de menor a mayor!" – Entonces la persona de menor edad se pone adelante, y sucesivamente aumentando la edad hasta la persona mayor de todos al final. – Usen otros criterios de formación, por ejemplo: número de calzado; fecha de cumpleaños; número de hermanos que tienen; número de la casa donde viven; longitud del cabello; etc.
Variación: En vez de formar una sola fila, el juego se puede jugar como competencia entre dos grupos. Cada grupo forma su propia fila según el criterio indicado, y el grupo que termina primero gana un punto.



Juego: Cambiar de asiento

Este juego se puede jugar en un grupo de 5 niños o más. Es más interesante cuando son por lo menos 10 participantes.
Se forma un círculo con sillas. Debe haber una silla menos que participantes, de manera que uno de ellos se queda sin asiento. La persona que no tiene asiento se para en el medio del círculo y dice por ejemplo: "¡Cambien de asiento todos los que tienen puesto algo celeste!" – Entonces todos los que tienen algo celeste puesto, tienen que pararse y buscar otro asiento. Mientras tanto, la persona que estaba en el medio se sienta rápido en uno de los asientos

desocupados. Entonces alguien de los otros participantes se quedará sin asiento. Esa persona se para en el medio y anuncia quiénes tienen que cambiar de asiento ahora. Por ejemplo: "... todos los menores de 8 años", "... todos los que tienen un perro", "... todos los que tienen ojos", "... todos los que nacieron en esta ciudad", etc. – Los que tienen que cambiar de asiento, no pueden pararse y después volver a sentarse en el mismo asiento; tienen que sentarse en un asiento diferente.

Podemos establecer como regla adicional que no se puede mencionar una característica que se aplica a una sola persona de los sentados. Así evitamos que la persona del medio obligue de esta manera a una persona específica a cederle su asiento.

Juego: Veo, veo ...

Este es un sencillo juego de adivinanzas. La persona que empieza el juego, se fija en algún objeto en la sala (o algo que se puede ver por la ventana), pero no dice qué es. Solamente menciona su color: "Veo, veo ... algo amarillo." – Entonces los demás intentan adivinar de qué objeto se trata, haciendo preguntas. Pero solamente pueden hacer preguntas que se pueden responder con "sí" o "no": "¿Es algo encima de la mesa?" – "Es un libro?" - "¿Es este lápiz?" – Pero no se puede preguntar por ejemplo "¿Qué es?", o "¿Dónde está?", porque estas preguntas no se pueden responder con "sí" o "no".
El objeto debe ser específico y concreto. Por ejemplo, no simplemente "una silla", sino "la silla de Mario". No simplemente "una manzana", sino "esta manzana amarilla debajo de las otras".
Los niños tendrán que descubrir que demorarán mucho en adivinar el objeto si preguntan por cada objeto aparte: "¿Es la taza?" – "¿Es el reloj?" – "¿Es la ventana?" ... Una estrategia mucho mejor consiste en preguntar por propiedades adicionales del objeto, y así limitar poco a poco las posibilidades: "¿Se encuentra en este estante?" – "No." – "Es más grande que un dedo?" – "Sí." – "¿Es algo para comer?" – "Sí." – "¿Es una fruta?" – "Sí." – "¿Es el plátano?" – "Sí."

Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 1.7. – *Lado izquierdo:* Ordena las figuras en el orden en que fueron dibujadas (de menos a más trazos). Escribe en los cuadrados el número de orden de cada dibujo, como en el ejemplo de la primera fila.
Lado derecho: En estas secuencias faltan elementos intermedios. Dibuja en los cuadros vacíos lo que falta.

Hoja de trabajo 1.8. – *Arriba:* **Corta y pega en orden.**
La mitad superior de la hoja contiene seis series para cortar y pegar. La tarea consiste en cortar los cuadraditos y pegarlos sobre las tiras (las que no tienen símbolo de tijera), según el orden que se indica allí. Por ejemplo, la primera tira muestra al inicio un triángulo pequeño y al final un triángulo grande. Esto significa que los triángulos de la primera serie se deben pegar allí, ordenados de pequeño a grande. Igualmente en la segunda tira, se debe comenzar con el círculo más oscuro y ordenar los círculos de oscuro a claro. Etc.

Hoja de trabajo 1.8. – *Abajo:* **Une con flechas en orden.**
En la mitad inferior de la hoja, el orden debe indicarse dibujando flechas. Como criterio de orden se debe usar la propiedad que se indica en el cuadro pequeño. Por ejemplo, en la primera serie, el cuadro pequeño muestra tres figuras ordenadas por tamaño, de grande a pequeño. Esto significa que en el cuadro grande se debe empezar con la figura más grande (independientemente de su forma), de allí dibujar una flecha hacia la siguiente figura (la segunda más grande), y así sucesivamente hasta la figura más pequeña.
La mitad inferior es un poco más difícil porque las figuras se distinguen también por propiedades secundarias que no deben tomarse en cuenta en la seriación. Por ejemplo, si se debe ordenar por color, entonces el tamaño y la forma de las figuras no deben tomarse en cuenta. Si se debe ordenar por valor numérico (última serie), entonces no se debe tomar en cuenta el tamaño de los símbolos.

La ***Hoja de trabajo 1.9.*** contiene ejercicios de ***seriación temporal*** con series de tres dibujos cada una: ¿Cuál viene primero? ¿Cuál sucede después? (Cada fila es una serie aparte.) – Se puede marcar el orden directamente en la hoja (con números 1, 2, 3); o se pueden cortar los dibujos y arreglarlos en orden sobre la mesa.

Principios matemáticos

El tercero excluido

Este es un principio importante de la lógica que todavía no necesitamos introducir formalmente; pero los niños lo experimentarán de manera práctica cuando hacemos actividades relacionadas con la ***negación*** de alguna propiedad. Por ejemplo, tenemos vasos o tazas de diversos materiales: de vidrio, de porcelana, de plástico, de metal ... Podemos poner a un lado "los que son de vidrio", y a otro lado "los que no son de vidrio". Con eso hemos clasificado *todos* los vasos; no queda ninguno que no podríamos asignar a uno de los dos grupos. Cada vaso o es de vidrio, o no es de vidrio. *No existe ninguna "tercera posibilidad".*
En la lógica (que todavía no necesitamos estudiar a este nivel), eso se enunciaría así: *"Toda proposición o es verdadera o es falsa"*; no existe ninguna tercera posibilidad. No es posible que una proposición (en el sentido de la lógica) sea verdadera y falsa a la vez. Tampoco es posible que no sea ni verdadera ni falsa.

Este principio tiene también una aplicación en la teoría de los conjuntos: La "negación" de un conjunto es su ***complemento***. (Vea *Unidad 9*.) Si nuestro "universo" consiste en todos los vasos que tenemos en la casa, y formamos un conjunto con los vasos de vidrio, entonces su complemento es el conjunto de los vasos que no son de vidrio. Ahora, si unimos estos dos conjuntos, tenemos el "universo" completo. *Un conjunto más su complemento forman el universo entero.* (Vea también la *Unidad 25* acerca del principio del entero y sus partes.)
Dicho de una manera un poco más formal: Si tenemos un conjunto A en un universo U, todo elemento en U o pertenece a A, o pertenece a su complemento A'. No hay elemento en U que pertenezca a A y a A' a la vez. Tampoco existe elemento en U que no pertenezca ni a A ni a A'.
(Los niños todavía no necesitan manejar estos conceptos ahora. Volveremos a este tema más tarde.)

Para que los niños experimenten estos principios, tenemos que usar objetos con propiedades claramente definidas. Si hablamos de una propiedad A, se debe poder decir claramente de cada objeto si es "A" o si es "no-A". Por ejemplo, todas las ropas que hay en la casa, o son de María o no son de María. Todos los animales o tienen cuatro patas, o no tienen cuatro patas.
Pero si tratamos de clasificar todos los juguetes en "rojos" y "no-rojos", ya podemos tener un problema: Quizás hay unos juguetes que son "parcialmente rojos", o sea, tienen unas partes rojas y unas partes de otros colores.
Al inicio deberíamos evitar tales ambivalencias por completo. Si los niños están un poco más avanzados en su razonamiento, podemos usar tales ejemplos para mostrar que los criterios deben definirse de una manera más exacta: No es lo suficientemente exacto, decir "los juguetes rojos". Podemos decir: "Busca todos los juguetes que son *completamente* rojos". En este caso, los que tienen unas partes de otros colores, clasifican como "no completamente rojos". – O podemos decir: "Busca todos los juguetes *que tienen por lo menos una parte* roja". En este caso incluimos también a los "parcialmente rojos", y excluimos solamente a los que no tienen *ninguna* parte roja.

Matemática divina

Dios pone cada cosa en su lugar

Cuando Dios creó el mundo, lo hizo de manera ordenada:

Dios separó la luz de la oscuridad. A la luz llamó Día, y a la oscuridad llamó Noche.

Dios juntó las aguas debajo del cielo en un lugar y los llamó Mares, y las apartó de la tierra seca.

Dios creó animales que viven en el agua, y otros que vuelan por el aire, y otros que caminan sobre la tierra.

Dios creó los animales de manera que producen crías de su propia especie: Los gatos paren gatitos, los perros perritos, los elefantes elefantitos. Igualmente en las plantas: De un grano de maíz crece una planta de maíz; de una papa crece una planta de papas; de una pepa de naranja, un árbol de naranjas.

Imagínate cómo sería el mundo si fuera todo desordenado:

¿Cómo sería, si no hubiera distinción entre el día y la noche?
¿y si no hubiera separación entre las aguas y la tierra seca?
¿y si los animales vivieran en cualquier lugar fuera de su hábitat natural?
¿y si al sembrar una semilla no sabrías si va a crecer una planta de maíz, o un árbol de manzanas, o un espino?

¡Qué bueno que Dios creó un mundo ordenado! Mantengamos entonces nosotros también el orden, en la creación de Dios y en nuestro hogar.

¿A dónde vamos desde aquí?

El tema de clasificar objetos está relacionado con la ***teoría de conjuntos*** (*Unidades 7, 8 y 9*).

Las ***seriaciones con números*** se retoman en las *Unidades 14, 20, 27, y 44*, cada vez al ampliar el espacio numérico.

Si desean continuar con el tema del orden, pueden pasar a la *Unidad 8*, "Ordenar objetos según múltiples criterios". Para otro tema, elijan una de las unidades siguientes, o cambien a un tema de números (Bloques II, III, ...).

Unidad 2 - Relaciones

Prerrequisitos:
- *Para la Hoja de Trabajo 2.4, abajo:* Números, suma y resta hasta 20; doble y mitad.

Materiales necesarios:
- Objetos comunes de la casa
- Tarjetitas con números
- Flechas cortadas de papel o cartulina

TALLER

Relacionar objetos de la casa

Aquí continuarán las actividades de comparar, de describir relaciones de pertenencia y de correspondencia, etc, con objetos de la vida diaria: ¿Cuál es más grande? – ¿Cuál pesa más? – ¿A quién pertenece? – ¿De qué es parte? – ¿Con qué se usa? – ¿Para qué se usa? – Etc. *(Vea Pre-Matemática, Unidades 3 y 9).*

Hojas de trabajo

Relacionar figuras dibujadas

Hoja de trabajo 2.1. – **Relacionar figuras iguales**
En cada fila, encuentra y marca la figura que es exactamente igual como la figura a la izquierda.

Hoja de trabajo 2.2. – **Relacionar según el ejemplo**
En cada cuadro, une los pares de figuras que se relacionan como en la muestra dada. – Por ejemplo en el primer cuadro, la muestra representa un cuadrado pequeño unido a un cuadrado más grande. Entonces hay que unir pares de figuras que son iguales, excepto que una es más pequeña y la otra es más grande.

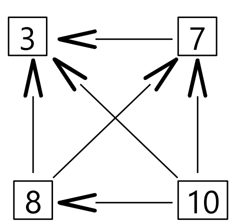
Hoja de trabajo 2.3. – **Continúa el patrón**
En cada línea, sigue dibujando el patrón comenzado hasta el final de la línea. Al final puedes pintarlo con colores.

Hoja de trabajo 2.4. *(Arriba)* – **Encaje exacto**
Une con una línea cada figura pequeña con el cuadrado donde encaja. Tiene que coincidir la forma y también el relleno.

TALLER *(Continúa)*

Representar relaciones con flechas

Relaciones entre números u objetos pueden representarse mediante flechas. Podemos definir el significado de las flechas como queremos. Por ejemplo, podemos usar flechas para representar la relación "es antecesor de". Entonces escribiríamos $4 \rightarrow 5$, porque el número 4 es el antecesor del número 5.



O podemos definir que las flechas significan "es mayor que". Entonces, si tenemos los números 3, 7, 8, y 10, tenemos que colocar todas estas flechas *(vea a la derecha)*.
(Entre cualquier par de números siempre existe una relación "es mayor que", excepto si los dos números son iguales. Entonces esta flecha tenemos que colocar entre todos los pares de números no iguales; solamente tenemos que pensar en qué dirección va la flecha.)

Aliste unas tarjetitas con números y unas flechas cortadas de papel o cartulina. Ponga unos números sobre la mesa (no más de cinco tarjetas a la vez) y defina el significado de la flecha. Que el niño coloque las flechas donde corresponde.

Para comenzar, las siguientes relaciones son fáciles:
"es antecesor de"; "es sucesor de"; "es menor que"; "es mayor que".

Más adelante pueden también intentar las siguientes:
"es el doble de"; "es la mitad de"; "es 2 menos que"; "es 3 más que"; ...

Para variar, puede también usted colocar las flechas sin decir lo que significan; que el niño descubra el significado de la flecha.

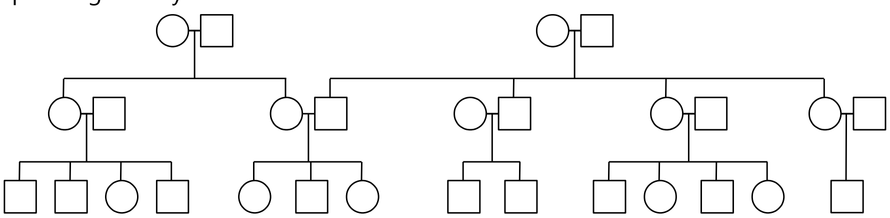
Hoja de trabajo 2.4. **(***Abajo***)**: **Flechas de relaciones**
Estos ejercicios continúan por escrito lo que acabamos de hacer con las tarjetitas y las flechas de papel.
Esta tarea requiere una buena capacidad de razonar. Los niños que dificultan mucho en entenderlo, que lo dejen hasta que sean un poco mayores.

El árbol genealógico

Este es también un tema un poco más complejo. Puede ser difícil de entender para niños menores de 8 años. En este caso, que lo hagan más tarde cuando puedan entenderlo.

Las relaciones de parentesco son otro tipo de relaciones que el niño conoce desde su vida diaria. Una buena herramienta para explorar estas relaciones es el árbol genealógico. En familia se puede elaborar un árbol genealógico de la propia familia, donde figuran los parientes que los niños conocen. Pueden dibujarlo en un papelote grande y pegarlo en la pared.

Un típico árbol genealógico que incluye a la familia nuclear, los abuelos, tíos y primos, se vería por ejemplo así *(derecha)*:



Los círculos representan mujeres y los cuadrados varones. Las rayas cortas horizontales unen matrimonios; las rayas verticales unen padres con sus hijos. En este ejemplo, la propia familia del niño es la que tiene tres hijos; a la izquierda se encuentra la hermana de la madre con su esposo y sus hijos, y a la derecha el hermano y las dos hermanas del padre con sus respectivas familias. Los hijos normalmente se ordenan de mayor a menor.

Habría que completarlo con los nombres de cada persona. Más interesante es si adicionalmente se puede pegar una foto de cada uno.

Según el nivel de entendimiento del niño y según los parientes que conoce, se podrían incluir a parientes más lejanos: bisabuelos; tíos abuelos; primos de los padres con sus familias respectivas; quizás unos primos mayores ya tienen hijos; etc.

Para niños un poco mayores puede ser interesante incluir la fecha de nacimiento de cada uno.

Con este árbol genealógico a la vista, se pueden explorar diversas relaciones de parentesco: ¿Quién es hermano/a de quién? ¿Quién es tío/a de quién? ¿Quién es sobrino/a de quién? ¿Cómo se dice al hermano de mi madre? ¿y a la hermana de mi abuelo? ¿A quiénes se llama "suegros"? – etc.

Matemática divina

Las relaciones de familia y de parentesco son la estructura fundamental de la sociedad humana creada por Dios desde el principio. Para un niño es importante saber adónde pertenece: "Estos son mis papás, estos son mis hermanos, ..." La estructura de parentesco provee este sentido de pertenencia.

A la vez provee una ilustración o un reflejo de diversas relaciones que volvemos a encontrar en la matemática: La relación de "pertenencia" en los conjuntos *(Unidad 7)*, la estructura de árbol *(Unidad 8)*, y otras.

Ahora lo escribimos

Problemas con parentescos:

(*Nota:* Estos problemas pueden ser demasiado difíciles para principiantes. Es preferible tratarlos hacia el *final* del período de Primaria I.)

1) La abuela de mi padre es mi ...

2) El hijo del hermano de mi madre es mi ....

3) ¿Quién es abuelo del hijo de mi primo?

4) Jaime dice: "La suegra de mi padre tiene una única hija; ¿quién es?"

5) ¿Quién es el yerno de mi abuela, si no es mi tío?

Pregunta capciosa:

Dos padres y dos hijos fueron a pescar. Atraparon tres peces, de manera que hubo un pez para cada uno de ellos. ¿Cómo fue posible eso?

Respuesta en el Anexo A.

¿A dónde vamos desde aquí?

Se puede pasar a cualquiera de las unidades siguientes; o cambiar a un tema de números (Bloques II, III, ...).

Unidad 3 - Nos ubicamos en el espacio

Materiales necesarios:

- Objetos comunes del hogar que pueden servir para esconderlos como “tesoro”.
- Flechas cortadas de papel y cinta adhesiva o chinches.

Para fabricar los rompecabezas y juegos de paciencia propuestos:

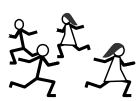
- Cartón grueso o madera contrachapada (triplay)
- Papel grueso o mica de plástico
- Sierrita, cúter
- Un poco de pita o cordel
- Dos cuentas grandes
- Un anillo

Para los educadores

Las ***relaciones espaciales*** (arriba-abajo; adelante-atrás; etc.) son otro elemento esencial de la estructura del universo, y de la matemática. Forman el fundamento de la geometría.
Los niños de primaria pueden experimentar estas relaciones espaciales mediante *actividades manuales*, y mediante juegos que involucran *el movimiento del cuerpo entero*. Todavía sigue esencial en esta etapa, practicar toda clase de movimientos: correr, saltar, girar, trepar, hacer volteretas, juegos de pelota, etc. La "inteligencia espacial" (como la llamó Howard Gardner) se desarrolla también mediante actividades y trabajos manuales como armar rompecabezas, hacer origami, cortar y pegar papel, tejer, coser, barrer, etc.
Estas experiencias físicas son fundamentales para entender más adelante las relaciones espaciales en la teoría y en dibujos (figuras y problemas geométricos, etc). Por eso, los niños de esta etapa necesitan todavía mucha libertad para juegos movidos y actividades manuales. Solamente después de una buena cantidad de experiencias de este tipo, estarán listos para el trabajo con papel y lápiz. Ponga entonces el mayor énfasis en las actividades físicas y prácticas, y espere con las hojas de trabajo hasta que vea que los niños dominan los conceptos con material concreto.

TALLER

Búsqueda del tesoro

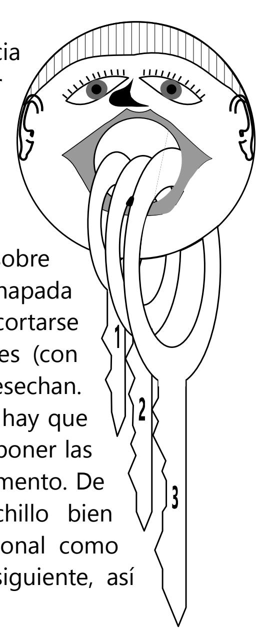


Haga unos juegos de “búsqueda del tesoro”, similares a los propuestos en el libro de Pre-Matemática (Unidad 2). Por ejemplo, comience con una pista que diga donde buscar: “Debajo de la mesa”; “Detrás del lavatorio”; “Encima del armario”; etc. Pero en el lugar indicado todavía no ponga el tesoro; ponga allí un papel con otra pista que diga hacia donde continuar: “10 pasos hacia adelante”; “6 metros hacia la derecha”; “70 centímetros hacia arriba”; “8 pasos en dirección de la puerta”; etc, y así siguiendo por varias pistas hasta llegar al tesoro. – Adapte las indicaciones al rango numérico y las unidades de medida que los niños ya conocen.

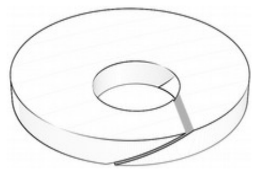
Otra variación consiste en hacer la búsqueda del tesoro en el barrio o en el campo. Se puede hacer de la misma manera como antes, escondiendo papeles con pistas o escribirlas con tiza sobre la acera: “50 pasos en dirección hacia la plaza”; “20 pasos hacia atrás”; “Hacia la izquierda hasta la casa azul”; etc. – O se puede dar al inicio una descripción completa del camino, como en este ejemplo:
“Desde la roca grande caminen 45 pasos hacia el árbol solitario, y encontrarán un tronco cortado. Volteen hacia la izquierda y caminen 93 pasos hasta llegar a una roca roja. Desde allí pueden ver un cerro a la derecha; caminen 80 pasos hacia el cerro, y encontrarán el tesoro.” – Si los niños ya conocen los cuatro puntos cardinales, podemos también decir “hacia el sur”, “hacia el noroeste”, etc.

Juegos de nudos y enredos

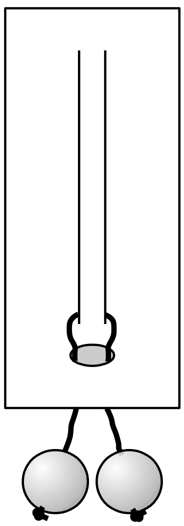
Los siguientes juegos de paciencia desafían la capacidad de entender relaciones espaciales, trabajando con diversos materiales.



El llavero ingenioso (***Hoja de trabajo 3.1***, *arriba)*
Las cuatro piezas deben pegarse sobre un pedazo de madera contrachapada (triplay) o cartón grueso, y cortarse exactamente. Los círculos interiores (con rayas) también se cortan y se desechan. Para meter las llaves en el llavero, hay que cortarlo en la parte más delgada, poner las llaves y volver a pegarlo con pegamento. De preferencia use un cúter o cuchillo bien afilado para hacer un corte diagonal como muestra el dibujo en la página siguiente, así será fácil pegarlo.



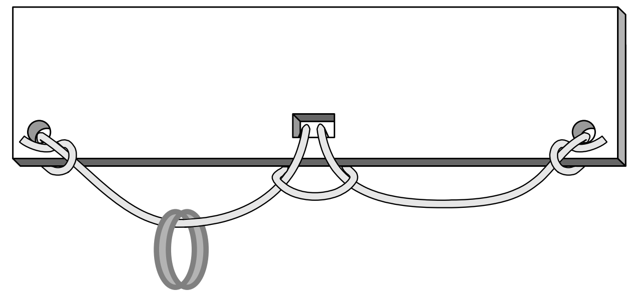
Al inicio, las llaves deben encontrarse en el orden como indican los números (1, 2, 3). La tarea consiste en invertir el orden de las llaves: 3, 2, 1 – por supuesto sin doblar o romper las piezas. Con un poco de ingenio y paciencia lo lograrás.



Las cerezas presas
Este juego se puede fabricar de papel grueso, o de un pedazo de mica de plástico. Debe ser un material suficientemente resistente, pero que se puede doblar fácilmente. Pueden usar el molde de la ***Hoja de trabajo 3.1*** *(abajo)*, o fabricarlo por ustedes mismos: Hagan dos largos cortes rectos paralelos y una apertura ovalada por debajo. El diámetro grande del óvalo debe ser un poco mayor que la distancia entre los dos cortes. Se recomienda reforzar los extremos de los cortes y el borde de la apertura con cinta adhesiva. – Después ate dos cuentas grandes con un pedazo de pita o cordel, según el dibujo. Las cuentas deben ser un poco más grandes que la apertura ovalada, de manera que no pueden pasar por allí.

¿Puedes liberar las "cerezas", sin desatar el cordel?

El anillo atado
Corte una tablita de madera o un pedazo de cartón grueso con una apertura pequeña como muestra el dibujo. La apertura debe ser lo suficientemente grande para que los lazos del cordel puedan pasar, pero que el anillo no pueda pasar. Haga además dos huecos cerca de las dos esquinas inferiores de la tablita, para poder atar los extremos del cordel allí. Ate el anillo con el cordel a la tabla. Fíjese de hacer el lazo del medio exactamente como muestra el dibujo. El cordel debe ser lo suficientemente largo para poder realizar unas manipulaciones con él.
Ahora, la tarea consiste en llevar el anillo al lado derecho – sin desatar el cordel, por supuesto. Aunque el anillo no puede pasar por la apertura de en medio, hay una manera de lograrlo.



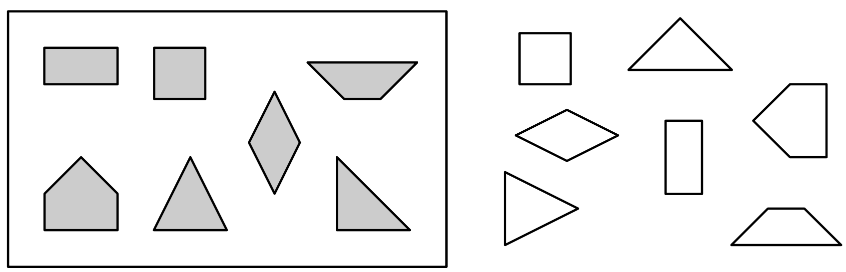
(Si han intentado por varios días resolver estos "enredos" y no pudieron, entonces pueden ver las pautas en el Anexo A.)

Rompecabezas

Armar rompecabezas seguirá siendo una ocupación favorita de muchos niños de esta edad. Ahora podrán poco a poco aumentar la dificultad: rompecabezas con más piezas, o con figuras más complicadas.

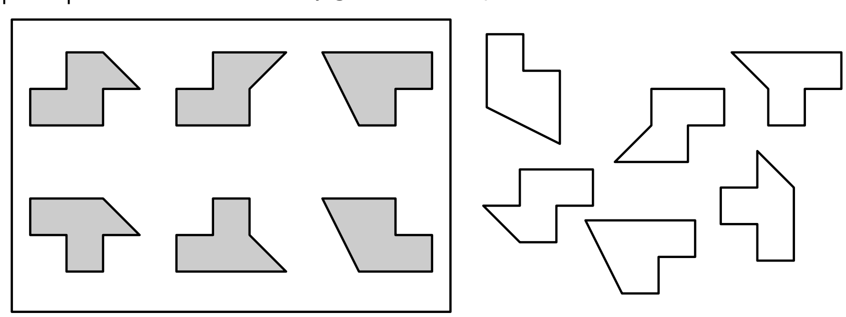
Rompecabezas geométricos sencillos

Poco a poco podemos también introducir rompecabezas geométricos, o sea, que consisten únicamente en figuras geométricas, sin representar dibujos o imágenes. Los ejemplos siguientes pueden fabricarse en casa con cartón grueso o madera contrachapada (triplay).

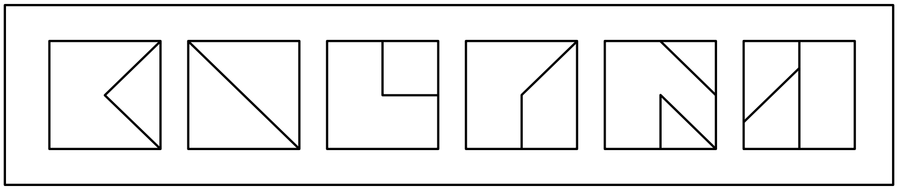


Los más sencillos consisten en simples figuras que tienen que ubicarse en su espacio correspondiente. En el siguiente ejemplo, eso es muy fácil. Al armarlo, de paso pueden aprender los nombres de diversas figuras geométricas:

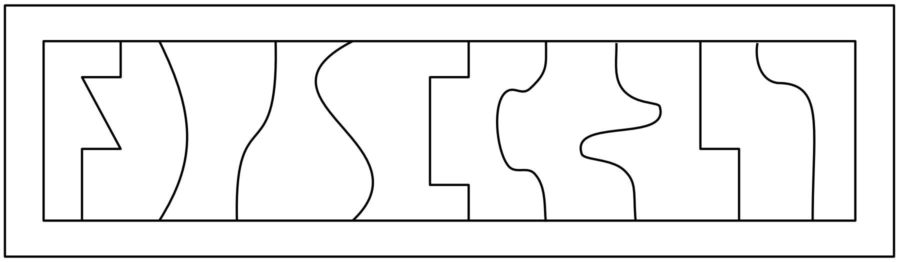
El siguiente ya es más difícil porque las figuras se parecen unas a otras, y son asimétricas, de manera que tienen que voltearse y girarse hasta que la ubicación sea correcta:



En el siguiente ejemplo, se recomienda que los niños principiantes armen primero un solo cuadrado a la vez. Más difícil es desarmar todo e intentar reconstruir los cuadrados desde las piezas mezcladas. *(Vea el dibujo en la siguiente página.)*



Un rompecabezas como el siguiente no es difícil, pero requiere trabajar de manera sistemática para poner las piezas en el orden correcto:



Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 3.2 - "Rompecabezas" sencillos con regletas Cuisenaire

Esta hoja contiene figuras que deben rellenarse con regletas Cuisenaire, de manera que no sobre ni falte ningún cuadrado. Cada figura indica con un número el tipo de regletas que se deben usar. Por ejemplo, si la figura contiene el número 3, significa que debe rellenarse exclusivamente con regletas de 3.

Laberintos

Laberintos topológicos (Hojas de trabajo 3.3, 3.4.)

(Vea en "Principios matemáticos" acerca de la topología.)

Estos laberintos se caracterizan por no necesariamente tener solución, porque contienen un espacio cerrado (resp. dos espacios cerrados en la Hoja 3.2). Se trata entonces de analizar cuáles figuras "pueden salir", o sea se encuentran afuera del espacio cerrado; y cuáles se encuentran encerradas.

Los niños pueden aprender una estrategia sencilla para hacer este análisis: Comenzando con una de las figuras (círculo o triángulo), pintan con un color todos los caminos que pueden alcanzar desde allí sin traspasar una línea. Si en este proceso llegan a una salida del laberinto, la figura está "libre", de otro modo está encerrada. Si la otra figura se encuentra en el espacio pintado, entonces ambas figuras se encuentran en el mismo espacio. En el caso contrario, se pinta con un color diferente el espacio de la otra figura.

En la ***Hoja 3.3***, los cuadros pequeños en el medio representan las cuatro ubicaciones posibles de las dos figuras respecto a un espacio cerrado: 1) ambas afuera; 2) el círculo adentro y el triángulo afuera; 3) el triángulo adentro y el círculo afuera; 4) ambas adentro. Cada laberinto en la hoja corresponde a una de estas configuraciones básicas. Después de pintarlos, identifiquen en cada laberinto a cuál de los cuatro cuadros corresponde.

Los laberintos de la ***Hoja 3.4.*** contienen cada uno *dos* espacios cerrados. La tarea es la misma como en la Hoja 3.2: Pintar los espacios respectivos de las dos figuras, e identificar el tipo de laberinto según los cuadros pequeños en el medio. – Si uno de los espacios cerrados (o ambos) no contiene ninguna figura, una tarea adicional consistiría en encontrar y pintar el espacio cerrado.

Laberintos "normales" (Hojas de trabajo 3.5 a 3.9)

Estos son laberintos comunes donde la tarea consiste en encontrar y trazar el camino desde la entrada hasta la salida, o desde la entrada hasta la meta, o vice versa.

En la ***Hoja 3.5***, el último laberinto está incompleto. Que el niño lo complete según sus propias ideas.

En la ***Hoja 3.8*** arriba, una sola de las cuatro salidas se puede alcanzar.

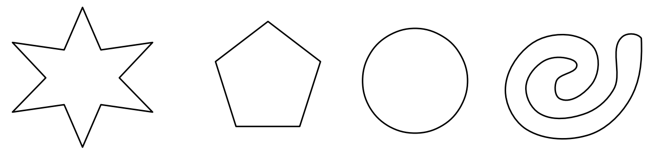
En la ***Hoja 3.8*** abajo, el camino debe alcanzar todas las cuatro esquinas del laberinto, pero no necesariamente en orden.

Los laberintos de la ***Hoja 3.9*** requieren recorrer el camino en el orden de los números: del 1 al 2, del 2 al 3 y del 3 al 4. Como dificultad adicional, el camino nunca debe pasar dos veces por el mismo lugar. O sea, no se puede volver a un lugar o un número por donde el camino ya pasó, y el camino tampoco puede cruzarse a sí mismo. – Los laberintos de esta hoja ya son bastante difíciles, y quizás algún niños estarán tentados a rendirse: "¡No se puede!" Pero en estos laberintos existen varias posibilidades de llegar, por ejemplo, del 1 al 2; entonces si de una manera no funciona, puede funcionar con otro camino.

Principios matemáticos

Topología

La topología es una rama de la matemática que se ocupa de relaciones espaciales fundamentales como "adentro – afuera", estructuras con vértices y aristas o con "nudos" interconectados, etc. Investiga estas estructuras sin tomar en cuenta sus medidas, ni las transformaciones que distorsionan las figuras, con tal que su estructura fundamental queda intacta. Así por ejemplo las siguientes figuras son todas topológicamente equivalentes, porque todas son curvas cerradas que dividen el plano en exactamente dos regiones: la región de adentro y la región de afuera:



O sea, en la topología nos podemos imaginar que las figuras son hechas de jebe y pueden estirarse, doblarse y distorsionarse como queremos.
Una aplicación de la topología son las estrategias para recorrer laberintos. No es necesario tratar este tema sistemáticamente con los niños; pero les damos unos problemas de laberintos a manera de diversión, y para entrenar su razonamiento espacial.

Matemática divina

¿Sabes el camino?

¿Sabes cómo llegar al mercado? ¿o a la estación del bus? En cada cruce de calles tienes que hacer una decisión: ¿Voy a la derecha, a la izquierda, o de frente? Si sabes el camino, haces las decisiones correctas.

Dios promete a los que le aman: "Entonces tus oídos oirán a tus espaldas una palabra que diga: Este es el camino, anden por él; y no echen a la mano derecha, ni tampoco se volteen a la mano izquierda." (Isaías 30:21)

Eso habla no solamente del camino al mercado, o de la salida de un laberinto. La vida misma es a veces como un laberinto. Hay que hacer decisiones: ¿Voy a ayudar a mamá, o voy a jugar con mis amigos? ¿A quiénes elijo como amigos? ¿Qué debo hacer para vivir en paz con mis hermanos? (¿O quiero estar peleado con ellos?)

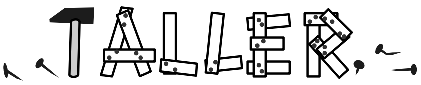
Si Dios promete mostrarte el camino, eso significa: Él te ayuda a hacer buenas decisiones.

¿A dónde vamos desde aquí?

La siguiente unidad continúa con el tema de la ubicación en el espacio. En su lugar pueden también intercalar otro tema, por ejemplo un tema de números.
El tema de la topología se amplía en las Unidades 11 y 12.

Unidad 4 - Girar y reflejar figuras

Materiales necesarios:
- Espejos pequeños
- Geoplano, Ligas
- Madera contrachapada (triplay), sierrita (para el trabajo manual "Sala de espejos").

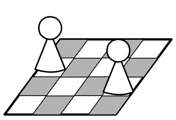


¿Cómo se ve el mundo de cabeza?

Practiquen mirar el mundo “de cabeza”. Los que saben pararse sobre sus cabezas, que lo hagan. Los demás pueden agacharse y mirar por entre sus piernas hacia atrás. Fíjense cómo se vería la sala si el piso fuera el techo y el techo fuera el piso. ¿O cómo se vería el patio si el cielo fuera abajo y la tierra arriba? – Intenten dibujarlo tal como lo han visto.

Gira, gira, ruedita ...

Consigan unos objetos redondos que ya no tienen otro uso: tapas de envases; rollos de cinta adhesiva vacíos; etc. O pueden cortar círculos de cartón grueso. Corten círculos de papel del mismo tamaño como los objetos que tienen. Dibujen alguna figura sencilla en cada círculo de papel, y péguenlo sobre una tapa o rollo. (Si tienen un carro o tren de juguete con ruedas grandes, pueden también pegarlos sobre sus ruedas.)
En una hoja de papel aparte, copien cómo se ven los círculos con sus figuras. Gírenlos un poco (o hagan avanzar el carro un poco), y dibújenlos nuevamente en su nueva posición. Continúen hasta que hayan dado una vuelta completa.



Juego de memoria redondo (Hoja de trabajo 4.1.)

Pega la hoja sobre una cartulina o un cartón y corta los 24 círculos.

Este juego se juega como el juego de memoria normal. Una dificultad adicional consiste en que hay figuras similares y las fichas son redondas, de manera que al encontrarse en una posición diferente, se pueden confundir con otra figura.

Encuentra las figuras giradas (Hoja de trabajo 4.2.)

En cada fila, encuentra la figura que es igual a la primera a la izquierda. La figura puede ser girada, pero no reflejada en espejo.

Si un niño dificulta demasiado con esta tarea, como último recurso puede copiar la primera figura de la línea a una tarjeta y girarla hasta que coincida con una de las figuras dibujadas.

Dibuja figuras giradas (Hoja de trabajo 4.3.)

Cada fila representa una única figura que gira en pasos iguales. En los cuadros vacíos, dibuja las posiciones que faltan allí.

Figuras en el espejo

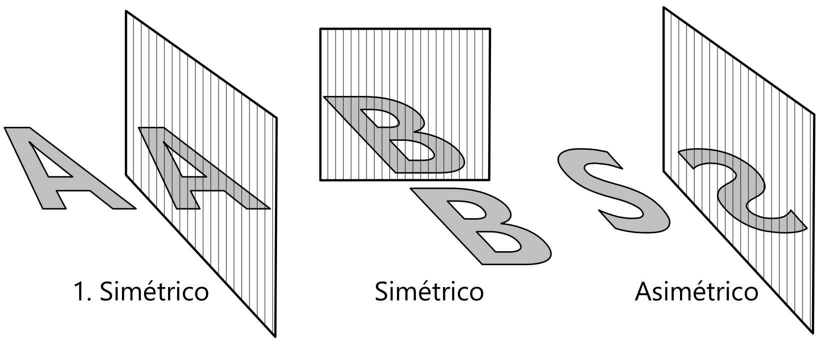
Consigue unos objetos con formas sencillas (p.ej. lápiz, tijera, taza, tornillo, libro, celular, ...) Míralos en un espejo. ¿Puedes colocar el espejo de manera que el objeto en el espejo se vea igual como el objeto real? – ¿Con cuáles objetos puedes hacer eso, y con cuáles no?

Dibuja algunos de estos objetos y sus reflejos en el espejo.

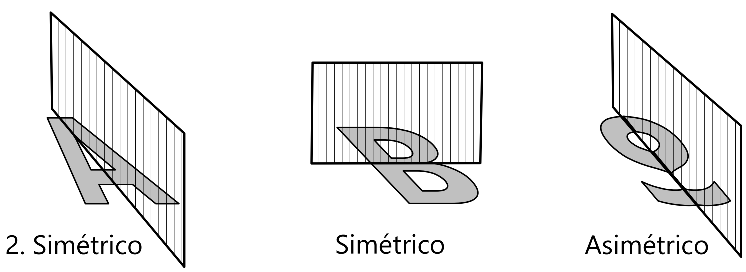
Usa un espejo para leer el siguiente párrafo:

Las figuras que se pueden ver iguales en un espejo, se llaman simétricas.
Si no pueden hacer eso con una figura, es asimétrica.
Muchas letras son asimétricas, por eso se ven diferentes en el espejo.

Nota: Hay dos formas de controlar con el espejo si una figura es simétrica:
1. Coloca el espejo *al lado* de la figura y compara su reflejo en el espejo con la figura original. Si es exactamente igual (¡sin reflejar!), la figura es simétrica.



2. Coloca el espejo *en el medio* de la figura. Si el reflejo en el espejo completa la figura tal como es en realidad, entonces es simétrica.



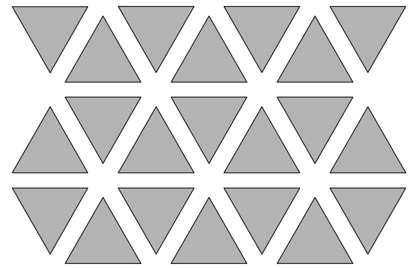
Para que funcione eso, es necesario colocar el espejo exactamente en un eje de simetría. *(En el tomo de Primaria II se tratará el tema de los ejes de simetría un poco más detalladamente.)*

Geoplano reflejado

Esta es una actividad para dos niños. Un grupo de dos necesita un espejo y dos geoplanos iguales. Uno de los niños arma cualquier figura en su geoplano. El otro niño intenta reproducir en su geoplano la misma figura, pero reflejada simétricamente.
Las primeras veces se pueden ayudar con el espejo para construir la figura simétrica. Después intenten construirla sin la ayuda del espejo, y usen el espejo solamente para controlar si la construcción es correcta.

Sala de espejos

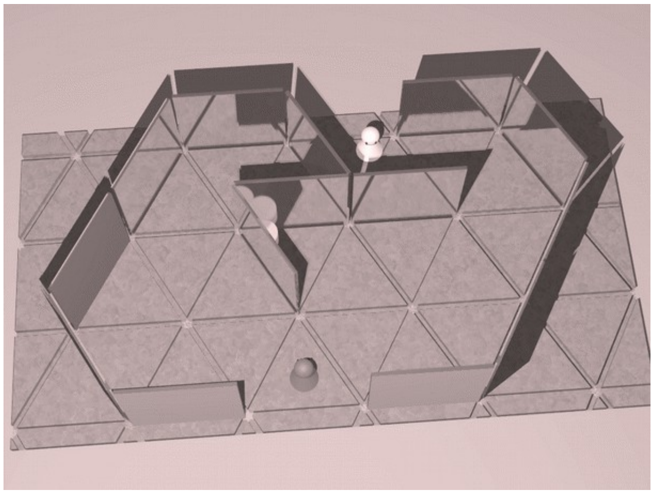
Consiga una cantidad de espejitos pequeños (por lo menos una docena) del mismo tamaño, sin marco. Corte triángulos equiláteros de madera o de triplay grueso, de manera que su lado mide igual como el ancho de un espejito. Péguelos con goma sobre una tabla, según el siguiente esquema, y con espacios tales que se pueden colocar dos espejitos juntos verticalmente entre dos triángulos:



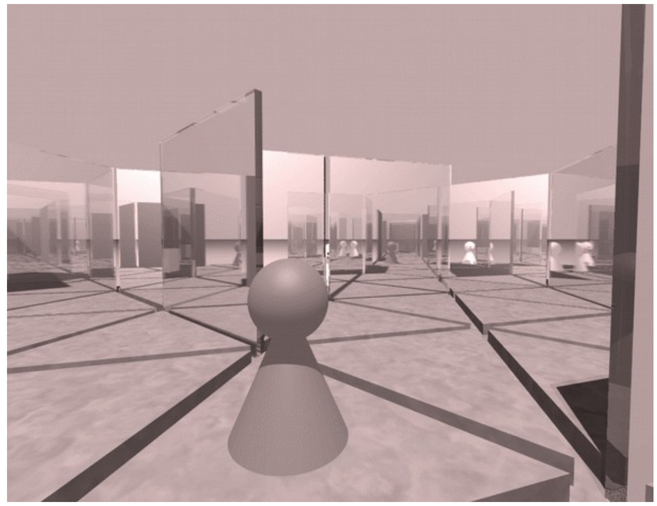
Ahora pueden crear su propia "sala de espejos" para figuras de juego: Coloquen los espejitos de manera que formen una especie de laberinto. Corten también unos rectángulos de cartón grueso o triplay, del mismo tamaño y grosor como los espejitos, para que puedan colocarlos junto con un espejo en los lugares donde no necesitamos ninguna superficie reflejante (por ejemplo en las paredes exteriores del laberinto). Pongan unas figuras de juego y otros objetos pequeños (por ejemplo dados) dentro del laberinto y observen cómo se reflejan en los espejos.

Pueden también jugar el siguiente juego: Alguien arma una "sala de espejos" y fija una meta. Por ejemplo: Hay que llegar desde la entrada a la salida que queda atrás; o: Hay que llegar al dado. Amarren una figura de juego a un hilo. Entonces los demás, uno por uno, intentan conducir la figura por el laberinto hasta la meta, cogiéndola solamente del hilo desde arriba, y mirando el laberinto solamente por la entrada a la altura de la figura, no desde arriba. Para evitar la tentación de mirar desde arriba, pueden colocar ante la entrada verticalmente una hoja de papel o un cartón que deja abierto solamente la vista por la entrada del laberinto.

Los espejos hacen que aun un laberinto relativamente sencillo se vea muy extenso. Comparen por ejemplo el siguiente esquema, que requiere 16 espejos *(Página siguiente)*:



Así se ve este laberinto, visto desde la entrada detrás de la figura abajo:



Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 4.4:
Arriba / Izquierda: Encuentra el reflejo de la figura. En cada fila, encuentra la figura que es igual a la figura a la izquierda, pero reflejada (horizontalmente). Enciérrala con un círculo. – Primero ayúdate con un espejo; después intenta hacerlo sin usar el espejo.
Derecha: Encuentra las figuras simétricas y enciérralas con un círculo.

Vocabulario matemático

Simétrico: Lo que se ve igual cuando se refleja en el espejo.

Asimétrico: Lo que se ve diferente cuando se refleja en el espejo.

Nota: La simetría puede ser horizontal, vertical, o en otra dirección. Por ejemplo la letra A se ve igual si colocamos un espejo a su lado. Con la letra B no funciona eso; pero la B se ve igual si ponemos un espejo encima de la letra, o en el medio de la letra en posición horizontal. Entonces la B también es simétrica, pero no en la misma dirección como la A.
Abajo: Dibuja el reflejo en el espejo. En cada cuadro, coloca un espejo sobre la línea vertical gruesa. Dibuja en el lado derecho del cuadro lo que ves en el espejo.

Investigación

Un misterio de espejos

Si observas tu imagen reflejada en el espejo, notarás que tu mano derecha es la mano izquierda de tu reflejo, y tu mano izquierda es la mano derecha de tu reflejo. *¿Por qué el espejo invierte la derecha y la izquierda, pero no invierte arriba y abajo?*

Intenta responder la misma pregunta para otras situaciones; por ejemplo en el caso de las letras escritas cuando se reflejan en el espejo.

(Si has examinado esta pregunta por mucho tiempo y no encuentras respuesta, puedes consultar el *Anexo A*. ¡Pero no te rindas rápidamente!)

Matemática divina

Reflejando la luz de Jesús

Jesús dijo: "Yo soy la luz del mundo" (Juan 8:12). También dijo a sus amigos: "Ustedes son la luz del mundo" (Mateo 5:14). Si tú amas a Jesús, poco a poco te vas a parecer más a él. Si haces lo que él te dice, vas a ser como un espejo que refleja la luz de Jesús: Si haces lo bueno, las otras personas van a ver en ti lo bueno que es Jesús. (Lee también 2 Corintios 3:18.)

En la matemática se dice que una figura reflejada en espejo es *congruente* a la figura original. Si confiamos en Jesús, él puede hacer este milagro de que nuestra vida sea más y más congruente con la vida de él.

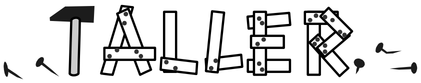
¿A dónde vamos desde aquí?

Las unidades siguientes (5, 6) continúan con el tema de las figuras geométricas y la ubicación en el espacio. Pueden seguir con este tema, o también pasar a otro tema, por ejemplo uno de cálculo con números.

Unidad 5 - Figuras geométricas en el geoplano

Materiales necesarios:

- Geoplano, Ligas



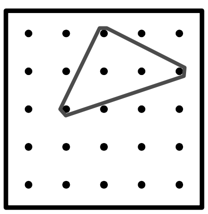
Se recomienda dejar primero que los niños jueguen con el geoplano a su propia manera, y que exploren por su cuenta las distintas figuras que pueden formar. Seguramente querrán formar casas, árboles, estrellas, y otras figuras.

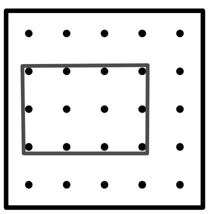
Hoja de trabajo 5.1: Desafíos en el geoplano

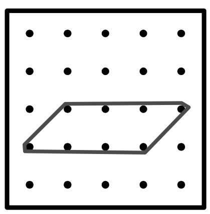
Esta hoja presenta unos ejemplos de figuras que se pueden formar en un geoplano cuadriculado, para que los niños las reproduzcan. Al inicio puede ser un desafío, descubrir cómo se puede formar cada una de estas figuras.

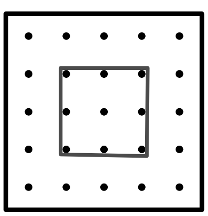
Una vez que los niños entienden cómo funciona, es preferible que no se contenten con reproducir figuras de la hoja, sino que inventen sus propias obras de arte.

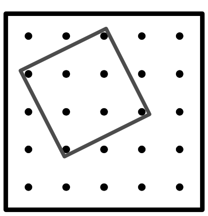
En el transcurso de esta actividad ya podemos identificar muchas figuras geométricas e introducir sus nombres de manera informal. Por ejemplo:

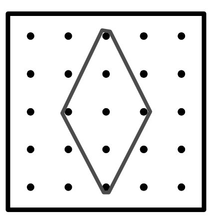

Triángulo
(tres lados)

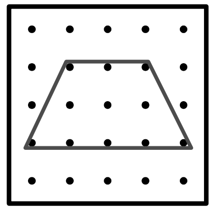

Rectángulo
(cuatro lados
y ángulos rectos)

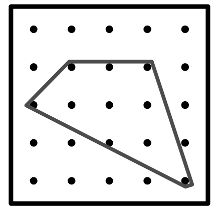

Paralelogramo
(los lados son
paralelos de dos
en dos)

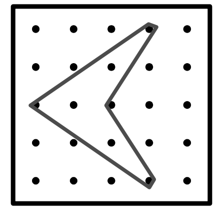

Cuadrado
(cuatro lados
iguales y ángulos
rectos)

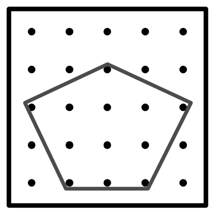

Ojo: ¡Esto es también un
cuadrado!
(¿Puedes demostrar *por qué*?)

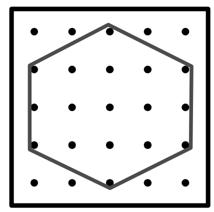

Rombo
(cuatro lados
iguales)

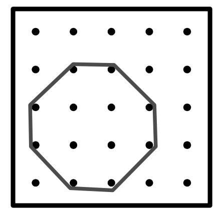

Trapecio
(dos lados
paralelos)


Cuadrilátero irregular (cuatro lados;
sin otras propiedades especiales)


Cuadrilátero cóncavo
(una punta va "hacia
adentro")


Pentágono
(cinco lados)

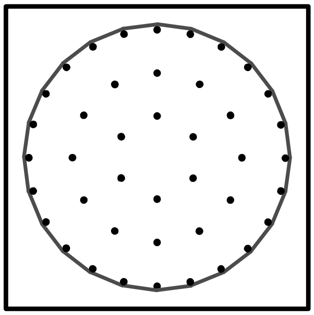

Hexágono
(seis lados)


Octágono
(ocho lados)

En este nivel todavía no hay necesidad de insistir en definiciones geométricamente exactas. Más importante es que los niños se acostumbren a observar y describir con sus propias palabras las propiedades de las figuras que están construyendo. En este proceso podemos poco a poco ayudarles a ampliar su vocabulario geométrico, introduciendo palabras nuevas de manera natural al conversar con los niños acerca de las figuras, y dando explicaciones sencillas donde es necesario:

"ángulo recto" (es como en las líneas del papel cuadriculado);
"paralelo" (líneas que van en la misma dirección);
"horizontal" ("echado"; que no sube ni baja);
"vertical" ("parado"; que va desde arriba hacia abajo);
"convexo" (todas las puntas van "hacia afuera");
"cóncavo" (una o varias puntas van "hacia adentro");
"polígono" (una figura que tiene todos sus lados rectos);
etc.

Hablando de polígonos, podemos desafiar a los niños si pueden construir un *círculo* en el geoplano. Algunos quizás dirán que hicieron un círculo cuando construyeron un polígono con muchos lados. Pero para que sea realmente un círculo, haría falta que sea "redondo por todas partes". De hecho, en el geoplano se pueden construir solamente polígonos. Aun en un "geoplano circular" no podemos realmente representar un círculo, porque entre un clavo y el siguiente la línea es recta y no curvada.



Esto es un geoplano circular. Pero aun el "círculo" más grande que podemos formar aquí, es en realidad no un círculo, sino un 24-ágono; un polígono con 24 lados *rectos*.

Pregunta capciosa:

Una mesa tenía cuatro esquinas, pero el carpintero le cortó una esquina. ¿Cuántas esquinas tiene la mesa ahora?

Respuesta en el Anexo A.

Hoja de trabajo 5.2 *(arriba):* ***Identifica las figuras geométricas***
Une con una línea cada figura con su nombre.

Hoja de trabajo 5.2 *(abajo):* ***Pinta las figuras***
Pinta las figuras geométricas según las siguientes instrucciones:

Triángulos – Rojo
Cuadrados – Celeste
Rectángulos – Marrón
Rombos – Verde

Círculos – Anaranjado
Pentágonos – Amarillo
Hexágonos – Azul

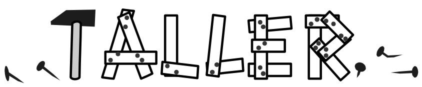
¿A dónde vamos desde aquí?

La siguiente unidad (6) continúa con temas de geometría, pero a un nivel un poco más exigente, porque tomará en cuenta las tres dimensiones del espacio.
En su lugar pueden también pasar a un tema de números.

Unidad 6 - Exploramos las direcciones del espacio

Materiales necesarios:

- Regletas Cuisenaire (cubitos de unidades)
- Colores, tijeras, goma
- Otros materiales para trabajos manuales, según desean



Moviéndonos en todas las direcciones

Muchos niños disfrutan de probar toda clase de movimientos. Que practiquen caminar hacia adelante, hacia atrás, y dando pasos hacia los costados. Después podemos indicarles que existen dos direcciones adicionales en las que no podemos "caminar": hacia arriba y hacia abajo. Dentro de la sala podemos ponernos de cuclillas (eso es un movimiento "hacia abajo"), y podemos saltar hacia arriba; o quizás podemos subir a una silla y bajar otra vez. En el patio podemos apoyar una escalera hacia la pared y subir y bajar por ella; o podemos trepar un árbol.

Intenten dar vueltas en todas las direcciones del espacio. Por ejemplo podemos girar alrededor de un "eje" vertical (dar vueltas estando parados). Pero también podemos girar hacia adelante o hacia atrás como si fuéramos ruedas (dando volteretas hacia adelante y hacia atrás). O podemos echarnos al piso y dar vueltas hacia la derecha y hacia la izquierda. (A algunos niños les gusta hacer eso afuera sobre el pasto en una pendiente, dejándose rodar hacia abajo dando vueltas.) ¿Y pueden también desde la posición parada dar una vuelta completa hacia el costado? ¿Qué movimiento sería ese?

Hagan un poco de gimnasia: Una persona da las direcciones. Los demás estiran sus dos brazos juntos en la dirección indicada: "¡Arriba! – ¡Derecha! – ¡Izquierda! – ¡Arriba! – ¡Atrás! – ¡Adelante!", etc. Después hagan lo mismo con el pie derecho, después con el pie izquierdo. Por último: ¿Pueden hacerlo con los brazos y un pie juntos?

Entrenamos la imaginación tridimensional

Exploren unas preguntas acerca de la ubicación de cosas que no se pueden ver directamente. Por ejemplo, si viven en una casa de varios pisos: ¿Cuál habitación se encuentra directamente debajo de nosotros? ¿y encima de nosotros? ¿Qué cosa se encuentra detrás de esta pared? (Puede ser otra habitación, pero puede ser también la calle o el patio.) – Paseen por varias habitaciones e intenten responder a estas preguntas.
(Los arquitectos y los constructores de máquinas tienen que ser buenos en responder preguntas como estas.)

Si tienen una casa de muñecas con diversas habitaciones, pueden explorar preguntas similares allí. O si tienen un material de construcción como Lego, pueden usarlo para construir un modelo de su casa, o inventar sus propias casas. Si quieren construirla completa con escaleras etc, necesitarán bastante imaginación tridimensional.

Si se encuentran en una zona montañosa, pueden hacer lo mismo en caminatas y viajes: ¿Qué lugar se encuentra detrás de este cerro? – ¿Qué lugares podremos ver desde la cumbre de este cerro? – ¿Cuál de estos cerros es el que antes vimos desde el otro lado?

Trabajos manuales tridimensionales

Algunos trabajos manuales son ideales para explorar las tres dimensiones del espacio: Origami; armar recortables; también unos trabajos de carpintería.

La ***Hoja de Trabajo 6.2.*** contiene dos modelos recortables – una casa y una torre – que los niños pueden pintar, recortar y armar.

Hojas de trabajo

Identificar las direcciones del espacio en dibujos

La ***Hoja de Trabajo 6.1*** reta a los niños a identificar las direcciones en las que miran las figuras dibujadas, según las indicaciones dadas en la hoja.

Hoja de Trabajo 6.3 *(arriba)* **– *Construir figuras de cubitos***

Usa cubitos de unidades de las regletas Cuisenaire para construir las figuras dibujadas en la primera fila. Después mira las figuras verticalmente desde arriba. Debes poder reconocer las formas dibujadas en la segunda fila. En la hoja, une con una línea cada forma de la segunda fila con su dibujo correspondiente de la primera fila.

*Inventa unas construcciones propias de cubitos y dibújalas desde diferentes perspectivas.

Hoja de Trabajo 6.3 *(en el medio y abajo)* **– *Relacionar dibujos tridimensionales***

Las tres secciones de esta parte muestran objetos tridimensionales en diferentes perspectivas: A la izquierda, vistos desde adelante. A la derecha, vistos verticalmente desde arriba. En la sección de abajo, el área en que se apoya el objeto sobre el suelo. Para entender mejor esta última parte, podemos imaginarnos que colocamos el objeto sobre arena: el dibujo muestra la huella que dejará el objeto.

Une con líneas los dibujos que representan objetos iguales. Por ejemplo, en cada una de las tres secciones aparece un barco. Unimos con una línea el barco de la sección izquierda con el barco de la sección derecha, y ambos con el barco de la sección de abajo.

OJO: Puede haber algunos objetos que no se relacionan con ninguno de las otras secciones; entonces esos se quedan sin línea.

Matemática divina

El espacio: Tres en uno

El espacio tiene tres *dimensiones* o pares de "direcciones": adelante-atrás; de costado (izquierda-derecha); y vertical (arriba-abajo). Sin embargo, el espacio es uno solo; no podemos separarlo en dimensiones separadas.

Podemos decir que esto es un reflejo o una ilustración de la persona de Dios – aunque nunca llegaremos a entender completamente quién y como es Dios. Pero él también es uno solo, y sin embargo reúne dentro de sí las tres "dimensiones" de Dios Padre, Dios el Hijo (Jesús), y el Espíritu Santo. Estos tres a veces se manifiestan como "personas" separadas, y sin embargo no se puede realmente separar a uno de ellos de los demás.

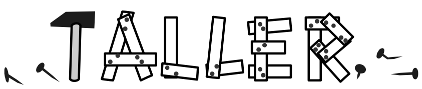
¿A dónde vamos desde aquí?

Toda clase de juegos de construcción *(Unidad 62)* son buenos para seguir entrenando la "inteligencia espacial". – O sigan con cualquier otro tema.

Unidad 7 - Primeras nociones de conjuntos

Prerrequisitos:
- Actividades de clasificar y ordenar objetos *(Unidad 1)*

Materiales necesarios:
- Objetos comunes del hogar
- Bloques lógicos
- Cartulinas grandes
- Tarjetitas con números



El orden en la casa

Vuelvan a hacer algunas de las actividades de la *Unidad 1*, clasificando y ordenando diversos objetos del hogar. Eso es una preparación para los pasos hacia la abstracción que siguen.

El orden se puede expresar mediante conjuntos

Durante estas actividades de clasificar y ordenar objetos, introducimos las palabras "conjunto" y "elemento". Por ejemplo, estamos poniendo todos los animales de peluche en una caja, y dejamos afuera todo lo que no son animales de peluche. Decimos: "En esta caja tenemos el *conjunto* de los animales de peluche." – "Este osito es un *elemento* del conjunto de peluches, lo ponemos a la caja." – "Este carrito no lo ponemos a la caja. No es un *elemento* del conjunto de peluches." (o: "no *pertenece* al conjunto de peluches".) – "¿Cuántos *elementos* tiene el *conjunto* de peluches?"
En una primera etapa representamos los conjuntos por cajas o bolsas y colocamos los elementos adentro. En un segundo paso representamos un conjunto por un círculo dibujado en una cartulina grande. Colocamos dentro del círculo lo que pertenece al conjunto, y afuera lo que no pertenece. Así nos acercamos a la notación mediante diagramas de Venn.
(Imagen: El círculo representa un conjunto de animales de peluche.)

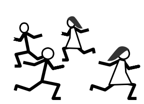
Conjuntos de bloques lógicos

Los bloques lógicos son una buena herramienta para trabajar con conjuntos. Trabajamos nuevamente con el círculo dibujado en cartulina: "Pon dentro del conjunto todos los bloques rojos." – "Forma el conjunto de los bloques delgados". – Podemos intentarlo también con una combinación de dos propiedades: "Forma el conjunto de los triángulos pequeños." – Pero *todavía no trabajamos con uniones o intersecciones de conjuntos*; eso viene en la *Unidad 8*.

Conjuntos de números

Usamos tarjetitas con números en del rango numérico que el niño domina. Le pedimos que las coloque dentro o fuera del conjunto, según criterios que puede entender: el conjunto de todos los números menores a 12, los números mayores a 15, los números pares, los números que contienen la cifra 2, etc.

Conjuntos de personas



Definimos en el piso los límites de un conjunto grande. Si el grupo que participa es pequeño, el límite puede ser un aro de hula. Si necesitamos más espacio, podemos extender una soga en forma de círculo, o dibujar con tiza un círculo grande en el piso.
Con este conjunto podemos jugar un juego similar a "Tierra – Mar" (Libro de Pre-Matemática, Unidad 7): La

persona que dirige, anuncia quiénes deben estar dentro del conjunto, por ejemplo: “¡Todas las niñas!” Entonces todas las niñas tienen que saltar dentro del conjunto; y todos los varones que estaban dentro del conjunto tienen que salir. Así continúa: “¡Todos los que ya cumplieron ocho años!” – “¡Todos los que tienen hermanos menores!” – “¡Todos los que tienen una A en su nombre!” – etc.

Definiendo el universo

En el transcurso de estas actividades, quizás surge la pregunta: ¿Cuáles son los objetos que consideramos para clasificarlos? – Por ejemplo, si queremos formar un conjunto de “todos los animales de peluche”, ¿qué exactamente significa “todos”? Quizás un niño tiene un peluche guardado en su cuarto, y se le ocurre traerlo también para completar el conjunto. ¿Y qué de los peluches del vecino al lado? – Es bueno conversar acerca de esta pregunta: ¿Qué exactamente queremos decir con “todos los animales de peluche”? ¡Seguramente no pretendemos juntar todos los peluches del mundo en nuestra caja! Cuando dijimos “todos”, hemos asumido tácitamente que se sobreentiende “todos los que tenemos en la casa”; o quizás “todos los que están aquí en esta habitación”. En otras palabras, hemos *limitado* nuestro “universo” de objetos que tomamos en cuenta para la actividad.
“Universo” significa propiamente: el mundo entero y todo lo que hay en él. Pero no podemos usar “todos los objetos del mundo” para jugar nuestros juegos de conjuntos. Tenemos que seleccionar cierto número de objetos y decir: “Este es nuestro “mundo” para este juego. Usamos solamente estos objetos. Esto lo llamamos nuestro *universo*, o nuestro *conjunto universal*.” El conjunto universal puede ser la entera caja de juguetes, o todos los servicios y cubiertos que hay en la cocina, o todo lo que hay en el salón ... dependiendo de la tarea que proponemos, por supuesto.
En las actividades con bloques lógicos, el universo consiste naturalmente en todos los bloques de la caja. – Cuando usamos las tarjetitas de números, el universo consiste en todas las tarjetitas que tenemos a disposición (que es en realidad un subconjunto arbitrario de “todos los números”). – Al formar conjuntos de personas, el universo son todas las personas que participan en el juego.

Cuando usamos el círculo dibujado en cartulina, tenemos una manera práctica de visualizar el conjunto universal: Ponemos todos los objetos del “universo” sobre la cartulina. Los objetos que pertenecen al conjunto, se ponen dentro del círculo. Los que no pertenecen, se ponen fuera del círculo, *pero todavía sobre la cartulina*. Así está claro: Nuestro “universo” es todo lo que está sobre la cartulina. Formamos un conjunto particular con elementos *de este universo*.

Matemática divina

Discernir y distinguir

Al formar conjuntos, tenemos que distinguir de cada elemento si “pertenece” o “no pertenece” al conjunto. Eso no es ningún juicio de valor; es simplemente la aplicación de los criterios que hemos establecido para formar el conjunto.
Pero es esta misma capacidad de distinguir, la que se requiere también para distinguir entre el bien y el mal. Hebreos 5:14 describe a los maduros seguidores de Dios como “los que por medio de la práctica tienen los sentidos entrenados para distinguir entre lo bueno y lo malo." Esta capacidad de discernir no viene al seguir a un líder o a las costumbres de una iglesia. Viene al aplicar conscientemente los criterios que Dios mismo nos ha dado en su palabra para distinguir entre lo bueno y lo malo. Y eso es lo mismo como lo que hacemos en la matemática cuando aplicamos los criterios de si un elemento “pertenece” o “no pertenece” a un conjunto. Elijamos aquellas decisiones y acciones que pertenecen al conjunto de lo bueno.

Ahora lo escribimos

Diagramas de Venn y notación de conjuntos por extensión

Comience con dibujar en papel algunos de los conjuntos que formaron usando el círculo dibujado en cartulina. Que el niño dibuje un círculo, y dentro del círculo los objetos o números que puso dentro del conjunto.
En un paso posterior podemos dibujar también el conjunto universal. Este se dibuja normalmente en forma de un rectángulo. Así, nuestro diagrama de Venn representa exactamente lo que ya hicimos en la cartulina.
– Quizás habrá que mencionar que no es ninguna “ley” que los conjuntos se dibujen como círculos resp. rectángulos. Les podemos dar cualquier forma que deseamos. En la *Unidad 1,* Hojas de trabajo 2 y 3, también hemos dibujado conjuntos, con formas variadas.
Después podemos introducir un poco de notación simbólica: Damos a cada conjunto un “nombre” que

consiste en una sola letra. Para comenzar, podemos usar una letra que está relacionada con una propiedad característica del conjunto. Por ejemplo, el conjunto de los triángulos puede llamarse T. El conjunto de los peluches puede llamarse P. Escribimos estos "nombres" en la circunferencia de cada círculo.
Después anotamos debajo de cada círculo el conjunto completo por extensión, enumerando sus elementos entre llaves {}. Por ejemplo, el conjunto de los peluches podría escribirse así:

P = {osito blanco; osito marrón; gatito; ovejita; león; jirafa}

(Nota: Se recomienda no usar las letras N, Q, R, Z para nombrar conjuntos, porque estas letras tienen significados especiales en el contexto de conjuntos con números. – La letra U por convención se usa normalmente para el conjunto universal.)

Conjuntos arbitrarios

Hasta ahora hemos descrito conjuntos mediante una propiedad común: "conjunto de peluches"; "conjunto de los números pares"; etc. *(Eso es una forma, aunque inexacta, de definir conjuntos "por comprensión". La forma exacta de hacer eso se introducirá recién en el nivel de Secundaria I, porque requiere entender conceptos de álgebra.)* – Pero ahora que hemos introducido la notación por extensión, podemos definir conjuntos arbitrarios con elementos cualesquieras. Por ejemplo, podemos definir un conjunto E = {8; 9; 13; 17; 18}, o un conjunto F = {manzana; pera; fresa; plátano}. Podemos también definir conjuntos "locos" como por ejemplo: L = {h; 29; el sol; mi gato; la casa del vecino; mi canción favorita}. Claro que este conjunto no lo podemos efectivamente formar sobre nuestra cartulina; pero ¿quizás podemos dibujarlo?
Forme o dibuje unos conjuntos arbitrarios, y que los niños los anoten por extensión. O al revés: Anote unos conjuntos arbitrarios por extensión, y que los niños los formen sobre la cartulina (si es posible), o los dibujen como diagrama de Venn. Si los conjuntos contienen letras o números como elementos, podemos representar estos mediante tarjetitas.

Vocabulario matemático

Conjunto: Una colección de objetos cualesquieras (cosas, palabras, letras, números, etc.)

Elemento: Objeto que pertenece a un conjunto.

Cardinal de un conjunto: El número de elementos que contiene el conjunto.

"Universo" o **conjunto universal:** El conjunto de todos los objetos que tomamos en cuenta para formar conjuntos específicos.

Símbolos $\in$, $\notin$

En un paso siguiente introducimos los símbolos $\in$ (es elemento de ...) y $\notin$ (no es elemento de ...). – En vez de decir "es elemento de ...", muchos prefieren decir "pertenece a ...". Eso es un poco más sencillo de decir. Pero si decimos "es elemento de ...", ayudamos a los niños a recordar el símbolo, porque este es una letra E redondeada (E de "elemento").
Entonces, debajo de la notación por extensión de los conjuntos formados anteriormente, podemos mencionar algunos elementos del universo, indicando si son o no elementos de nuestro conjunto. Por ejemplo, si tenemos un conjunto M de los números menores a 8, lo habremos anotado así:

M = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}

Entonces podemos escribir debajo, por ejemplo:

$2 \in M$ $5 \in M$ $9 \notin M$ $12 \notin M$ (etc.)

Si un niño hizo actividades concretas de clasificar y ordenar objetos desde el inicio, no tendrá dificultad en entender los conceptos básicos de la teoría de conjuntos. Lo único que puede presentar dificultades, es la notación abstracta. Allí tenemos que respetar el desarrollo natural de los niños y esperar con introducir esta notación, hasta que estén listos para ello.

Cardinal de un conjunto

El "(número) ***cardinal***" de un conjunto es ***el número de sus elementos***. Se escribe **n(M)**, donde M es el "nombre" de un conjunto. Por ejemplo:
Si B = {conejo; ratón; ardilla; chinchilla}, entonces n(B) = 4, porque el conjunto B tiene 4 elementos.
Esto es también algo muy sencillo, algo que los niños ya han hecho muchas veces, cada vez que contaron objetos. Lo único nuevo es el término técnico, "cardinal", y la notación.
Podemos practicarlo con los conjuntos que ya hemos dibujado y anotado, anotando su cardinal debajo del conjunto.

Hojas de trabajo

La ***hoja de trabajo 7.1*** repasa y refuerza estas notaciones. De los elementos enumerados a la derecha, hay que anotar de cada uno si es o no elemento del conjunto respectivo. Además falta completar el diagrama de Venn del conjunto P, y la notación por extensión del conjunto D. Al final hay que anotar los cardinales de cada conjunto.

El propósito de esta hoja no es introducir notaciones nuevas. Se debe usar como repaso, *después* de haber hecho las actividades prácticas del taller y las actividades de notación descritas en esta sección.

En la ***Hoja de trabajo 7.2*** hacemos en el papel la actividad de formar conjuntos, según criterios dados, como antes lo hicimos con objetos concretos.

¿A dónde vamos desde aquí?

Podemos continuar con el tema de conjuntos y clasificaciones *(Unidad 8)*; o podemos pasar a otro tema, por ejemplo de cálculo con números.

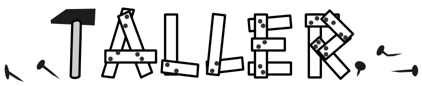
Unidad 8 - Ordenar objetos según múltiples criterios

Prerrequisitos:

- Actividades de clasificar y ordenar objetos *(Unidad 1)*
- Primeras nociones de conjuntos *(Unidad 7)*

Materiales necesarios:

- Diversos objetos de la casa
- Bloques lógicos
- Tarjetitas con números
- Cartulinas grandes



En esta unidad volvemos a clasificar y ordenar objetos como ya lo hemos hecho *(Unidades 1 y 7)*. Pero esta vez tomamos en cuenta dos o más criterios a la vez. Para hacer visible este orden, utilizaremos los siguientes métodos: la ***tabla (o Diagrama de Carroll)***; el ***diagrama de Venn***; y la estructura de ***árbol.***

Ordenar objetos en una tabla

En una cartulina grande, dibuje una tabla según el siguiente esquema:

Si vamos a ordenar juguetes, podríamos usar p.ej. los siguientes criterios *(vea el siguiente dibujo)*: El material (de madera, de plástico, o de metal), y el color (amarillo, azul, rojo).

Para poder usar la tabla varias veces, se recomienda no escribir las palabras directamente en la cartulina. Por ejemplo, podemos escribir cada palabra en un papel aparte, y poner estos papeles sobre la cartulina o a su lado, por los bordes.

	De madera	De plástico	De metal
Rojo			
Azul			
Amarillo			

Entonces colocamos los juguetes sobre la tabla, cada uno dentro del cuadro correspondiente. Por ejemplo el carrito rojo de metal se pone en el cuadro marcado con una X, en la fila "Rojo" y en la columna "De metal".

	De madera	De plástico	De metal
Rojo			X
Azul			
Amarillo		Z	

Quizás algunos cuadros quedarán vacíos, eso no es ningún problema. Por ejemplo si no tenemos ningún juguete amarillo de plástico, el cuadro marcado con Z queda vacío.
También, algunos juguetes quedarán fuera del cuadro. Por ejemplo, este cuadro no tiene ninguna fila para juguetes blancos o verdes; y no tiene ninguna columna para peluches; esos juguetes quedan afuera.

	Gruesos	Delgados
Rojo		
Azul		
Amarillo		

La misma actividad se puede hacer con ***bloques lógicos***. Por ejemplo, podemos colocar cada bloque en su cuadro correspondiente en la tabla a la izquierda.
Podemos hacer tales tablas para cualquier combinación de dos propiedades de los bloques: Color y grosor (como en el ejemplo), color y forma, tamaño y forma, etc.
Igualmente podemos ordenar ***tarjetitas con números.*** Por ejemplo podemos colocar tarjetas con los números de 1 a 20 sobre la tabla a la derecha, cada número donde corresponde:

	< 6	De 6 a 10	> 10
Pares			
Impares			

Dibujen y anoten en papel algunas de las tablas que formaron con objetos concretos en estas actividades.

Hojas de trabajo

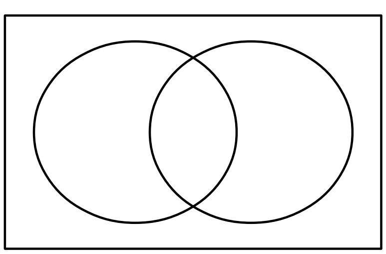
Hoja de trabajo no. 8.1: Usen las tarjetas de la ***Hoja de trabajo no. 8.2***, las primeras dos series. Corten las tarjetas y ordénenlas en las tablas según los criterios indicados. (Cada cuadro contiene la combinación de los atributos indicados en el margen superior, directamente encima; y en el margen izquierdo, a la misma altura.) – Todavía no peguen las tarjetas sobre la hoja; las necesitaremos otra vez para las Hojas de trabajo no. 8.5. y 8.6.

Hoja de trabajo no. 8.3:
Arriba, izquierda: Dibujen en cada cuadro la figura que corresponde. (Las figuras en el margen superior indican la forma; las figuras en el margen izquierdo indican el relleno.)
Arriba, derecha: Llenen la tabla de sumas y la tabla de multiplicaciones. Ejemplo: El 9 se encuentra en la fila del 2 y en la columna del 7, por eso entra allí el resultado de la suma 2 + 7. *(Los niños que todavía no saben multiplicar, llenan solamente la tabla de sumas.)*
Abajo: Escriban números en las tablas según los criterios indicados. En la tabla izquierda, usen los números de 1 a 20; en la tabla derecha, de 0 a 25. *(Los niños que todavía no saben multiplicar, llenan solamente la tabla izquierda.)*

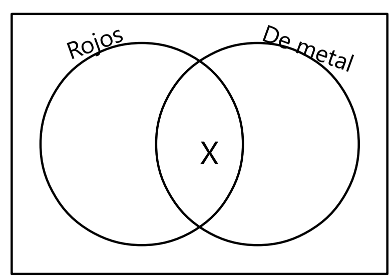
TALLER

Ordenar objetos en un diagrama de Venn

Hacemos la misma actividad de los bloques lógicos con un diagrama de Venn dibujado en cartulina:

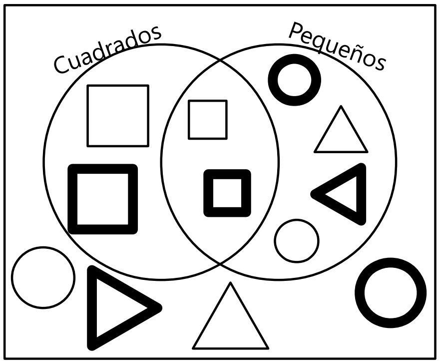


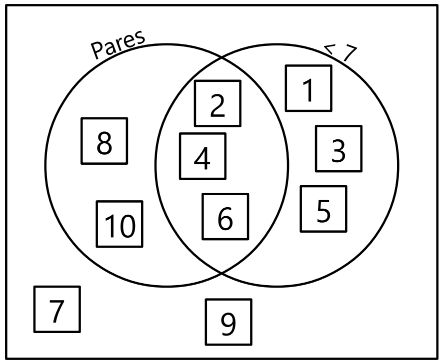
Solamente que aquí no podemos dibujar conjuntos para dos o tres colores; porque al operar con conjuntos existen solamente dos posibilidades: un elemento o pertenece al conjunto, o no pertenece. Entonces no podemos ordenar por “rojo”, “azul” y “amarillo”; solamente podemos ordenar por “rojo” y “no rojo”. En el siguiente ejemplo tenemos un conjunto para juguetes rojos y un conjunto para juguetes de metal. Entonces tendríamos que colocar el carrito rojo de metal en la intersección, marcada con una X:



Nota: ¿Qué pasaría si usáramos ambos conjuntos para colores, por ejemplo un conjunto significaría “rojo” y el otro “amarillo”? – En particular, ¿qué significaría en este caso la intersección?
- Se puede plantear a los niños esta pregunta para que razonen; o se puede hacer un ejemplo de este tipo y ver cuál es el resultado.

Las actividades con ***bloques lógicos*** y con ***tarjetitas de números***, como las descritas más arriba, también pueden hacerse con diagramas de Venn. La ilustración a continuación muestra dos ejemplos resueltos, uno con bloques lógicos y uno con tarjetas de números:

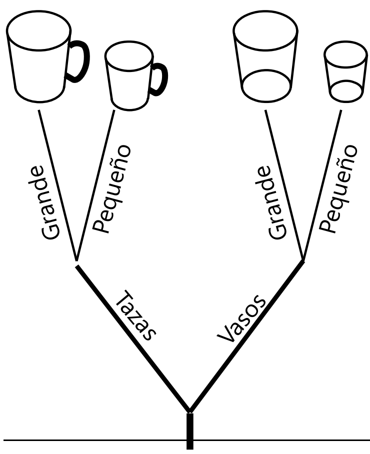




Dibujen y anoten en papel algunos de los diagramas que formaron con los objetos concretos en estas actividades.
Hoja de trabajo no. 8.4: Llenar los diagramas según las indicaciones.

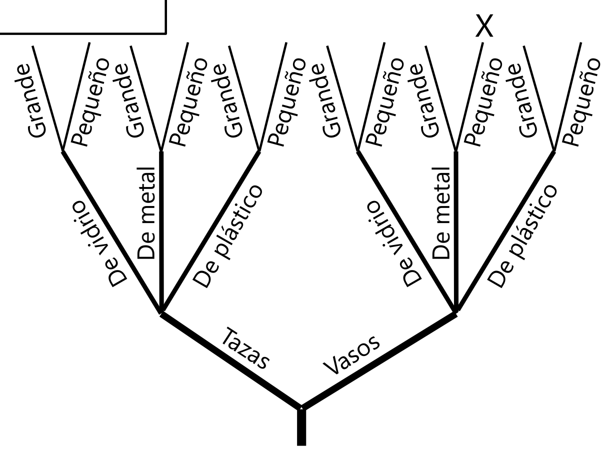
Ordenar objetos en un árbol

Como en las actividades anteriores, dibujamos la estructura (en este caso el árbol) en una cartulina grande, y colocamos cada objeto donde corresponde:



Vemos que los objetos se colocan solamente en las terminaciones de las últimas ramas, pero no en los puntos internos de ramificación. El árbol se "lee" desde abajo hacia arriba, siguiendo cualquier rama. Las propiedades de las ramas principales gobiernan sobre todas las ramas menores que proceden de ellas: Una vez que hemos entrado por la rama grande a la izquierda ("tazas"), podemos encontrar diversas ramas menores que describen otras propiedades; pero a partir de ahora, todos los objetos en esas ramas tienen que ser tazas.

Podemos combinar más propiedades, como en el ejemplo de abajo donde tomamos en cuenta también el material:
En este árbol, un vaso pequeño de metal se colocaría en la rama marcada con X.



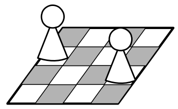
Estos diagramas de árbol pueden usarse igualmente para las actividades con ***bloques lógicos*** y con ***tarjetitas de números.***

Dibujen y anoten en papel algunos de los árboles que formaron con los objetos concretos en estas actividades.

Hoja de trabajo no. 8.5 y 8.6: Usen las tarjetitas de la Hoja 8.2. La primera serie es para la Hoja 8.5, la segunda para la Hoja 8.6. Coloquen las tarjetas en los cuadros al final de las ramas del árbol, según los símbolos indicados en las ramas. (Analicen primero los ejemplos que ya están dibujados en la hoja.)
Hoja de trabajo no. 8.7: Usen las tarjetitas de la Hoja 8.2 (tercera y cuarta serie). Las tarjetas grandes que muestran ramas del árbol se colocan sobre las ramificaciones correspondientes del árbol para indicar el significado de cada rama. Coloquen las tarjetas en los cuadros correctos, como en las hojas de trabajo anteriores.
Hoja de trabajo no. 8.8: Esta hoja presenta un modelo de un árbol que se puede usar para ordenar el entero juego estándar de los bloques lógicos. Por supuesto que esta hoja no es lo suficientemente grande para efectivamente colocar los bloques encima. Para este fin habrá que copiar el árbol en un papelote de tamaño suficiente.

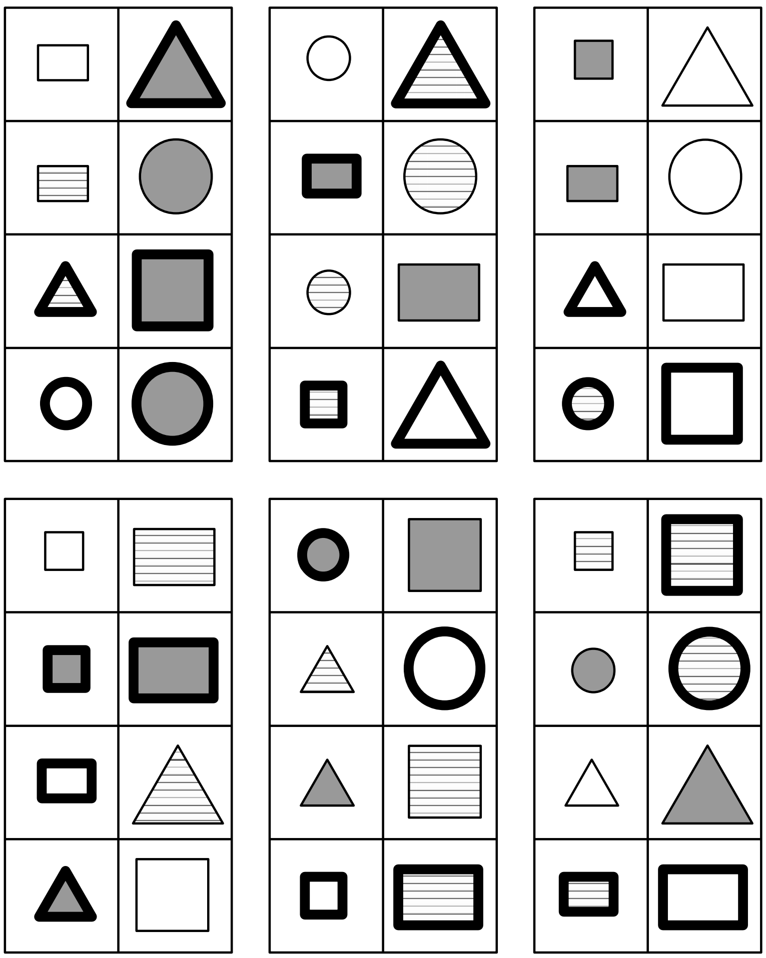
TALLER

Juego: “Bingo” de bloques lógicos



Existen diversas variaciones de jugar al bingo con bloques lógicos. La primera es muy similar al conocido juego con números:
Aliste seis hojas de papel o cartulina con representaciones dibujadas de los bloques, según el modelo que sigue abajo (pero a color). Deben ser de un tamaño suficiente para que en cada cuadro quepa un bloque lógico.

Modelo para 6 hojas de Bingo:

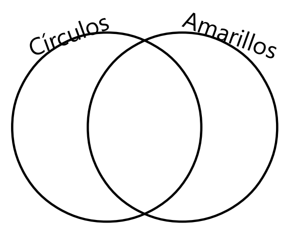


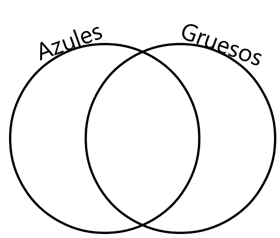
Dibújelo en seis hojas de papel suficientemente grandes. Pinte las figuras con los colores de los bloques (= amarillo, = rojo, = azul). Los bloques gruesos son representados por un borde grueso.
Pueden participar hasta 7 personas en el juego. Una de ellas dirige, los demás reciben cada uno una de las hojas con los bloques dibujados. La persona que dirige pone todos los bloques lógicos en una bolsa no transparente. Los saca sin mirar, uno por uno, y levanta cada bloque en alto para que todos los jugadores lo pueden ver bien. Quien tiene el mismo bloque dibujado en su hoja, llama para reclamarlo, y lo coloca en el cuadro correspondiente de su hoja. Gana quien consigue primero todos los ocho bloques de su hoja.

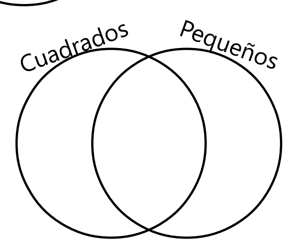
Reglas adicionales (opcionales):
- Cada bloque se muestra solamente durante cinco segundos. Si nadie lo reclama durante este tiempo, el bloque se devuelve a la bolsa.
- Si alguien por equivocación reclama un bloque que no figura en su hoja, la persona que dirige puede quitarle otro bloque de su hoja y devolverlo a la bolsa.
- En vez de mostrar el bloque sacado, la persona que dirige lo mantiene escondido y solamente anuncia sus propiedades: “El círculo azul pequeño delgado.” – “El rectángulo amarillo grande grueso.”

Bingo con conjuntos

El mismo juego se puede jugar con diagramas de Venn, indicando ciertas propiedades de los bloques. En este caso puede haber varios jugadores que reclaman el mismo bloque; lo recibe quien lo reclamó primero.
También habrá varios bloques que se pueden colocar en un mismo campo. La meta del juego consiste en tener por lo menos un bloque en cada campo. O sea, en un diagrama de dos conjuntos: un bloque en el conjunto izquierdo, uno en el conjunto derecho, y uno en la intersección. (El espacio afuera de los conjuntos no participa en el juego.)
Quien piensa haber alcanzado la meta, llama “¡Bingo!”, y la persona que dirige el juego controla si todos los bloques se encuentran en el lugar correcto. Si hubiera bloques mal ubicados, estos se devuelven a la bolsa y el juego continúa.
Por lo demás, se pueden aquí también aplicar las reglas opcionales de la variedad anterior.
Lo siguiente es un ejemplo de cómo se pueden preparar hojas para tres jugadores:





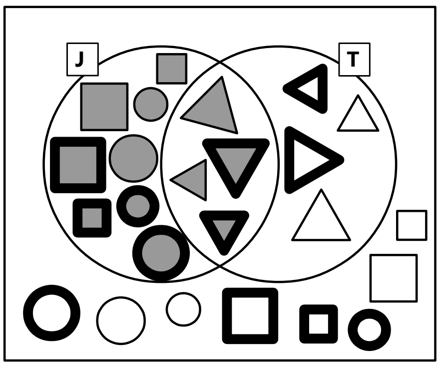


Se puede jugar también con diagramas de tres conjuntos. Pero eso puede ser demasiado complejo para niños de este nivel. Retomaremos esa idea en el libro de Primaria II.

Principios matemáticos

Usar un lenguaje claro para evitar malentendidos y confusiones

Las actividades de esta unidad tienen relación con las operaciones con conjuntos (unión, intersección, diferencia). Estas a su vez están relacionadas con los conectores lógicos en la lógica proposicional. – No hacemos lógica proposicional con los niños a este nivel. Pero se recomienda ya desde ahora guardar ciertas convenciones de lenguaje al hablar de las combinaciones de dos o más propiedades, para evitar confusiones más adelante:



Supongamos que ordenamos bloques lógicos, formando un conjunto J de los bloques rojos, y un conjunto T de los triángulos, según el dibujo a la izquierda. *(Nota: El gráfico representa necesariamente sólo un universo reducido de bloques lógicos.)*

Preguntamos: ¿Qué bloques se encuentran en la intersección de los dos conjuntos? – Respuesta: Los triángulos rojos. – Eso es la conexión lógica "y": La intersección contiene los bloques que son triángulos ***y*** son rojos.

Preguntamos: "¿Qué bloques se encuentran en la *unión* de los dos conjuntos? – Ahora, en el lenguaje diario podríamos decir: "Los triángulos y los rojos". Pero así estaríamos usando nuevamente el conector "y", el cual ya usamos para describir las propiedades de los objetos en la intersección. Así no queda claro qué queremos decir exactamente cuando decimos "triángulos y rojos": ¿Queremos decir "los que son triángulos y a la vez rojos", o sea la intersección? ¿O queremos decir "todos los triángulos más todos los rojos", o sea la unión?

En la lógica de proposiciones, la unión de dos conjuntos corresponde al conector "o": La unión contiene todos los bloques que son triángulos ***o*** rojos (o ambos).

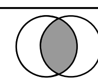
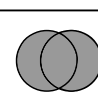
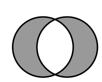
Entonces, para evitar malentendidos, es mejor decir para los objetos en la intersección: "los que son triángulos ***y a la vez*** rojos". – Y para los objetos en la unión: "los que son triángulos ***o*** rojos" (aclarando que esto incluye a los que tienen ambas propiedades).

- Hay una sutileza adicional aquí: En el lenguaje diario, a veces entendemos con "triángulos o rojos": "los que son triángulos, o rojos, pero no ambas cosas a la vez". Pero si es eso lo que queremos decir, es más seguro usar el conector **"o ... o"** (o sea el **"o exclusivo"**): "los que son ***o*** triángulos ***o*** rojos". En la teoría de conjuntos, eso correspondería a la operación de la ***diferencia simétrica***.

Notamos aquí que el lenguaje matemático tiene que ser más exacto que el lenguaje cotidiano. Esa es una de las razones por qué los matemáticos prefieren usar símbolos abstractos: A los símbolos se les puede dar un significado exactamente definido, mientras el lenguaje cotidiano a veces es ambiguo.

Al enseñar a niños, todavía no deberíamos usar demasiados símbolos abstractos. Pero eso implica que debemos evitar ambigüedades en nuestra manera de hablar. Al hablar de relaciones matemáticas, debemos expresarnos en el lenguaje cotidiano de una manera igual de precisa como lo hace el matemático con sus símbolos.

La siguiente tabla resume el uso de los conectores "y" y "o", de la manera que concuerda con la lógica de proposiciones:

Operación de conjuntos	*Conector lógico*	*Lo que significa*
Intersección 	"y"	Los que poseen ambas propiedades a la vez.
Unión 	"o" (inclusivo)	Los que poseen la una o la otra propiedad (o ambas).
Diferencia simétrica 	"o ... o" ("o" exclusivo)	Los que poseen o la una o la otra propiedad (pero no ambas).

¿A dónde vamos desde aquí?

Los niños que entendieron bien las actividades de esta unidad, estarán preparados para entender también las operaciones con conjuntos *(Unidad 9)*. Los que dificultaron en entenderlo, pueden primero trabajar algún otro tema y volver más tarde a los temas de clasificaciones y conjuntos.

Unidad 9 - Operaciones con conjuntos

Prerrequisitos:
- Primeras nociones de conjuntos *(Unidad 7)*.
- Las actividades prácticas de la *Unidad 8*, ordenando objetos según criterios múltiplos. La unidad presente lleva las actividades de la unidad anterior a un nivel más abstracto. Por eso es importante que los niños hayan realizado esas operaciones prácticas primero.

Materiales necesarios:
- Bloques lógicos
- Tarjetitas con números
- Cartulinas grandes con diagramas de conjuntos, según lo explicado en las unidades anteriores

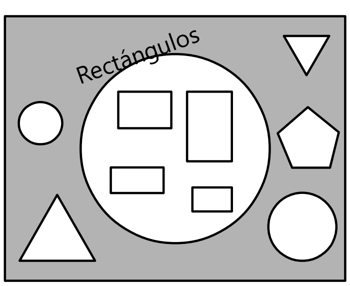
---

TALLER

Si hicieron las actividades prácticas de la unidad anterior, ya efectuaron las operaciones con conjuntos que se presentan a continuación. Solamente que allí no hemos introducido los términos técnicos correspondientes. Ahora expresaremos estas operaciones en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Este taller es entonces ya un "paso hacia la abstracción", partiendo desde el taller de la unidad anterior.

El complemento

Para introducir esta operación, necesitamos un solo conjunto. Por ejemplo, usamos bloques lógicos y representamos en una cartulina el conjunto de los rectángulos. Preguntamos: "¿Cuáles bloques se encuentran *afuera* del conjunto?"
Es posible que algunos niños mencionen propiedades que no tienen que ver con nuestro conjunto específico: "Grandes, pequeños, rojos, amarillos, azules ...". En este caso habría que señalar que también *dentro* del conjunto hay grandes, pequeños, rojos, amarillos y azules. Eso no es entonces la propiedad distintiva.
Otros niños quizás enumeran: "Afuera del conjunto hay triángulos, cuadrados y círculos." Aquí podemos decir: "Esto es correcto. Pero ¿puedes decirlo con menos palabras?"
La manera más breve de decirlo sería: "Afuera del conjunto están los que ***no son rectángulos***." Esto es lo que llamamos el ***complemento*** de nuestro conjunto. En términos de la lógica, eso es la ***negación*** de una propiedad: El complemento de un conjunto es formado por todo lo que ***no*** es elemento del conjunto.



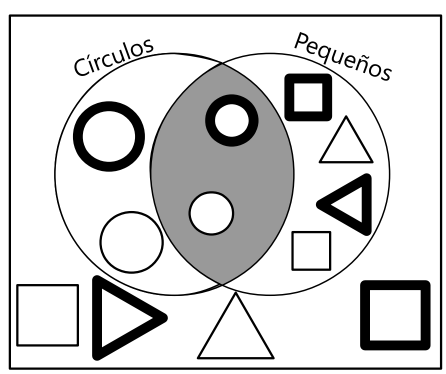
En la imagen, el área sombreada representa el complemento del conjunto de los rectángulos. En notación simbólica, el complemento de A se puede escribir **C(A)** o también **A'**.

Haga diversas actividades de clasificación de objetos, bloques lógicos, y tarjetitas de números, como en la unidades anteriores; pero que adicionalmente los niños identifiquen los complementos de los conjuntos formados.

Nota: En un sentido estrictamente geométrico, los cuadrados deberían incluirse en un "conjunto de rectángulos", porque un rectángulo es definido como "un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos", lo cual incluye los cuadrados. Pero al trabajar con bloques lógicos consideramos cuatro categorías separadas de figuras, y por tanto tratamos a los "cuadrados" como distintos de los "rectángulos". En el nivel de Primaria II, al entrar más en los temas de geometría, tendremos que aclarar este asunto a los niños.

La intersección

Las que siguen ahora, son operaciones entre *dos* (o más) conjuntos. Como ejemplos usamos entonces situaciones que involucran dos conjuntos. Por ejemplo: el conjunto de los bloques pequeños, y el conjunto de los círculos. Formamos este ejemplo sobre una cartulina, señalamos la intersección y preguntamos: "Esta es la intersección. ¿Qué bloques se encuentran aquí?" (Quizás hay que explicar que la intersección es la región que pertenece a ambos círculos a la vez.)

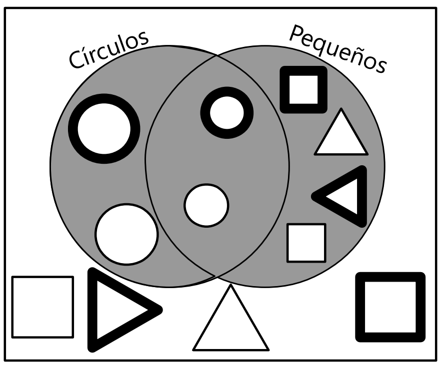


Para caracterizar la intersección no es suficiente decir "pequeños"; tampoco es suficiente decir "círculos". La intersección contiene los *círculos pequeños*; o sea, los bloques que son *a la vez círculos y pequeños*. (Vea la sección "Principios matemáticos" en la *Unidad 8*.)

En la imagen anterior, el área sombreada representa la intersección de los dos conjuntos. En notación simbólica, la intersección de A y B se escribe **A ∩ B**.

La unión

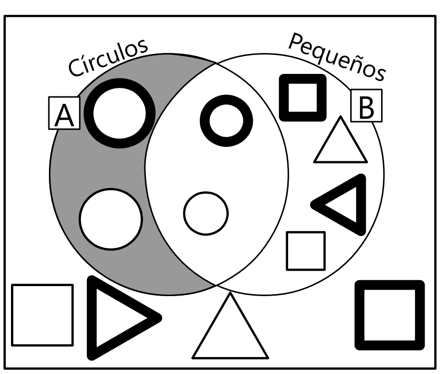
La unión de dos conjuntos abarca todos sus elementos. Usando el ejemplo anterior, la unión de los bloques pequeños y de los círculos contiene todos los bloques que son *pequeños o círculos*. (Acerca del uso de la "o", vea la sección "Principios matemáticos" en la *Unidad 8*.)



En la imagen, el área sombreada representa la unión de los dos conjuntos. En notación simbólica, la unión de A y B se escribe **A U B**.

La diferencia

La diferencia de dos conjuntos resulta cuando de un conjunto quitamos los elementos que pertenecen (también) al otro conjunto. En otras palabras, cuando quitamos de un conjunto su intersección con el otro conjunto. Con el mismo ejemplo como antes, la diferencia "A menos B" contiene entonces los bloques que son *círculos, pero no pequeños*. Por el otro lado, la diferencia "B menos A" contiene los bloques que son *pequeños, pero no círculos*.

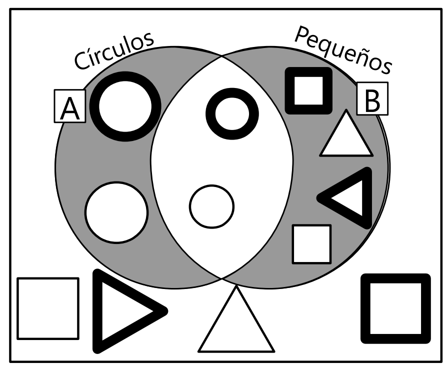


En la imagen, el área sombreada representa la diferencia "A menos B". En notación simbólica, la diferencia "A menos B" se puede escribir **A – B** o también **A \ B**.

Sigan haciendo actividades prácticas de clasificación de objetos, bloques lógicos, y tarjetitas de números, ahora con dos conjuntos, e identificando la intersección, la unión, y las diferencias de los conjuntos que están formando.

La diferencia simétrica

Esta es una operación menos usual que consiste en la unión de las dos diferencias entre A y B; o podemos también decir: la unión menos la intersección. Decidan según el nivel de entendimiento de los niños, si quieren ya introducir esta operación o no todavía.
En nuestro ejemplo anterior, la diferencia simétrica contiene los bloques que o son pequeños, o círculos, pero no ambas propiedades a la vez. (Acerca del uso de la "o", vea la sección "Principios matemáticos" en la *Unidad 8*.)



En la imagen, el área sombreada representa la diferencia simétrica de A y B En notación simbólica, la diferencia simétrica se escribe **A Δ B**.

Operaciones con conjuntos arbitrarios

Ahora hagan estas operaciones con conjuntos arbitrarios. Definan dos conjuntos con objetos o con números, anótenlos por extensión, y represéntenlos en la cartulina. Por ejemplo:
A = {cuchara; tenedor; cuchillo; vaso; taza}
B = {vaso; taza; plato; platillo}
O con números, usando las tarjetitas de números:
C = {1; 3; 5; 7; 9; 11; 13}
D = {6; 7; 8; 9; 10}
Para representar los conjuntos correctamente, los niños descubrirán pronto que lo más práctico es identificar primero cuáles elementos pertenecen a la intersección.

Una vez que los conjuntos están listos, pueden diagramarlos en papel, identificar su intersección, unión, y sus diferencias, y anotarlas por extensión. Por ejemplo:

A ∩ B = {vaso; taza}
A U B = {cuchara; tenedor; cuchillo; vaso; taza; plato; platillo}
A – B = {cuchara; tenedor; cuchillo}
B – A = {plato; platillo}

... y lo mismo para los conjuntos C y D. – Puede ser una ayuda colorear las regiones correspondientes en el diagrama en papel.

Si queremos trabajar también con complementos, entonces tenemos que definir primero el universo. Por ejemplo, podemos trabajar con tarjetitas de números de 10 a 30 y definir eso como universo. Así por ejemplo, si A = {12; 16; 20; 24; 28}, entonces A' = {10; 11; 13; 14; 15; 17; 18; 19; 21; 22; 23; 25; 26; 27; 29; 30}.

Todavía no trabajamos con combinaciones de varias operaciones, tales como A ∩ B ∩ C ó (A U B) – A. Eso se introducirá en Primaria II.

Ahora lo escribimos

Hoja de trabajo 9.1

La hoja de trabajo repite lo que se hizo con las actividades del taller, pero ahora puramente en papel. Si los niños dificultan en representar los conjuntos, que vuelvan a usar el material del taller: Que usen primero las tarjetitas de números o los objetos indicados y los repartan sobre la cartulina según los conjuntos indicados; después escriban o dibujen el diagrama correspondiente en la hoja de trabajo.

No se presentan muchos ejercicios de este tipo, porque la mayor parte del trabajo debe hacerse con el material manipulable. En el nivel de Primaria II retomaremos los ejercicios más abstractos con conjuntos.

Vocabulario matemático

Complemento de un conjunto:
Lo que *no* pertenece al conjunto.

Unión de dos conjuntos A y B:
Todos los elementos de los dos conjuntos.
O sea: Lo que pertenece a A o a B (o a ambos).

Intersección de dos conjuntos A y B:
Los elementos que pertenecen a ambos conjuntos a la vez.
O sea: Lo que pertenece a A y a B.

Diferencia de dos conjuntos A – B:
Lo que pertenece a A, pero no a B.

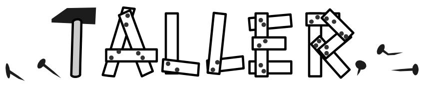
Diferencia simétrica de dos conjuntos:
Lo que pertenece o a A, o a B (pero no a ambos).

¿A dónde vamos desde aquí?

Esta es la última unidad del nivel de Primaria I que se ocupa de clasificaciones y conjuntos. Pueden pasar a cualquier otro tema que sea de acuerdo al nivel de entendimiento de los niños.

Unidad 10 - Orientación en cuadrícula

Materiales necesarios:
- Papel cuadriculado

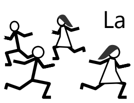


Caminar según flechas

(***Hoja de trabajo 10.1***, *arriba):*

Pon una figura de juego sobre el cuadradito que tiene la figura dibujada. Mueve la figura como indican las flechas a la derecha, en orden, y un paso a la vez. Escribe las letras que encuentras, en orden, en los cuadrados en blanco.

En el segundo cuadrado, también comienza en el cuadradito con la figura dibujada. Mueve la figura de tal manera que toque las letras de las palabras "EL BUEN CAMINO", en orden. En las líneas en blanco, dibuja después de cada paso una flecha que corresponde a la dirección de tu paso.



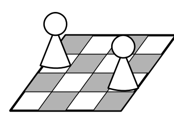
La misma actividad se puede hacer en grande, en un cuadrado dibujado con tiza en el piso del salón o en el patio. En vez de poner una figura de juego, los niños mismos pueden caminar como indican las flechas.

Que los niños mismos diseñen problemas similares para sus hermanos o compañeros.

Pintar según coordenadas

(***Hoja de trabajo 10.1***, *abajo):* Pinta los cuadraditos indicados con los colores indicados. – Después diseña dibujos similares para tus hermanos o compañeros.

Nota: Esta manera de "codificar" un dibujo corresponde exactamente a la manera como una computadora o un teléfono celular genera las imágenes en la pantalla. La pantalla consiste en muchos cuadraditos pequeños ("píxeles"). Si la miras con una lupa, podrás distinguir los píxeles. Cada píxel tiene una "dirección" según sus coordenadas. La memoria de la computadora tiene un espacio para cada "dirección" donde guarda el color del píxel respectivo. Cuando estos datos se transmiten a la pantalla, los píxeles brillan cada uno con su color asignado, y así se forma la imagen.



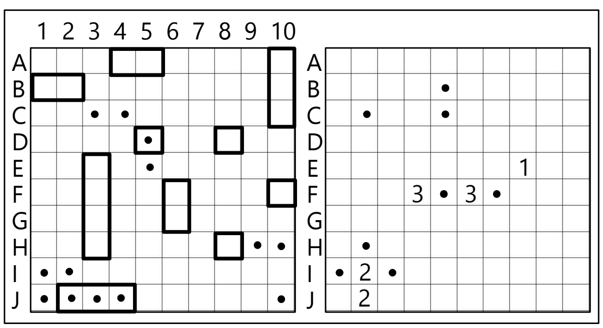
Juego: Hundir barcos

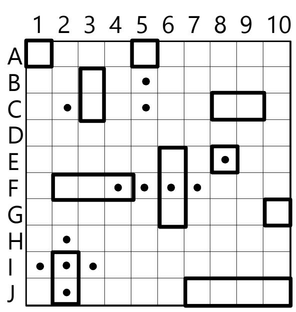
Este es un juego para dos jugadores que se juega con lápiz o bolígrafo y un papel cuadriculado. Cada jugador dibuja en su hoja dos cuadrados de 10 por 10 cuadraditos. Las columnas se marcan con números de 1 a 10, y las filas con letras de A a J. Es prohibido mirar la hoja del otro jugador.
El primer cuadrado es el "mar". Cada jugador dibuja en su "mar" 4 barcos del tamaño de 1 cuadradito, 3 barcos de 2 cuadraditos, 2 barcos de 3 cuadraditos, y 1 barco de 4 cuadraditos. Los barcos tienen que ser rectos, y tienen que ser rodeados completamente de agua. O sea, no pueden tocarse entre sí, ni siquiera por las esquinas. Pero sí pueden tocar el borde del "mar".
Ahora cada jugador hace la guerra a la flota del otro jugador: Por turnos, cada uno anuncia el cuadrado al que está disparando: "Disparo a E-5." Entonces el otro jugador marca con un punto el cuadro E-5 en su "mar", y tiene que decir adónde dio el

disparo. Por ejemplo: “Dio al agua.” – “Dio a un barco de 3.” – “Dio a un barco de 2.”

Si todos los cuadrados de un barco fueron disparados, el barco se hunde, y su propietario tiene que anunciar por ejemplo: “Barco de 4 hundido.” – “Barco de 1 hundido.” – Gana quien hunde primero la flota completa del adversario.

El segundo cuadrado sirve para controlar el avance del juego y planear la estrategia. En este cuadrado, cada jugador marca los disparos que dio contra los barcos de su adversario. Por ejemplo, puede marcar los disparos que dieron al agua con un punto, y los disparos que dieron a un barco con el número respectivo.





Los dibujos muestran cómo podrían verse los dos cuadrados del primer jugador, y el “mar” del segundo jugador, en el transcurso de un juego.

Pasos en un mapa

La ***Hoja de trabajo 10.2.*** presenta un mapa simplificado de un barrio. Los niños pueden usar este mapa para varias actividades de buscar y describir caminos.
Pueden simplemente describir con palabras el camino de un lugar a otro. Por ejemplo, ¿cómo llegamos de la casa de Arturo a la ferretería? – Una posibilidad sería: "Camina seis cuadras hacia la izquierda y dos cuadras hacia arriba."

Nota: *En estas actividades describimos las direcciones tales como se nos presentan en el papel: "Hacia la izquierda" es hacia el lado izquierdo del papel; "hacia arriba" es hacia el borde superior del papel; etc.*
Esto no corresponde a la realidad, porque cuando uno se desplaza realmente por las calles, la dirección depende de hacia dónde uno mira. Pero para los niños de este nivel puede todavía ser demasiado difícil tomar en cuenta eso.
En el nivel de Primaria II volveremos al tema de los mapas y practicaremos la orientación según un mapa de una manera más realista.

Dos niños juntos pueden jugar este juego con figuras de juego en el mapa: Cada niño tiene un ejemplar del mapa y una figura de juego para moverla sobre el mapa. Un niño dice por ejemplo: "Estoy en la casa de Sabina y quiero llegar al parque. ¿Por dónde tengo que ir?" – El otro niño le indica el camino: "Dos cuadras hacia arriba" ... etc. El primer niño mueve su figura en el mapa según las indicaciones, hasta que llega a la meta.
O un niño dirige al otro sin decirle cuál es la meta del viaje: "Comienza en la casa de Bernardo. Camina tres cuadras hacia arriba" ... etc. Al final le pregunta: "¿Dónde estás?", para verificar si llegó a la meta propuesta.

Como actividad escrita, en la parte inferior de la hoja se pueden describir varias rutas mediante flechas, como se hizo en la Hoja 10.1.

Principios matemáticos

Cuadriculando el espacio

Las actividades de esta unidad pueden entenderse como ejercicios preliminares para entender más adelante las coordenadas cartesianas. Sin embargo, las coordenadas cartesianas describen *puntos*, mientras las "coordenadas" en las actividades de esta unidad describen *cuadrados enteros*. Para decirlo de una manera un poco más matemática: Las coordenadas cartesianas son continuas, mientras las actividades de esta unidad usan coordenadas discretas.
Lo hacemos así porque es más fácil de entender para los niños. Ellos pueden interpretar los cuadrados como cuadros en un tablero de juego (de damas o ajedrez), donde pueden colocar figuras. En cambio, una infinidad de puntos continuos es mucho más difícil de imaginarse, y requiere el concepto de fracciones y números decimales para su entendimiento correcto. Por eso, el sistema de coordenadas cartesianas propiamente dicho se introducirán recién en el nivel de Primaria II.

Para los educadores

En las actividades relacionadas con la ***Hoja de trabajo 10.1*** se sugiere que los niños mismos diseñen problemas similares y los intercambien entre ellos. Al inventar un problema propio y usar la creatividad, sucede un mayor aprendizaje que al resolver problemas ya dados.
Sin embargo, la creatividad no funciona bajo obligación. Es mejor presentarlo como una sugerencia para aquellos niños que están interesados en hacerlo. O quizás algunos niños querrán aplicar su creatividad a algún otro campo que estudiaron últimamente.

Unidad 11 - Un poco más de topología

TALLER

Figuras con sogas – Curvas abiertas y cerradas

Formen diversas figuras con una soga en el piso: ondas, cerros, flores, ... – Pongan como condición que los extremos de la soga no deben unirse, y que la soga no puede cruzarse sobre sí misma. ¿Qué figuras pueden formar bajo estas condiciones? Las figuras que se pueden formar de esta manera se llaman *curvas abiertas:* tienen un inicio y un fin. Por ejemplo, la forma del número **3** es una curva abierta.

Ahora aten los dos extremos de la soga juntos. ¿Qué figuras pueden formar ahora, si la soga no debe cruzarse sobre sí misma? – Las figuras que se pueden formar de esta manera se llaman *curvas cerradas*. Por ejemplo un círculo, un triángulo, o una media luna son curvas cerradas.

Dibujen algunas de las figuras que formaron, e indiquen si son curvas abiertas o cerradas.

Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 11.1** (arriba)**:** **Enredo de hilos

Sigue el hilo de cada pescador (con el dedo o trazando con un color) para descubrir cuál pez tiene atrapado.

Hoja de trabajo 11.1** (abajo)**: Caminos sin cruzar

Las explicaciones se encuentran en la hoja. Ya que estos problemas pueden ser un poco difíciles, el *Anexo A* contiene sus soluciones.

Equivalencia topológica

Hoja de trabajo 11.2. – En esta hoja se trata de relacionar los ocho diseños con sus equivalentes topológicos que se encuentran en los cuadros pequeños en el medio. (Vea en la *Unidad 3*, en la sección “Principios matemáticos”, acerca de la equivalencia topológica.) Los diseños pueden analizarse pintándolos de la misma manera como los laberintos topológicos en la *Unidad 3*. Así se podrán con más facilidad distinguir los diferentes espacios separados.

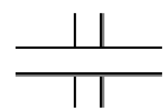
Sin embargo, en esta hoja encontramos tanto curvas cerradas como curvas abiertas. Un procedimiento útil para identificar sus relaciones topológicas es el siguiente:

Si hay una curva abierta, encontraremos sus extremos. Comienza a trazar la curva desde uno de sus extremos con un color, y sigue trazando hasta que llegues al otro extremo. – Después podemos pintar con otros colores el interior de las curvas cerradas como en la *Unidad 3*. Así descubriremos si la curva abierta (si hay una) se encuentra dentro o fuera de la curva cerrada; y si las curvas cerradas se encuentran separadas o una dentro de otra.

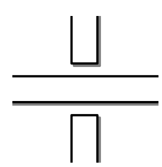
En la hoja, la correspondencia entre diseños y equivalentes topológicos no es necesariamente “uno a uno”: puede haber diseños equivalentes entre sí, y puede haber cuadros pequeños que no corresponden a ninguno de los diseños grandes.

Laberintos con puentes

Hoja de trabajo 11.3. – Esta hoja introduce una nueva clase de laberintos, donde los caminos pueden cruzarse en forma de “puentes”. Esta situación *(derecha)* significa un “puente” donde se puede pasar en línea recta por el camino horizontal y también por el camino vertical; sin embargo, no se puede voltear, o sea, no se puede saltar del camino horizontal al vertical o vice versa.



– Esta otra situación en cambio *(izquierda)* no es un puente; aquí no hay paso en dirección vertical.



> **Pregunta capciosa:**
>
> ¿Cómo puedes escribir letras rojas con un bolígrafo de tinta negra?

Respuesta en el Anexo A.

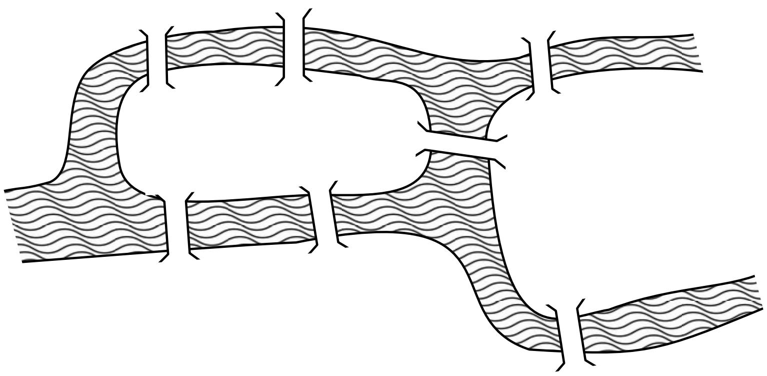
¿A dónde vamos desde aquí?

La siguiente unidad (12) contiene otro tema topológico, por si desean continuar con un tema similar. De otro modo podrán también pasar a un tema de números y cálculos, según el avance de los niños.

Unidad 12 - Los puentes de Königsberg

Viaje de exploración matemática

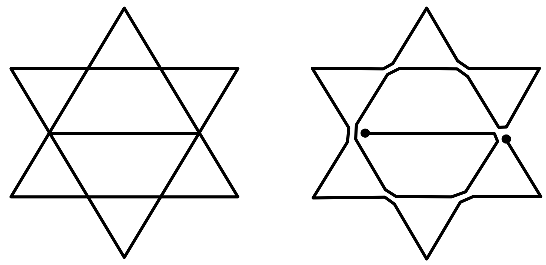
La ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado, Rusia) está edificada por ambos lados de un río, y en medio del río hay dos islas. En el transcurso del tiempo se habían construido un total de siete puentes por las islas, según el siguiente esquema:



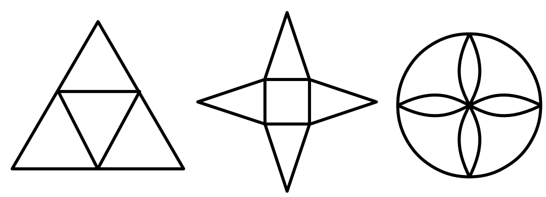
Los habitantes de Königsberg disfrutaban de pasear por los puentes. Entonces se hicieron la siguiente pregunta: *¿Por dónde tenemos que caminar para pasar por cada puente exactamente una vez?* Pero eso era más difícil de lo que parecía. ¡Intenta encontrar la solución! – Más tarde te cuento como continúa la historia.

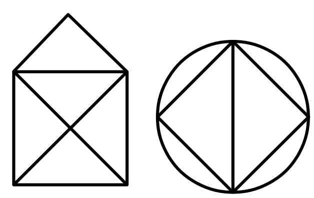
Dibujar figuras con un solo trazo

El problema de Königsberg está muy relacionado con el siguiente problema: ¿Cómo se puede dibujar una figura compleja con un solo trazo, o sea sin levantar el lápiz en ninguna parte? Es un poco más difícil si adicionalmente exigimos que la línea no debe cruzarse en ningún lugar. – El siguiente dibujo muestra cómo se puede dibujar esta estrella con un solo trazo y sin cruces:



Ahora inténtalo con las siguientes figuras:





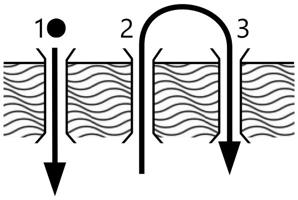
(Pauta: En los últimos dos tienes que pensar bien dónde empezar.)

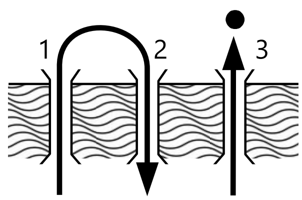
Inventa otras figuras e intenta dibujarlas en un solo trazo. – Ojo: ¡No con todas es posible!

Cómo continúa la historia

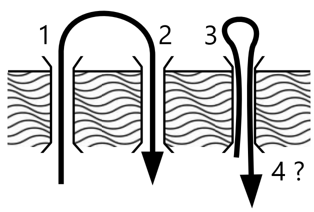
Un día, el famoso matemático Leonardo Euler llegó a Königsberg. Él se enteró del problema de los puentes. Lo analizó, y después dijo a los habitantes de Königsberg: "Lo siento, pero vuestro problema no tiene solución." – Así fue su razonamiento:

Fijémonos en la orilla de arriba. En esta orilla hay tres puentes. Puedo comenzar mi paseo aquí, entonces puedo llegar una vez más y me voy por el tercer puente. – O empiezo en otra parte, entonces puedo llegar a esta orilla por un puente y salir por otro. Después puedo venir por el tercer puente y tengo que quedarme aquí:



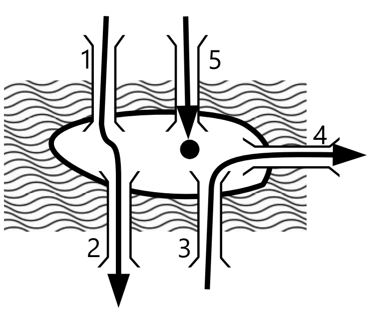


O sea, esta orilla o es el inicio o es el fin de mi paseo. No puede ser un punto intermedio, porque no puedo venir e irme dos veces sin pasar dos veces por el mismo puente.



Pero lo mismo vale para la orilla de abajo. Allí también hay tres puentes. Entonces el paseo tiene que empezar en una orilla y terminar en la otra, pasando por las islas.

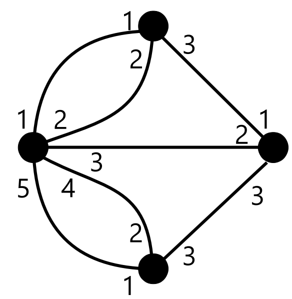
Pero la isla a la derecha también tiene tres puentes. La primera vez que llego a esta isla, puedo salir por el segundo puente. Pero cuando llego por el tercer puente, ya no puedo salir de la isla sin quebrantar la regla.



Lo mismo aplica a la isla izquierda. Allí hay cinco puentes. Puedo venir e irme dos veces; con eso he pasado por cuatro puentes. Cuando llego por el quinto puente, ya no puedo irme.

En resumen: La ciudad tiene cuatro partes: dos orillas y dos islas. Cada una de estas partes tiene que ser o el inicio o el fin del paseo. Pero un paseo puede tener un solo inicio y un solo fin. Por eso es imposible hacer el paseo de la manera como deseaban los habitantes de Königsberg.

Un diagrama simplificado de la ciudad con sus puentes se vería así:



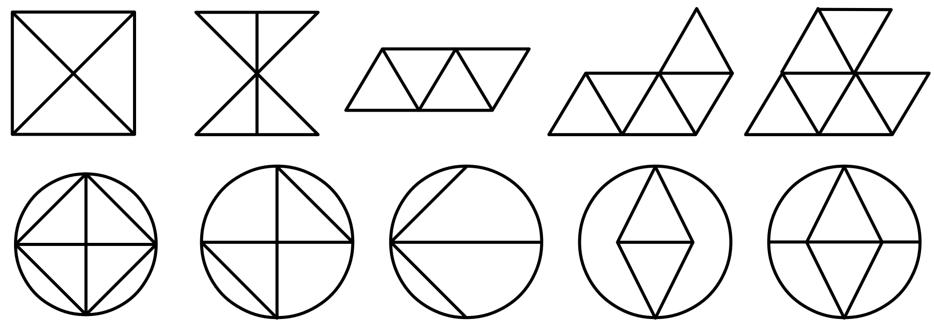
Las líneas son los puentes, y los "nudos" donde se unen varias líneas son las partes de la ciudad. Entonces el problema de los puentes es igual a la pregunta: ¿Cómo se puede dibujar esta figura en un solo trazo? – Es imposible, porque el trazo tendría que tener cuatro extremos (inicios o finales).

En realidad, el razonamiento de Euler fue un poco más complicado. Pero después descubrió que la manera más sencilla de explicarlo es la que está descrita aquí.

De allí, Euler dedujo un teorema general: *En un gráfico de líneas conectadas, cada "nudo impar" tiene que ser el inicio o el final de un trazo.* (Un "nudo impar" es un nudo donde se junta un número impar de líneas.) – El número de nudos pares, en cambio, no importa; porque allí puedo "venir e irme", y no sobrará un último puente que me obligaría a quedarme allí.

Verifícalo con las figuras del ejercicio "Dibujar figuras en un solo trazo": Las primeras tres figuras tienen solamente nudos pares. Allí puedo empezar donde quiero, y terminaré siempre en el punto donde empecé. Las dos últimas figuras, en cambio, tienen dos nudos impares. Allí se puede resolver la tarea solamente si empezamos en un nudo impar, y terminaremos en el otro nudo impar. – Y si una figura tiene más de dos nudos impares, ya no se puede dibujar en un solo trazo. Ese fue el caso de Königsberg, donde hay cuatro nudos impares.

Inténtalo ahora con las siguientes figuras. Dibújalas en un solo trazo, o demuestra que es imposible:



Investigación

Vuelve al plano de Königsberg. Investiga qué pasa si se construye un puente más. ¿Se podrá entonces solucionar el problema? ¿y depende eso de dónde se construye el nuevo puente?

***Otra pregunta para investigar:** ¿Puede existir una figura con tres nudos impares? ¿o con cinco nudos impares? – Dibuja un ejemplo, o demuestra que es imposible.

(Si lo han pensado por varios días y no llegan a ninguna conclusión, pueden ver las pautas en el Anexo A.)

Principios matemáticos

Demostrar que no hay solución, es también una solución.

Para los niños puede ser difícil de entender por qué se dice que Leonardo Euler "solucionó" el problema de Königsberg, ya que el problema no tiene solución. El punto aquí es, que antes de Euler los ciudadanos de Königsberg estaban en la *incertidumbre*. Seguían intentando resolver el problema porque no sabían si era posible o no. Euler puso fin a esta incertidumbre porque demostró lógicamente que no existe ninguna solución. Con eso, la gente de Königsberg pudo descansar de sus intentos de resolver el problema.

Es más: Euler explicó también las condiciones bajo las cuales un problema de este tipo sí tiene solución. Eso es lo que se entiende con la "solución" de un problema matemático: *Explicar* lógicamente las propiedades matemáticas involucradas y su "*por qué*"; sea para poder encontrar una solución, o sea para demostrar que no existe solución.

Para los educadores

Aprender matemática por medio de la historia

Generalmente nos gusta presentar la matemática como un sistema fijo y bien ordenado. Pero cada parte de este sistema tuvo que ser descubierta alguna vez por alguien. Y el *camino* por el cual los matemáticos llegaron a sus descubrimientos, fue a menudo no tan sistemático. A veces se equivocaban en el camino. A veces intentaban muchas maneras de resolver un problema, hasta que descubrieron que el problema no tiene solución.
La historia de estos descubrimientos nos enseña mucho acerca de la manera cómo razonan los matemáticos. Y podemos aprender algo no solamente de sus éxitos, sino también de sus intentos fallidos. Si los grandes matemáticos cometieron errores o intentaron lo imposible, ¿cómo vamos a esperar de los niños que encuentren el camino correcto en el primer intento? Pero que aprendan a no rendirse, a aprender de sus errores y seguir adelante.

Por esta razón, contamos la historia de "Los puentes de Königsberg" de una forma que pide intencionalmente a los niños resolver un problema del que más tarde se enterarán de que no tiene solución. Así se identificarán ellos con los ciudadanos de Königsberg que intentaron por años solucionar el problema y no lo pudieron. Después seguirán el razonamiento de Leonardo Euler, paso por paso, para entender cómo aquel gran matemático llegó al descubrimiento de su teorema que explica la esencia del problema. Este descubrimiento puede ser un alivio para el niño: "Si no pude resolver el problema, no es porque yo fuera tonto. Es porque realmente nadie podría solucionarlo." El matemático se distingue en que él logra explicar *por qué* no hay solución; y logra generalizar su respuesta en forma de un teorema que da respuestas también a muchos otros problemas similares.

Esta es la primera unidad que presenta un relato de la historia de la matemática. Se trata de uno de los pocos problemas de interés histórico que los niños ya pueden comprender a una edad bastante temprana. Aun así, el razonamiento involucrado puede ser bastante exigente para ellos. Se recomienda tratar esta historia hacia el *fin* del período de Primaria I (lo que será alrededor de los 9 años para la mayoría de los niños).

El objetivo de esta historia no es que los niños "memoricen el teorema". (De hecho, es bastante improbable que alguna vez se encuentren en una situación práctica que requiere aplicar este teorema.) Mas bien, se trata de que ellos sigan el razonamiento de un gran matemático del pasado, y así adquieran una primera impresión de cómo los matemáticos llegan a sus conclusiones.

Bloque II: Calcular hasta 20 (Unidades 13 a 26)

Este bloque introduce los números y las operaciones de la suma y resta en el espacio numérico hasta 20. (Los números hasta 9 se introdujeron ya en el libro de Pre-Matemática; aquí lo hacemos en forma de repaso.)
Los temas esenciales de este bloque son:
- Entendimiento de la numeración hasta 20 (incluidos los conceptos de “menor”, “mayor”, “igual”).
- Entendimiento de las operaciones de suma y resta, incluido el principio de la operación inversa.
- Ley conmutativa.
- Ley asociativa.
- Principio del entero y sus partes (entendiendo en cuáles situaciones se aplica la suma, y en cuáles la resta).

En términos del sistema convencional, el dominio de estos temas es suficiente para el nivel del primer grado de primaria, en cuanto a la aritmética (cálculo numérico). Los temas más avanzados, tales como se encuentran en la mayoría de los libros convencionales, solamente confunden a los niños de este nivel, con excepción de aquellos niños que por sí mismos ya están excepcionalmente avanzados en su desarrollo natural.
Entender los temas mencionados es esencial para poder continuar sin dificultad con las actividades del *Bloque III*. Se recomienda, por tanto, que cada niño pase suficiente tiempo realizando actividades con material concreto relacionadas con estos temas, hasta que tenga un buen entendimiento de ellos.

Acerca del uso del "Camino de aprendizaje" para medir el progreso del niño, vea en el capítulo "¿Cómo usar las unidades de aprendizaje de este libro?", p.22.

Unidad 13 - Repaso: Números hasta 10

Prerrequisitos:

- Lectura y escritura de los números de 1 a 9.

Materiales necesarios:

- Cadenitas de cuentas
- Ábaco
- Regletas Cuisenaire
- Cajitas
- Tarjetitas de cartulina

Para los educadores

Esta unidad es mayormente un repaso de lo que ya se hizo en el nivel de Pre-Matemática; por eso se presentan todos los números de una vez. Los niños que todavía no saben leer y escribir los números, deberían aprenderlos *uno por uno*, dándoles varios días para aprender y practicar cada número aparte. Para cada número se pueden hacer las siguientes actividades:

- Buscar el número escrito en objetos de la casa y en letreros en la calle.
- Buscar el número impreso en revistas y periódicos, cortar unos ejemplos y pegarlos en el cuaderno.
- Relacionar el número escrito con la cantidad correspondiente de objetos, o con cadenitas de cuentas de la longitud correspondiente.
- Hacer trabajos manuales que representan el símbolo del número; por ejemplo pegando arena o bolitas de papel, cosiendo con lana, modelando con arcilla, etc.

(Vea en el libro de Pre-Matemática, Unidades 10, 12 y 14.)

TALLER

El juego de las tarjetitas

Prepare tarjetitas de cartulina con los números de 1 a 9 (o hasta 10). – En las tarjetas del 6 y del 9 se recomienda añadir un punto o una rayita por debajo del número para que no se confunda el 6 con el 9 cuando la tarjeta está de cabeza. Así se sabe que el puntito o la rayita debe estar abajo.

Haga diversas actividades con las tarjetitas para relacionar los números escritos con la cantidad correspondiente. Por ejemplo:

Tenga unos pequeños objetos contables listos: piedritas, pepas, canicas, etc. También puede usar cucharas, platillos, u otros objetos de la casa. Mezcle las tarjetas, saque una y diga: "Tráeme tantos." – O al revés: Ponga una cantidad de objetos sobre la mesa y diga: "Dame la tarjeta que dice cuántos son."

Lo mismo se puede hacer con las cadenitas de cuentas, con el ábaco, y con las regletas Cuisenaire: "Tráeme la cadenita (o la regleta) que dice en la tarjeta." – "Ponme tantos en el ábaco." – O al revés: "Dame la tarjeta que dice cuántos hay en esta cadena (o en el ábaco)."

También se puede hacer ordenar las tarjetas del 1 al 9 (o al 10).

Cajitas para las regletas

Aliste 9 (ó 10) cajitas, cada una rotulada con uno de los números de 1 a 9 (resp. 10). Que los niños repartan las cadenitas de cuentas, o las regletas Cuisenaire, en las cajitas según el número que indica.

Contar al revés

Con material contable, cadenitas de cuentas, o en el ábaco, practiquen contar retrocediendo: desde el 9 (ó 10) de regreso hasta el 1.

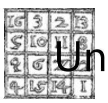
El cero

Vuelvan a practicar el "contar al revés" con material contable. Pero esta vez no se detengan en el 1. Quite el último objeto que queda y pregunte: "¿Cuánto hay ahora?" – No hay nada. Pero "la nada" se puede también expresar con un número: el cero. Explicamos entonces cómo se

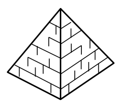
escribe el 0. – Puede ser necesario indicar que la cifra 0 es más delgada que la letra O, para poder diferenciar entre los dos.
A las tarjetas de números, añadan una tarjeta con el 0. Incluyan este número en el juego de las tarjetitas con objetos contables, el ábaco, etc.

El número 10

Si los niños todavía no saben escribir el número 10, habrá que introducirlo ahora. Lo "nuevo" de este número es que se escribe con dos símbolos y no solo uno. Podemos explicar a los niños que no es posible tener un símbolo distinto para cada número, porque nunca podríamos aprender tantos símbolos como hay números. Por eso se ha inventado una manera de escribir todos los números con solamente diez símbolos distintos. Cuando llegamos al diez, comienza algo nuevo. Desde ahora usaremos el diez para formar los números siguientes: once es "diez y uno", doce es "diez y dos", etc. – Puede demostrarlo con las cadenitas o con las regletas Cuisenaire. – Entonces en el 10, el 1 significa que hay una cadenita de diez, y el 0 significa que no hay nada más.
(Quizás los niños todavía no lo comprenderán completamente en este punto. Se hará más claro cuando aprendan los números hasta 20.)
A las tarjetas de números, añadan una tarjeta con el 10. Incluyan este número en el juego de las tarjetitas con objetos contables, el ábaco, etc.

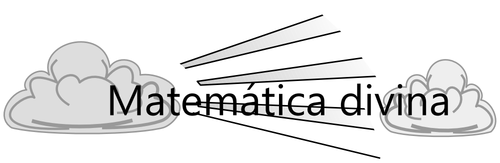


Un poco de historia



La notación de números según el valor posicional es una herramienta poderosa para escribir aun números muy grandes con muy pocos símbolos. (El *valor posicional* es la convención que atribuye a una cifra un valor mayor, cuánto más a la izquierda se encuentra; así la cifra 2 puede significar dos unidades, dos decenas, dos centenas, etc, dependiendo de su *posición* dentro de un número.)
Los antiguos babilonios ya tenían un sistema de escribir números que utilizaba el valor posicional. La base de su sistema no era el 10 como en nuestro sistema decimal, sino el 60. Pero les faltó todavía un ingrediente muy importante: Ellos no tenían ningún símbolo para el cero. Por eso, su sistema todavía no tenía la misma utilidad como el nuestro. Tomando un ejemplo del sistema decimal: Si no hay símbolo para el cero, no se puede distinguir entre 3050 y 35.
La idea de representar "la nada" con un símbolo, surgió por primera vez en la India en la temprana Edad Media; no se sabe exactamente cuándo. Los hindúes ya estaban usando el sistema decimal; y el "invento" del cero completó este sistema y les permitió realizar cálculos con números mucho más fácilmente que cualquier otra cultura hasta entonces.

Al nivel donde nos encontramos ahora con los niños, todavía no necesitamos entrar al tema del valor posicional. Lo examinaremos más detenidamente en el nivel de Primaria II, en un "viaje de exploración" acerca del sistema decimal.



Matemática divina

El mundo fue creado con números

Los números son una parte del mundo desde su inicio. Cuando Dios creó el mundo, comenzó a contar los días: "primer día, segundo día, tercer día ...". Así también los hombres desde el inicio usaban números. Mantenían la cuenta de los días y años; y seguramente usaban números también para administrar y alimentar a su ganado, para cultivar plantas, y para muchos otros trabajos de su vida diaria.

Ahora lo escribimos

Hoja de trabajo 13.1 – **Escritura de los números**
En las primeras diez filas se debe escribir repetidamente el número que está al comienzo de la fila. En las últimas filas se escribe la secuencia 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 tantas veces como cabe.
Recuerde que este es un ejercicio de *repaso* para los niños que ya conocen los símbolos de los números. Los niños que todavía no saben leer y escribir los números, deberían aprenderlos *uno por uno*, dándoles varios días para aprender y practicar cada número aparte. *(Vea en el libro de Pre-Matemática, Unidades 10, 12, 14.)*

Hoja de trabajo 13.2 **– Relacionar cantidades con números**
Este ejercicio afianza por escrito lo que ya hicimos con el juego de las tarjetas.
En los cuadros vacíos se escribe el número que corresponde a la cantidad de objetos en el conjunto, resp. en la fila. – Donde ya hay un número en el cuadro, se dibuja la cantidad correspondiente de objetos.

Hoja de trabajo 13.3 **–** *Arriba:* **Relacionar regletas Cuisenaire con números**
En el mosaico *(izquierda)* se colocan las regletas según el dibujo; después se escribe en cada regleta dibujada el número que le corresponde, según el ejemplo de los números 1, 2, 3 ya puestos.
En el castillo *(derecha)* se coloca *verticalmente* sobre cada cuadro la regleta que indica el número.

Abajo: **Completar secuencias**
Cada fila debe completarse con la secuencia de los números naturales en su orden. Cada espacio en blanco corresponde a un número. Así por ejemplo en la segunda fila a la izquierda, entre el 5 y el 8 se deben completar los números 6 y 7. – La cuarta fila a la derecha (_ _ 6 _ _) se completa **4 5** 6 **7 8**. Etc.

¿A dónde vamos desde aquí?

Cuando los niños conocen los primeros números, ya pueden aprender a sumar *(Unidad 15)* y después a restar. O pueden primero explorar los conceptos de “igual”, “mayor” y “menor”, en la unidad siguiente.

Unidad 14 - Mayor, menor, igual

Prerrequisitos:
- Conocer los números de 0 a 10.

Materiales necesarios:
- Material contable (piedritas, semillas, etc.)
- Cadenitas de cuentas
- Regletas Cuisenaire
- Tarjetitas con números

TALLER

Hacer comparaciones contando

Empecemos comparando pequeñas cantidades de objetos contables. Por ejemplo, presentamos dos platillos con habas o piedritas y preguntamos: "¿En cuál platillo hay más?" Al inicio, use cantidades que se pueden distinguir a simple vista (por ejemplo 2 y 5). Después use cantidades muy cercanas (por ejemplo 8 y 9), de manera que el niño se ve obligado a *contar* cuántos hay en cada platillo. Incluya también unas instancias donde la cantidad en ambos platillos es igual. De paso podemos reforzar el uso de las expresiones "mayor", "menor", "igual": "Sí, aquí hay 8, y en el otro platillo hay 9. 8 es menor a 9." – "En ambos platillos hay 7, las cantidades son iguales." – Algunos niños quizás no sepan decir inmediatamente si 8 es menor o mayor a 9. Para ellos puede ser necesario sacar las piedritas de los platillos y formar con ellas dos filas paralelas sobre la mesa, de manera que cada piedrita de un platillo esté frente a una piedrita del otro platillo. Con esta relación se hará evidente en cuál fila hay más piedritas. – Cuando los niños han entendido como funciona, podrán hacer esta actividad entre sí, de dos en dos.
Otra forma de hacer la comparación consiste en comenzar con los números y *después* representarlos con material contable. Por ejemplo preguntamos: "¿Cuál es mayor, 4 ó 7?" Para descubrirlo, el niño puede buscar una cadenita de 4 y una cadenita de 7, y comparar cuál es más larga. O puede poner 4 cuentas en la primera fila del ábaco y 7 cuentas en la segunda fila, y así comparar en cuál fila hay más.

Comparaciones con tarjetitas

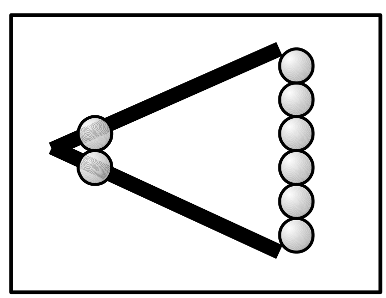
Después hacemos lo mismo con nuestras tarjetitas de números *(vea Unidad 13)*. Mostramos dos tarjetitas, por ejemplo el 5 y el 3, y preguntamos: "¿5 es mayor o menor a 3?" Como en la actividad anterior, el niño puede usar un material contable para descubrirlo.

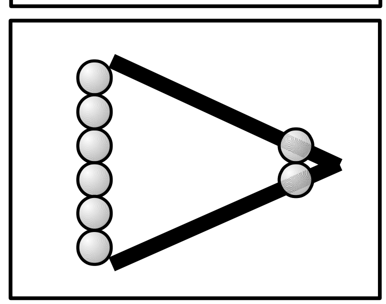
Ordenar tarjetitas

Anteriormente ya hemos ordenado tarjetas según la secuencia ordenada de los números (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...). Pero ahora ordenaremos unas tarjetas con números que no son sucesivos (p.ej. 3, 5, 8, 10). Dé a los niños cuatro o cinco tarjetas con números; que los ordenen de menor a mayor, o de mayor a menor.

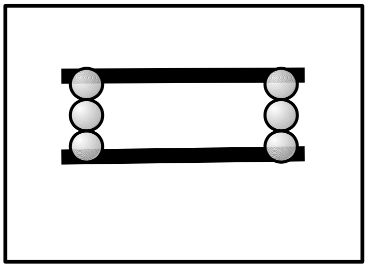
Introducción de los signos <, =, >

El significado de estos signos se hace obvio cuando los entendemos como la representación gráfica de una comparación entre dos objetos de distintos tamaños. Tomen una hoja de papel y unas cadenitas de cuentas de distintos tamaños. Comparen
dos cadenitas de tamaños claramente distintos, poniendo cada cadenita de manera vertical. Unan los extremos superiores e inferiores de las cadenitas con líneas rectas. (Usen plumones o crayones gruesos para que la líneas se noten bien.) Solamente falta completar las puntas, y ya tenemos los signos de "menor" y "mayor".





Si ponemos dos cadenitas iguales y unimos sus extremos como antes, nos sale el signo de "igual".
De esta manera, los niños no tendrán ninguna dificultad en recordar el significado de estos signos.



Signos y tarjetitas

Adicionalmente a las tarjetas de números, hagan tarjetas con los signos <, =, >. (De hecho, la tarjeta con el signo < puede a la vez servir para el signo >, porque podemos voltearla de cabeza.)
Coloque dos tarjetas de números con un espacio entre ellos. ¿Cuál es mayor? ¿Cuál signo tenemos que poner entre los números? – Para descubrirlo, los niños pueden poner al lado de cada tarjeta la cantidad correspondiente de semillas o piedritas. Después pueden colocar el signo correcto.
Al ordenar tarjetas de menor a mayor o de mayor a menor, también podemos colocar los signos correspondientes entre las tarjetas. Así vemos que estos signos pueden usarse en sucesión, por ejemplo $1 < 4 < 5 < 7$, ó $7 > 5 > 4 > 1$. También se pueden usar tarjetas con números iguales, entonces resultarán sucesiones como la siguiente: $9 > 8 = 8 > 5 > 2 = 2$.

Principios matemáticos

Transitividad

Al hacer seriaciones, o sea comparar y ordenar más que dos números u objetos a la vez, estamos implícitamente usando el axioma de la transitividad: Si $A < B$ y $B < C$, entonces también $A < C$. Y si $A = B$ y $B = C$, entonces también $A = C$.
Esto es un *axioma*, o sea una propiedad que se considera tan obvia que no necesita demostración; y que *no se puede demostrar* lógicamente a partir de otras proposiciones. Los axiomas son las piedras fundamentales de la matemática: Todas las otras leyes y propiedades se demuestran a base de los axiomas. (El significado profundo de los axiomas se explora un poco más en el tomo aparte, "Matemática divina".)
Para los niños pequeños, este axioma todavía no es tan obvio. Piaget observó que la comprensión del concepto de la transitividad es una de las características que marca el comienzo de la etapa operacional. Si un niño todavía no lo comprende, entonces todavía no está listo para aprender las operaciones matemáticas, y deberá esperar hasta que su cerebro haya madurado un poco más.

Para los educadores

Al nivel preescolar, los niños mayormente comparan tamaños o cantidades a simple vista: "Éste se ve más grande"; "aquí parece que hay más". Al entrar a la etapa operacional, llegará un momento donde son capaces de hacer comparaciones *contando*. Este paso no debe presentar mayores dificultades, tan pronto como el niño alcanza la madurez mental necesaria para ello.
Un poco más difícil es trasladar este concepto a los números y símbolos abstractos. Haga primero suficientes actividades con material concreto, antes de pasar al trabajo con números y signos. Si un niño todavía está inseguro, por ejemplo, si 5 es mayor o menor a 8, que ponga 5 piedritas a un lado y 8 piedritas al otro lado y compare dónde hay más; o que busque la cadenita del 5 y la cadenita del 8, y compare sus tamaños.
Los signos <, >, = se introducen de preferencia usando una comparación gráfica de cadenitas o de regletas Cuisenaire, como está descrito en las actividades del Taller.
Niños un poco más avanzados podrán comprender ya que la relación "menor" es lo inverso de la relación "mayor". O sea, si 2 es menor a 6, entonces 6 es mayor a 2. Podemos señalar este hecho de manera informal durante las actividades.

Matemática divina

La Biblia nos dice que Dios es el más grande, y que todo lo demás es como nada en comparación con Él (Isaías 40:17-18). Dios es mayor que todo lo que nos podemos imaginar.

Por el otro lado, entre los hombres, “más grande” no siempre es “mejor”. El rey Saúl era más alto que todos los otros israelitas, pero era cobarde. (1 Samuel 10:21-24, 17:11) David era más pequeño que Goliat, pero no tuvo miedo y le venció (1 Samuel 17:26-50).

Ahora lo escribimos

En los juegos de ordenar tarjetas de números, y de usar signos junto con tarjetas, podemos al final escribir en el cuaderno las sucesiones o comparaciones que resultan. Esto es una preparación para hacer después lo mismo puramente por escrito.

Hoja de trabajo 14.1 – **Comparar objetos, cantidades y números**
Arriba, izquierda: Compara los tamaños de los objetos dibujados y escribe en cada cuadro el signo correspondiente: <, >, =
Arriba, derecha: Cuenta y compara las cantidades dibujadas, y escribe en cada cuadro el signo correspondiente. – En las últimas dos filas, donde ya hay signos, dibuja en el espacio vacío una cantidad de objetos tal que el signo sea correcto.
Abajo, izquierda: Pon las regletas Cuisenaire correspondientes sobre las regletas dibujadas, y compara su tamaño. Escribe en cada cuadro el signo correspondiente. – En las dos últimas filas, donde ya hay signos, dibuja en el espacio vacío una regleta tal que el signo sea correcto.
Abajo, derecha: Compara los números y escribe en cada cuadro el signo correspondiente. – Los niños que dificultan con esta tarea, que lo hagan con material contable: Saquen la cantidad que corresponde al número izquierdo y al número derecho, y comparen en cuál lado hay más.
En las tres últimas filas, donde ya hay signos, escribe en el cuadro vacío un número tal que el signo sea correcto.

Hoja de trabajo 14.2 (*Arriba*) – **Une los puntos en orden**
Los puntos deben unirse con líneas rectas, siguiendo el orden de los números, de menor a mayor (o vice versa).

En el medio: **Ordena los números**
Escribe los números indicados como secuencia ordenada, usando los signos < resp. >. (Vea los ejemplos en el Taller, “Signos y tarjetitas”, la última actividad.)

Abajo: **Completa las secuencias**
Cada secuencia debe completarse con números de tal manera que los signos estén correctos.
Algunas secuencias admiten varias soluciones. Por ejemplo en la tercera fila a la izquierda (3 < __ < 7), el espacio en blanco podría llenarse con 4, 5, ó 6. – Igualmente en la última fila a la izquierda, donde al inicio se pide un número menor a 6, no necesariamente tendría que escribirse el 5; cualquier número de 0 a 5 es correcto.

¿A dónde vamos desde aquí?

El tema de las seriaciones (Taller de la *Unidad 1*, “Clasificar y ordenar objetos”) encaja bien aquí, si no lo hicieron todavía.
El principio del entero y sus partes *(Unidad 25)* también está relacionado con el concepto de mayor y menor.
Cuando los niños entienden bien el orden de los números, estarán listos para la siguiente unidad (15) donde se introduce la operación de la suma.

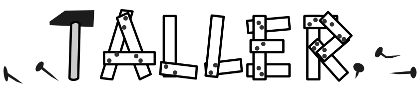
Unidad 15 - Introducimos la suma

Prerrequisitos:

- Conocer los números de 0 a 10.

Materiales necesarios:

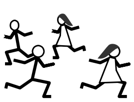
- Objetos comunes de la casa
- Otros materiales contables (semillas, piedritas, etc.)
- Cadenitas de cuentas
- Ábaco
- Regletas Cuisenaire
- Tarjetitas de números
- Dado



Sumas en la vida diaria

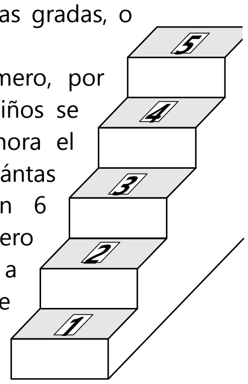
Encuentren objetos en la casa que se pueden sumar. Casi todo sirve para este propósito. Empiecen con sumas que no dan más que 10.
Unos ejemplos:
- Saquen 4 papas. Después saquen otras 2 papas. ¿Cuántas papas tienen ahora?
- Busquen 3 piedritas. Aumenten 5 piedritas. ¿Cuantas piedritas tienen ahora?
- Ordenen las tazas que tienen por colores o por tipo. Quizás tienen 4 tazas azules y 3 tazas rojas. Entonces, ¿cuántas tazas tienen? – Hagan lo mismo con platos, sillas, maceteros, tijeras, y otros objetos que pueden tener en la casa.
- En nuestra familia hay __ adultos y __ niños. Entonces ¿cuántas personas somos?

Busquen vuestros propios ejemplos de sumas que pueden encontrar en la casa.



Subir las gradas

Seguramente tienen en algún lugar unas gradas donde pueden jugar este juego con uno a cuatro niños. Si las gradas son muy anchas, pueden participar más niños.
Primero hay que enumerar las gradas de 1 a 10. Pueden pegar papeles con los números en las gradas, o pueden escribir los números con tiza.
Un niño o un adulto dice un número, por ejemplo “Dos”. Entonces los otros niños se paran en la grada número 2. – Ahora el primer niño o el adulto dice cuántas gradas subir, por ejemplo: “Suban 6 gradas.” Los otros niños suben el número indicado de gradas; después dicen a qué grada han llegado. (En este ejemplo sería el número 8.)



En vez de que alguien llama los números, pueden también tirar un dado. La primera vez que tiran el dado, el puntaje indica la grada donde empezar. Tiren el dado una segunda vez, y suban tantas gradas como indica el dado. – Para esta variación necesitamos gradas de 1 a 12. Pero podemos también fabricar dados especiales que tienen los números de 0 a 5 en vez de 1 a 6; así las sumas quedan en el rango de 0 a 10.

Cómo se dicen las sumas

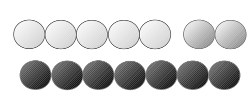
En algún momento del taller explicaremos que estas actividades de aumentar números se llaman también “sumar”. Entonces aprenderemos cómo decir las sumas. Por ejemplo, si había 4 tazas azules y 3 tazas rojas, y juntas eran 7, entonces decimos: “4 tazas más 3 tazas son 7 tazas.” O más corto: “4 más 3 son 7.” – Entonces también en el juego de las gradas, los niños pueden decir las sumas completas.
Como educadores observaremos a los niños para ver cuántas de estas actividades necesitan hacer. Algunos niños necesitan hacer muchos ejemplos, otros lo entienden después de pocas veces.

Sumas con materiales estructurados

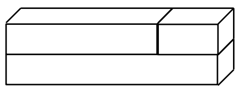
Haremos unas prácticas con algunos de los materiales específicos para aprender números y operaciones. Por ejemplo:

En el ***ábaco*** contamos las cuentas, moviéndolas de la izquierda a la derecha, igual como hemos contado tazas, piedritas, etc. Por ahora usamos solamente la primera fila de 10 cuentas.

Con las ***cadenitas de cuentas*** también podemos contar las sumas; pero ahora añadimos un desafío adicional: *¿Puedes encontrar una cadenita del mismo tamaño como estas dos juntas?* – Por ejemplo, hemos unido una cadenita de 5 con una de 2. Busca una cadenita que tiene el tamaño de estas dos juntas. ¿Cuál es?



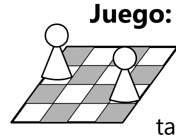
En las ***regletas Cuisenaire*** ya no podemos contar las unidades individuales. Aquí tenemos que medir comparando longitudes para encontrar la regleta que representa la suma. Por eso, este material puede servirnos para la transición desde el "sumar contando" hacia el "saber los resultados de memoria".



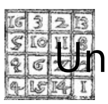
(5 más 2)
(7)

Primero un adulto puede decir las sumas para que los niños las representen; después los niños pueden hacerlo entre ellos. O pueden hacerlo al revés: Alguien representa una suma con el material, y los demás dicen la suma con números.

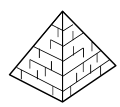
Juego: Cierra la caja



Se juega con dos dados. Cada participante tiene delante de sí diez tarjetitas con los números de 1 a 10, en orden; y una cajita para guardar las tarjetas.
Por turnos, cada uno tira los dos dados a la vez. Según los números tirados, puede guardar una o dos de sus tarjetas en la caja. Puede escoger si quiere guardar las dos tarjetas que corresponden a los números tirados, o la tarjeta que corresponde a la suma de los dos números. Si una tarjeta ya está guardada, no puede hacer nada con ese número.
Por ejemplo, si alguien tiene todavía en la mesa las tarjetas 2, 3, 5, 7, 8, 10 y tira un 3 y un 4, puede guarda el 3 (el 4 ya está en la caja), o puede guardar el 7 que es 3 + 4.
El primero en guardar todas sus diez tarjetas gana, y dice: "Cierra la caja", y entonces termina el juego.



Un poco de historia



El signo + fue introducido en el siglo 15 en Alemania. Su forma original fue la letra **t**, en abreviación de la palabra ***"et"*** (latín para ***"y"***). En aquellos tiempos, en vez de decir "5 ***más*** 3" se decía "5 ***y*** 3".

Para los educadores

Esta unidad es bastante grande porque corresponde a un gran paso en el razonamiento del niño: Estamos por primera vez introduciendo una operación aritmética; o sea, estamos dando el paso desde el "contar" y "comparar" hacia el "calcular". Tome entonces el tiempo necesario para que los niños lleguen a comprender bien el concepto de la suma y sus implicaciones.

La importancia de la actividad física:

No olvidemos que los niños aprenden mayormente mediante las *impresiones sensoriales* y sus propios *movimientos.* El tocar los objetos al contar, el mover las cuentas del ábaco, o el subir y bajar las gradas, es importante para el proceso de aprendizaje. No pasemos demasiado rápido al trabajo escrito.

El camino individual de cada niño:

Tomemos en cuenta que cada niño tiene su propia manera y su propio ritmo de aprender. Podemos darles libertad para que cada uno practique con aquellos ejercicios o actividades que más le llaman la atención, y que avance a su propio paso.
Esta unidad, por ejemplo, contiene una variedad de sugerencias para practicar sumas: con objetos de la casa y otros materiales contables; con cadenitas de cuentas, regletas Cuisenaire, o el ábaco; con el juego "Subir las gradas" o "Cierra la caja"; o mentalmente; y las sumas se pueden plantear arbitrariamente, o con las tarjetas de sumas, o tirando dados. Entre esta variedad de actividades, cada niño puede escoger lo que más le interesa.

La capacidad de "comprimir" mentalmente una operación:

El progreso en las operaciones matemáticas depende mucho de la capacidad de "comprimir" mentalmente una operación, o sea, de tratar varios pasos juntos como uno solo. (Vea en la *Unidad 27* para una explicación más detallada de este proceso.)

Al aprender a sumar, normalmente veremos a los niños pasar por las siguientes etapas (aunque hay excepciones):

1. Al sumar dos grupos de objetos, primero cuentan cada grupo por separado y después ambos grupos juntos. Por ejemplo, al sumar 4 + 2 contarán primero 1, 2, 3, 4; después 1, 2; y finalmente todo junto: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2. Después de adquirir práctica, descubrirán que pueden simplemente seguir contando 2 pasos más después del 4: 5, 6.

3. Con aun más práctica, encontrarán que las sumas hasta 10 son siempre las mismas, y con el tiempo las sabrán de memoria. Entonces, en vez de contar cada vez de nuevo, pueden decir la respuesta desde la memoria.

Matemática divina

La trascendencia de los números

Es un paso importante para el niño cuando descubre que los resultados de las sumas son siempre los mismos, *independientemente del tipo de objeto con el cual se realizan*. 2 papas más 4 papas son 6 papas; 2 platos más 4 platos son 6 platos, 2 piedritas más 4 piedritas son 6 piedritas. 2 más 4 siempre da 6. O sea, el *número* (y el principio de la suma) es independiente de las otras cualidades de los objetos tales como forma, tamaño, color, etc.

Eso nos puede parecer obvio, pero tiene implicaciones más profundas. Los números tienen una existencia propia, independiente de los objetos visibles. Su existencia nos señala que existe un mundo más allá de nuestro mundo material (lo que los filósofos llaman "la trascendencia"). Y en ese mundo trascendente existen verdades eternas, absolutas, que no cambian con el tiempo ni con los antojos de los hombres. Los principios de la suma pertenecen a estas verdades absolutas. De la misma manera, las leyes de Dios son también absolutas y tienen su existencia independientemente de las opiniones de los hombres.

> **JAIMITO NO LO ENTENDIÓ**
>
> La mamá pregunta a Jaimito:
>
> "¿Cuánto son dos naranjas más cuatro naranjas?"
>
> Jaimito responde:
>
> "No sé.
>
> En la escuela siempre sumamos con manzanas."

Ahora lo escribimos

"3 más 4 es igual a 7" se puede escribir con estos símbolos:

3 + 4 = 7

Hagamos nuevamente algunas de las actividades del Taller, pero ahora de las siguientes maneras:

- En vez de *decir* las sumas que los niños deben representar, les damos las sumas *escritas* en tarjetas. (Se pueden usar las tarjetas de la ***Hoja de trabajo 15.2***, dejando todavía de un lado las sumas que contienen el cero.)
- En vez de que los niños *digan* las sumas que representamos, que las *escriban* en su cuaderno.

Paralelamente podemos usar las ***Hojas de trabajo 15.1 y 15.3.*** En las sumas con regletas Cuisenaire se deben colocar primero las regletas correspondientes sobre la hoja, antes de escribir los números y las sumas.

Los niños que dominan la suma con material concreto, pueden pasar a sumar mentalmente (hacer ejercicios orales) y a escribirlas sin usar el material. (Pueden usar los ejemplos a continuación.) – También pueden inventar sus propias sumas.

Los niños que desean o necesitan hacer más ejercicios escritos, pueden también escribir en su cuaderno algunas de las sumas de las tarjetas, y sus resultados.

> **Vocabulario matemático**
>
> *Las partes de una suma* se llaman con los siguientes nombres:
>
> **Sumando + Sumando = Suma.**
>
> Por ejemplo, en 3 + 4 = 7, el 3 y el 4 son *sumandos*, el 7 es la *suma*.
>
> La operación de sumar se llama también **adición**.

Ampliaciones

Intercambiando sumandos (Ley conmutativa)

Vuelvan a hacer algunas de las actividades del Taller, y observen qué sucede cuando intercambiamos los sumandos. Que los niños saquen la conclusión por sí mismos. – Por ejemplo, sumamos las tazas rojas con las azules; después las sumamos otra vez, pero empezando con las azules. Lo mismo con otros objetos, con el ábaco, etc.

Haciéndolo con estos objetos, será bastante obvio que la suma es la misma. Es un poco menos obvio en el juego de las gradas: ¿Será lo mismo si empiezo en la grada 3 y subo 6 gradas, o si empiezo en la grada 6 y subo 3 gradas? Hagan el experimento.

Este principio puede simplificar algunos cálculos. Por ejemplo, queremos sumar 1+7. Si el niño no lo sabe de memoria, tendrá que contar 7 pasos después del 1. Pero cuando entiende la ley conmutativa, puede razonar que 1+7 es lo mismo como 7+1. Esto es más fácil: tengo que avanzar un solo paso después del 7, da 8.

Nota: A este nivel no es necesario que los niños aprendan formalmente los términos “sumandos” y “ley conmutativa”. Lo importante es que entiendan el *principio:* En una suma puedo intercambiar los sumandos, y el resultado sigue el mismo. – Podemos usar la palabra “sumandos” de paso cuando señalamos las partes de una suma, así los niños pueden aprender este término de manera informal.

Hoja de trabajo no. 15.4: En esta hoja continúa el “experimento” de observar lo que sucede cuando intercambiamos sumandos, usando símbolos contables y regletas Cuisenaire. Como en la Hoja no.15.3, se deben primero colocar las regletas correspondientes sobre los dibujos, y solo después escribir los números y las sumas. – Si los niños desean, pueden pintar los dibujos con los colores correspondientes de las regletas.
En la parte inferior de la hoja se trata de usar la ley conmutativa para que el cálculo se haga más fácil. La idea es que el niño se dé cuenta de que una suma como 5+2 ó 8+1 es más fácil de calcular tal como está escrita, mientras que una suma como 2+7 se vuelve más fácil si la invertimos mentalmente y calculamos 7+2.

Sumas con varios sumandos

Empecemos nuevamente con algunas actividades del Taller, pero usando tres o más sumandos. Por ejemplo, podríamos tener varios tipos de frutas: tres manzanas, cuatro naranjas, dos plátanos. ¿Cuántas frutas son? – Preferiblemente limitémonos todavía a sumas que no sobrepasan el 10.

Después hagamos algunas actividades de ***“Ahora lo escribimos”***, también con tres o más sumandos. Pueden usar las tarjetas de la ***Hoja de trabajo 15.5***, o hacer ejemplos propios.

Con estas actividades se relaciona también la ***Hoja de trabajo 15.6.***

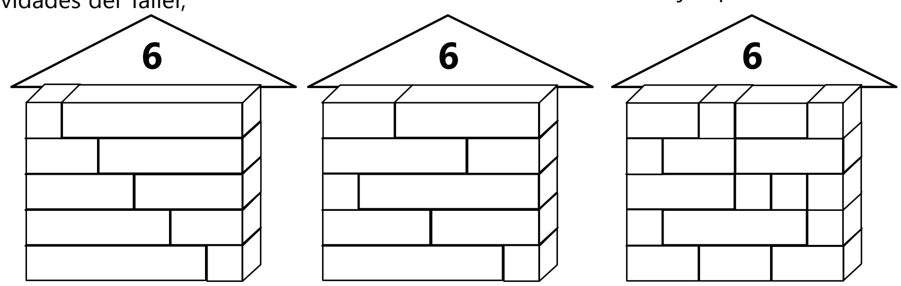
Inventar sumas propias

Que los niños planteen sus propias sumas y las resuelvan (con material concreto o en la cabeza). Cada niño puede resolver sus propias sumas, o las pueden intercambiar entre ellos.
En esta actividad puede suceder que un niño sugiere una suma que al calcular se da cuenta de que da más que 10. ¿Qué hacer en este caso? Eso depende del nivel actual del niño. Quizás ya sabe escribir los números mayores a 10, entonces escribe su resultado normalmente. O quizás está en un punto de aprenderlo fácilmente, entonces esta situación brinda una motivación para aprenderlo. O todavía no lo puede; en este caso podemos decir (por ejemplo): “Correcto, esto da 14, eso es un número que todavía no sabes escribir. Yo lo voy a escribir por ti.” O: “Todavía no necesitas escribir este número si no sabes cómo. Más tarde lo vas a aprender.”

Una variación de esta actividad consiste en inventar una suma con un resultado dado. Por ejemplo: “Dime una suma que da 8.” – “Escribe una suma que da 10.” – Puede ser una suma con dos o con más sumandos. Los niños pueden plantearse estos pequeños desafíos unos a otros.

Hoja de trabajo 15.7 *(arriba):*
Encuentra varias maneras de llenar las regletas dibujadas con dos o más regletas, y escribe las sumas correspondientes. – ¿No hay dos maneras de llenar la regleta del 2? Si los niños no lo descubren por sí mismos, que siga siendo un misterio hasta que lleguemos al siguiente apartado ("El cero en la suma").

Hojas de trabajo 15.7 a 9:
Las “casas” se llenan con regletas Cuisenaire para representar sumas con el resultado deseado. Se recomienda verificar primero el ancho de la casa, colocando p.ej. en uno de los pisos de la “casa del 6” una regleta de 6. Después, los niños llenan los pisos con diferentes combinaciones de regletas.
Existen diversas maneras de hacerlo; por tanto un niño puede llenar dos o tres copias de la misma hoja, usando cada vez combinaciones distintas. Por ejemplo:

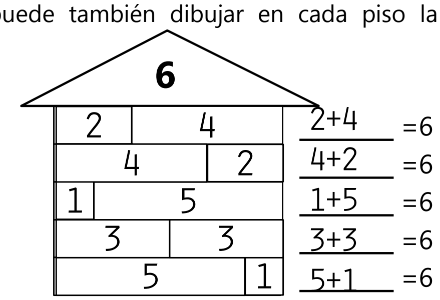


Todas las combinaciones con dos sumandos, en orden.

Combinaciones con dos sumandos, en orden aleatorio.

Incluyendo combinaciones con tres o más sumandos.

Después de completar una casa con regletas, se escriben las sumas correspondientes al lado de cada piso. Al quitar las regletas, se puede también dibujar en cada piso la ubicación de las regletas y escribir los números correspondientes dentro de cada campo. Si desean, pueden además pintar los campos con los colores de las regletas correspondientes.



La “casa del 10” es particularmente importante, porque es muy útil saber de memoria los pares de números que se complementan a 10: 1+9, 2+8, 3+7, etc. Practiquemos con frecuencia las sumas que dan 10.

En este contexto hay una pregunta de investigación interesante para mayores:
Supongamos que queremos construir una "casa del 10" *completa*, o sea que contenga *todas* las sumas posibles que suman 10 (usando números enteros de 1 a 10), ¿cuántos pisos tendría esa casa? – En el nivel de Secundaría I se retomará esta pregunta junto con los alumnos.

El cero en la suma

Algunos niños pueden quedar perplejos ante una expresión como **"0+4"**. Quizás no entienden todavía el concepto del cero; o no pueden imaginarse cómo se puede sumar "nada". Vuelvan a hacer algunas actividades del Taller, incluyendo el cero:

- "Pon cinco papas sobre la mesa. Aumenta ninguna papa (cero papas). ¿Cuántas papas tienes?"

- "Pon cero cuentas en el ábaco (ninguna). Aumenta tres. ¿Cuánto tienes?"

- En el juego de las gradas: "Comienza en la grada número 8. Sube cero gradas (ninguna grada). ¿Dónde estás ahora?" – O: "Comienza en la grada cero (en el piso delante de las gradas). Sube 6 gradas. ¿En qué grada estás?" (Se puede adicionalmente marcar el piso delante de las gradas con el número **0**.)

Ahora pueden también volver a hacer algunas de las mismas actividades usando tarjetas, e incluyendo las tarjetas que contienen ceros.

Pueden repasar estos conceptos con la ***Hoja de trabajo no.15.10, arriba*** (Sumas con cero).

Investigación

"Siempre uno más" ***(Hoja de trabajo no.15.10, abajo)***

Esta hoja se parece a las anteriores de contar símbolos y escribir las sumas correspondientes. Pero el propósito de esta tarea va más allá. Se trata de que después de escribir las sumas, el niño *observe un patrón matemático regular* e intente explicarlo.
En este caso, tenemos un grupo de sumas donde un sumando permanece igual, y el otro se incrementa de uno en uno. Cuando el niño haya terminado de escribir las sumas y sus resultados, le podemos hacer preguntas como las siguientes:

¿Observas algo interesante o especial en los resultados?

¿Cuál "regla" encuentras?

¿Qué piensas, por qué resulta así?

Un niño atento se dará cuenta de que los resultados también aumentan de uno en uno. Lo retamos a encontrar una explicación de este hecho; o sea, a responder a la pregunta de ***por qué*** eso es así. Al reflexionar sobre preguntas como estas, se colocan las bases del pensamiento matemático.

¿A dónde vamos desde aquí?

Pueden continuar con la unidad siguiente, o con una de estas:

La recta numérica *(Unidad 17)*.

La operación inversa: introduciendo la resta *(Unidades 18, 19)*.

Números hasta 20 *(Unidad 20)*.

Unidad 16 - Medir con regletas

Prerrequisitos:

- Conocer los números hasta 10.

Materiales necesarios:

- Objetos comunes de la casa
- Regletas Cuisenaire

TALLER

Medir objetos en la casa

Las regletas Cuisenaire originales son fabricadas de manera que la unidad mide exactamente 1 cm. Las podemos entonces usar como reglas para medir. Busquen unos objetos pequeños (máximo 10 cm): Borradores, lápices cortos, tijeras para niños, clavos, etc. Que los niños busquen para cada objeto una regleta que tenga aproximadamente el mismo tamaño. Les explicamos que la medida de la unidad es 1 cm, entonces si un objeto mide igual como una regleta de 6, eso significa que el objeto mide 6 cm.
De la misma manera pueden medir el grosor de algunos libros, y otras medidas que estén en el rango de 1 a 10 cm.
Quizás los niños querrán medir unos objetos más grandes. En este caso tendremos que explicarles como los números mayores a 10 se componen del 10 más cierto número de unidades. Que usen entonces una regleta de 10 (o varias, si es necesario), y después una regleta más pequeña hasta alcanzar el tamaño del objeto. Así podemos informalmente introducir los números de 10 a 20. Por ejemplo, para alcanzar el tamaño de un lápiz se usó una regleta de 10 y una regleta de 4; entonces el lápiz mide 10 + 4 = 14 cm.
Pueden hacer una lista de los objetos que midieron y anotar su tamaño en centímetros.

Principios matemáticos

La medición empieza con cero

Al medir con una regla, algunos niños dificultan en entender por qué el objeto tiene que alinearse con el 0 de la regla y no con el 1, ya que al contar comenzamos con 1. Al medir con regletas Cuisenaire no tenemos esta dificultad, porque las regletas no tienen números marcados. Así es más lógico que el objeto tiene que alinearse con el extremo de la regleta y no con algún punto intermedio.
Volveremos a este tema al introducir la recta numérica, porque allí surge el mismo problema: La recta numérica comienza con 0, no con 1.

Para los educadores

Esta pequeña unidad es opcional, porque a este nivel todavía no hay necesidad de introducir las unidades de medida. Pero la actividad de medir con regletas puede preparar el entendimiento de la recta numérica, la cual se presenta en la siguiente unidad.

Matemática divina

¿Cuál es tu regla para medir?

Cuando medimos, comparamos un objeto con una regla. La regla nos indica las unidades de medida que son siempre las mismas.

También existe una regla para medir nuestra manera de vivir. Pero esta regla no mide longitudes. Esta regla mide si está bien o mal cómo vivimos.

La regla para medir nuestra vida es la palabra de Dios. Si quieres saber cómo está tu vida, compárala con lo que dice Dios.

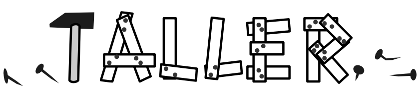
Lo que dicen los hombres, puede cambiar. Los hombres se pueden equivocar. Padres, profesores, líderes de iglesias ... todos se pueden equivocar. Pero Dios no se equivoca. Por eso, la palabra de Dios es una regla segura.

Unidad 17 - La recta numérica

Prerrequisitos:
- Conocer los números hasta 10.
- Sumar hasta 10.

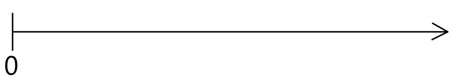
Materiales necesarios:
- Regletas Cuisenaire
- Figuras de juego
- Tarjetas de sumas (de la *Unidad 15*)
- Juegos de tablero: Ludo, Escaleras y serpientes, y similares

---

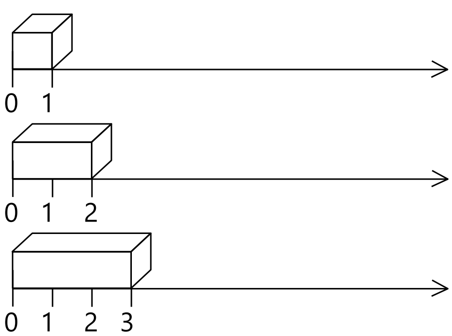


Fabricamos una recta numérica

Cada niño puede en una hoja de papel blanco construir su propia recta numérica que concuerda con las regletas Cuisenaire. Comenzamos con una línea recta, marcamos un punto de inicio y escribimos un 0 por debajo:

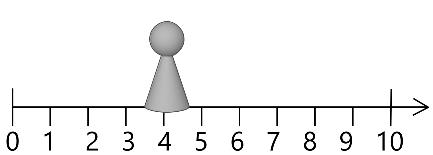


Ahora usamos las regletas para medir, como hemos hecho en la unidad anterior: Colocamos el cubo de unidad junto al punto de inicio, y donde termina el cubo, marcamos el 1. Después colocamos la regleta del 2 junto al punto de inicio, y donde termina la regleta, marcamos el 2. Lo mismo con el 3, el 4, etc, hasta el 10:



Se recomienda desde el inicio usar una hoja lo suficientemente grande para que posteriormente la recta numérica se pueda ampliar hasta 20. *(Vea Unidad 22.)*

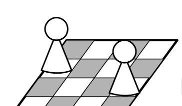
Pasos en la recta numérica



Con esta recta numérica podemos jugar de manera similar como en "Subir las gradas" (*Unidad 15*): Cada niño tiene su recta numérica y una figura de juego. Un adulto (u otro niño) dice por ejemplo: "Párate en el 4." – Los niños ponen su figura en el número 4. – "Avanza 5 pasos." – Los niños avanzan 5 pasos en la recta numérica y anuncian adónde llegaron: "Llegué al 9."

Lo mismo se puede hacer con un dado. El niño tiro el dado una primera vez; este número indica dónde poner la figura. El niño tira el dado por segunda vez; este número indica cuántos pasos avanzar. – Con esta variación pueden resultar números hasta 12. Pero podemos fabricar dados especiales que tienen los números de 0 a 5 en vez de 1 a 6; así las sumas quedan en el rango de 0 a 10.
Posteriormente, los niños pueden escribir los movimientos realizados en forma de sumas: Del número 2 avancé 5 pasos y llegué al 7. Eso es la suma 2 + 5 = 7.
También podemos dar a los niños unas sumas en tarjetas, y que las representen con su figura en la recta numérica. Por ejemplo, la tarjeta dice 3 + 7. Esto significa: "Pon la figura en el número 3, y de allí avanza 7 pasos." – Pueden usar las tarjetas de la *Unidad 15*.

La ***Hoja de trabajo 17.1*** reproduce esta actividad en dibujos. El ejemplo representa la suma 3 + 6 = 9: Empezamos en el 3, damos 6 pasos hacia adelante, y llegamos al 9. Los pasos pueden dibujarse como 6 flechas individuales (yendo "a pie"), o como una única flecha que abarca el espacio de 6 unidades (yendo "en avión").
En la primera mitad de la hoja, los niños interpretan las sumas dibujadas: Completan el operador encima de las flechas (+___), y escriben la suma completa a la derecha. En las rectas numéricas incompletas hay que completar también los números que faltan.
En la segunda mitad de la hoja, los niños dibujan las sumas escritas a la izquierda, y completan los resultados. Ellos mismos deciden si quieren ir "a pie" o "en avión".

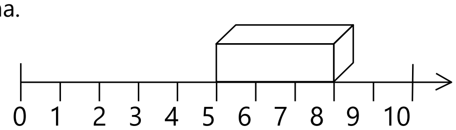


Pasos en el tablero de juego

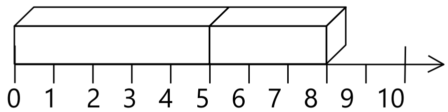
Esta misma idea de "dar pasos" aparece en muchos juegos de tablero, tales como Ludo, Escaleras y serpientes, y varios otros. Jueguen algunos de estos juegos para practicar el "avanzar" según el número que muestra el dado.

Medimos sumas en la recta numérica

En vez de avanzar un determinado número de pasos, podemos también medir con regletas Cuisenaire las distancias que avanzamos. Por ejemplo, desde el número 5 avanzamos 3 pasos (5 + 3). Eso lo podemos representar de la siguiente manera: Comenzando en el número 5, colocamos sobre la recta numérica una regleta de 3. Veremos que la regleta termina en el 8; eso es el resultado de la suma.



Todas las actividades que hicimos con figuras de juego *(vea arriba)*, las podemos ahora hacer con las regletas.
La ***Hoja de trabajo 17.2*** contiene unos ejercicios de este tipo. En la parte de arriba se coloca la regleta sobre la recta numérica de acuerdo al dibujo, se completa el operador escrito en la regleta, y se escribe la suma completa al lado derecho. En las rectas numéricas incompletas se deben completar los números. – En la parte de abajo, se coloca una regleta sobre la recta numérica de acuerdo a la suma escrita, se dibuja el contorno de la regleta, y se completa el operador correspondiente a la regleta.
- Una variación consistiría en representar también el primer sumando con una regleta. Con el ejemplo de 5 + 3:



En realidad esto es redundante, porque si ponemos una regleta de 5 al inicio, ya sabemos que debe terminar en el número 5. Pero algunos niños pueden necesitar este detalle adicional, para poder hacer la conexión mental con las sumas con regletas como las hicimos en la *Unidad 15*.

Principios matemáticos

Sumar es "caminar hacia adelante"

Inicialmente hemos practicado sumas al *contar objetos*. En ese contexto, la suma se interpretaba como "aumentar objetos".
Con las actividades de dar pasos sobre la recta numérica (y ya antes en el juego de "subir las gradas"), vemos que la suma puede entenderse también en un contexto de *movimiento*. En este contexto, la suma se interpreta como "caminar hacia adelante". Esta representación de la suma es importante para entender más adelante el principio de la operación inversa, y las leyes de los signos.

El movimiento empieza en el cero

Como en la medición de longitudes, también en la recta numérica comenzamos en el cero. Esto puede ser difícil de entender para algunos niños, porque al contar comenzamos con 1. Pero es lógico si entendemos que "1" significa: "He caminado 1 paso." ¿Desde dónde? – Desde el cero, por supuesto.
La misma dificultad puede surgir en los juegos de tablero que requieren "avanzar pasos". Algunos niños dejan su figura en el cuadro de origen y dicen "Uno", después la mueven al cuadro siguiente y dicen "Dos". Tenemos que mostrarles que si hacen eso, dicen "Dos" cuando en realidad recién han caminado un solo paso. El cuadro de origen es el "cuadro cero", para decir así; y recién cuando nos hemos movido al cuadro siguiente, hemos dado un paso.

Para los educadores

La recta numérica debe entenderse como una ***ayuda para visualizar*** sumas y restas; no como una complicación adicional. No se debe dar a los niños la impresión de que las operaciones en la recta numérica sean "otras" o "diferentes" de las operaciones con material concreto o con números.
De hecho, ***es lo mismo***: Cuando sumamos con cadenitas de cuentas, con regletas Cuisenaire, o en el ábaco, también tenemos la imagen de una línea recta que aumenta en tamaño según la cantidad que sumamos. La recta numérica no es otra cosa que un dibujo abstracto de una sucesión de cuentas o de regletas ordenadas en línea recta.

¿A dónde vamos desde aquí?

La *resta como operación inversa de la suma* puede introducirse de diferentes maneras. La siguiente unidad (18) lo hace mediante el juego de las "máquinas"; la Unidad 19 lo hace con la recta numérica. Pruebe cuál resulta mejor con sus niños.

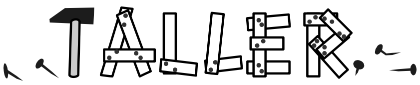
Unidad 18 - Restar es sumar al revés

Prerrequisitos:

- Conocer los números hasta 10.
- Sumar hasta 10.

Materiales necesarios:

- Objetos comunes del hogar
- Cadenitas de cuentas
- Ábaco
- Regletas Cuisenaire
- Tubos de papel higiénico
- Cajitas vacías de fósforos *(para el trabajo manual)*



¿Cuánto falta?

Comiencen con unas actividades de “sumas incompletas”, o sea, buscando el *complemento* de un número para alcanzar la suma deseada. Háganlo primero en situaciones de la vida diaria. Por ejemplo:
Somos 6 personas que vamos a almorzar; aquí hay 2 platos sobre la mesa. ¿Cuántos platos tenemos que aumentar? – Si el niño da una respuesta equivocada, no lo corrija. Deje que ponga sobre la mesa el número de platos que dijo, y que cuente si ahora hay 6 en total. Si no son 6, el niño se dará cuenta de su error por sí mismo.

Practiquen otras situaciones similares:
Quiero 10 papas para cocinar; aquí hay 5. ¿Cuántas papas más tienes que traerme?
Son 7 cuadras hasta el mercado, ya hemos caminado 3; ¿cuántas faltan? – Etc.

Después hagan lo mismo con material contable, cadenitas de cuentas, regletas Cuisenaire, o en el ábaco. Por ejemplo:
He puesto 2 cuentas en el ábaco. ¿Cuánto tenemos que aumentar para que sean 5?
Tengo una cadenita de 3, pero quiero que sean 9. ¿Cuánto tengo que aumentar?
Tengo una regleta de 7. ¿Cuánto falta para que sean 10?

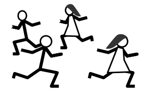
Cuando los niños han entendido como funciona, pueden practicar la notación escrita de estas operaciones con la ***Hoja de trabajo 18.1***: En cada operación se colocan las regletas sobre la hoja, primero las regletas que están dibujadas, después una tercera regleta que completa la suma. Después se escriben dentro de las regletas dibujadas los números correspondientes, como en los primeros ejemplos donde estos números ya están puestos. Finalmente se escribe al lado la suma con sus símbolos.
En la parte inferior de la hoja hay unas operaciones para resolver mentalmente y escribir los resultados. Si un niño no puede hacer eso en su mente, que lo haga con material concreto (cadenitas de cuentas o regletas Cuisenaire).

Restas en la vida diaria

Busquen oportunidades en la vida diaria donde ocurre la operación de restar o quitar. Por ejemplo:
Compren unas manzanas y cuéntenlas. Digamos que son 9. Comemos 5 de ellas. ¿Cuántas manzanas sobrarán?
José tiene unas canicas para jugar y va a regalar algunas a su hermanito. Cuenten las canicas que tiene José. Supongamos que son 8. Él regala 2 a su hermanito; ¿cuántas le quedan? – Etc.
Al hacer compras, pueden contar cuánto dinero tienen, cuánto tendrán que pagar, y cuánto sobrará. Intente crear unas situaciones donde pueden hacer eso con números “fáciles” (eso depende de la moneda de su país y los precios de los alimentos).
Si desean, pueden ahora mismo introducir el signo “menos”, y anotar algunas de las restas que hicieron. También pueden dejar este paso para más tarde, cuando lleguemos a ello en la actividad de las máquinas *(vea más abajo)*.

Restar con material estructurado

Igual como las sumas, también las restas se pueden practicar con piedritas o semillas, cadenitas de cuentas, regletas Cuisenaire, o en el ábaco. Que los niños escojan el material que prefieren.
Después pueden practicarlo en papel con la ***Hoja de trabajo 18.3***. En la mitad inferior, los niños pueden dibujar las figuras que ellos deseen para visualizar las restas (tachando aquellas figuras que se restan).
La ***Hoja de trabajo 18.2*** contiene tarjetas de restas para practicar con material contable o con el juego de las gradas (vea abajo).



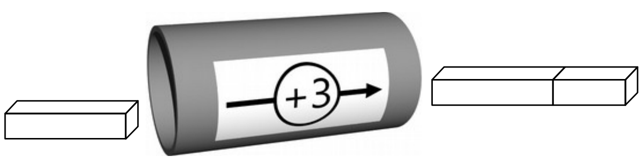
Bajar las gradas

Vuelvan a jugar el juego “Subir las gradas” de la *Unidad 15*, pero ahora bajando. Entonces las instrucciones serían por ejemplo así: “Pónganse en la grada 5. Bajen 4 gradas.” – También pueden jugarlo con las tarjetitas de números y un dado: Usen solamente las tarjetas de 6 a 10. Barájenlas y saquen una al azar; este número indica en qué grada comenzar. Después tiren el dado: el número del dado indica cuántas gradas bajar.

“Máquinas” de sumar

Esta actividad se puede hacer con regletas Cuisenaire o con cadenitas de cuentas. Aliste unos tubos de papel higiénico y unos plumones. De antemano esconda en uno de los tubos una cadenita o regleta de 3. Ponga este tubo horizontalmente sobre la mesa y explique a los niños que el tubo va a funcionar como una máquina de sumar. Desde el lado izquierdo (visto desde la perspectiva de los niños) introduzca una cadenita o regleta en el tubo. Siga empujándola hasta que salga por el otro lado del tubo, junto con la cadenita o regleta de 3 que ya estaba dentro. (Puede usar el momento de sorpresa de los niños para rápidamente meter otra cadenita o regleta de 3 dentro del tubo sin que se den cuenta.) “Ven, la máquina ha aumentado 3 a lo que teníamos. ¿Cuánto tenemos ahora?” Que los niños lo calculen.

Repetimos lo mismo con otra cadenita o regleta, a la cual también sumamos 3. “Parece que esta máquina aumenta 3 a todo lo que entra. Vamos a ponerle un letrero. Esta es la máquina 'más tres'. ” – Con un plumón, dibuje sobre el tubo un operador “+3” con una flecha de la izquierda hacia la derecha, como en el dibujo.



Probablemente los niños van a querer manejar la máquina ellos mismos. Tenemos que explicarles entonces el “truco” de la regleta escondida (si es que no se dieron cuenta por sí mismos). Podemos definir otras máquinas: una máquina “más dos”, una máquina “más cuatro”, etc.

Que los niños jueguen algún tiempo con las máquinas antes de continuar con la siguiente actividad. Durante este juego podemos desafiarlos a hacer predicciones: Tenemos una máquina “+4”. Hacemos entrar una regleta de 5 a esta máquina. ¿Cuánto va a valer lo que sale?

¿Qué ha entrado a la máquina?

Ahora intentamos hacer predicciones “al revés”: Tengo una máquina “+2”, y salió 8 de la máquina. ¿Cuánto entró? – Hay que comprobar si la respuesta es correcta. Por ejemplo, si un niño dice que entró 5, hacemos la prueba: Hacemos entrar una regleta o cadenita de 5 a la máquina, la máquina aumenta 2, y contamos lo que salió. ¿Vale 8? ¿No? – Entonces la respuesta fue equivocada; hay que pensarlo otra vez.

La “máquina misteriosa”

Podemos también presentar una “máquina misteriosa”, o sea, una máquina sin rótulo. Hacemos entrar una regleta (o cadenita) de 4 a la máquina, y sale una regleta de 10. ¿Qué hizo la máquina? – Si los niños no están seguros en su respuesta, lo hacemos otra vez con otra regleta: Entra un 1 a la máquina, y sale un 7. ¿Qué hizo la máquina?

Reflexionando, los niños podrán entender que estas actividades del “¿Qué entró?” y de la “máquina misteriosa” representan las mismas operaciones como la actividad del “¿Cuánto falta?”.

Hacemos correr la máquina al revés

Ahora estamos listos para el concepto más importante de esta unidad: la ***operación inversa***, o “suma al revés”. Volvemos a hacer una pregunta de ¿Qué ha entrado a la máquina?

Si tienen acceso a un programa de edición de videos en computadora, pueden hacer el siguiente experimento: Graben en video una operación de la “máquina”, por ejemplo 5 + 3. Con el programa de computadora hagan que el video corra al revés. Se verá que la operación “al revés” comienza con las regletas o cadenitas del 5 y del 3 juntas (lo que vale 8), que entran a la máquina, y sale la regleta del 5 sola. O sea, la “máquina al revés” le ha quitado 3.

Hay entonces otra manera de descubrir cuánto ha entrado a la máquina: En vez de “adivinarlo” y comprobarlo con la operación “normal” de la máquina, podemos hacer correr la máquina al revés. Si tenemos la máquina “más tres” y salió 8 de la máquina, la hacemos correr al revés y se convierte en una máquina “menos tres”: 8 – 3 = 5. Entonces 5 es el número que entró a la máquina.

Hagan varias de estas operaciones “hacia adelante” y “al revés” con las máquinas. Después anoten algunas de estas operaciones, cada una con su operación inversa correspondiente:

5 + 3 = 8	8 – 3 = 5	
5 + 5 = 10	10 – 5 = 5	
2 + 7 = 9	9 – 7 = 2	etc.

Si los niños dificultan en entender de esta manera lo que es la operación inversa, inténtenlo con otra ilustración: subir y bajar gradas *(vea arriba)*, o viajar "de ida y vuelta" en la recta numérica *(Unidad 19)*.

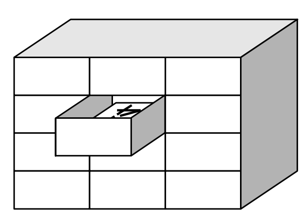
Máquinas de resta

Por fin podemos introducir máquinas que restan. Por ejemplo una máquina “menos dos”: Entra un 6 a la máquina, y sale 4. Entra un 9, y sale 7. Entra un 2, y sale nada.

Que los niños descubran por sí mismos qué sucede si hacemos correr estas máquinas al revés.

Trabajo manual: Una cómoda para las tarjetitas

Esta no es directamente una actividad matemática, pero será práctico para guardar las tarjetitas con operaciones que se acumularán en el transcurso de las unidades de aprendizaje.



Junten unas 12 o más cajitas vacías de fósforos. Péguenlas juntas con goma en forma de rectángulo. Fórrenlo por los costados con un papel de color. Ahora tienen una "cómoda" práctica para guardar las tarjetitas con operaciones, cada serie en su propio "cajón".

Principios matemáticos

Principios de la suma y resta

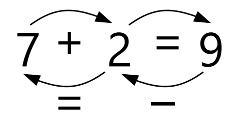
Daré en esta sección una vista "a vuelo de pájaro" de los principios más básicos que rigen las operaciones de la suma y resta. Algunos de estos principios se introducirán poco a poco en esta unidad y las siguientes; otros tendrán que esperar hasta más tarde.

En las actividades con material concreto, los niños experimentan que ***"sumar es aumentar, restar es quitar."*** Al nivel de primaria, este concepto es lógico y suficiente; está bien que los niños lo aprendan así. Pero al entrar al nivel de secundaria, cuando tengan una madurez mayor, tendrán que aprender otro concepto más adecuado a las nuevas situaciones que enfrentarán. En realidad, no todas las sumas "aumentan algo", y no todas las restas "quitan algo". Eso lo veremos cuando lleguemos a los números negativos.
Pero por ahora, en el nivel de primaria, nos quedaremos con los conceptos de "aumentar" y "quitar"; eso es lo más natural y más fácil de entender para un niño de siete años. En el contexto de la recta numérica podemos hablar también de caminar "hacia adelante" y "hacia atrás".

Dos propiedades muy importantes: La suma es ***conmutativa*** y es ***asociativa.*** Todavía no es necesario que los niños aprendan estos términos técnicos; pero en el trabajo con material concreto *experimentan* estas propiedades.
La **ley conmutativa** dice que en una suma puedo intercambiar los sumandos y el resultado sigue siendo el mismo: 2 + 5 = 5 + 2 = 7.
La **ley asociativa** dice que en una suma con varios sumandos puedo asociar los sumandos de manera distinta, y el resultado sigue siendo el mismo:
(2 + 3) + 7 = 2 + (3 + 7) = 10.
Eso se volverá importante cuando tengamos sumas con números mayores, entonces tendremos que descomponerlos en componentes más pequeños. *(Vea Unidades 21, 28, 30.)*
Ambas leyes tienen que ver con el ***orden*** en el cual efectuamos las operaciones, y nos dicen que si todas las operaciones son sumas, cualquier orden es correcto.

Otra propiedad importante es que la suma y la resta son operaciones mutuamente **inversas:** Restar es "sumar al revés", y sumar es "restar al revés". Para los niños, eso lo visualizamos con las "máquinas" que podemos hacer correr de izquierda a derecha o también de derecha a izquierda; y también con los viajes "de ida y vuelta" en la recta numérica *(Unidad 19)*. De una manera más abstracta, podemos también leer sumas y restas "al revés":

Hacia adelante leemos la suma "7 + 2 = 9", pero también podemos leerlo hacia atrás, y entonces es una resta: "9 – 2 = 7".



El principio de la operación inversa nos dice que **una operación y su inverso se anulan mutuamente.** Si hago un viaje "de ida" y después el mismo viaje "de vuelta", llego al mismo lugar de donde salí. O sea, el resultado final es como si no hubiera viajado en absoluto. Una operación de este tipo sería por ejemplo: 6 + 4 – 4 = 6.
No necesitamos ningún formalismo complicado para explicar eso a los niños. Las actividades de las "máquinas" y del viaje "de ida y vuelta" lo hacen inmediatamente evidente.

En el transcurso de las actividades del taller, puede suceder que unos niños intenten efectuar restas como 4 – 7. (Por ejemplo, tenemos una "máquina que resta 7", y un niño intenta poner una regleta de 4 en esta máquina.) Dejemos que descubran por sí mismos que eso no se puede hacer. De allí podemos hacerles ver que ***la resta no es conmutativa:*** 4 – 7 no es lo mismo como 7 – 4. Lo último se puede hacer, pero lo primero no (por lo menos no con nuestro material contable).

Por el otro lado, existe una **"conmutatividad de la suma y resta combinadas",** *mientras cada número se mantiene unido a su signo:*

4 – 7 + 6 = 4 + 6 – 7

O sea, cada operando incluido *su signo* representa un paso de la operación; y estos pasos los puedo efectuar en el orden en que quiero. Matemáticamente, eso no es otra cosa que la ley conmutativa normal para las sumas. Solamente que en este ejemplo, uno de los sumandos es negativo.
Al nivel de primaria todavía no es necesario introducir números negativos. Los alumnos lo entenderán mejor con el concepto de los "viajes" hacia adelante y hacia atrás. (Vea también "Principios matemáticos" en la *Unidad 24*.)
Por el otro lado, me parece muy importante introducir desde el inicio la convención de que *los signos se escriben a la izquierda* del número correspondiente. O sea, *el signo se aplica al número que le sigue*; pero no al número que le precede. Así en el ejemplo arriba, el signo "–" pertenece al número 7; no al 4 ni al 6. El signo y el número juntos representan una única operación o "instrucción": "Camina siete pasos hacia atrás". (Para hacerlo un poco más claro, señalé en la operación de arriba mediante espacios cuál signo pertenece a cuál número.)
Esta convención es importante para evitar malentendidos. No es un principio matemático; el principio es que el número no debe separarse de su signo, y podríamos escribir el signo donde queremos. Pero si queremos

comunicarnos claramente con otros alumnos, padres, profesores, autores, matemáticos, etc, entonces debemos hacerlo todos de la misma manera.

Enfatizo este punto porque he visto incontables libros escolares con sumas y restas mal escritas, operaciones como las que figuran a la derecha:

$$\cancel{\begin{array}{l} 234+ \\ \underline{419\quad} \end{array}} \qquad \cancel{\begin{array}{l} 765\,- \\ \underline{378\quad} \end{array}}$$

Tales operaciones causan confusión porque asocian el signo con el número equivocado. En el primer ejemplo, el número que se suma es 419 y no 234, entonces es el 419 que debe llevar el signo "+". Igualmente en el segundo ejemplo, es el 378 que se resta, entonces el 378 debe llevar el signo "–" y no el 765. La manera correcta de escribir estas operaciones es la que figura aquí a la izquierda.

$$\begin{array}{r} 234 \\ \underline{+419} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 765 \\ \underline{-\,378} \end{array}$$

Bien; en nuestro método de todos modos no introducimos sumas y restas verticales, cifra por cifra, hasta llegar al nivel de Primaria II. Pero hago la advertencia aquí porque quizás algunas familias o escuelas están paralelamente trabajando con otros libros. Por favor corrijan allí las operaciones mal escritas. Si los niños se acostumbran a esa notación equivocada, no van a entender bien la conmutatividad de las sumas y restas combinadas, y puede que dificulten con las leyes de los signos hasta el fin de la secundaria.

Para que los niños se acostumbren a asociar correctamente el número con su signo, usamos de vez en cuando una notación de operadores en forma de flechas, que consisten únicamente en un número con su signo:

$$\longrightarrow \textcircled{+5} \longrightarrow$$

Así por ejemplo en los rótulos de las "máquinas", y en algunas operaciones en la recta numérica.

El principio del **entero y sus partes** es también muy importante. (Vea *Unidad 25*.) En situaciones concretas, este principio nos hace entender cuándo sumar y cuándo restar. Euclides lo formuló así: **"El entero es mayor que su parte."**

En la mayoría de las situaciones de la vida diaria, el entero es ***la suma*** de sus partes: En un grupo hay 11 mujeres y 7 varones, entonces el grupo entero consiste en 11 + 7 = 18 personas. En una canasta hay 6 naranjas y 8 plátanos, entonces son 6 + 8 = 14 frutas.

Por el otro lado, si el entero es conocido y queremos saber cuánto es una parte, entonces del entero tenemos que *restar* la otra parte: Una casa de dos pisos tiene 20 ventanas; 9 de ellas están en el primer piso. Entonces el segundo piso tiene 20 – 9 = 11 ventanas.

En tales situaciones, entonces, los niños tienen que aprender a identificar cuál es el entero y cuáles son sus partes.

Un poco de historia

El signo "–" para la resta comenzó a usarse más o menos al mismo tiempo como el signo "+", en el siglo 15. No se sabe con certeza cuál es su origen. Una conjetura dice que al inicio puede haber sido una letra ***m*** (de "menos"), la cual se escribía cada vez más alargada, hasta que se deformó en una única línea recta.

Para los educadores

El Taller de esta unidad comienza con una actividad de ***complementar sumas*** (¿Cuánto falta?). Así nos quedamos todavía algún tiempo con las sumas; pero la operación de "complementar" puede después convertirse fácilmente en una resta. De esta manera los niños entenderán desde el principio que la resta no es una operación completamente diferente; es una operación muy relacionada con la suma.

Igualmente la actividad de las "máquinas" muestra la estrecha relación que existe entre la suma y la resta. Así los niños llegan a entender por experiencia propia que la suma es lo inverso de la resta.

Este entendimiento ayuda a "comprimir" mentalmente estas operaciones: Si conozco las sumas, puedo desde allí deducir las restas. Por ejemplo, si sé que 4 + 3 = 7, entonces sé también que 7 – 3 = 4, y que 7 – 4 = 3. No necesito memorizar todas las restas; es suficiente tener en la mente las sumas.

Matemática divina

Si has hecho algo malo, ¡aplica la operación inversa!

Si has quitado algo a alguien, devuélveselo.

Si has hablado una mentira, habla en su lugar la verdad.
En vez de lastimar, consuela.
En vez de hacer daño, ayuda.
En vez de herir, cura.

"No te dejes vencer por el mal, sino vence el mal con el bien." (Pablo a los romanos, 12:21)

Ahora lo escribimos

"Cinco menos tres es igual a dos" se puede escribir con estos símbolos:

$$5 - 3 = 2$$

Comiencen con anotar algunas de las operaciones que realizaron con objetos concretos y con las máquinas, introduciendo el símbolo – para la resta.

Cuando los niños entienden las operaciones con las "máquinas" y también la notación correspondiente, podrán practicarlo a un nivel más abstracto con la ***Hoja de trabajo 18.4.***

En las partes con las máquinas hay que llenar todo lo que falta: números que entran a la máquina, números que salen de la máquina, y también los operadores que indican lo que hace la máquina, donde estos faltan. Cada número que entra a una máquina, tiene su número correspondiente de salida a la misma altura. Así por ejemplo en la primera máquina, el número 3 entra a la máquina "+5", y el número que sale se anota a la derecha de la máquina, en la primera línea desde arriba. En la siguiente línea se anota el resultado cuando entra el 1 a la máquina, después el resultado del 4, y así sucesivamente.

En las últimas tres máquinas hay que completar también el operador que corresponde a la operación de la máquina "al revés". Este se indica debajo de la máquina con una flecha desde la derecha hacia la izquierda. P.ej. la primera de estas máquinas suma 3, entonces "al revés" resta 3. Esto permite comprobar las operaciones en ambas direcciones: de izquierda a derecha y también de derecha a izquierda. Así, la primera operación con esta máquina sería (de izquierda a derecha) <u>1</u> + 3 = 4. Pero usando la operación inversa, podemos leer la misma operación de derecha a izquierda: 4 – 3 = <u>1</u>.

> **Vocabulario matemático**
>
> **Diferencia:** El resultado de una resta.
>
> La operación de restar se llama también **sustracción**.
>
> **Operación inversa:** Una operación realizada "al revés", en dirección opuesta.
>
> *Nota: En algunos libros podemos encontrar las palabras "minuendo" y "sustraendo" para las partes de una resta. Estas palabras no son usuales afuera del ámbito escolar; pero si los niños tienen que dar exámenes formales, tal vez tendrán que aprenderlas. Pero más adelante, al entender los números negativos, se tratarán las partes de una resta como "sumandos", tomando en cuenta que un sumando puede ser positivo o también negativo.*

El último nivel de abstracción se alcanza con las operaciones escritas únicamente con símbolos. En la hoja de trabajo, cada una de estas operaciones va junto con su operación inversa. Así se afianza el entendimiento de que estas operaciones se pueden resolver también mediante su operación inversa.

En las últimas dos filas al final, los cuadrados vacíos son para poner el signo que falta (+ ó –).

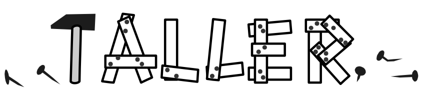
¿A dónde vamos desde aquí?

La *Unidad 19* repite el tema de la operación inversa, con una ilustración distinta: La recta numérica. Los niños que entendieron bien el principio de la operación inversa, podrían también pasar de frente a la *Unidad 20*.

Unidad 19 - Adelante y atrás en la recta numérica

Prerrequisitos:
- Entender el uso de la recta numérica.
- Sumar hasta 10.
- Es ventajoso saber restar. Pero se puede también usar esta unidad para introducir la resta.

Materiales necesarios:
- Rectas numéricas en papel (de la *Unidad 17*)
- Figuras de juego
- Tiza
- Dados
- Tarjetitas de números

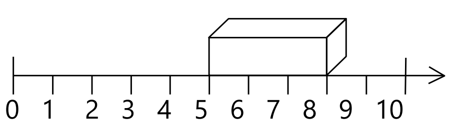


Caminar atrás en la recta numérica

Volvamos a usar las rectas numéricas de la *Unidad 17*. Como allí, decimos a los niños dónde poner una figura de juego, y cuántos pasos dar. Pero esta vez caminamos hacia atrás: "Pon la figura al 7. Retrocede 3 pasos. ¿Adónde llegas?"
Podemos también definir los números con tarjetitas y un dado: Barajamos las tarjetas del 6 al 10 y sacamos una de ellas: este es el número donde comenzamos. Después tiramos el dado: este es el número de pasos que retrocedemos.
Si los niños ya saben escribir y leer restas, podemos usar las tarjetas de restas de la *Unidad 18*; que los niños representen las restas de las tarjetas con el movimiento de las figuras.

Medir restas en la recta numérica

Como en la *Unidad 17*, podemos también usar regletas Cuisenaire para medir restas en la recta numérica. Esto funciona igual como con la suma, solamente que ahora alineamos el *final* de la regleta con el número donde comenzamos. Entonces, la operación 8 – 3 se representa así:



Comenzamos en el 8, *retrocedemos* 3, y llegamos al 5 (allí está el *comienzo* de la regleta).
Podemos usar cualquiera de los métodos de la actividad anterior para definir las restas que representamos.

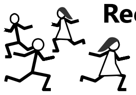
¿En cuál dirección?

Esta actividad es similar a las anteriores, pero ahora indicamos el comienzo y el fin de un "viaje": "Viaja del 6 al 9." Los niños tienen que descubrir cuántos pasos necesitan. Se puede hacer con la figurita de juego dando pasos, o con regletas Cuisenaire. (En este caso, los niños tienen que descubrir cuál regleta tiene la longitud correcta para este "viaje".) Además deben indicar en cuál dirección es el viaje: ¿hacia adelante o hacia atrás? – En nuestro ejemplo: "*Avanzo* 3 pasos."
Los "viajes" se pueden definir de cualquiera de las maneras anteriores: arbitrariamente, o haciendo un "sorteo" con las tarjetitas de números, o tirando dados.

La ***Hoja de trabajo 19.1*** contiene ejercicios para practicar las dos actividades anteriores de una manera un poco más abstracta. La primera mitad consiste en representar las restas con regletas en la recta numérica y escribirlas con números. En la segunda mitad se sabe el inicio y el fin del "viaje"; el niño debe descubrir si el viaje es hacia adelante o hacia atrás. Según la dirección, debe escribir en el cuadrado vacío el signo correcto (+ ó –).

Viaje de ida y vuelta

Para esta actividad necesitamos tarjetas de sumas *(Unidad 15)* y también de restas *(Unidad 18)*. Cada niño saca una tarjeta y representa la operación en su recta numérica (con una figura de juego o con una regleta Cuisenaire). Después hace el mismo viaje "de vuelta". Por ejemplo, si la operación fue 7 – 4, el niño regresó 4 pasos y está ahora en el 3. Entonces *avanza* 4 pasos, y debe llegar nuevamente al 7, de donde comenzó. Que indique la operación que corresponde al viaje "de vuelta" (en este caso: 3 + 4 = 7).
– Como ejercicio adicional puede anotar ambas operaciones: 7 – 4 = 3; 3 + 4 = 7



Recta numérica grande

Dibujen con tiza una recta numérica grande hasta 10 en el piso de la sala o en el patio, con unos 30 a 50 cm de espacio entre un número y el siguiente. Pueden jugar juegos como los siguientes:

Caminar según el dado

Todos los participantes se ponen a la altura del número 5. Por turnos tiran un dado. Si tiran 1, 2 ó 3, avanzan el número de puntos que indica el dado. De otro modo tienen que retroceder: 4 = retroceder 1 paso, 5 = retroceder 2 pasos, 6 = retroceder 3 pasos. Gana quien llega primero al 10 o lo sobrepasa. Si alguien tuviera que pasar por debajo del 0, queda fuera del juego. Pueden jugar hasta que la mitad de los participantes hayan llegado al 10 o quedado fuera.

En vez de usar un dado normal, pueden fabricar un dado especial que tenga en sus caras los siguientes signos y números: –3, –2, –1, +1, +2, +3.

Viaje de ida y vuelta

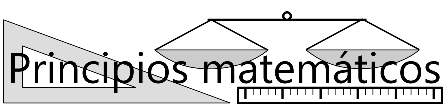
Un niño anuncia una operación (suma o resta). Todos los otros niños "viajan" juntos según la operación anunciada. Por ejemplo 3 + 3: Todos comienzan en el 3, y desde allí avanzan 3 pasos.

Después hacen el viaje de vuelta: En el viaje de ida llegaron al 6; ahora *retroceden* 3 pasos desde allí. Si lo hicieron correctamente, deben llegar al lugar de donde partieron: al 3 en este ejemplo. Que practiquen a la vez decir la operación que corresponde al viaje de vuelta (en este caso: 6 – 3 = 3).

Quiero viajar

Los niños juegan en pares. Cada par de niños necesita un juego de tarjetitas con los números de 0 a 10. Las tarjetas se barajan El primer niño saca una tarjeta y dice al otro: "Ponte en el ..." (el número que sacó). El otro niño se para en el número indicado, saca a su vez otra tarjeta y dice: "Quiero viajar al ..." (el número que sacó). "¿Cuántos pasos tengo que dar?" – El primer niño tiene que darle las indicaciones correctas; por ejemplo: "Cinco pasos hacia adelante", o "Tres pasos hacia atrás". El otro niño da el número de pasos indicados. Si con eso llega al número que sacó, dice: "Llegué." Si llega a otro número, dice: "No llegué", o: "Me perdí." Entonces tiene que volver al número donde comenzó, y el primer niño tiene que corregir su instrucción.

Después de hacer las actividades del taller, pueden hacer lo mismo con regletas Cuisenaire en la ***Hoja de trabajo 19.2***.



Principios matemáticos

La operación inversa permite comprobar nuestros cálculos

Todo cálculo se puede comprobar, efectuando la operación inversa. Los niños experimentarán este hecho de manera práctica con las actividades de "ida y vuelta": Si viajo de "ida y vuelta", al final debo encontrarme en el mismo lugar de donde partí. Si eso no sucede, entonces he cometido un error en uno de los dos viajes.

Entonces, los niños pueden aprender a usar el "viaje de vuelta" para comprobar si sus cálculos son correctos: Un niño dice que 9 – 7 es 2. El viaje de regreso es entonces 2 + 7. Esto da 9, el número con el cual comenzamos; entonces la resta es correcta. – Otro niño dice que 10 – 6 es 3. El viaje de regreso es 3 + 6, eso da 9. Pero hemos comenzado con el 10; entonces la resta es equivocada.

Matemática divina

Si caminaste en la dirección equivocada, ¡regresa!

La palabra hebrea para "arrepentirse" significa literalmente "volver" o "regresar". Imagínate que estás yendo a algún lugar, por ejemplo a la casa de tu abuela, y de repente te das cuenta de que has tomado un camino equivocado. Entonces vuelves sobre tus pasos hasta que llegas nuevamente al camino correcto.

Así como la resta "deshace" la suma correspondiente, el arrepentimiento "deshace" el mal en tu vida. Si robaste algo, arrepentirse significa regresar y devolverlo. Si evadiste un trabajo, arrepentirse significa volver y hacer lo que es tu deber. Si has dañado o tratado mal a una persona, arrepentirse significa volver a esa persona, disculparte y arreglar el daño que causaste.

Si te das cuenta de que estás en el camino equivocado, sería insensato seguir adelante. Haz el viaje "de vuelta" hasta el punto donde dejaste el buen camino.

Investigación

Siempre uno más – ¿o uno menos?

(Hoja de trabajo 19.3)

Esta tarea es similar a la Hoja de trabajo 15.12, donde investigamos series ordenadas de sumas. Ahora investigamos *restas* donde uno de los números aumenta sucesivamente en pasos de 1 en 1. Que los niños dibujen y resuelvan las restas (como en la Hoja de trabajo 18.2, mitad inferior).

Después viene recién la parte interesante: ¿Qué sucede con el resultado, cuando aumentamos uno de los números en la resta? – Que los niños hagan sus observaciones. Notarán que en la segunda serie no sucede lo mismo como en la primera. Parece que no tiene el mismo efecto si aumentamos el primer número o el segundo en la resta. ¿Por qué? – Analicen y razonen.

Pregunta capciosa:

¿Por qué el perro mueve su cola?

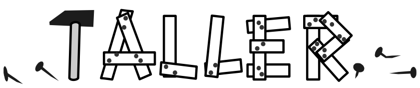
(La respuesta está un poco relacionada con la operación inversa...)

Respuesta en el Anexo A.

Unidad 20 - Números hasta 20

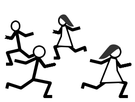
Prerrequisitos:
- Saber leer y escribir los números hasta 10.

Materiales necesarios:
- Objetos de la vida diaria en la casa
- Material contable
- Ábaco
- Cadenitas de cuentas
- Regletas Cuisenaire
- Dinero
- Tarjetitas de cartulina



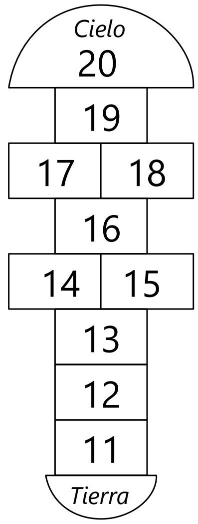
Contar hacia adelante y hacia atrás

Normalmente, los niños ya aprenden a contar en el transcurso de sus quehaceres cotidianos. Pero en el caso de que todavía no estén seguros en eso, practiquen (o repitan) el contar hasta 20, usando cualquier material contable, el ábaco, cadenitas de cuentas, regletas Cuisenaire, etc.
Después practiquen también el contar retrocediendo, del 20 al 1 o al 0.
Durante estas actividades haga hincapié en el hecho de que los números de 11 a 19 se componen de una decena y cierto número de unidades. Según el material que usamos, la decena será representada como una fila completa en el ábaco, como una cadena o regleta de 10, etc. Entonces, por ejemplo usando cadenitas, el 14 se representará como una cadena de 10 más una cadena de 4; o también como una cadena de 10 más 4 cuentas sueltas.
Pueden hacer la misma actividad con ***monedas***, usando como decena una moneda o un billete de 10. En familia, la ocasión más indicada para practicar eso sería al ir juntos a hacer compras; o mandando a los niños solos para que hagan compras, de preferencia por un monto entre 10 y 20.



El juego de saltar

Este es un juego que juegan los niños del mundo entero, con diversas variaciones, pero básicamente se trata de empujar o tirar una piedrita y saltar en unos cuadros dibujados con tiza en el suelo. El juego es conocido en diferentes países con nombres diversos como Rayuela, Avioncito, Mundo, y muchos otros.
Obviamente, en este juego es necesario conocer los números hasta 10; pero podemos inventar nuestras propias variaciones que nos sirven para los números más allá del 10. Por ejemplo, podemos sustituir los números de la primera decena por los de la segunda decena, y ya tenemos un juego que nos sirve para practicar los números de 11 a 20.



Estimar y medir

¿Ya pueden los niños crear interiormente una imagen mental adecuada de las cantidades entre 10 y 20? – Eso lo notaremos mejor cuando hacemos unas actividades de *estimar*. Se trata de dar una idea *aproximada* de una cantidad, *sin contar*. Por ejemplo, podemos poner una cantidad de habas en un platillo y preguntar: "¿Qué piensan, cuántas habas hay aquí?" – Que respondan inmediatamente, sin intentar contar.
Se puede hacer eso entre varios niños para ver quién de ellos se acerca más a la cantidad verdadera. Después cuenten, para verificarlo.
Es importante en estas actividades explicar a los niños que no esperamos de ellos que den el número exacto. Si están equivocados por 2 ó 3, eso todavía está bien.

Unos ejemplos de otros objetos que se pueden usar para estimar:
¿Cuántas manzanas hay en esta bolsa?
¿Cuántos lápices de color hay en esta cartuchera?
¿Cuántos libros hay en esta repisa? *(solamente si no son demasiados.)*
¿Cuántos dientes tienes? *(Ya que la mayoría de los niños estarán en la etapa de cambiar los dientes, este número puede variar de un niño a otro. Podría ser mayor a 20, pero eso no hace daño.)*
¿Cuántas personas somos en este ambiente? *(Esta pregunta es más interesante en una escuela o en un grupo de varias familias, que en una sola familia.)*
¿Cuántas casas hay en esta cuadra de la calle?
¿Cuántos pasos son de un extremo de la sala al otro?
¿Cuántas letras tiene la palabra "aproximadamente" *(o cualquier otra palabra larga)*?
¡Tengan más ideas creativas! Algunos niños querrán ellos mismos plantear unos "desafíos" para estimar.

Si los niños ya saben escribir estos números, entonces podemos decirles que cada uno anote su estimación, en vez de decirlo en voz alta. Después contamos y comparamos.

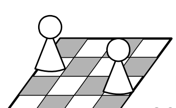
Podemos también estimar ***longitudes***. Si hicieron las actividades de la *Unidad 16*, los niños estarán familiarizados por lo menos con los centímetros. Podemos hacerles estimar la longitud de algunos objetos que miden hasta 20 cm (o un poco más): Un lápiz o lapicero; un frasco de goma; un libro pequeño; una tijera; un rollo de papel higiénico; una caja pequeña; el tallo de una flor; el zapato de un niño; un plátano; un cuy; etc. Cuando todos hayan dado su estimación (oralmente o por escrito), midan para comprobar (con un regla o con regletas Cuisenaire).

Comparar cantidades

Hagan también unas actividades de comparar cantidades entre sí. Por ejemplo dos platillos con habas: ¿En cuál platillo hay más? – Si las cantidades son entre 11 y 20, será necesario contar para verificarlo.

El juego de las tarjetitas

Añadimos a nuestras tarjetitas los números de 11 a 20. (Quizás unos niños querrán ayudar a escribir estas tarjetitas.) Podemos hacer las mismas actividades como en las Unidades 13 y 14, pero ahora con cantidades hasta 20:
- Representar con material contable la cantidad indicada en la tarjetita; o buscar la tarjetita que corresponde a una cantidad dada.
- Sacar dos tarjetitas: ¿Cuál número es mayor?
- Sacar varias tarjetitas y ordenarlas de menor a mayor, o de mayor a menor.



El juego del 11

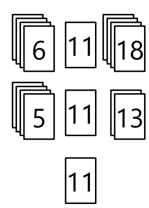
Para este juego necesitamos tarjetas de 1 a 20 con los números escritos en cuatro colores diferentes (p.ej. rojo, azul, verde, anaranjado); o sea en total 80 tarjetas. Las cartas se barajan y se reparten por partes iguales entre todos los jugadores más una "pila" que se queda sobre la mesa con la cara hacia abajo. O sea, si por ejemplo son 3 jugadores, se hacen 4 partes: una para cada jugador, y una que es la pila. (Se puede dar en orden a cada jugador una carta, dejar una carta para la pila, y después seguir repartiendo a los jugadores, y así sucesivamente hasta que todas las cartas están repartidas.)
Comienza el que tiene el 11 rojo, y lo pone en medio de la mesa. – Si nadie tiene el 11 rojo (o sea, se encuentra en la pila), entonces cualquier otro 11 puede comenzar. Continúa el que está sentado a la derecha del que comenzó, y así se juega sucesivamente por turnos de izquierda a derecha.
Una jugada consiste en colocar una o varias cartas en orden ascendente o descendente al lado de las cartas que ya se encuentran en la mesa; pero tienen que ser del mismo color. También se puede colocar un 11 de un color que todavía no está en la mesa. Entonces al lado del 11 rojo se puede poner el 12 rojo y después sucesivamente el 13, 14, 15, etc. Al otro lado se puede poner el 10 rojo y después sucesivamente el 9, 8, 7, etc.

6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

5 6 7 8 9 10 11 12 13

11

Un jugador puede en un turno colocar tantas cartas como desea, mientras cumplan el orden. Puede también decidir guardarse algunas cartas para más tarde; pero tiene que colocar por lo menos una carta.



Si la mesa es demasiado pequeña para todas las cartas, se pueden también colocar una sobre otra.
Si alguien no tiene ninguna carta que podría colocar, tiene que sacar la primera carta de la pila. Si puede colocar esta, la pone. Si no puede, tiene que sacar una segunda carta de la pila. Si no puede colocar esta tampoco, no puede jugar en este turno y le toca al siguiente jugador.
Gana quien acaba primero todas sus cartas.

Con niños un poco mayores se puede jugar con puntajes: Cuando alguien gana, los demás jugadores suman los números en todas las cartas que les sobraron. Eso es su puntaje "de castigo". El ganador del juego tiene 0 puntos, ya que no le sobró ninguna carta. Se pueden jugar varios juegos seguidos, y los jugadores suman los puntos de cada juego. Ya que los puntos son "de castigo", al final gana el que tiene la *menor* suma de puntos.

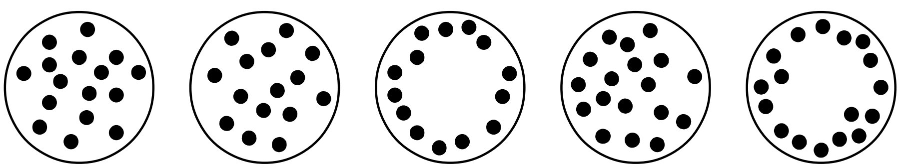
Para los educadores

La (no) lógica de los nombres de los números

En el idioma castellano, los nombres de los números de 11 a 15 no permiten entender inmediatamente su composición. A partir del 16, el asunto se vuelve más transparente: “diez-y-seis” es 10 + 6, “diez-y-siete” es 10+7, etc. Sería entonces más lógico si el 11 se llamara “dieciuno”, el 12 “diecidós”, y así sucesivamente. Al introducir la escritura de estos números, podemos en son de broma usar por un tiempo estos nombres “más lógicos”. Los niños probablemente protestarán que no se dice así; pero les podemos explicar que lo hacemos para que ellos entiendan mejor cómo se escriben estos números.

Adquirir sentido numérico

Estamos ahora entrando a un rango numérico donde se vuelve imposible distinguir cantidades a simple vista. Por ejemplo, en la siguiente representación gráfica no se puede decir a simple vista cuál círculo contiene exactamente 15 puntos, o cuál es el círculo con el mayor número de puntos; es necesario contarlos:



Ahora surge la necesidad de desarrollar *sentido numérico*. El sentido numérico es la capacidad de “imaginarse” los números y sus relaciones entre sí, y de manipularlos mentalmente. El sentido numérico permite a los niños “ver” intuitivamente ciertas propiedades de los números, y así llegar a conclusiones como las siguientes:

> “3 + 9 + 7, ¡eso es fácil! Sumo primero 3 + 7 = 10, entonces da 19.”
>
> “5 + 8 – 5, ¡eso es fácil! 5 – 5 = 0, + 8 da 8.”
>
> “20 – 12 debe ser menos que 20 – 10, porque si quito más, sobra menos.”
>
> “Veo que aquí hay 5 manzanas amarillas, y las rojas parecen más o menos el doble de las amarillas; por eso estimo que hay 15 manzanas aquí.”
>
> “Al otro lado de la calle hay 8 casas, pero por nuestro lado las casas son más pequeñas, entonces debe haber más; por eso pienso que por nuestro lado de la calle habrá 9 ó 10 casas.”

El sentido numérico es la capacidad que permite a los niños “comprimir” mentalmente las operaciones, de manera que pueden realizar varios pasos en uno. Por ejemplo, en un momento posterior, cuando tengan que sumar 26 + 30, podrán entender que no es necesario contar 30 unidades separadas para llegar al resultado; y ni siquiera es necesario añadir 3 veces 10; porque 20 + 30 es “similar” a 2 + 3, entonces podrán decir de frente que 20 + 30 es 50, y por tanto 26 + 30 es 56.

El sentido numérico no se desarrolla mediante ejercicios “mecanizados” como el contar o el calcular operaciones según procedimientos prescritos. Por eso, tales ejercicios no califican como “entrenamiento matemático” en el sentido propio.
El sentido numérico es desafiado y desarrollado mediante actividades como las siguientes:

- **Estimaciones.** Estimar cantidades sin contarlas requiere formar una imagen mental de las cantidades, y relacionar estas imágenes mentales con los números correspondientes.
- **Operaciones con material concreto.** Estas actividades visualizan el “comportamiento” y las transformaciones de los números al realizar operaciones matemáticas, y además proveen una experiencia activa y sensorial de tales transformaciones.
- **Tareas de observación e investigación.** Tales tareas piden como respuesta no simplemente un resultado, sino observaciones y razonamientos propios. Normalmente son tareas formuladas de manera bastante abierta, de manera que permiten una variedad de soluciones. Se incentiva el pensamiento matemático del niño mediante preguntas como las siguientes: “¿Qué propiedades interesantes observas aquí?” – “¿Por qué llegas a esta conclusión?” – “¿Hay otra manera como podrías hacerlo?” – “¿Cómo cambiaría este número (resp. esta operación) si hiciéramos eso o aquello?” – Etc.

Principios matemáticos

Representación de los números en el sistema decimal

Ahora es el momento de ayudar a los niños a captar las primeras nociones de cómo se escriben los números en el sistema decimal. Estas nociones serán todavía muy rudimentarias a este nivel; pero podremos edificar encima de ellas cuando ampliemos el espacio numérico hasta el 100 y más allá.
La idea esencial es que en un número como **17**, el **1** representa una decena, o sea diez unidades. O sea, el símbolo “**1**” *asume un rol distinto* cuando se le escribe delante de otra cifra. La decena se representará, según el material que usamos, como una fila en el ábaco, como una cadena o regleta de 10, como una moneda o un billete de 10, etc.
Cuando llegamos al 20, se completa una segunda decena. Si hacemos ejercicios de contar, por ejemplo con regletas Cuisenaire, después del 19 es lo más natural añadir un cubo de unidad más; entonces tenemos una decena y 10 unidades. Hay que señalar entonces a los niños que estas 10 unidades equivalen a otra decena, y por tanto representamos el 20 como dos decenas. Por eso se escribe con un “2” adelante, y después un 0 porque no hay unidades.
En este momento tendremos también que ser un poco más exactos en las expresiones: En el contexto del 17, al 1 y al 7 ya no los llamamos “números”, porque el ***número*** es la expresión entera, el 17. El 1 y el 7 son los ***dígitos*** o las ***cifras*** que usamos para escribir el número.

Ahora lo escribimos

Al escribir los números, tenemos que explicar por qué se escriben así. En particular, por qué usamos ahora dos símbolos para escribir un solo número; y cuál es el significado del “1” que siempre viene adelante (y del “2” en el 20). – Vea en la sección “Para los educadores”.

En la ***Hoja de trabajo 20.1*** se deben unir los puntos en orden, con líneas rectas, del 1 al 20 o hasta el número máximo.
En la segunda mitad, los números ya no representan la secuencia completa. Se deben unir ordenadamente de menor a mayor, o de mayor a menor (los niños pueden escoger cuál de los dos). – Puede no ser obvio para los niños que el unir los puntos de mayor a menor resulta en exactamente el mismo trazo como al unirlos de menor a mayor. Será una oportunidad para que hagan este descubrimiento.

> **Vocabulario matemático**
>
> **Decena:** Una cantidad de diez.
>
> **Sistema decimal:** Sistema de numeración cuya base es el número diez.

La ***Hoja de trabajo 20.2*** es para practicar la escritura de los números. En la primera mitad se llenan todas las líneas con la secuencia del 10 al 20. En la segunda mitad se completan las secuencias de manera lógica: contando hacia adelante, hacia atrás, o también de dos en dos (en las últimas tres filas). Cada espacio en blanco corresponde a un número.

La ***Hoja de trabajo 20.3*** presenta los ejercicios ya conocidos de relacionar cantidades con números, como en la *Unidad 13*.

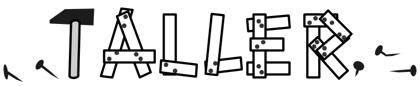
¿A dónde vamos desde aquí?

Si no hicieron la Unidad 16 (Medir con regletas), pueden hacerla ahora, midiendo longitudes hasta 20 cm con las regletas.
O continúen a la unidad siguiente.

Unidad 21 - Sumas en la segunda decena

Prerrequisitos:
- Conocer los números hasta 20.
- Sumar hasta 10.

Materiales necesarios:
- Regletas Cuisenaire
- Alternativamente se pueden usar cadenitas de cuentas para algunas actividades.



Aumentando algo al 10

Comencemos con sumas que contienen el 10: 10 + 3, 10 + 6, 10 + 8 ... Si las representamos con cadenitas de cuentas o con regletas Cuisenaire, notamos inmediatamente que tenemos las representaciones de los números de 11 a 20 que ya conocemos. A partir de 10 + 6, aun el mismo nombre del número ya nos dice el resultado: "Diez más seis" es lo mismo como "diez y seis", o sea "dieciséis". Para los números de 11 a 15 podemos por un rato usar nuestros nombres "más lógicos" (vea en la *Unidad 20*) para que el principio se note mejor: "¿Cuánto es diez más tres? – ¡Diecitrés! – Ah, eso es trece."
Para los niños que no lo entienden inmediatamente, les puede ayudar la siguiente tarea de observación: Que escriban algunas de estas sumas en orden, por ejemplo de 10 + 1 hasta 10 + 5:

10 + 1 = 11
10 + 2 = 12
10 + 3 = 13
10 + 4 = 14
10 + 5 = 15

Que comparen las sumas con sus resultados. Podrán ver que si sumamos 1, el resultado termina con 1. Cuando sumamos 2, el resultado termina con 2. El resultado siempre termina con el número que sumamos al 10.
El propósito de estos ejercicios es que los niños lleguen al punto donde pueden decir: "***¡Esto es fácil!*** – Para sumar 10 + 7, no necesito contar 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. Puedo de frente decir que es 17, porque el 7 ya me lo dice." Así logran *comprimir* la operación mentalmente: En vez de dar muchos pasos pequeños, la resuelven en un solo paso grande. – Este logro será mucho más firme si el niño lo descubre *por sí mismo*. Hagamos entonces las actividades de tal manera que cada niño pueda descubrir por sí mismo que "esto es fácil", sin que nosotros tengamos que enseñárselo.

En un siguiente paso presentamos las mismas sumas, pero en orden invertido: 2 + 10, 5 + 10, 7 + 10 ... ¿Descubren los niños que es "lo mismo" como antes? Si lo hacen con cadenitas o con regletas, deben darse cuenta rápidamente.

Sumas en la segunda decena

Esta clase de sumas se puede introducir de frente con la ***Hoja de trabajo 21.2.*** O si queremos hacerlo primero sin la hoja: "Ponme aquí la suma 12 + 4 con regletas Cuisenaire (o con cadenitas de cuentas)." El 12 tiene que representarse con una decena y una regleta o cadenita de 2. Quizás los niños descubren por sí mismos que después de la decena tenemos una suma bien conocida: 2 + 4, que podemos decir de frente que es 6.

Y si tenemos la decena por delante, ya sabemos que el resultado es 16, porque este último paso ya lo hemos practicado antes.

Este mismo proceso se usa en la ***Hoja de trabajo 21.2***. En cada operación, se colocan primero las regletas Cuisenaire sobre la hoja, de acuerdo al dibujo. El "primer piso" de la casa es siempre una regleta de 10. Resolvemos primero la suma del "segundo piso", como si la decena no existiera. Esta es la suma que se escribe dentro de la casa, en el segundo piso. Estas sumas son todas menores a 10, de manera que no deben presentar dificultades. – Como último paso, escribimos la suma completa (incluyendo la decena). Esta es la suma que se escribe encima del techo de la casa. Los niños descubrirán rápidamente que esta suma completa es casi igual como la suma del "segundo piso", solamente que se añaden las cifras "1" donde está la decena. En las primeras tres sumas (donde los "1" ya están en la hoja), de hecho tienen que escribir exactamente lo mismo como en el "segundo piso".
Después de completar la casa, pueden practicar el mismo proceso con las operaciones al final de la página. Si han entendido como funciona, deberían ahora poder hacerlo en un solo paso, sin tener que contar unidades.
El principio matemático detrás de este proceso es la ley asociativa (vea en "Principios matemáticos").

Practicar con tarjetas (Hoja de trabajo 21.1)
En esta unidad, use solamente las tarjetas de la primera mitad de la hoja (las que comienzan con un número mayor o igual a 10). Las sumas que pasan de la primera decena a la segunda, se introducirán en la *Unidad 23*.
Nota: Si los niños saben resolver sumas como 12 + 7, 13 + 4, etc, la ley conmutativa les permite también resolver 7 + 12, 4 + 13, etc.

Principios matemáticos

La ley asociativa ayuda a descomponer y recomponer números

En la ***Hoja de trabajo 21.2*** ("Casa de dos pisos") descomponemos los sumandos y los volvemos a unir de otra manera, para conseguir operaciones más fáciles de realizar. La ley matemática que nos permite hacer eso, es la ley asociativa. Escrito en detalle, el proceso de la primera suma en la hoja se vería así:

$$11 + 3 = (10 + 1) + 3 = 10 + (1 + 3) = 10 + 4 = 14.$$

Primero descomponemos el 11 en 10 + 1. (Eso sucede automáticamente cuando lo representamos con regletas Cuisenaire o con cadenitas.) Después agrupamos los sumandos de otra manera. (Es en este paso donde interviene la ley asociativa.) Después resolvemos la suma 1 + 3, que es ahora una suma "fácil". La última suma, 10 + 4, también es "fácil" porque uno de los sumandos es el 10.
De esta manera logramos convertir una suma "difícil" en dos sumas "fáciles".

Usaremos procesos similares cuando avancemos a los números hasta 100. Si los niños lo hacen con sus manos, manipulando el material concreto, después podrán hacerlo también en su mente. Los procesos como estos forman el fundamento del cálculo mental. Esta es una de las razones por qué no hacemos operaciones verticales, cifra por cifra, en el nivel de Primaria I: Si la suma vertical se introduce de manera prematura, los niños se pierden la experiencia de aprendizaje que sucede en esta unidad y las siguientes. Al calcular mentalmente y con material concreto, los números se tratan según su valor verdadero, y así podemos observar su "comportamiento". Pero si realizamos un procedimiento abstracto con cifras, ya no podemos "ver" lo que hacen los números, porque ya no tomamos en cuenta las cantidades reales que son representadas por las cifras.

Aun en niveles más avanzados de la matemática es usual que se busquen maneras de reducir una operación compleja a varios pasos sencillos. Si los niños se acostumbran a razonar de esta manera, están adquiriendo buenos hábitos de pensamiento matemático.

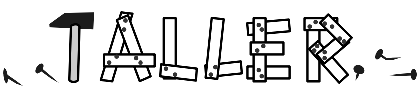
Unidad 22 - Restas en la segunda decena

Prerrequisitos:

- Conocer los números hasta 20.
- Sumar y restar hasta 10.
- Representar sumas y restas en la recta numérica.

Materiales necesarios:

- Recta numérica dibujada en papel
- Regletas Cuisenaire
- Otros materiales como ábaco, cadenitas de cuentas, material contable, ...



Podríamos nuevamente usar la figura de la ***"casa de dos pisos"*** *(Unidad 21)* para este tipo de operaciones. Si desea, puede fabricar una actividad correspondiente.
O lo hacemos con la recta numérica:

Prolongamos la recta numérica

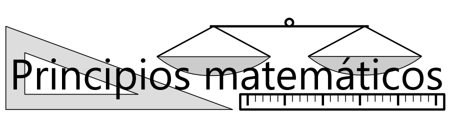
Fabriquen una recta numérica hasta 20. – Si hicieron las actividades de la *Unidad 17*, los niños ya tendrán una recta numérica hasta 10. Prolónguenla hasta el 20, usando el mismo procedimiento (midiendo con las regletas Cuisenaire).
En esta recta numérica, representen con regletas Cuisenaire algunas sumas en el espacio de 0 a 10, y después la suma correspondiente en el espacio de 10 a 20. Por ejemplo: Primero **4 + 5**, después **14 + 5**. Así trasladamos el principio de la "casa de dos pisos" a la recta numérica. – Pueden en este momento también usar las tarjetas de la *Unidad 21* (solamente la primera mitad, donde el primer sumando es igual o mayor a 10), para representar estas sumas en la recta numérica.

Después hacemos lo mismo con restas: Representamos **7 – 5**, después **17 – 5**, y otros ejemplos similares. Usen también las tarjetas de esta unidad (***Hoja de trabajo 22.2***) para representar las restas en la recta numérica, pero solamente las tarjetas de la primera mitad, donde el resultado es mayor o igual a 10. (Las operaciones que pasan de una decena a otra, se introducen en la unidad siguiente.)

La ***Hoja de trabajo 22.1.*** presenta unos ejercicios adicionales para afianzar esta actividad; y después también unas operaciones para resolver mentalmente, para dar el paso a la abstracción. – El primer dibujo de la hoja muestra en paralelo una recta numérica de 0 a 10, para hacer recordar que los números de 10 a 20 "funcionan" igual como los de 0 a 10.

Representar restas en la segunda decena con otros materiales

Usen las tarjetas (***Hoja de trabajo 22.2***, *tarjetas de la primera mitad)* también para representar estas operaciones con otros materiales: Cadenitas; ábaco; objetos contables; etc.



Escribiéndolo en detalle, estamos descomponiendo las restas en la segunda decena de la siguiente manera:

$$15 - 4 \;=\; 10 + 5 - 4 \;=\; 10 + (5 - 4) \;=\; 10 + 1$$

resp: $$15 - 4 \;=\; 10 + 5 - 4 \;=\; 5 - 4 + 10 \;=\; 1 + 10$$

Esto ya no es la simple ley asociativa, porque ya no tenemos solamente sumas; tenemos una combinación de sumas y restas. Si quisiéramos ser matemáticamente estrictos, tendríamos que demostrar que este procedimiento es permitido debido a las leyes de los signos al usar paréntesis (primera línea); resp. debido a la conmutatividad de sumas y restas combinadas (segunda línea; vea "Principios matemáticos" en la *Unidad 18*.)
Pero con los niños de primaria todavía no necesitamos entrar en estos temas. Con los métodos usados aquí (regletas, viajes en la recta numérica, etc.), para ellos será inmediatamente obvio que la operación puede realizarse de esta manera.

Matemática divina

Para los grandes es lo mismo como para los pequeños

"Dios no hace acepción de personas". Esto significa que Dios trata a todos según los mismos principios, sean ricos o pobres, gente sencilla o con muchos estudios, blancos o negros, jóvenes o ancianos, ... las leyes de Dios valen igual para todos.

Eso mismo sucede en la matemática. Las leyes de la matemática valen igual para todos los números, sean números grandes o pequeños. Por eso podemos hacer con los números de 10 a 20 exactamente las mismas operaciones como con los números de 0 a 10. En la matemática también, "no hay acepción de personas".

Unidad 23 - Sobrepasando el 10

Prerrequisitos:

- Conocer los números hasta 20.
- Sumar y restar hasta 10.
- Representar sumas y restas en la recta numérica.

Materiales necesarios:

- Ábaco
- Tiza
- Dados

Para los educadores

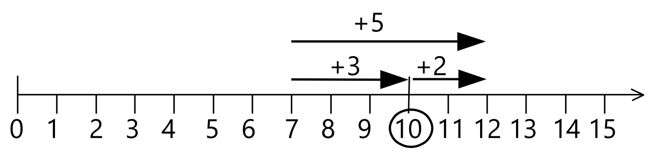
Cómo superar la valla del 10

Muchos niños dificultan con las sumas que pasan de la primera a la segunda decena (como 7 + 5), y con las restas correspondientes (como 12 – 5.) Básicamente hay tres maneras de tratar con estas sumas:

1. Usando alguna forma de contar o medir. Para sumar 7 + 5, se puede simplemente contar 5 pasos después del 7: 8, 9, 10, 11, **12**. O se puede efectuar la suma en el ábaco, o con material contable, o midiendo en la recta numérica, como ya lo hicimos con las sumas hasta 10.
Este método es bueno para el inicio, pero es una etapa que debería superarse con el tiempo. Demora mucho, mientras el niño no ha interiorizado las sumas.

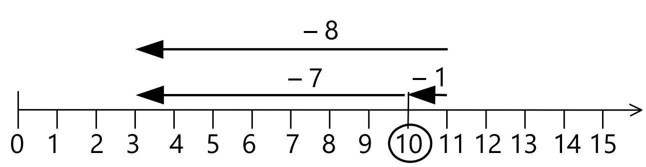
2. Memorizar todas las sumas. Eso puede suceder de manera natural si el niño practica el método anterior por mucho tiempo. En algún momento habrá hecho las mismas sumas tantas veces que se acuerda espontáneamente de los resultados y puede decir de frente: "7 más 5 es 12."
El niño podría también hacer una lista de todas las sumas posibles que sobrepasan la decena, y sentarse para memorizarlas todas conscientemente. Eso puede ayudar para sumar más rápidamente; pero es una tarea tediosa, puramente mecánica, que no contribuye al desarrollo del pensamiento matemático.

3. Razonar para descomponer los sumandos de manera inteligente. Este tercer método puede a primera vista parecer innecesariamente complicado. Pero es el método que más entrena el razonamiento y el sentido numérico. Consiste en descomponer la suma o resta en dos pasos: uno que nos lleva exactamente al 10, y otro que lleva desde el 10 al resultado final. Así hacemos uso del rol especial que cumple el número 10 en nuestro sistema de numeración. Y logramos lo mismo como lo que hicimos en las unidades anteriores: Convertimos una operación difícil en una secuencia de operaciones fáciles.
Con el ejemplo de 7 + 5: Queremos llegar primero hasta el 10. ¿Cuánto le falta al 7 para llegar al 10? – Si los niños han practicado bien las sumas que dan 10, ya lo saben de memoria: 7 + **3** = 10.



Pero en total tenemos que aumentar 5. Ya hemos aumentado 3. ¿Cuánto nos falta aumentar todavía? – Falta 2, porque 3 + **2** = 5. Entonces después del 10 tenemos que aumentar todavía 2. 10 + 2 = **12**, eso es una operación muy fácil. El resultado es 12.

Lo mismo funciona con las restas. Calculemos 11 – 8 con este método. Desde el 11 vamos primero hasta el 10, eso significa retroceder 1. Pero en total tenemos que quitar 8. ¿Cuánto tenemos que quitar todavía? 7, porque 1 + **7** = 8. Entonces 10 – 7 = **3**, eso ya lo sabemos bien si conocemos los complementos a 10. El resultado es 3.



La ***Hoja de trabajo 23.1*** ("Viaje con escala") usa este método.

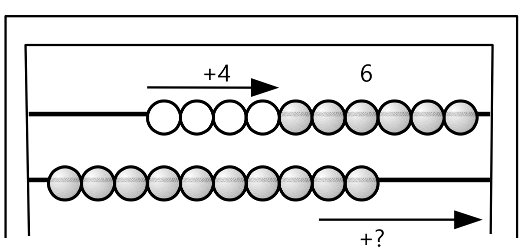
TALLER

Practicamos sumas y restas que sobrepasan el 10

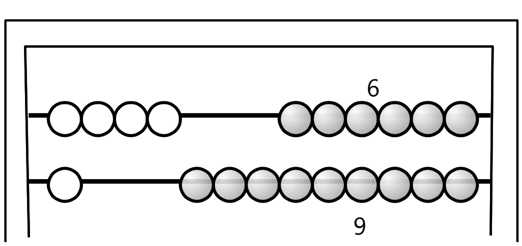
Para el inicio, busque situaciones de la vida diaria donde ocurren sumas que pasan de la primera a la segunda decena (7+4, 5+9, 8+8, etc.), y restas que pasan de la segunda decena a la primera (13–6 , 18–9 , 15–7 , etc).
Haga algunas de las actividades de las unidades anteriores para introducir sumas y restas, pero ahora con esta clase de operaciones. (usando material contable, cadenitas, regletas, el ábaco, tarjetas con operaciones, "máquinas", etc.)

El ábaco nos ayuda a sobrepasar el 10

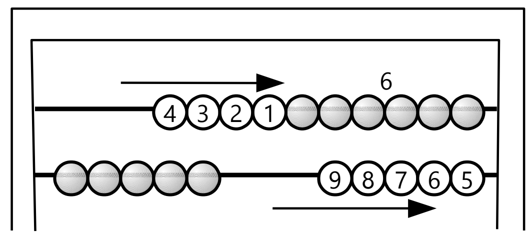
Para llevar a los niños al método "razonando" (el Método 3 en la sección "Para educadores"), se recomienda usar el ***ábaco***. El ábaco nos obliga a detenernos en el 10, antes de pasar a la siguiente fila. Así tenemos que reconocer que el 10 es un "número especial" en nuestro sistema de numeración.
Por ejemplo, sumamos 6 + 9 en el ábaco. Comenzamos con 6 cuentas y aumentamos hasta agotar la primera fila. Ahora hemos llegado al 10. Pero todavía no hemos aumentado todas las 9 cuentas que deberíamos aumentar. ¿Cuántas hemos aumentado hasta ahora? – Cuatro. (El niño puede descubrirlo complementando 6 a 10, o simplemente contando en el ábaco las cuentas que aumentamos después de 6.) – Entonces, ¿cuántas cuentas tenemos que aumentar todavía? – Nuevamente, el niño puede encontrar la respuesta complementando 4 a 9, o simplemente probando y contando en el ábaco. Que encuentre su propia manera de asegurarse de que al final hayamos efectivamente aumentado 9 cuentas.



Por el otro lado, la siguiente manera de hacerlo no es muy útil:

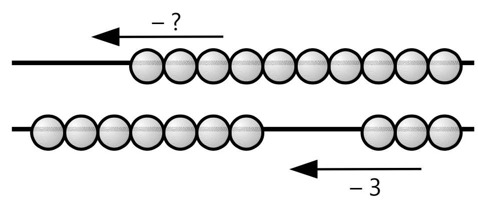


Cierto, hemos trasladado 6 + 9 cuentas; pero lo que tenemos ahora en el ábaco no es ninguna representación útil de un número. No podemos realmente ver cuánto es en total. Para poder "entender" un número, tenemos que representarlo con decenas y unidades. O sea, todas las filas que pertenecen a nuestro número, excepto la última, deben estar *llenas*, representando decenas completas. Así podemos ver claramente cuánto es:

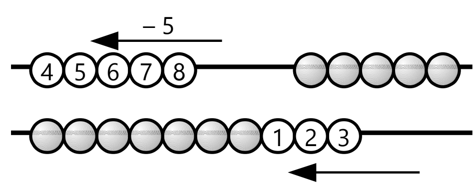


Tenemos una decena completa (la primera fila llena) más 5 unidades (en la segunda fila), o sea, 15.
Practiquen suficientes de estas operaciones en el ábaco para que los niños entiendan bien como funciona.

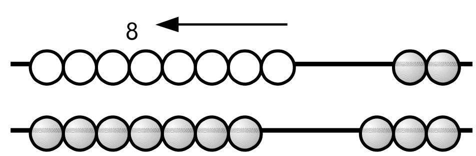
Después hagan lo mismo con las restas. Por ejemplo 13 – 8: Tenemos que empezar quitando cuentas al *final* del número, o sea en la segunda fila:



Después de quitar estas tres cuentas, ¿cuántas más nos falta quitar para que hayamos quitado 8 en total? – Esas son las que tenemos que quitar de la primera fila:
Así podemos ver bien que el resultado es 5 (lo que sobra en la primera fila).



Nuevamente, no es tan útil hacerlo de la siguiente manera, porque eso nos deja con dos filas incompletas:



Haciéndolo con las regletas

Algo similar podemos hacer con regletas Cuisenaire. Tomando otra vez el ejemplo de 6 + 9: Para saber cuánto es esta suma, colocamos primero una regleta de 10 al lado de la suma. Ahora se trata de encontrar la regleta que completa el número:

6	9
10	?

Para encontrarla, podemos simplemente probar. O podemos aplicar el mismo razonamiento como en el ábaco: ¿Cuánto le falta al 6 para que sea 10? Y después de completar el 10, ¿cuánto nos sobra todavía de la regleta del 9? – Así llegamos a la siguiente descomposición:

6	4	5
10		5

Y sabemos inmediatamente que este número es 15.

Pueden usar las ***tarjetas de operaciones*** de las *Unidades 21 y 22* para representarlas en el ábaco, con las regletas, o con otros materiales. Usen ahora las tarjetas de la segunda mitad, las que contienen operaciones que sobrepasan el 10.

Hojas de trabajo

Escribimos la operación haciendo "escala" en el 10

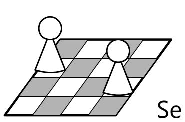
Hoja de trabajo 23.1 – ***Viaje con escala***
Esta actividad ayuda a afianzar la idea de "hacer una escala" en el 10, y da un paso hacia la abstracción. – Pueden también hacer primero algunos de los juegos descritos más abajo, donde se usa esta clase de operaciones.

Que los niños experimenten por suficiente tiempo con estas operaciones, antes de resolver la hoja de trabajo. Aquí usamos la recta numérica como ilustración.

Desde el 7 queremos viajar 5 pasos hacia adelante. Para realizar este viaje, es conveniente hacer una escala en el 10. Coloca primero las regletas correspondientes sobre la hoja y escribe dentro de cada regleta dibujada su número correspondiente. Después completa las operaciones a la derecha.

Al final de la hoja hay tres operaciones para resolver de manera puramente abstracta. Es realmente necesario que los niños hayan practicado lo suficiente con material concreto, antes de poder resolver esta parte.
La idea es siempre la misma: el primer sumando se complementa a 10. Así por ejemplo en la primera operación, la segunda línea comienza con 9 + **1**..., porque 9 + 1 = 10. El tercer sumando aquí resulta de la descomposición del segundo sumando en la operación original: 6 = 1 + **5**, entonces la segunda línea completa es 9 + **1** + **5**. Esta operación es equivalente a la original. Ahora la tercera línea es fácil: 9 + 1 = 10 (ya está escrito en la hoja), 10 + 5 = 15.
De la misma manera se resuelve la segunda suma; y según los mismos principios también la resta.

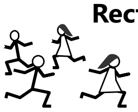
TALLER (Continúa)



Juego: Subida y bajada

Se juega con un dado. Cada jugador, en su turno, tira el dado seis veces. Los primeros dos números se suman, el tercero se resta del resultado, el cuarto se suma, el quinto se resta, el sexto se suma. Si a alguien le resulta una resta "imposible" (que daría menos que 0), como por ejemplo 3 – 5, entonces no puede seguir jugando y se queda con cero puntos. Gana quien tiene el mayor puntaje después de estas operaciones con los seis números.
El mismo juego puede también jugarse en una recta numérica con figuras de juego. En este caso, se tira el dado una sola vez en cada turno, pero el juego dura seis turnos. En el primer turno, todos ponen su figura en el número que indica el dado. En el segundo turno, todos avanzan el número de pasos que indica el dado. En el tercer turno retroceden, en el cuarto avanzan, en el quinto retroceden, y en el sexto avanzan. No hay problema si varias figuras ocupan el mismo número. Aquí también, si alguien tuviera que mover su figura por el lado izquierdo del cero, no puede seguir jugando.
En este juego, los niños pronto se darán cuenta de que al avanzar es ventajoso tirar un número grande, mientras al retroceder es mejor tirar un número pequeño. Así pueden descubrir una propiedad matemática: Restar un número pequeño da un resultado grande; restar un número grande da un resultado pequeño.

Recta numérica grande

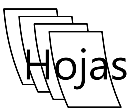


Dibujen con tiza una recta numérica grande hasta 20 en el piso de la sala o en el patio, con unos 30 a 50 cm de espacio entre un número y el siguiente. Pueden jugar juegos como los siguientes:

- Llega al veinte. Los participantes, por turnos, tiran un dado. La primera vez se ponen al lado del número que tiraron con el dado. En los siguientes turnos avanzan tantos pasos como indica el dado. Gana quien llega primero al 20 o lo sobrepasa. Los demás pueden seguir jugando hasta que ellos también lleguen al 20.
Variación: El 20 debe alcanzarse exactamente. Quien lo sobrepasa, queda fuera del juego. Si nadie llega exactamente al 20, nadie ganó.

- **Saltos largos.** Cada niño, por turnos, se para en el cero y da un salto adelante, tan lejos como puede. Se fija en el número adonde llegó, y desde allí puede dar otro salto adelante. Entonces tiene que descubrir cuántos pasos avanzó con el segundo salto, y expresar sus saltos en forma de una suma. Por ejemplo, si con el primer salto llegó hasta el 5 y con el segundo salto hasta el 11, la suma sería 5 + 6 = 11. (La suma se puede expresar de manera oral, o escribirla con tiza al lado de la recta numérica.)
Después se puede hacer lo mismo, saltando desde el 10 ó desde el 20 hacia la izquierda, y entonces los saltos se expresarán como restas.

- El juego **"Subida y bajada"** *(vea arriba)* también se puede jugar de esta manera en la recta numérica grande.



Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 23.2 – Casas del 11 y del 12
Esta hoja funciona igual como las Hojas 15.9-11: Que los niños llenen las casas con regletas Cuisenaire y escriban las sumas correspondientes. (Pueden llenar varias copias de la misma hoja con combinaciones diferentes.) Si usan sumas de dos sumandos, casi todas serán sumas que pasan de la primera decena a la segunda.

Hoja de trabajo 23.3 – Pinta según los resultados
Una hoja de repaso de las sumas y restas. Pinten los campos según las siguientes indicaciones:

con negro, si el resultado es 1,
con amarillo, si el resultado es 2,
con marrón, si el resultado es 4,
con rojo, si el resultado es 5,
con verde, si el resultado es 6,
con azul, si el resultado es 8.

Todos los campos que dan algún otro resultado, se quedan en blanco.

Unidad 24 - El orden de las operaciones

Prerrequisitos:

- Sumar y restar hasta 20.
- Representar sumas y restas en la recta numérica.

Materiales necesarios:

- Rectas numéricas dibujadas en papel *(vea Unidades 17 y 22)*, figuras de juego.
- Tiza (para dibujar una recta numérica grande en el piso).
- "Máquinas" de tubos de papel higiénico *(vea Unidad 18.)*

TALLER

Viajes largos en la recta numérica

Estos viajes son "largos", no en el sentido de que los resultados fueran números muy grandes, pero que son viajes con muchas "estaciones".

Corten las tarjetas de la ***Hoja de trabajo 24.1***. Representen las operaciones indicadas mediante "viajes" de una figura de juego en una recta numérica. O los niños pueden caminar ellos mismos sobre una recta numérica grande dibujada con tiza en el piso.

Lógicamente, los pasos tienen que darse en orden, tal como se dice la operación. Por ejemplo, "**13 – 9 + 7 – 5 + 8**" significa: "Comienza en el 13. Camina 9 pasos hacia atrás. Después camina 7 pasos hacia adelante. Después camina 5 pasos hacia atrás. Después camina 8 pasos hacia adelante."

Así, esta actividad acostumbra a los niños a interpretar correctamente los signos y a entender que cada signo *se aplica al número que le sigue*. (Vea "Principios matemáticos" en la *Unidad 18.*)

Cadenas de máquinas

Volvamos a las "máquinas" que hemos introducido en la *Unidad 18*. Pero ahora colocamos varias de estas máquinas en cadena, y hacemos pasar algunos números por todas ellas en orden. Por ejemplo, ponemos una máquina "+3", una máquina "–7", y una máquina "+5", una tras otra. Comenzamos con una regleta de 6. La hacemos pasar por la primera máquina, sale 9. Esta regleta de 9 hacemos pasar por la segunda máquina, sale 2. Este 2 lo hacemos pasar por la última máquina, sale 7.

$$6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{-7} 2 \xrightarrow{+5} 7$$

Inténtenlo comenzando con otros números. Después anoten las operaciones que hicieron: 6 + 3 = 9; 9 – 7 = 2; 2 + 5 = 7. Comparen e investiguen los resultados para diferentes números de inicio.

(Algunos números de inicio producirán operaciones "imposibles". En nuestro ejemplo, si empezamos con 2, tenemos 2 + 3 = 5, 5 – 7 = ¿? – no podemos restar 7 si tenemos solamente 5. ¿Qué hacemos? – Quizás algún niño tiene una buena idea. Si no, descartamos esta operación por ahora y comenzamos con un número donde sí funciona.)

Después de pasar varios números por la misma cadena de máquinas, investiguen si encuentran alguna relación matemática entre los números iniciales y los resultados finales de cada operación.

Investiguen: ¿Podríamos remplazar estas tres máquinas por una sola que haría lo mismo como las tres juntas?

– Asegúrese de que los niños entiendan bien cómo resolver estas "cadenas de operaciones" en su orden, antes de dar el siguiente paso. (Vea más abajo en "Principios matemáticos".)

Representen también algunas de las operaciones en las tarjetitas de la ***Hoja de trabajo 24.1*** mediante "máquinas".

Ahora, si los niños están listos para investigar más propiedades matemáticas, podemos hacer el siguiente experimento:

Colocamos las mismas máquinas como antes, pero en otro orden. Por ejemplo, podríamos poner primero la máquina "+5", después "+3", y finalmente "–7". Hacemos pasar por esta cadena de máquinas los mismos números como antes, y comparamos los resultados finales. Por ejemplo con el 6: 6 + 5 = 11, 11 + 3 = 14; 14 – 7 = 7.

$$6 \xrightarrow{+5} 11 \xrightarrow{+3} 14 \xrightarrow{-7} 7$$

Observamos que en la primera cadena de máquinas, cuando entró el 6, al final también salió 7. ¿Sucedió esto por casualidad, o es siempre así? O sea, ¿dan estas máquinas siempre el mismo resultado si intercambiamos su orden? – Investiguen con los otros números que hicieron pasar por la primera cadena, si ahora sale también el mismo resultado.

– En nuestro ejemplo no pudimos hacer pasar el 2 por la primera cadena de máquinas, porque la operación fue "imposible". Si intentamos otra vez con el 2, con este nuevo orden de máquinas, ¿se puede hacer ahora? – Con esta pauta, ¿podrías ahora calcular 7 – 9 + 3? (Obviamente hay que hacer algún cambio a la operación, porque todavía no podemos restar 7 – 9.)

Sigan experimentando, investiguen otras preguntas similares, y descubran propiedades de las sumas y restas.

Hojas de trabajo

La ***Hoja de trabajo 24.2*** les da la oportunidad de practicar estas investigaciones por escrito.

Primera fila: Completa todo lo que falta. – Compara en cada fila el número inicial (el que entra a la primera máquina) con el número final (el que sale de la última máquina). ¿Qué observas? ¿Qué piensas, por qué resulta así?

Segunda fila: Completa lo que falta. – Compara aquí también los números iniciales con los números finales. ¿Encuentras una única máquina que hace lo mismo como las tres máquinas juntas? Escríbela en la flecha larga abajo.

Tercera fila: Las mismas máquinas como en la segunda fila, pero en otro orden. Resuelve como en la segunda fila y observa los resultados. Compara con la cadena de máquinas arriba. ¿Por qué sale así? ¿Qué concluyes?

Cuarta fila: ¡Completa todo! – Ayúdate con las operaciones "al revés".

La ***Hoja de trabajo 24.3*** *(arriba)* presenta dos cadenas de máquinas con el orden intercambiado, pero en el segundo ejemplo los niños tienen que descubrir por sí mismos la operación que realiza cada máquina. En este ejemplo, máquinas iguales representan operaciones iguales; entonces si hemos descubierto lo que hace una de las máquinas en la fila de arriba, sabemos también qué hace la misma máquina en la fila de abajo.

Matemática divina

Todo en su orden

En el mundo que Dios creó, todo tiene su orden. Primero Dios hizo la tierra, y solo después las plantas, porque las plantas necesitan la tierra. Primero hizo el agua y solo después los peces. Si lo hubiera hecho al revés, ¡eso hubiera sido un gran problema! – También hizo que el cielo esté arriba y la tierra abajo, no al revés. – Hizo que las plantas se desarrollen en su debido orden: Primero las hojas, después las flores, y al último su fruto.

Así queremos también mantener el orden en la matemática, y efectuar las operaciones en su debido orden.

Aun donde podemos intercambiar el orden de las operaciones, tenemos que hacerlo ordenadamente; no se puede hacer de cualquier manera. Necesitamos entender el orden que el Creador puso dentro de las operaciones matemáticas.

Principios matemáticos

Efectuar sumas y restas en orden

Cuando tenemos una combinación de sumas y restas, *¡no podemos agruparlos arbitrariamente como queremos!* Tenemos que efectuarlos una tras otra, en el orden como están escritos, de izquierda a derecha. Así por ejemplo:

9 + 5 – 2 + 7 = ___
9 + 5 = 14
14 – 2 = 12
12 + 7 = **19**

Esta es la regla fundamental y la más segura para toda combinación de sumas y restas: Efectuarlas en orden. Esta es la regla que se incentiva con la actividad de los "viajes largos" en la recta numérica, y también con la primera parte de la actividad de las "cadenas de máquinas".
Es importante que los niños entiendan bien esta regla fundamental, porque existe bastante confusión al respecto. Algunos alumnos por ejemplo (¡y aun profesores!) tienen la noción equivocada de que "las sumas se resuelven primero", y entonces hacen lo siguiente:

9 + 5 – 2 + 7
14 – 9
5

Pero así sale un resultado muy equivocado, como podemos ver fácilmente si lo comparamos con la operación correctamente resuelta. Este segundo procedimiento contiene errores. (Por ejemplo, quien suma "2 + 7" en esta operación, está pasando por alto el hecho de que el número 2 lleva un signo *negativo*.)
Si quisiéramos salirnos del orden normal de izquierda a derecha, tendríamos que indicarlo con paréntesis *(vea Unidades 33 y 42)*: (9 + 5) – (2 + 7). Si tuviéramos esta operación, la segunda manera de resolverla sería correcta; pero esta es una operación muy diferente de la original.
Entonces, asegurémonos primero de que los niños sepan resolver las operaciones en su orden. Si están inseguros en este punto, todavía no es el momento de acercarlos a la siguiente regla.

Conmutatividad de suma y resta combinada

Al final del Taller hemos intercambiado el orden de las máquinas. Hemos observado que en este caso no cambia el resultado final. ¿Por qué este cambio no altera el resultado, mientras el "resolver las sumas primero" sí lo altera?
Es que la "máquina" representa un número *junto con su signo*. Podemos interpretar cada máquina como una instrucción para un "viaje" en la recta numérica. Por ejemplo "+7" significa "Avanza 7 pasos". "–5" significa "Retrocede 5 pasos". El signo nos indica la *dirección* del "viaje" (hacia adelante o hacia atrás). Cada máquina conserva esta información, aun si intercambiamos las máquinas entre sí. La máquina "–5" no se convierte por eso en una máquina "+5"; sigue llevando el signo negativo.
En otras palabras: Podemos cambiar el orden de las operaciones de suma y resta, *mientras cada número se mantiene junto con su signo*. Eso es lo que podríamos llamar "la conmutatividad de las sumas y restas combinadas". (Vea también "Principios matemáticos" en la *Unidad 18*.)
Por eso, **9 +5 –2 +7** es lo mismo como **9 +7 +5 –2**, o como **7 –2 +9 +5**, o incluso como **(–2) +7 +5 +9**. Pero *no es lo mismo como* ***(9 + 5) – (2 + 7)***.

Este es el principio que se ilustra con la última actividad del Taller, la de intercambiar el orden de las máquinas en cadena. Pero se recomienda no dar este paso antes de que los niños sepan resolver las operaciones en su orden correcto.

Uso correcto del signo =

El signo "=" significa "igual". O sea, lo que se encuentra a la izquierda del signo "=" tiene que ser igual a lo que se encuentra a su derecha. Si escribimos varios signos "=" sucesivos, *cada expresión* entre los signos tiene que ser igual. Esto, por ejemplo, es correcto:

13 = 10 + 3 = 6 + 7 = 20 – 7

Efectivamente, 13 es igual a 10 + 3; también es igual a 6 + 7; y también es igual a 20 – 7.
Pero algunos alumnos usan equivocadamente el signo "=" para indicar resultados parciales de una operación larga. Así por ejemplo al resolver 9 + 5 – 2 + 7, escriben algo como esto: 9 + 5 = 14 – 2 = 12 + 7 = 19. La operación que el alumno hizo en su mente es correcta; pero esta forma de escribirlo no es correcta. Así como está escrito, significa por ejemplo que 9 + 5 sea igual a 14 – 2. Pero eso no es cierto: el lado izquierdo vale 14 y el lado derecho vale 12. De la misma manera, 14 – 2 no es igual a 12 + 7. El signo "=" no es simplemente un signo que "anuncia un resultado". Este signo indica que las expresiones a su izquierda y a su derecha son iguales.
Compare esto con el primer ejemplo escrito arriba, debajo del título "Efectuar sumas y restas en orden". Allí tenemos las operaciones completas escritas aparte, con el signo "=" usado correctamente. Si no queremos hacernos el trabajo de escribir todo eso, entonces indiquemos simplemente los resultados parciales, sin usar el signo "=":

9 + 5 – 2 + 7 = **19**
14 12

La importancia de este detalle radica en el entendimiento de lo que es una igualdad. Eso será importante más adelante para entender correctamente las ecuaciones.

Ahora lo escribimos

Es un buen ejercicio para la concentración, resolver estas operaciones "largas" mentalmente sin anotar resultados intermedios.
Pero si desean hacer un trabajo escrito con esta clase de operaciones, una posibilidad es la de escribir cada paso como operación completa, como en el ejemplo arriba:

9 + 5 – 2 + 7 = ___
9 + 5 = 14
14 – 2 = 12
12 + 7 = **19**

Una forma más corta consiste en escribir solamente los resultados intermedios por debajo de la operación original:

9 + 5 – 2 + 7 = **19**
14 12

Ampliaciones

Resolverlo de la manera más fácil

Los niños que entendieron cómo se puede cambiar el orden de las operaciones, encontrarán maneras de resolver algunas de estas operaciones largas de una manera más sencilla. Por ejemplo:

15 + 3 – 5 se resuelve más fácilmente en este orden:
15 – 5 + 3 = 10 + 3 = 13.

7 + 11 – 7 se resuelve más fácilmente en este orden:
7 – 7 + 11 = 0 + 11 = 11.

9 + 4 – 7 + 6 se resuelve más fácilmente en este orden:
4 + 6 + 9 – 7 = 10 + 9 – 7 = 19 – 7 = 12

14 – 5 – 5 se resuelve más fácilmente en este orden:
14 – (5 + 5) = 14 – 10 = 4.

Acerca del último ejemplo: Todavía no hemos introducido el uso de paréntesis. Pero después de las investigaciones con las "máquinas", un niño puede darse cuenta de que "dos máquinas de '–5' hacen lo mismo como una sola máquina de '–10'. " Entonces no necesita escribir paréntesis; puede decir directamente:
14 – 5 – 5 = 14 – 10.

La ***Hoja de trabajo 24.4*** *(abajo)* contiene unos ejemplos de este tipo.

¿A dónde vamos desde aquí?

La siguiente unidad *(25)* introduce un principio muy importante. No es recomendable pasarla por alto.

Unidad 25 - El entero y sus partes

Prerrequisitos:
- Sumar y restar hasta 20. *(Unidades 21, 22, 23)*

Materiales necesarios:
- Objetos de la vida diaria.
- Una casita de juguete que se puede separar de su techo. (Por ejemplo, se puede hacer con un juego de construcción.)
- Regletas Cuisenaire.
- Una balanza de dos platillos.

Para los educadores

Importancia del principio del entero y sus partes

El principio que se introduce en esta unidad es sumamente importante. Euclides, en sus "Elementos", lo formuló como uno de los axiomas fundamentales: ***"El entero es mayor que su parte."*** – Aplicándolo a las situaciones de suma y resta que tratamos en esta unidad, podemos decir más exactamente: ***"El entero es la suma de sus partes."*** (Vea también "Principios matemáticos" en la *Unidad 18*.)
Una vez que los niños entienden este principio, ya no dificultarán en saber si en una determinada situación hay que sumar o restar. – Como siempre, hay que darles suficientes oportunidades para practicarlo, manipulando materiales concretos.

El paso a los problemas de texto

Esta es la primera unidad que introduce problemas de texto. Este paso hay que darlo con mucho cuidado, observando si los niños realmente están listos para ello. Jean Piaget ya señaló a base de sus investigaciones, que un problema enunciado verbalmente exige un razonamiento diferente, y mucho más difícil, que el mismo problema presentado como una operación concreta.[9)] Por ejemplo, podemos poner 13 uvas sobre la mesa y decir al niño: "Come 5 uvas. ¿Cuántas sobran?" – Esto es fácil para muchos niños de 6 ó 7 años. Pero es mucho más difícil para ellos si les digo, sin usar ningún material concreto: "Ana tiene 13 uvas y come 5. ¿Cuántas uvas le sobran?" Esto exige un razonamiento más abstracto, una mejor comprensión de textos, y requiere que el niño se forme una imagen mental de la situación. Por eso, hay niños que tienen que llegar a los 8 ó aun 9 años hasta que puedan entender problemas de texto. Respetemos el ritmo de desarrollo de cada uno, y tengamos paciencia hasta que estén listos para ello. Muchas veces, su dificultad no reside en la matemática, sino en la comprensión del lenguaje, o en su capacidad de imaginación.
Para facilitar la transición, animamos a los niños a que ***dibujen*** primero la situación, antes de plantear una operación matemática. Eso les ayuda a "concretizar" los enunciados del texto. La calidad artística de estos dibujos no importa. Por ejemplo, unas manzanas pueden dibujarse como simples círculos; pero el dibujo debe representar la situación correctamente. O sea, grupos distintos de objetos deben distinguirse en el dibujo; no se debe dibujar el mismo objeto dos veces; etc. Una vez que el niño logra dibujar la situación correctamente, ya no le será difícil de "ver" la operación matemática que debe realizar.
No debe ser nuestra meta que los niños resuelvan una gran cantidad de problemas en poco tiempo. Más importante es que entiendan los principios involucrados a profundidad. Entonces, que tomen el tiempo necesario para dibujar y para razonar bien, aunque resuelvan menos problemas, pero que lo hagan entendiendo ***por qué*** se resuelve de esta manera. El Taller presenta unos ejemplos de los razonamientos que se pueden hacer en estos casos, y los dibujos correspondientes, comenzando primero con situaciones concretas de la vida diaria.

9) Vea Nota 9 en el Anexo B.

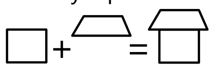
TALLER

El entero y sus partes en la vida diaria

Busque situaciones en la vida diaria donde es necesario identificar el entero y sus partes. Por ejemplo:
a) Tenemos una canasta con 15 frutas; hay manzanas y naranjas. Son 6 manzanas; entonces ¿cuántas naranjas son?
b) Tenemos 7 plátanos. Ayer comimos 5. ¿Cuántos plátanos tuvimos ayer?
c) Aquí tenemos 11 panes. 8 de ellos compramos hoy. ¿Cuántos panes son de ayer?
d) En la tienda compramos alimentos por 11.–. Pagamos con un billete de 20.–. ¿Cuánto de cambio tienen que darnos? – Etc.

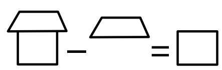
La casita con su techo como ilustración

Podemos usar un juguete de dos partes, por ejemplo una casita con su techo, como "ilustración generalizada" para toda esta clase de problemas. El entero es la casa completa (casa con techo). La casa sola es una parte, y el techo solo es otra parte. Si tenemos las dos partes y queremos obtener el entero, tenemos que unir (o sea, *sumar*) las dos partes:



Esto corresponde a situaciones como las siguientes:
- Los Suárez tienen dos hijos varones y tres hijas; ¿cuántos niños son en total?
- Tenemos seis sillas de madera y cuatro de plástico; ¿cuántas sillas tenemos?

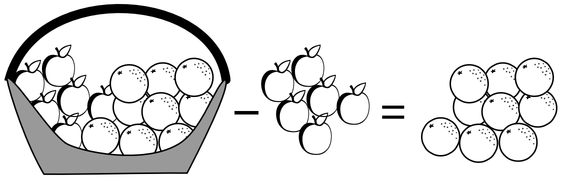
Pero a veces hay situaciones donde conocemos el entero, y conocemos una de sus partes, y queremos saber la otra parte. O sea, comenzamos con la casa entera, y queremos obtener la casa sola; entonces tenemos que quitar (o sea, *restar*) el techo:



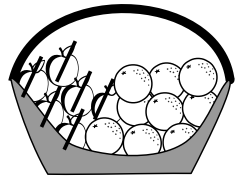
Esto corresponde a situaciones como las siguientes:
- Tenemos 13 panes y comemos 6 de ellos; ¿cuántos panes sobran?
- Tenemos 18 monedas y gastamos 5; ¿cuánto nos queda?

Usemos la ilustración de la casita, y los dibujos correspondientes, para analizar las situaciones que encontramos en la vida diaria. Volviendo a los ejemplos mencionados al inicio:

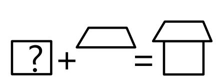
a) Tenemos una canasta con 15 frutas; hay manzanas y naranjas. Son 6 manzanas; entonces ¿cuántas naranjas son?
Aquí es bastante obvio que el "entero" es la canasta completa con todas sus frutas. Las manzanas son una parte, y las naranjas son la otra parte. Entonces, si empezamos con la canasta entera y quitamos (*restamos*) las manzanas, obtenemos las naranjas:



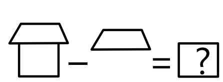
O también:



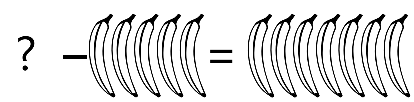
(Háganlo primero con las frutas, después dibújenlo.) – El planteamiento original del problema corresponde a:



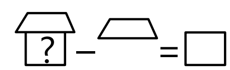
Conocemos una parte, y conocemos el entero, y queremos saber la otra parte. – Pero hemos visto que este problema se puede "invertir", y entonces corresponde a:



b) Tenemos 7 plátanos. Ayer comimos 5. ¿Cuántos plátanos tuvimos ayer?
Esto ya no es tan fácil, porque los plátanos que comimos ayer son "invisibles" para el niño, entonces es más difícil realizar una operación concreta. Algunos niños querrán restar 7 – 5 y dirán que ayer tuvimos 2 plátanos. Como ayuda, podemos poner los 7 plátanos sobre la mesa y preguntar, por ejemplo: "Los plátanos que comimos ayer, son parte de estos?" (Obviamente no. Si los comimos, ya no pueden estar aquí.) O podemos preguntar: "Antes de comer los plátanos, teníamos más o teníamos menos que ahora?" – Si los niños tienen la madurez mental de poder comprender estas operaciones, entonces con la ayuda de tales preguntas podrán darse cuenta de que los plátanos que tenemos son una parte, y los que comimos ayer son otra parte; entonces el entero son todos los plátanos que tuvimos al inicio.
(Si aun con esta ayuda no pueden comprenderlo en la situación concreta, entonces todavía no es el momento de hacer estas actividades con ellos.)
O sea, la situación es la siguiente:

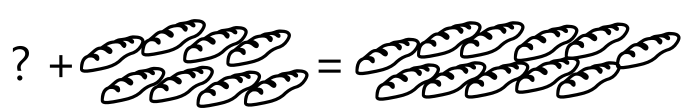


O con la ilustración de la casita:

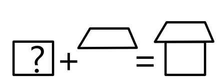


Si queremos obtener la casita entera, tenemos que unir (*sumar*) sus partes – aunque en esta situación parece que se trataría de una resta. Ayer tuvimos 12 plátanos, porque **<u>12</u>** – 5 = 7.
Aquí puede ayudar también el concepto de la operación inversa: Nos imaginamos que hacemos correr el proceso de comer (quitar) plátanos al revés; entonces se *aumentarán* 5 plátanos a los 7 que ya tenemos.

c) Aquí tenemos 11 panes. 8 de ellos compramos hoy. ¿Cuántos panes son de ayer?
Preguntamos otra vez por el entero y sus partes: ¿Los panes que compramos hoy, son parte de los que están aquí? – ¿Los panes que son de ayer, son parte de los que están aquí? – Ambas veces, la respuesta es "Sí". Entonces nuestros 11 panes son el entero, los 8 que compramos hoy son una parte, y los panes de ayer son la otra parte:



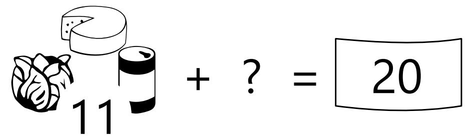
O con la casita:



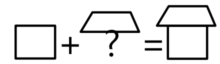
Si queremos saber la parte desconocida, tenemos que comenzar con el entero (que conocemos) y *restar* la parte que conocemos – aunque en este caso parece tratarse de una suma.

Otra vez podemos razonar también mediante la operación inversa: Hoy hemos comprado (añadido) 8 panes; si hacemos correr este proceso al revés, se *quitan* estos 8 panes, y sobran los 3 que son de ayer.

d) En la tienda compramos alimentos por 11.–. Pagamos con un billete de 20.–. ¿Cuánto de cambio tienen que darnos?
Al calcular el cambio, el niño necesita entender que lo que nos dan en la tienda (las compras y el cambio juntos) vale igual como lo que pagamos. Entonces:



O con la casita:



O sea, nuestro pago es el entero, que tiene dos partes: los alimentos que compramos, y el cambio. Si queremos saber una parte, tenemos que comenzar con el entero y restarle la otra parte.

Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 25.1:
Arriba: La primera parte de la hoja repasa la ilustración de la casita, usando una "torre" de regletas Cuisenaire donde la torre sola consiste en una regleta de 5, y el "techo" es una regleta de 2. Repase las operaciones que hicieron con la casita, y tradúzcanlas a las operaciones correspondientes con los números 5, 2, y 7 (donde el 7 es la torre entera).
Abajo: Retomamos la ilustración de la casita y asignamos números a la casa entera, el techo solo y la casa sola. La casa completa es siempre la suma de la casa sola más el techo.

Hoja de trabajo 25.2:
Otra ilustración posible es la de un conjunto que se compone de dos subconjuntos. Cada subconjunto es una parte, y los dos subconjuntos forman juntos el conjunto entero. Los ejemplos deben entenderse por sí mismos.

Hoja de trabajo 25.3:
Arriba: Pasamos ahora a las operaciones completamente abstractas; pero los niños pueden ayudarse con los dibujos de la casita. Analicen en cada operación: ¿Cuál es el entero? ¿Cuáles son sus partes? Lo que se busca, ¿es una parte o es el entero? En consecuencia, ¿tenemos que sumar o restar?
Como ayuda, pueden en cada operación pintar de rojo el número que representa el "entero". (En los ejemplos, esos son los números blancos con fondo negro.)
Abajo: *Vea la actividad siguiente.*

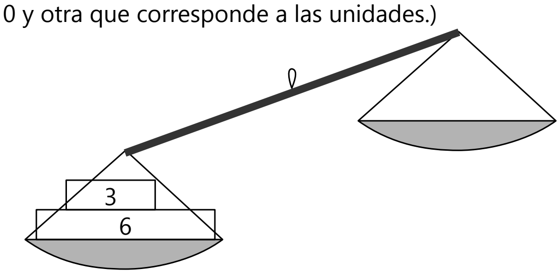
Pregunta capciosa:

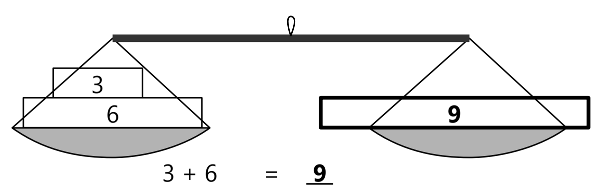
En un árbol hay 15 pájaros. El cazador dispara 3 de ellos. ¿Cuántos pájaros quedan en el árbol?

Respuesta en el Anexo A.

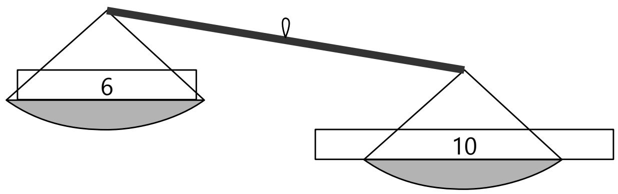
Equilibrar la balanza

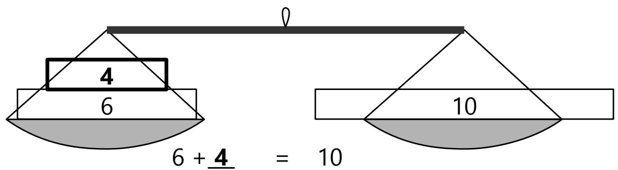
Consigan una balanza con dos platillos; o si no tienen ninguna, fabriquen una ustedes mismos. Usaremos regletas Cuisenaire como pesos. La balanza estará en equilibrio cuando tenemos el mismo peso por ambos lados.
(Nota: Con las regletas eso puede funcionar o no, dependiendo de si las regletas son fabricadas de un material homogéneo. Haga una prueba con anticipación: Una regleta de 2 y una de 3 juntas deberían pesar igual como una regleta de 5; una regleta de 3 y una de 4 deberían pesar igual como una de 7; etc. Si eso no funciona, entonces intenten hacerlo todo con cubitos de unidades; esos deben tener todos el mismo peso.)
Comience con unos ejemplos sencillos de sumas. Por ejemplo, pongo en el platillo izquierdo una regleta de 3 y una de 6. ¿Qué regleta tengo que poner en el platillo derecho para que la balanza esté en equilibrio? (Si la suma es mayor a 10, tenemos que representarla con una regleta de 10 y otra que corresponde a las unidades.)





Después hacemos unos ejemplos donde se conoce el entero y una de sus partes, y se busca la otra parte: Pongo en el platillo izquierdo una regleta de 6, y en el platillo derecho una regleta de 10. *(Vea el siguiente dibujo.)* ¿Cómo hacemos ahora para equilibrar la balanza?

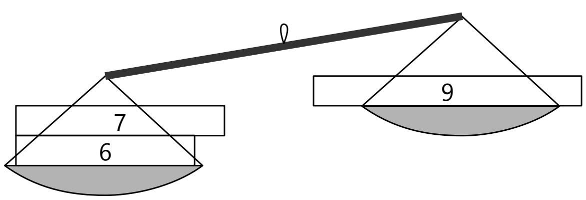


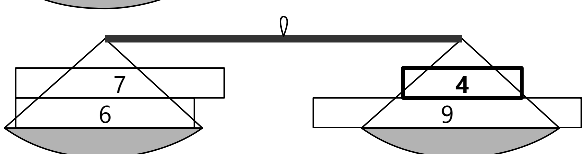


6 + **4** = 10

(Si trabajamos con cubitos de unidades en vez de regletas enteras, entonces habría dos posibilidades: En vez de aumentar 4 cubitos al platillo izquierdo, podríamos quitar 4 cubitos del platillo derecho. Investiguen estas posibilidades; a ver si los niños descubren unas propiedades nuevas de las sumas y restas.)

Por fin, plantee unas situaciones donde hay dos regletas en un platillo, y una regleta en el otro:





6 + 7 = 9 + **4**

En una situación como esta, *ambos* platillos representan un "entero" que está compuesto de dos partes. Las partes pueden ser distintas, pero el entero tiene que ser el mismo por ambos lados (13 en este caso).
Algunos niños se acostumbran a pensar que el signo "=" introduce un "resultado"; y entonces se confunden cuando a la derecha del signo "=" aparece una suma o resta "no resuelta". Tenemos que explicarles cuál es el verdadero significado del signo "=": Lo que está al lado izquierdo, vale igual como lo que está al lado derecho. Por eso, la balanza es una muy buena ilustración de este signo: El signo "=" significa que la balanza está en equilibrio. *(Vea también en "Principios matemáticos" en la Unidad 24.)*

Hoja de trabajo 25.3** (abajo)**: Para seguir practicando con la balanza. Que los niños representen las operaciones de la hoja con la balanza y regletas, mientras tienen necesidad de experimentar la operación concreta. También pueden resolverlas mentalmente sin el material concreto, cuando consideran que están listos para ello.

- Para representar con la balanza las operaciones que involucran restas, habrá que usar cubitos de unidades para poder quitar las cantidades indicadas.
- Los cuadrados vacíos en la hoja significan que allí hay que escribir el signo de operación apropiado ("+" ó "–").

Dibujamos problemas de texto

Si han hecho suficientes ejemplos con situaciones concretas y prácticas, podemos ahora plantear unas situaciones hipotéticas. Para cada uno de los siguientes problemas, que el niño haga primero un ***dibujo*** de la situación. No es necesario que sea una obra de arte; pero que represente la situación correctamente. Quizás hay que ayudar al niño con unas preguntas que le hacen razonar. Los ejemplos más arriba (en "La casita con su techo como ilustración") dan unas pautas de cómo se puede preguntar y dibujar. Después de dibujar, puede escribir y resolver la operación matemática correspondiente.

1. Laura compró 8 caramelos y regaló 3 a su hermano. ¿Cuántos caramelos tiene todavía?

2. Juan dio 9 galletas a su hermana, ahora tiene todavía 6. ¿Cuántas galletas tuvo al inicio?

3. La casa de Julia tiene 4 ventanas en el primer piso y 6 ventanas en el segundo piso. ¿Cuántas ventanas tiene la casa?

4. Pablo dibuja una casa de dos pisos con 13 ventanas. 5 ventanas están en el primer piso. ¿Cuántas ventanas están en el segundo piso?

5. José perdió 4 canicas, ahora tiene todavía 9. ¿Cuántas canicas tenía antes de perderlas?

6. En la calle Sauces hay 6 casas blancas y 8 casas amarillas. ¿Cuántas casas hay en total?

7. En la calle Robles hay 13 casas. 7 de ellas son blancas. ¿Cuántas casas son de otro color?

8. Marta quiere hacer 10 dibujos. Ya hizo 7, ¿cuántos dibujos le quedan por hacer?

9. José hizo ayer 10 dibujos, y hoy hizo 7. ¿Cuántos dibujos hizo?

10. Juana tenía 10 monedas, pero gastó 3. ¿Cuánto tiene ahora?

11. Sandra ganó 7 monedas y ahora tiene 12. ¿Cuántas monedas tenía antes?

12. Diego tenía 8 monedas y ganó otras 9. ¿Cuántas tiene ahora?

13. Cintia gastó 9 monedas, ahora tiene todavía 7. ¿Cuántas monedas tenía antes?

¿A dónde vamos desde aquí?

La siguiente unidad ("Contar por pares") es un tema opcional que anticipa la tabla del 2 (vea *Unidad 35*). Se puede tratar este tema ahora, o también avanzar directamente a los números hasta 100 (*Unidad 27*).

Unidad 26 - Contar por pares

Prerrequisitos:
- Conocer los números hasta 20.

Materiales necesarios:
- Objetos de la vida diaria

TALLER

Contar de dos en dos

Usen cualquier material contable para practicar contarlo de dos en dos (2, 4, 6, 8, ...); o háganlo en cualquier situación de la vida diaria que requiere contar una cantidad de objetos. Una motivación posible para hacerlo así, es que el conteo va más rápido si tomo cada vez dos objetos juntos, en vez de enumerar cada uno aparte.
En el proceso de hacer eso podemos introducir de manera natural la expresión ***"números pares"***: son los números que usamos al "contar por pares".

Formar pares de objetos: el doble, la mitad

Para estas actividades de conteo podemos también usar objetos que por su naturaleza ya vienen en pares: zapatos, medias, guantes; nuestras manos, nuestros pies; patas o alas de aves; ... – Todos estos objetos los podemos contar alternativamente por objetos individuales o por pares; y podemos establecer una relación entre las dos formas de expresarse: "Aquí hay 5 pares de zapatos; ¿cuántos zapatos son?" – "Somos 6 personas; cuántas orejas tenemos todos juntos?" – "Aquí hay 8 medias; ¿cuántos pares son?"
Estas actividades pueden servir también para practicar los conceptos de ***"el doble"*** y ***"la mitad"***. 5 pares de zapatos son 10 zapatos porque el doble de 5 es 10. – 8 medias son 4 pares porque la mitad de 8 es 4.
Seguramente encontrarán otras situaciones de la vida diaria donde necesitamos el doble o la mitad de algo: Hay que repartir frutas, galletas, etc, entre dos niños; entonces cada uno recibe la mitad. – Preparamos una torta según una receta que es para 6 personas, pero hay 12 invitados; entonces tenemos que usar el doble de todos los ingredientes. Etc.

Números pares e impares

Estas actividades nos llevarán también a la distinción entre números pares e impares. Tenemos 11 medias y formamos pares: encontraremos que una media sobra. El número 11 no lo podemos repartir completamente en pares; por eso se llama un ***número impar.*** Podemos experimentar formando pares con diversas cantidades de objetos, para descubrir si el número es par o impar. (Lo mismo sucederá si intentamos formar dos mitades iguales.)

Investigación

Otro pequeño experimento con números:

Toma una cantidad de objetos, por ejemplo 3 habas. Ahora forma el doble de esta cantidad y cuenta. ¿Resulta un número par o un número impar? – Haz lo mismo con otras cantidades. ¿El doble de ellas es par o es impar? – Explica tu observación: ¿*Por qué* es eso así?

Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 26.1.
En esta hoja, los niños pueden volver a hacer por escrito lo que ya hicieron con el material concreto al contar por pares. Los ejemplos deben entenderse por sí mismos.

Principios matemáticos

Una nota acerca del cero

Matemáticamente, un "número par" es un número divisible entre 2. Esto significa que *el cero también es un número par*, porque 0 ÷ 2 = 0, y no deja ningún residuo.
Con los niños hablaremos de eso en un momento posterior, cuando trataremos de las tablas de multiplicación. Pero si un niño ahora ya muestra curiosidad por saber si el cero es par o impar, habrá que explicárselo ahora ya.

Para los lectores que entienden los números negativos, podemos añadir otro argumento: Los números se siguen continuamente en la secuencia par – impar – par – impar – ..., tanto los positivos como los negativos.
Entonces, según toda lógica, en el espacio vacío debajo del 0 debe decir "par", porque entre dos números impares siempre hay un número par.

– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5
par	impar	par	impar		impar	par	impar	par	impar

¿A dónde vamos desde aquí?

Un tema un poco relacionado con este es la simetría y los reflejos en espejo *(Unidad 4)*, porque las figuras simétricas consisten en dos mitades iguales.
También pueden continuar al *Bloque III* (Sumas y restas con números hasta 100); o pueden intercalar algún otro tema del *Bloque I* o del *Bloque VII*.

Bloque III: Suma y resta hasta 100 (Unidades 27 a 33)

Las actividades de este bloque amplían el espacio numérico hasta 100, profundizan el concepto de "decenas y unidades", y repasan los principios de la suma y resta introducidos en el bloque anterior. Para entender bien estos temas, es necesario que el niño domine los conceptos esenciales del Bloque II, mencionados en la introducción del Bloque II.

En cuanto al tema de decenas y unidades, no usamos los excesivos formalismos de escribir "descomposiciones de números" de diversas maneras sofisticadas. En su lugar, realizamos estas operaciones con material concreto, y así guiamos a los niños a una comprensión funcional de la lectura y escritura de números en el sistema decimal. Nuestra meta es que los niños adquieran sentido numérico (vea "Para los educadores" en la *Unidad 20*); que sean capaces de relacionar los números escritos con cantidades reales de objetos concretos y de formar imágenes mentales correspondientes; y que adquieran experiencia práctica en cuanto al "comportamiento" de los números.

Los procedimientos de suma y resta *mental* con números de dos cifras se tratan con bastante detalle, explorando primero con material concreto todo caso que se puede dar. Se recomienda incentivar a los niños a que hagan todas estas experiencias, y que no pasen demasiado rápidamente a los temas más avanzados. Es que en estos procesos de sumar y restar, con sus diferentes variaciones, se forma el sentido numérico en cuanto a la organización de los números por decenas y unidades.

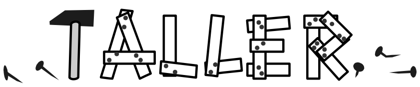
También se introducen unas actividades con unidades de medida: centímetros, metros, kilogramos enteros, uso del dinero, segundos, minutos, horas. Todavía no se realizan conversiones entre distintas unidades de medida.
El dominio de la suma y resta hasta 100 es un prerrequisito para las actividades del Bloque IV.

Acerca del uso del "Camino de aprendizaje" para medir el progreso del niño, vea en el capítulo "¿Cómo usar las unidades de aprendizaje de este libro?", p.22.

Unidad 27 - Números hasta 100

Prerrequisitos:
- Conocimiento de los números hasta 20. *(Unidad 20)*
- Saber distinguir entre izquierda y derecha. *(Unidad 6)*

Materiales necesarios:
- Ábaco
- Regletas Cuisenaire
- Fósforos o mondadientes, y pequeñas ligas de jebe
- Cinta métrica
- Papel en blanco, crayones o plumones (para el juego "Sigue los números").



Números hasta 100 en la vida diaria

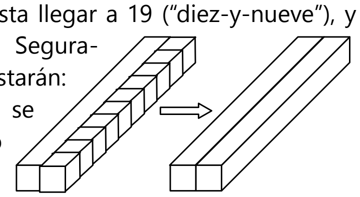
Si los niños tienen suficientes oportunidades de acompañar a sus padres en los quehaceres diarios, normalmente aprenden a contar hasta 100 de una manera informal y natural. Eso puede suceder, por ejemplo, al comprar y contar una cantidad mayor de frutas, galletas, clavos, clips para papel, ganchos para colgar la ropa, u otros objetos. Algunos niños, después de contar unas cantidades mayores a 20, tienen una curiosidad natural por saber cómo continúan los números, y averiguan por sí mismos los nombres de los números hasta 100 o más allá. Otros querrán saber cuántos cuadrados tiene el tablero de ajedrez, o cuántos cuadrados hay en el mantel que cubre la mesa, o cuántos bloques de madera hay en su caja de juguetes, o cualquier otra cantidad de objetos que hay en la casa.
Los *símbolos* de los números también se encuentran en diversos objetos que se pueden encontrar en la casa o en la calle: en una cinta métrica; en un reloj digital; en la numeración de páginas de los libros; los números de las casas en la calle; las placas de los automóviles; etc. Todos estos objetos presentan oportunidades para el aprendizaje informal.
Si los niños ya han tenido estas experiencias en su vida diaria, tendrán muy poca necesidad de las actividades más formales que siguen a continuación.

Contar hasta 100 y experimentar las decenas

Al contar, los niños ya se habrán dado cuenta de que los números son organizados por decenas: Después de un número como "treinta", "cuarenta", "setenta", es como si la numeración comenzara nuevamente desde el inicio: "... y uno", "... y dos", etc. Con material contable podemos profundizar esta experiencia un poco más. Por ejemplo:

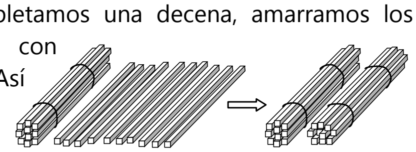
Cuenten hasta 100 en el ***ábaco***. Se darán cuenta de que cada vez que completamos una fila de 10, los números tienen un nombre "especial": 20, 30, 40, 50 ...

Cuenten hasta 100 con ***cadenitas de cuentas*** o con ***regletas Cuisenaire***, de la siguiente manera: Empiecen con unidades sueltas y cuenten, aumentando unidades: 1, 2, 3, ... hasta llegar a 10. Ahora, las 10 unidades valen lo mismo como una cadena o regleta de 10, entonces las ***canjeamos***. Podemos hacer eso de una manera bastante realista, teniendo las regletas en una caja especial que es nuestra "caja" o nuestro "banco". Uno de los niños es el "cajero" y se encarga de efectuar los canjes que le pedimos. Entonces le damos las diez unidades: "Por favor, cámbiamelas por una decena." – El "cajero" guarda las 10 unidades en su caja y nos devuelve una decena. – Ahora podemos seguir contando: A la decena le aumentamos una unidad: 11. Aumentamos otra unidad: 12. Así seguimos aumentando unidades hasta llegar a 19 ("diez-y-nueve"), y después "diez-y-diez". – Seguramente los niños protestarán: "No se dice diez-y-diez, se dice veinte." – "Ah, pero para que digamos veinte, no debe haber diez unidades sueltas aquí. Vamos a canjearlas." – Así tendremos dos decenas, eso es veinte, y seguimos aumentando unidades: 21, 22, ... , 29, "ventidiez". Nuevamente canjeamos, tenemos 3 decenas (treinta), y aumentamos unidades: 31, 32, ... y así sucesivamente hasta 100.



Si disponen de material Base 10, al final pueden canjear las 10 regletas de 10 por un cuadrado de 100.

Contamos una cantidad de ***fósforos o mondadientes.*** Pero cada vez que completamos una decena, amarramos los diez palitos juntos con una liga de jebe. Así por ejemplo, si tenemos 84 palitos, al final debe haber sobre la mesa 8 decenas amarradas y 4 palitos sueltos. Esta actividad, igual como el "canje" en la actividad anterior, muestra de manera visual y práctica cómo los números se organizan por decenas en nuestro sistema decimal.



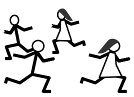
Guarden estas “decenas” amarradas, las necesitaremos para diversas actividades posteriores.

Dependiendo de la moneda de su país, tal vez pueden hacer la misma actividad con ***monedas***: Cuenten monedas de unidad hasta 10, canjéenlas por un billete (o una moneda) de 10, sigan aumentando monedas de unidad y contando, y así continuando hasta 100.

Contar hacia atrás

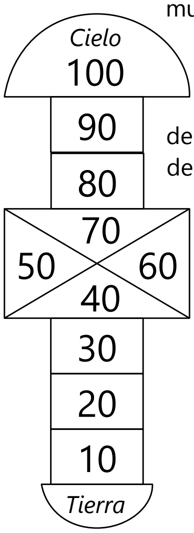
Cuando conocen los números hasta 100, practiquen contar retrocediendo desde 100 hasta 1 (o hasta 0). Pueden hacerlo con cualquiera de las actividades antes descritas.

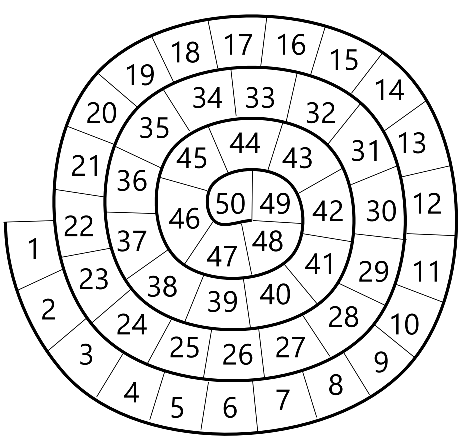
Si están usando ***materiales “de canje” (regletas; decenas de fósforos; billetes de 10***), entonces practiquen también el canje al revés: Comiencen con 10 decenas. Para contar retrocediendo tenemos que quitar unidades; entonces tenemos que canjear primero una de las decenas por unidades. Ahora podemos quitar una unidad: 99. Seguimos quitando unidades hasta llegar a 90. Ahora tenemos que canjear otra decena; entonces tendremos 8 decenas y 10 unidades. Seguimos quitando unidades: 89, 88, 87, ... y así sucesivamente.



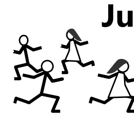
El juego de saltar *(Vea también Unidad 20.)*

Este juego, conocido como Rayuela, Avioncito, Mundo, y muchos otros nombres, se puede adaptar para practicar números mayores. Por ejemplo, podemos usarlo para contar por decenas *(izquierda)*. Otra variación del juego, el “caracol” *(abajo)*, puede extenderse con un número mayor de cuadros. Los muy aficionados podrían dibujar un “caracol” con todos los números del 1 al 100.





Juego: Sigue los números



Este juego es para jugar en el campo, en terreno abierto o bosque donde pueden moverse libremente.

Antes de salir, preparen 100 hojas de papel de 10 por 10 ó 10 por 15 cm. (Pueden cortar hojas A4 en cuatro o seis rectángulos iguales.) Escriban en cada una de las hojas uno de los números de 1 a 100, en orden. También pónganse de acuerdo en cuanto al lugar exacto donde comenzará el juego.

Un adulto, o unos niños mayores, llevan las hojas con los números y se adelantan al lugar de inicio. Allí colocan el número 1 en una rama de árbol o arbusto, o en el suelo con una piedra encima, pero visible. Avanzan por el terreno, y aproximadamente cada diez metros dejan el siguiente número como pista, de la misma manera como el 1. (La distancia puede ser mayor o menor, de acuerdo a la visibilidad.) Así continúan hasta el 100. Cerca del número 100 se esconden.

Los otros participantes pueden salir después de un tiempo acordado, por ejemplo 20 minutos después de la partida de los que se adelantan. Se van al lugar de inicio y desde allí buscan los números colocados, en orden. (Llévense los números para que no se queden botados por allí.) Cuando llegan al 100, buscan a los escondidos hasta que los encuentran.

Variación para jugar en la ciudad: En vez de colocar hojas con números, pueden escribir los números con tiza en la acera. Escojan unas calles donde pasan pocos carros.

Representar números arbitrarios

Practiquen representar números con material concreto. Las siguientes actividades las puede hacer primero un adulto con uno o varios niños; después los niños lo pueden hacer entre ellos, de dos en dos.

Por ejemplo con el ***ábaco***: Uno dice: "Ponme 34 en el ábaco". El otro representa el número 34 (poniendo 3 decenas y 4 unidades). – O el uno representa un número en el ábaco y pregunta: "¿Cuántos son?" El otro niño tiene que responder.
Lo mismo pueden hacer con ***regletas Cuisenaire***, con ***fósforos*** (usando las decenas amarradas), o con cualquier otro de los materiales que usamos en las actividades anteriores. Pero es recomendable hacerlo primero con el ***ábaco***, porque así pueden participar también aquellos niños que todavía no pueden contar por decenas, y necesitan contar todas las unidades individualmente. (Vea en "Para los educadores" acerca del proceso de "comprimir" las operaciones.)
Si usamos ***regletas Cuisenaire o cadenitas de cuentas***, hay diferentes formas de representar los números. Las más usuales son el "tren" o "gusano" (una sola cadena larga de todas las regletas o cadenitas, con las unidades al final), o formando un bloque rectangular con las decenas y poniendo las unidades aparte. (Vea las ilustraciones en la Hoja de trabajo 27.1.)
Más tarde podemos hacer las mismas actividades usando tarjetas con los símbolos de los números. (Vea más abajo en "Ahora lo escribimos".)

Antecesor y sucesor

Con los mismos materiales podemos ahora comenzar el proceso del conteo en cualquier lugar "en el medio". Por ejemplo: "¿Qué número viene después de 63?" – "¿Qué número viene después de 79?" – "¿Qué número viene antes de 42?" – Represéntenlo con material concreto y después cuenten desde allí hacia adelante o hacia atrás, según lo que se pide.
Esta es también una actividad que los niños pueden hacer por sí mismos, de dos en dos. Al acompañarlos, podemos de manera natural introducir los términos "antecesor" y "sucesor".

Comparar números

La comparación de números (menor – mayor) es mucho más obvia con material concreto. "¿49 es mayor o menor que 63?" – Que el niño represente ambos números con material concreto (cadenitas, regletas, fósforos ...), y así verá fácilmente cuál es mayor.
Esta actividad también se puede realizar posteriormente con tarjetitas de números.

Estimar y contar

Hagan unos juegos de estimar cantidades. Por ejemplo, llenen un vaso con habas. Que cada persona presente diga su estimación: ¿Cuántas habas son? (Es más interesante si los adultos también participan en el juego.) – Después cuéntenlas juntos para determinar quién estuvo más cerca con su estimación.
Busquen otros objetos que pueden estimar. En vez de habas pueden también usar granos de maíz, piedritas, etc. – O hagan preguntas como las siguientes:

¿Cuántos libros hay en esta repisa?

¿Cuántas frutas tenemos en la cocina?

¿Cuántas ventanas hay en toda la casa? (o: ¿Cuántos paneles de vidrio?)

¿Cuántas letras hay en este titular del periódico?

¿Cuántos pasos son de aquí a la esquina de la calle?

(No usen cantidades demasiado grandes; recuerden que estamos recién usando números hasta 100.)
Cuando los niños ya saben leer y escribir estos números, podemos hacerlo también de la siguiente manera: En vez de que cada uno *diga* su estimación, que la *escriba* en un papel, sin decir nada y sin que los demás lo vean. Así hay un poco más de "suspenso" en el momento de averiguar quién estimó mejor.

De manera similar podemos hacer estimaciones con medidas, longitudes, pesos, etc. *(Vea Unidad 31.)*

Principios matemáticos

Valor posicional

Al ampliar el espacio numérico hasta 100, los niños tendrán que manejar conscientemente por primera vez el concepto del valor posicional: En un número como 63, el 3 significa lo que dice (3 unidades); pero el 6 significa 6 *decenas*, o sea 60 unidades.

En realidad, la misma idea ya está en los números de 10 a 20, pero allí todavía no era tan necesario tomar conciencia de ello. Ahora que tenemos múltiples decenas, sí es necesario que los niños entiendan este concepto para no confundirse: Una cifra puede tener un ***valor*** distinto, dependiendo de su ***posición*** dentro de un número. Eso es lo que llamamos "valor posicional".

Para los educadores

La derecha y la izquierda

Para leer y escribir correctamente los números, es necesario que los niños tengan clara la distinción entre izquierda y derecha. Un niño que todavía dificulta en eso, puede p.ej. escribir 85 en vez de 58. Esta dificultad ocurre sobre todo en niños ambidiestros; o sea niños que no tienen preferencia por ninguna de sus dos manos. Los niños que escriben con la mano derecha, pueden decir: "La derecha es la mano con la cual escribo." Igualmente los niños zurdos pueden decir: "La izquierda es la mano con la cual escribo." Pero los niños ambidiestros no pueden usar este criterio de distinción, porque escriben a veces con la izquierda y a veces con la derecha. Entonces tenemos que encontrar para ellos alguna otra propiedad distintiva que les permite distinguir entre la izquierda y la derecha.

La capacidad de "comprimir" procesos y operaciones

Las operaciones matemáticas pueden realizarse de distintas maneras; algunas que requieren muchos pasos; otras que se pueden hacer con pocos pasos, pero que requieren más razonamiento para entender *por qué* estos pasos llevan al resultado deseado.

Tomemos como ejemplo la tarea de representar el número 36 en el ábaco. Un niño que se enfrenta por primera vez a este desafío, quizás va a mover y contar cada cuenta por separado: 1, 2, 3, 4, ... y así hasta llegar a 36. Este procedimiento es correcto; produce el resultado correcto; pero demora mucho.

Cuando el niño empieza a entender cómo "funcionan" las decenas, en algún momento va a entender que 30 es 3 decenas, y que por tanto puede representar más rápidamente los números como 30, 50, 80: puede mover el número correspondiente de filas enteras, y contar por decenas: 10, 20, 30, ... – Quizás el niño dirá que estos números son "fáciles", porque se pueden contar por decenas. Efectivamente, la "compresión" consiste en un descubrimiento de que cierta operación, que antes al niño le pareció compleja, se puede hacer de una manera mucho más fácil.

Pero es posible que en esta etapa, el niño todavía no comprende cómo eso le ayudaría para un número como 36, y que en este caso seguirá contando cada unidad como antes. Para poder aplicar su descubrimiento al número 36, el niño necesita dar un paso adicional de razonamiento: Tiene que entender que este número es una *combinación* de decenas (3 decenas = 30) y unidades (6).

Cuando llega a este punto, el niño será capaz de "comprimir" el proceso de representar 36 en el ábaco: Primero mueve y cuenta tres filas enteras para llegar al 30, y a partir de allí cuenta las unidades hasta llegar al 36. De esta manera, los 10 pasos de contar hasta 10 se han "comprimido" o abreviado en un solo paso, el de contar una decena; e igualmente los 10 pasos de contar de 10 a 20 y de 20 a 30. El niño *entiende* que en realidad son 10 pasos, pero ya no necesita pensar en ello conscientemente, porque ya domina la abreviación.

Este proceso de "compresión" es esencial para poder avanzar en la matemática. A medida que uno avanza, la matemática se vuelve cada vez más compleja. En algún momento, su complejidad se vuelve más grande de lo que el alumno puede manejar – excepto si encuentra la manera de "comprimir" muchos pasos en uno solo, y así reducir la complejidad.

Esto sucede por ejemplo cuando un niño tiene que encontrar la suma de 9 grupos de 5 objetos, y descubre que no necesita sumar 5+5+5+5+5+5+5+5+5, porque puede multiplicar directamente 5 x 9. O más adelante, cuando tiene que encontrar el MCD de 36 y 84, y en algún momento descubre que ya no necesita aplicar ningún procedimiento complicado, porque puede "ver" directamente que ambos números se encuentran en la tabla del 12, y que el 12 es efectivamente el MCD. O más adelante, si algún problema le exige sumar todos los números de 1 a 100, y el alumno se da cuenta de que puede descubrir una fórmula algebraica para la suma de todos los números de 1 a ***n***, y así puede aplicar esta fórmula y ya no necesita efectuar cien sumas.

Ahora, la compresión de operaciones no se puede enseñar o entrenar mecánicamente. Eso funciona solamente si el niño *entendió primero los pasos pequeños y lentos.* Es que en estos pasos se encuentra la respuesta a la pregunta: ***¿Por qué*** (se hace así)? Si el niño ha entendido y practicado estos pasos lentos, en algún momento descubrirá: "Yo puedo abreviar esto. *¡Así es más fácil!*" Y entonces entenderá también ***por qué*** la abreviación funciona.

Como educadores no podemos forzar eso. No se trata de enseñar recetas y procedimientos. No es que tengamos que introducir un procedimiento "paso por paso", y después decir: "Pero ahora tienes que hacerlo de la manera más corta." Eso no va a funcionar. El niño tiene que llegar primero al punto donde se da cuenta por sí mismo: *"¡Esto es fácil!"* Si no ha llegado a eso, solamente se va a confundir: "Primero me dicen que lo haga así, y ahora me dicen que lo haga de esta otra manera...." – y en vez de que sea fácil, el niño lo percibe como algo más complicado. No le ayuda en nada si le enseñamos a repetir mecánicamente unos procesos cuyo sentido no entiende. Lo que el niño no entiende, lo percibe como "difícil", lo vuelve a olvidar pronto, y se desanima.

Entonces debemos tener paciencia y permitir que cada niño pase por su propio proceso, a su propio ritmo, y que descubra por sí mismo las maneras de hacerlo "más fácil". Podemos mostrar varias alternativas, y después dar a cada niño la libertad de usar aquel procedimiento con el cual se siente más cómodo. Si entonces un niño por sí mismo usa un procedimiento lento, "paso por paso", allí vemos que ese niño todavía no llegó al punto de poder "comprimir" estas operaciones. Tenemos que darle más tiempo para madurar y para experimentar, hasta que pueda dar el paso de razonamiento correspondiente.

Matemática divina

Contando ovejas

El Señor Jesús nos cuenta de un hombre que tenía cien ovejas. (Mateo 18:10-14.) Un día se le perdió una oveja. ¿Cómo sabía que una oveja estaba perdida? – Pongan 100 habas en un montoncito, y 99 habas en otro montoncito. ¿Pueden decir a primera vista dónde están las 100 habas y dónde las 99? – No, hay que contarlas. Así el hombre tenía que contar sus ovejas para saber si estaban completas.

De la misma manera, Dios nos ha contado a nosotros. Y aun más: Él conoce a cada uno de nosotros por nombre. Así, Dios se da cuenta al instante si alguno de nosotros se pierde, y viene a buscarnos.

El hombre de las ovejas podría haber dicho: "No importa que se pierda una oveja, todavía tengo 99." Pero no, la única oveja perdida era importante para él. Así también cada uno de nosotros es importante para Dios. Si el número de sus ovejas no está completo, eso es importante para Dios. Así también en la matemática es importante que nuestros números sean exactos y completos.

Ahora lo escribimos

La lectura y escritura de los números debería darse de manera natural en el transcurso de las actividades del Taller.
Adicionalmente se pueden repasar los ***símbolos de "mayor", "igual", "menor"*** mediante ***tarjetitas*** con números y con estos símbolos. Por ejemplo: El niño saca dos tarjetas de números de la pila barajada, las pone delante de sí sobre la mesa, y coloca una tarjeta con el signo correspondiente <, > entre los dos números.

> **Vocabulario matemático**
>
> **Centena:** Una cantidad de cien.
>
> **Valor posicional:** El valor de una cifra, dependiendo de su posición dentro de un número. Por ejemplo en el número 32, la cifra 3 por su posición vale 30.

Hoja de trabajo 27.1: Todas las actividades de esta hoja son formas escritas de actividades que ya se realizaron en el Taller: Escritura de números representados con regletas; escritura de números en palabras y en cifras; contar hacia adelante y hacia atrás; y el canje de 10 unidades por una decena.

Hoja de trabajo 27.2 – ***Unir puntos:*** Une los puntos en su orden de 1 a 100. en línea recta. Es importante hacer líneas rectas y no curvadas, para que el dibujo salga como debe. (Algunos niños hacen líneas curvadas para "evadir" otros números que están en el camino, pero así el dibujo resulta distorsionado.)

Hoja de trabajo 27.2 – ***Mayor o menor:*** En los cuadrados vacíos hay que escribir el signo correspondiente: <, =, ó >.

Hoja de trabajo 27.3 – ***Ordenar números***:
Arriba: En cada una de las dos secuencias, hay que escribir los números de manera ordenada como se pide: la primera secuencia de menor a mayor, la segunda de mayor a menor.
Abajo: Unir los puntos en orden como en la Hoja 27.2. Solamente que ahora los números ya no son sucesivos. Hay que encontrar su orden de menor a mayor, o vice versa. (Aquí no importa si se empieza con el menor o con el mayor, con tal que la secuencia sea ordenada.)

¿A dónde vamos desde aquí?

La Unidad 31 amplía el tema de "Estimar y medir" con algunas otras unidades de medida.
Las Unidades 28 a 30 introducen las operaciones de suma y resta en el espacio numérico hasta 100.

Unidad 28 - Sumas y restas en las decenas superiores

Prerrequisitos:
- Números hasta 100 *(Unidad 27)*
- Sumas y restas hasta 20

Materiales necesarios:
- Cadenitas de cuentas, regletas Cuisenaire, o ábaco
- (opcional) "Máquinas" de tubos de papel higiénico
- Recta numérica hasta 100, o cinta métrica
- Dados; juegos de tablero (Ludo, Serpientes y escaleras, Juego de la oca, y similares)

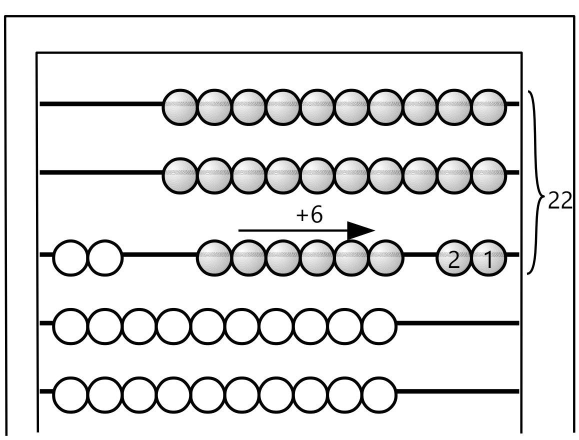
Para los educadores

Esta unidad contiene sugerencias de actividades con diversos tipos de materiales. No es necesario que un niño haga todas las actividades sugeridas. Que escoja los materiales que prefiere. Lo importante es que practique hasta dominar las operaciones. Para algunos niños, eso puede significar muchas actividades; otros lo comprenderán después de muy poca práctica, entonces podrán seguir adelante a la siguiente unidad.

TALLER Manejar trenes largos

Usen ***cadenitas de cuentas*** o ***regletas Cuisenaire***. Representen una suma que da menos que 10, por ejemplo 2 + 6 = 8. Después coloquen una decena a la izquierda de la suma. Ahora tenemos la suma 12 + 6. Observen y analicen: ¿Cuánto es el resultado de esta suma? – Sigan aumentando "vagones de 10" al tren. Digan las sumas que se forman, y sus resultados. – En un paso posterior, *escriban* estas sumas.

Hagan ejemplos similares con otros números.
Hagan lo mismo con *restas*: Comiencen con una resta con números del 1 al 9. Aumenten una decena, después otra, después otra más ... Observen y analicen las restas que se forman, y sus resultados.
En la ***Hoja de Trabajo 28.1. (arriba)*** pueden practicar lo mismo a un nivel un poco más abstracto. Que los niños usen regletas o cadenitas mientras tengan necesidad de este material. Ellos se darán cuenta cuando pueden hacerlo en la cabeza sin el material.
Lo mismo se puede hacer también con el ***ábaco***. Solamente que aquí no tenemos un tren largo; tenemos las decenas en filas una encima de otra.



Estas mismas operaciones se pueden practicar también usando el juego de las ***"máquinas"*** (vea *Unidad 18*). Así se repasa nuevamente el hecho de que la resta es la operación inversa de la suma.

Caminar hacia adelante y atrás en una recta numérica larga

Con una tira larga de papel o cartulina, fabriquen una recta numérica hasta 100, con espacios de 1 cm entre los números. (Vea *Unidad 17*.) – Como alternativa pueden usar una cinta métrica; pueden pegarla estirada sobre la mesa con cinta adhesiva.
Practiquen el desplazarse "de ida y vuelta" sobre la recta numérica como en la *Unidad 19*, pero con operaciones en las decenas superiores como las que acabamos de practicar.

Trenes largos con canje de decena

Vuelvan a hacer las mismas actividades como antes, pero comiencen ahora con una suma que sobrepasa la decena, como p.ej. 8 + 6 = 14. Entonces las cadenitas o regletas de 8 y de 6 se remplazan por una de 10 y una de 4, para poder interpretar el resultado correctamente.

Aumenten decenas como en la primera actividad, observen y analicen los resultados. A causa de la decena canjeada, el resultado tiene ahora una decena más que el número con que empezaron. Por ejemplo en 28 + 6 = 34, 28 tiene 2 decenas, pero 34 tiene 3.

10	10	8	+	6
10	10	10	4	

En vez de usar regletas de 8 y de 6, pueden también usar 8 cubitos de unidad y 6 cubitos de unidad, respectivamente. Entonces se cuentan 10 unidades, se canjean por una decena, y sobrarán 4 unidades sueltas.

Después hagan lo mismo con restas como p.ej. 12 – 9 = 3. El 12 se representa como una decena y 2 unidades; pero cuando restamos 9, la decena desaparece y solamente queda una regleta de 3. Aumenten decenas, observen y analicen las restas que resultan. Observarán que en este caso, el resultado tiene una decena menos que el número con que empezamos.

En las ***Hojas de trabajo 28.1*** *(abajo)* y ***28.3*** *(arriba)* pueden seguir practicando estas operaciones con canje de decenas.

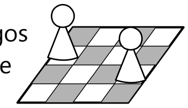
Comprobación mediante la operación inversa

Hoja de trabajo 28.3 *(abajo):* Si hicieron el juego de las máquinas, esto es simplemente trasladar este juego a una forma escrita. (Compare las Hojas de trabajo 18.5 y 24.3.). – El último ejercicio pide lo mismo de una manera puramente abstracta. Con el ejemplo de la primera operación: Si 36 + 9 = 45, entonces 45 – 9 debe dar 36. Si un niño no lo entiende, se lo puede explicar usando nuevamente las "máquinas".

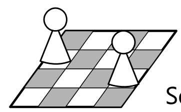
Usar tarjetas de operaciones

Hoja de trabajo 28.2 – Use las tarjetas de las primeras tres filas, marcadas con un círculo. *(Las tarjetas de las siguientes filas son para las Unidades 29 y 30.)* Los niños pueden barajar las tarjetas, sacar una tarjeta de encima y representar con regletas o cadenitas la operación que está escrita en la tarjeta. Que cuenten y digan el resultado de la operación; después volteen la tarjeta para controlar si su resultado es correcto.

Juegos de tablero para avanzar y retroceder



Jueguen unos juegos de tablero que requieren avanzar o retroceder el número de pasos que indica el dado. Algunos de estos juegos tienen las casillas del juego numeradas; por ejemplo "Escaleras y Serpientes", o el "juego de la oca". Entonces pueden contar el número de pasos en el tablero, o alternativamente sumar al número de la casilla el número que tiraron con el dado, para saber el número de la casilla adonde llegarán.



Juego: El chancho

Se juega por turnos con un dado. Los números del dado valen los puntajes que indican, con excepción del 1 que se llama "chancho". Cada jugador puede en su turno tirar el dado tantas veces como quiere, mientras no le sale el chancho. Los puntos se suman seguidos; pero cuando aparece el chancho, se pierden todos los puntos de este turno. Se trata entonces de saber cuándo parar.

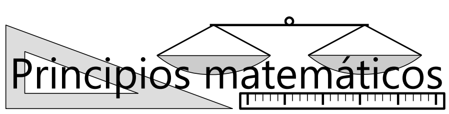
En los turnos siguientes, los puntos de cada jugador se siguen sumando al total de sus turnos anteriores, pero si le sale chancho, pierde los puntos "nuevos" y se queda únicamente con los puntos de los turnos anteriores.

Se puede jugar hasta llegar a 50, o a 100.

Pregunta capciosa:

En el candelero hay siete velas prendidas. Si apagas dos de ellas, ¿cuántas velas quedan?

Respuesta en el Anexo A.



Como en la *Unidad 21*, es la ***ley asociativa*** que nos permite realizar fácilmente las sumas en las decenas superiores. Por ejemplo:

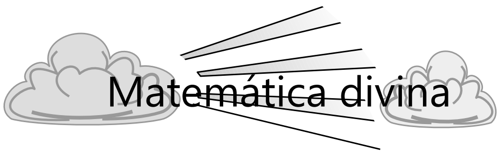
56 + 3 = (50+6) + 3 = 50 + (6+3) = 50 + 9 = 59

Para las restas aplica lo mismo, solamente que aquí intervienen también las leyes de los signos (que todavía no estudiamos explícitamente a este nivel):

78 – 5 = (70+8) – 5 = 70 + (8–5) = 70 + 3 = 73

Acerca del ***canje*** que sucede al sobrepasar una decena, vea lo dicho en la *Unidad 23*.

Si hacen el juego de las máquinas "hacia adelante" y "hacia atrás", o si hacen la comprobación del resultado de una suma mediante la resta correspondiente, y vice versa, están a la vez repasando el principio de la ***operación inversa***.



Restas buenas

Normalmente no nos gusta perder algo, o que nos quiten algo. Así la operación de restar nos puede parecer desagradable. ¿Pero sabías que el restar o disminuir puede también ser algo bueno?

El Señor Jesús dijo: "Es más feliz dar que recibir." (Hechos 20:35.) Cuando haces un regalo a alguien, estás restando de lo que tienes; pero estás haciendo algo muy bueno.

Juan el bautista fue una persona muy famosa. Pero cuando vino Jesús, él se hizo más famoso que Juan. Entonces los amigos de Juan se molestaron y le dijeron: "Mira, ahora todo el mundo le sigue a Jesús y ya no a ti." Pero Juan respondió: "Él tiene que crecer, pero yo tengo que disminuir." (Juan 3:30.) Juan sabía que Jesús era mucho más importante que él. Es algo bueno, dar la importancia a quien realmente corresponde.

Acerca de Jesús mismo dice: "Ustedes conocen el favor de nuestro Señor Jesús, el Cristo, que fue rico, pero por ustedes se hizo pobre, para que ustedes se vuelvan ricos por la pobreza de él." (2 Corintios 8:9) Cuando él estuvo en la tierra, sufrió muchas veces la operación de la resta: Jesús permitió que le quitaran todo lo que tenía, hasta su propia vida. Eso fue lo más importante que él hizo: Dio su vida para que nosotros recibiéramos una vida nueva en Dios.

Y Jesús enseñó a sus amigos a vivir de la misma manera. Él no lo aprueba si alguien usa el nombre de Dios para enriquecerse a sí mismo, o para gobernar sobre otros. Él enseñó a sus amigos a disminuir, para que otros puedan crecer.

¿A dónde vamos desde aquí?

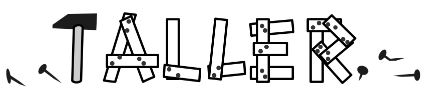
El dominio de las operaciones de esta unidad es suficiente para poder construir las tablas de multiplicación. Entonces un niño interesado en la multiplicación podría pasar a la Unidad 34 y siguientes.

Sin embargo, es recomendable completar primero las actividades de sumar y restar (Unidades 29 a 33), para entrenar las capacidades del cálculo mental y para adquirir un mejor sentido numérico respecto a los números hasta 100.

Unidad 29 - Contar, sumar y restar por decenas

Prerrequisitos:
- Números hasta 100 *(Unidad 27)*
- Sumas y restas hasta 10

Materiales necesarios:
- Monedas de 10
- Cadenitas de cuentas, regletas Cuisenaire, o ábaco
- Recta numérica larga, o cinta métrica
- (opcional) "Máquinas" de tubos de papel higiénico



Contar monedas

Esta es una actividad que se puede hacer de manera natural, en cada ocasión de comprar algo que se puede pagar con monedas de 10. Coleccione con anticipación un número suficiente de monedas de 10. Que los niños cuenten la cantidad de monedas que necesitan para una compra que cuesta, por ejemplo, 80 céntimos, o 30 pesos (adáptelo a la moneda de su país).
Los niños se darán cuenta de que existen varias maneras de contar las monedas. Por ejemplo, puedo contar de 10 en 10: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 céntimos. O puedo razonar de antemano que 80 céntimos son 8 monedas de 10, entonces cuento las monedas de manera "normal" hasta 8.
También pueden practicar canjes: Una moneda de 20 vale igual como dos monedas de 10. Una moneda de 50 se puede canjear por 5 monedas de 10. Etc.

Sumar decenas con material concreto

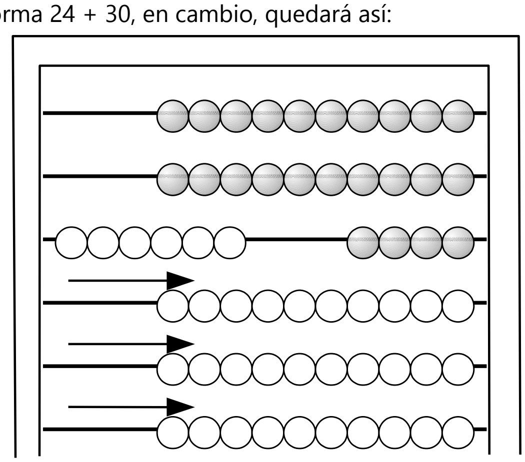
Practiquen unas sumas y restas con decenas enteras, tales como 20 + 40, 70 – 50, etc. Con ***cadenitas de cuentas*** o ***regletas Cuisenaire***, usen decenas enteras. Con el ***ábaco***, muevan filas enteras a la vez. También pueden usar ***monedas de 10*** para practicar estas sumas y restas. Los niños se darán cuenta por sí mismos de que pueden simplificar la operación, calculando por ejemplo "2 regletas más 4 regletas" en vez de "20 + 40".
La ***Hoja de Trabajo 29.1*** ilustra este principio y repasa estos tipos de operaciones.

Añadir decenas a un número que tiene decenas y unidades

Practicamos ahora unas operaciones como 30 + 24, resp. 24 + 30. Esta operación es fácilmente entendible si representamos los números en forma de un "tren" largo de ***cadenitas*** o de ***regletas Cuisenaire***. (Vea la ilustración en la ***Hoja de trabajo 29.2*** arriba.) Las tres decenas del 30 se aumentan de preferencia por aquel lado del tren donde ya hay decenas; así mantenemos todas las decenas juntas y podemos más fácilmente interpretar el número que resulta. (En el resultado, contamos primero todas las decenas y después las unidades.)

Con las ***regletas*** o ***cadenitas*** no hace mucha diferencia si comenzamos con 30 y aumentamos 24, o si comenzamos con 24 y aumentamos 30. Las decenas pueden añadirse por cualquier lado del tren; y de todos modos podemos al final agrupar el material de manera que las decenas queden juntas y las unidades aparte.

Con el ***ábaco***, la forma 30 + 24 no presenta ninguna dificultad: comenzamos con 30 y seguimos aumentando decenas, y al final las unidades.
- La forma 24 + 30, en cambio, quedará así:



Si queremos saber cuánto es esto, tenemos que contar primero todas las decenas (saltando "por encima" de la fila incompleta), son 5 filas completas, o sea 50. A eso añadimos al final las 4 unidades de la fila incompleta, y así sabemos que son 54.

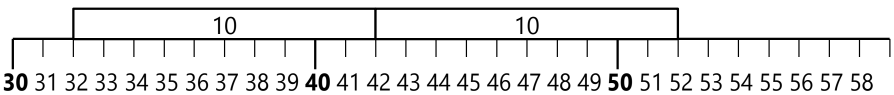
Quitar decenas de un número que tiene decenas y unidades

Esta operación se puede introducir con "trenes" de la misma manera como la suma correspondiente. (Vea la ilustración en la ***Hoja de trabajo 29.3*** arriba.)

Practiquen también con las ***tarjetitas de la Hoja 28.2*** (filas cuarta a sexta, las marcadas con un triángulo) para que los niños representen con material concreto las operaciones indicadas en las tarjetas.

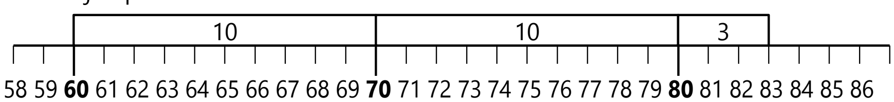
Avanzar de 10 en 10 en una recta numérica larga

Representen operaciones como estas en una recta numérica larga o con una cinta métrica, colocando regletas Cuisenaire. Por ejemplo 32 + 20:



Un ejemplo como este puede a la vez servir para observar qué sucede si contamos de 10 en 10 a partir de un número que tiene unidades: 32, 42, 52, ... (etc.)

– Otro ejemplo: 60 + 23:



Igualmente funciona con la resta; en este caso el desplazamiento en la recta numérica se cuenta hacia la izquierda.

También pueden jugar a las "***máquinas***" con estas operaciones. Se trata entonces de máquinas que aumentan o quitan varias decenas enteras.

Para los educadores

Comprimir operaciones con decenas

Un niño logrará "comprimir" esta clase de operaciones cuando entiende que al sumar o restar decenas enteras, puede realizar la operación directamente con las decenas sin preocuparse por las unidades. En una operación como 50 + 30, eso es fácil de ver con regletas de decenas: sumo "cinco regletas más tres regletas", y las ocho regletas resultantes equivalen a 80.

Un poco más difícil es entender que lo mismo funciona también cuando hay unidades. En una operación como 54 + 30, algunos niños pensarán que tienen que contar 30 unidades separadas para poder llegar al resultado. La ilustración con los "trenes" les ayuda a ver que aquí también pueden sumar "cinco regletas más tres regletas"; solamente que al final no hay que olvidar que adicionalmente hay 4 unidades. El resultado es entonces "ocho regletas y cuatro unidades", o sea 84.

El último ejercicio de la ***Hoja de trabajo 29.3*** ayuda a los niños a "saltar" directamente en pasos de 10, sin tener que contar diez pasos de unidades para llegar al siguiente número. El objetivo es que los niños descubran por sí mismos que "¡esto es fácil!", no que lo vean como un procedimiento complicado adicional. (Vea en la *Unidad 27* acerca del proceso mental de "comprimir" operaciones.)

Unidad 30 - Sumas y restas con decenas y unidades

Prerrequisitos:

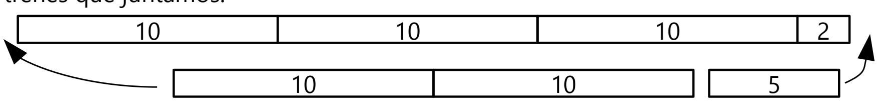
- Sumas y restas con decenas *(Unidad 29)*
- Sumas y restas en las decenas superiores *(Unidad 28)*

Materiales necesarios:

- Regletas Cuisenaire o cadenitas de cuentas

TALLER **Juntar trenes largos**

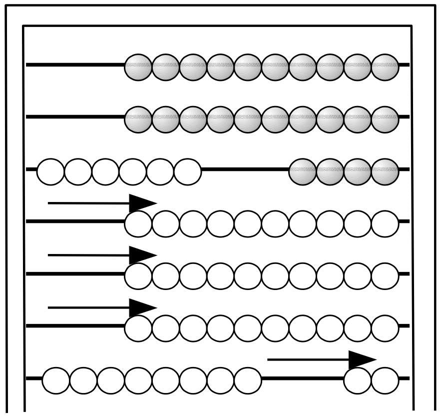
Con regletas Cuisenaire o cadenitas de cuentas, practiquen sumas con decenas y unidades, tales como 32 + 25 (pero que las unidades todavía no sumen más que 9, para que no haya canje de decena). Lo podemos representar como dos trenes que juntamos:



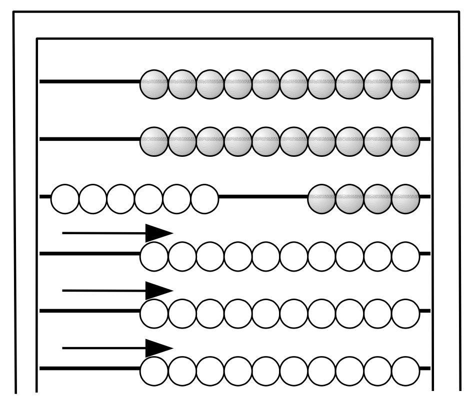
De preferencia separamos uno de los trenes en dos partes, para juntar sus unidades con las unidades del otro tren, y sus decenas con las decenas del otro tren. Así será más fácil “leer” el resultado.
Alternativamente, podemos colocar las decenas “en bloque”, como en la ilustración de la ***Hoja de trabajo 30.1.***

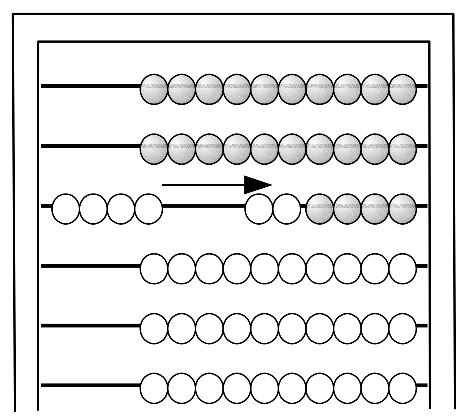
Al hacerlo mentalmente, el niño tendrá que decidir si prefiere aumentar primero las decenas o primero las unidades. (Vea abajo en “Principios matemáticos”.) La ***Hoja de trabajo 30.1*** presenta ambas posibilidades. – Al usar esta hoja, si el niño ya puede hacer las operaciones mentalmente, que las haga así. Mientras necesita todavía el material concreto (cadenitas, regletas), que lo use.

No es tan recomendable efectuar estas operaciones en el ***ábaco*** con los métodos que hemos usado hasta ahora. Podemos hacerlo, pero quedará un poco “desordenado”. Queremos sumar, por ejemplo, 24 + 32. Comenzamos con el 24. Probablemente la primera idea será añadir el 32 por debajo de la fila incompleta:



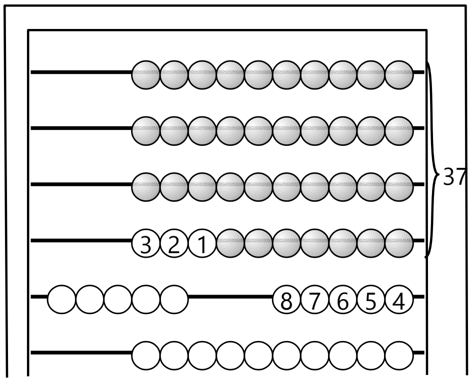
Pero con eso tenemos dos filas incompletas. Eso requiere sumar estas dos filas en la cabeza (o contar las unidades de ambas filas una por una). De todos modos, no hemos realmente representado la *suma* en el ábaco.
Una mejor representación sería la siguiente: Ponemos 24 en el ábaco; después aumentamos 30 (3 filas completas) debajo de la fila incompleta, y finalmente aumentamos las 2 unidades a la fila incompleta:





Este resultado lo podemos “leer” como en el ejemplo de la unidad anterior: contamos las decenas pasando por alto la fila incompleta; y después contamos las unidades en la fila incompleta.

Si tenemos un canje de decena, como en la suma 37 + 18, la cosa se vuelve más complicada. En este caso, tendríamos que añadir las 8 unidades primero; eso resultará en una nueva decena y una nueva fila incompleta. Después podemos añadir debajo la decena:



Pero en el uso del ábaco no es buena costumbre, comenzar por las unidades. En el libro de Primaria II aprenderemos otra forma de usar el ábaco, una que corresponde mejor a su uso “profesional”.

Quitar trenes

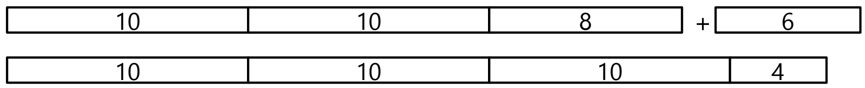
Esta es la misma operación como la anterior, solamente al revés: Comenzamos con un tren largo y le quitamos otro “tren” que consiste en decenas y unidades. Lógicamente quitamos las decenas por el lado de las decenas, y las unidades por el lado de las unidades. Así por ejemplo, si la operación es 76 – 43, quitamos 4 decenas de las 7 que hay, y quitamos 3 unidades de las 6 que hay.
Aquí también, practiquen primero con operaciones que no requieren quitar más unidades de las que hay, para evitar todavía el canje de decena.

Las ***tarjetas de la Hoja 28.2***, filas séptima y octava, contienen operaciones como las que acabamos de practicar.

Con la ***Hoja de trabajo 30.2*** practicamos realizar estas operaciones mentalmente y escribir sus resultados.

Sumar y restar trenes – Con canje

Es muy recomendable introducir estas operaciones paso por paso, siguiendo el orden presentado en las hojas de trabajo, y no avanzar al siguiente paso antes que el niño domine el anterior. De otro modo podría confundirse por los diferentes casos que pueden presentarse. Para entender las operaciones que siguen, deberá dominar las anteriores (sumar y restar decenas y unidades sin canje); y separadamente deberá dominar también las operaciones de la *Unidad 28* (sumar y restar unidades con canje). Si cumple estos prerrequisitos, no tendrá muchas dificultades.
Como en las operaciones anteriores, el niño puede decidir si quiere aumentar primero las decenas o primero las unidades. En cualquier caso notará que al añadir las unidades, es necesario un canje y se producirá una decena adicional. Con “trenes” de regletas Cuisenaire, eso puede representarse igual como las operaciones de la *Unidad 28*:



Solamente que ahora, en un paso adicional (antes o después) tenemos que sumar también las decenas que hay. (Y de manera similar en la resta.)

La ***Hoja de trabajo 30.3*** presenta una tercera posibilidad de hacerlo (C): sumando primero decenas aparte y unidades aparte, y al final sumándolo todo. Que los niños experimenten con las tres posibilidades hasta que puedan decidirse por la que les parece la más conveniente.

Después de practicar estas sumas, practiquen las restas correspondientes. (***Hoja de trabajo 30.4.***) Aquí, una de las decenas debe canjearse por unidades para poder efectuar la resta, como en las restas de la Unidad 28. – En cuanto al procedimiento práctico, la hoja de trabajo presenta la opción C en analogía a la hoja anterior. Pero en la resta, este procedimiento es un poco más difícil de entender, porque requiere una descomposición diferente de la acostumbrada: En vez de descomponer 63 en 60 + 3, se descompone en 50 + 13. Y para saber que hay que aplicar esta descomposición en vez de la acostumbrada, hay que ver con anticipación que hay necesidad de un canje de decena. Por eso, los procedimientos A y B serán más fáciles de entender.

Repaso con tarjetitas

Las ***tarjetas de la Hoja 28.2***, en las últimas filas (marcadas con un cuadrado), contienen operaciones como las que acabamos de practicar. Que los niños las representen con regletas o cadenitas y las resuelvan.
Cuando los niños dominan estas operaciones, pueden mezclar las tarjetas con las anteriores y practicar toda clase de sumas y restas “mezcladas”, para repasar lo que aprendieron en las actividades anteriores.

Principios matemáticos

Diversos procedimientos de suma mental

Tomamos como ejemplo: 34 + 52.
Básicamente hay tres maneras prácticas de realizar esta suma, sea con material concreto o mentalmente:

A) Al primer sumando se suman primeramente las decenas, después las unidades del segundo sumando. O sea: 34 + 50 = 84, 84 + 2 = 86.
Esta es la manera más lógica, porque sigue la forma como decimos y escribimos los números (desde la izquierda hacia la derecha).

B) Al primer sumando se suman primeramente las unidades, después las decenas del segundo sumando. O sea: 34 + 2 = 36, 36 + 50 = 86.

C) Se suman las unidades aparte, las decenas aparte, y finalmente se suman estas dos sumas parciales. O sea: 4 + 2 = 6, 30 + 50 = 80, 80 + 6 = 86.
Alumnos (y adultos) que vienen desde el sistema convencional, probablemente intentarán hacerlo así, porque este procedimiento intenta reproducir lo que se hace al sumar por escrito, cifra por cifra. Pero se nota a primera vista que esta forma es más complicada que las anteriores, porque requiere tres pasos, mientras las otras requieren solo dos. Además, este procedimiento requiere en el tercer paso recobrar de la memoria el resultado del primer paso, el cual no se usó durante el segundo paso. Por tanto, esta última forma es la *menos* recomendable.

En la *Unidad 33* veremos unas formas adicionales de descomponer o simplificar sumas y restas.

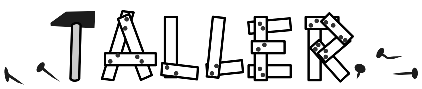
¿A dónde vamos desde aquí?

A partir de aquí, los niños podrán apreciar la “Tira de sumar y restar”, y el Nomograma de suma y resta, en la Unidad 65.

Unidad 31 - Estimar, pesar y medir

Prerrequisitos:
- Números hasta 100 *(Unidad 27)*

Materiales necesarios:
- Regla o cinta métrica
- Cordel, cinta masking
- Balanza para personas
- Litrera
- Cronómetro



Estima el tamaño de objetos

En la *Unidad 27* hicimos unas estimaciones con números. De manera similar podemos estimar el tamaño de objetos que se pueden medir en centímetros. Usen objetos que no miden más que un metro, para que no resulten números mayores a 100. Por ejemplo:
¿Cuánto mide este libro?
¿Cuánto mide este lápiz?
¿Cuánto mide el palo de esta escoba?
¿Cuán larga es esta mesa?
¿Cuál es la altura de esta mesa?
¿Cuánto mide el gato, el perro, el conejo, ...?
- Que cada uno diga o escriba su estimación; después midan para comprobar.

Observa el crecimiento de una planta

Este es un proyecto a largo plazo. Siembren unas plantas que crecen rápidamente, por ejemplo maíz, trigo, girasoles, gladiolos, habas, etc. Cada niño que participa escoge una planta que va a observar y medir. En intervalos regulares (por ejemplo una o dos veces por semana), mide la altura de tu planta y anota en una lista la fecha y el tamaño de la planta en centímetros.

Si los niños ya saben cómo graficar cantidades, pueden elaborar un gráfico del crecimiento de la planta, con los días en el eje horizontal y la altura en centímetros en el eje vertical.

¿Cuánto de agua cabe?

Estimen de diversos contenedores, cuántos litros de agua caben dentro: una olla grande; un balde; el lavatorio; la bañera; ... Después midan con una litrera para comprobar las estimaciones.

¿Cuánto pesas?

Estimen el peso de cada miembro de la familia. Después cada uno se pesa con la balanza, para comprobar las estimaciones. – Pueden también dibujar un gráfico de barras con los pesos de todos (vea más abajo).

Pueden hacer lo mismo con objetos que se pueden pesar con la balanza en kilogramos enteros.

En la siguiente unidad (32) se describe un "truco" cómo pesar objetos que no se pueden fácilmente colocar sobre la balanza.

¿Cuánto es un minuto?

Intenten estimar la duración de un minuto. Una persona señala el momento de inicio, y con un cronómetro controla hasta cuándo es un minuto, pero no dice nada. Los demás no pueden mirar ningún reloj o cronómetro. Cada uno, cuando piensa que pasó un minuto, levanta su mano o dice "Ahora". Cuando todos dieron su estimación, la persona con el cronómetro indica quién estuvo más cerca.

De manera similar pueden estimar y medir la duración de ciertos intervalos de tiempo. Por ejemplo:

¿En cuántos segundos puedes correr de un extremo del patio al otro extremo? ¿y de un extremo de la cancha de fútbol al otro extremo?

¿Cuántos segundos demoras en tomar tu leche? ¿o en comer una manzana? (Pero no hagan carrera con eso; coman y beban con toda normalidad...)

¿Cuántos minutos demoras en ducharte?

En una caminata: ¿Qué piensan, cuántos minutos ya hemos caminado?

Nota: Las abreviaciones correctas para las unidades de medida son las siguientes:

metros = **m**	gramos = **g**	litros = ***l***
centímetros = **cm**	kilogramos = **kg**	mililitros = **m*l***
milímetros = **mm**		

Estas abreviaciones no llevan ninguna -s al final, por más que estén en plural. Así por ejemplo no se escribe "15 kgs", se escribe "15 kg". – Estas abreviaciones tampoco se escriben con un punto al final.

Mediciones en la cocina

El ***cocinar según recetas*** ofrece muchas oportunidades para practicar mediciones. Hay que pesar los ingredientes, o medir con la litrera si son líquidos. Hay que medir el tiempo que la comida debe cocinar, o el tiempo que la torta debe estar en el horno.

Cordel de medir

Para medir distancias más largas al aire libre, pueden fabricar vuestro propio cordel de medir. Necesitan un cordel largo (por ejemplo de 20 metros), una regla de un metro o una cinta métrica, y cinta masking. Al inicio del cordel hagan un nudo en forma de lazo. Justo donde termina el lazo, peguen un pedazo de cinta masking al cordel y escriban un 0 encima. Desde allí midan un metro, y en el lugar indicado peguen otro pedazo de cinta y escriban un 1. Desde el 1 midan otro metro y peguen un pedazo de cinta con un 2; y así sucesivamente hasta terminar el cordel.

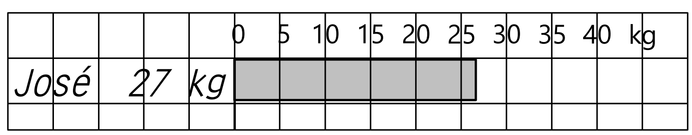
Ahora podemos estimar y medir distancias como el largo de la casa entera o del patio, el ancho de la calle (¡cuidado con el tráfico!), la distancia hasta una casa vecina, etc. Si una distancia es más larga que el cordel, simplemente volvemos a empezar con cero donde termina el cordel, y sumamos las distancias obtenidas.

(Con este cordel podemos medir solamente con una exactitud de metros enteros; pero eso es suficiente por ahora. Las conversiones de medidas con metros y centímetros dejamos para más tarde – vea Unidad 47.)

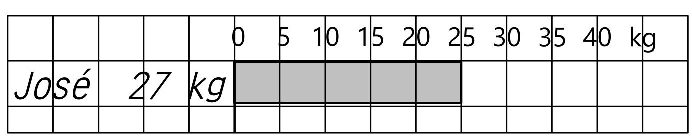
Dibujar cantidades: Gráficos de barras

Hagan unas mediciones o conteos y visualícenlos con gráficos de barras. Es más fácil comenzar con cantidades que se pueden representar exactamente. Por ejemplo, los niños podrían contar cuántos lápices de color tiene cada uno. Después pueden graficarlo en papel cuadriculado de manera que cada unidad ocupa un cuadradito. – Si están niños de varias familias juntos, pueden graficar el número de personas que hay en cada familia.

Si las cantidades son mayores, ya no alcanzan en la hoja si usamos un cuadradito para cada unidad. Por ejemplo, para graficar el peso de cada persona (incluyendo a los adultos), podrían usar dos cuadraditos por cada diez kilos. O sea, un cuadradito corresponde a cinco kilos. Entonces, un número como 27 kg no puede representarse con cuadraditos enteros. Habrá que redondearlo al cuadradito entero más cercano; o habrá que pintar solamente una parte de su último cuadradito, estimando hasta dónde. (Vea más abajo en "Para los educadores".)



o redondeado:



Pueden hacer gráficos similares con los puntajes que cada uno obtiene en un juego; por ejemplo en el Juego del 11 *(Unidad 20)*, o en el juego del "chancho" *(Unidad 28)*, y otros juegos que se juegan con puntajes.

Para los educadores

Aproximar números

En las actividades de estimar cantidades o medidas, es probable que los niños por sí mismos usarán números “redondos”. Por ejemplo, es más probable que un niño estime que la mesa mide “80 centímetros”, a que estime que son “83 centímetros”. Y si el niño piensa que la medida podría estar entre 70 y 80 centímetros, es probable que diga “75 centímetros”. Así los niños empezarán por sí mismos a utilizar los razonamientos que llevan al aproximar y redondear números.
Cuando tienen que dibujar un gráfico de barras donde un solo cuadradito representa varias unidades, puede ser que se enfrenten por primera vez con el problema de representar un número de una forma que no se puede hacer exactamente. Eso se puede hacer redondeando todos los números al cuadradito entero más cercano; o se puede estimar cuánto del último cuadradito habría que pintar. (En este último caso es suficiente que el niño decida si es “la mitad”, “más de la mitad”, o “menos de la mitad” del cuadradito.)
Con cualquiera de las dos soluciones que escoge, el niño tendrá que hacer razonamientos como los siguientes: ¿66 es más cerca de 60 o de 70? ¿27 es más cerca de 25 o de 30 (o quizás de 20)?
Todavía no necesitamos introducir reglas o procedimientos formales para redondear números. Es mejor que los niños lo practiquen de manera informal con actividades como las descritas en esta unidad. Más tarde, cuando tengan bastante experiencia con estimaciones, mediciones, y representaciones gráficas de números, entonces llegará el momento donde entenderán de manera natural cómo redondear números. – *Vea Unidad 44*.

Matemática divina

Pesos y medidas exactos

Dios da importancia a los pesos exactos y medidas exactas. Al hacer negocios, hay que pesar o medir exactamente la cantidad que se compra o que se vende. Eso es un asunto de honestidad.

"No tendrás en tu bolsa pesa grande y pesa chica; ni tendrás en tu casa efa grande y efa pequeño. Pesa exacta y justa tendrás; efa cabal y justo tendrás ..." (Deuteronomio 25:13-15)

(El efa era una medida para granos, harina, etc, y correspondía a 37 litros.)

Por eso, todo instrumento de medir debe ser calibrado: se debe asegurar que un kilo en la balanza sea igual a un kilo en las otras balanzas, y que un centímetro en la regla sea igual a un centímetro en las otras reglas.

Unidad 32 - El entero y sus partes II

Prerrequisitos:
- Sumas y restas hasta 100 *(Unidades 28 a 30)*

Materiales necesarios:
- Objetos de la vida diaria
- Balanza de personas; objetos para pesar
- Balanza de dos platillos (como en la *Unidad 25*)

TALLER

El entero y sus partes en la vida diaria

Como en la *Unidad 25*, busque situaciones en la vida diaria donde es necesario identificar el entero y sus partes, pero ahora con números hasta 100. Por ejemplo:

a) Tenemos una bolsa con caramelos rojos y amarillos, en total son 80. Hay 47 caramelos rojos; entonces ¿cuántos amarillos son?

b) Ayer hemos comprado 12 canicas, ahora tenemos 43. ¿Cuántas canicas tuvimos antes?

c) Papá tiene 38 años, mamá tiene 35. Se casaron hace 12 años. ¿Cuántos años tuvieron cuando se casaron? ¿Cuántos años tuvieron cuando tú naciste? (Usen los números que corresponden a su propia familia.)

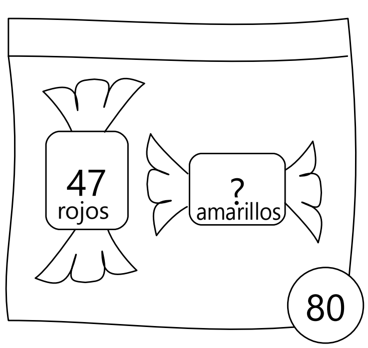
d) En la tienda compramos alimentos por 36 pesos / soles / dólares (... ponga la moneda de su país). Pagamos con un billete de 50.–. ¿Cuánto de vuelto tienen que darnos?

e) Hemos hecho compras por 43.– , y en la billetera nos quedan todavía 18.–. ¿Cuánto dinero tuvimos antes de ir a comprar? – Hagan cálculos como estos cuando vayan de compras.

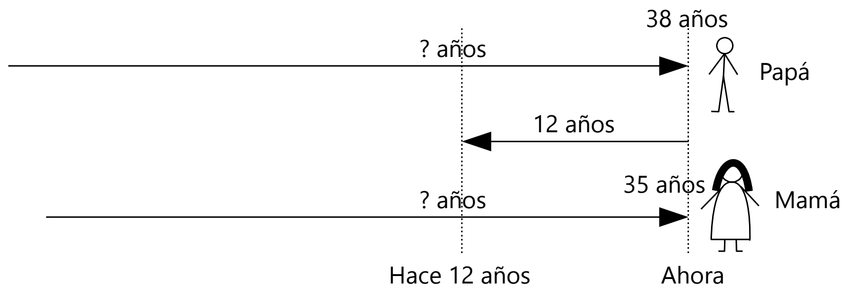
Vuelva a usar la ilustración con la casita y su techo, como en la *Unidad 25*.

Dibujar situaciones de suma y resta

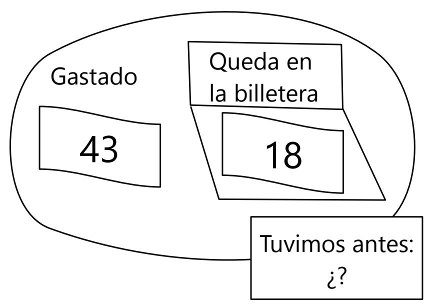
Con números mayores puede resultar tedioso dibujar cada objeto aparte. Algunos niños quizás ya pueden entender que el dibujo de un objeto puede representar un número mayor de ese objeto. Haga la prueba si lo entienden. Por ejemplo la situación **a)** arriba se podría dibujar así:



Para dibujar la situación **c)** (edades de papá y mamá) se podría usar una línea de tiempo:



La situación **e)** se podría dibujar de la siguiente manera:



Hagan sus propios ejemplos con situaciones de su vida diaria.

Pesar objetos que no se pueden colocar sobre la balanza

Podemos aplicar el principio del entero y sus partes para pesar unos objetos que no se pueden poner fácilmente sobre la balanza de personas. Quizás tienen unas sillas que por su forma no se pueden colocar sobre la balanza. Una bicicleta también es difícil de poner sobre la balanza sin que se caiga. Y el gato o el perro probablemente no se mantendrán tranquilos sobre la balanza hasta que hayamos leído su peso.

Mientras se trata de objetos que tú puedes cargar, hay una solución fácil: Sube tú mismo sobre la balanza, cargando el objeto. Ahora la balanza muestra el peso tuyo y del objeto juntos (o sea, el “entero”). Después te pesas tú sin el objeto (o sea, una “parte”). ¿Puedes con estos datos descubrir el peso del objeto?

Si algunos objetos son demasiado pesados para ti, un adulto los puede pesar por ti de la misma manera.

Cálculos con edades

Hagan unos cálculos con las edades de unos niños y sus años de nacimiento. Por ejemplo, si Paula cumple 8 años este año, ¿en qué año ha nacido? – Si Carlos nació en 2013, ¿cuántos años tiene? – Para hacer los cálculos pueden dejar el “dos mil” de un lado. O sea, en vez de calcular con el año 2013, simplemente calculen como si fuera el año 13. (Por supuesto que no pueden hacer eso con personas que nacieron antes del año 2000. Eso tendrá que esperar hasta que sepan calcular con números mayores.)

Equilibrar la balanza

Hagan unas actividades como en la *Unidad 25* para equilibrar una balanza de platillos, usando regletas Cuisenaire o cadenitas de cuentas. Los platillos de la balanza deben ser lo suficientemente grandes para que quepan varias decenas, así pueden practicar con números hasta 100. Pueden inventar vuestros propios ejemplos, o usar las operaciones de la ***Hoja de trabajo 32.2*** *(arriba)*.

Hojas de trabajo

Completar casas

Hoja de trabajo 32.1 *(arriba):* El mismo ejercicio como en la *Unidad 25*. Solamente que ahora hay también algunas casas que contienen *tres* sumandos. El principio es el mismo: las tres partes juntas dan la casa entera.

Calcular viajes en etapas

Hoja de trabajo 32.1 *(abajo):* Los dibujos representan distancias de un lugar a otro. Si la primera etapa del viaje mide 34 km y la segunda etapa 26 km, ¿cuánto mide el viaje entero? – Si la primera etapa mide 45 km y el viaje entero es de 91 km, ¿cuánto mide la segunda etapa?
Los últimos dos ejercicios (viajes con *tres* etapas) son un poco más exigentes. Se dan longitudes de dos etapas juntas, pero el viaje entero tiene tres etapas. Para resolverlo, el niño tiene que ser capaz de interpretar esas longitudes de dos etapas una vez como un “entero” (que consiste en dos etapas), y una vez como una “parte” (que se une a la tercera etapa para formar el viaje entero). Hay que observar bien para descubrir cuál de los espacios en blanco se puede llenar primero; después ya no será tan difícil llenar los otros.

Completar conjuntos

Hoja de trabajo 32.2 *(arriba):* Los números indican el número de elementos que contiene cada conjunto. Completa números donde faltan, de manera que cada conjunto y subconjunto contenga el número indicado de elementos. (Este ejercicio es similar al ejercicio de las casas en la hoja anterior.)

Ojo: En la primera fila hay un ejemplo que no tiene solución. Esto se hizo al propósito para que los niños experimenten que en la matemática a veces nos encontramos con operaciones que "no se pueden hacer", y con problemas que no tienen ninguna solución.
(En realidad, en este caso sí existe una solución, pero sería un número negativo. A este nivel todavía no trabajamos con números negativos. Simplemente diremos que ese ejemplo no se puede solucionar.)

¡Equilibra la balanza!

Hoja de trabajo 32.2 *(en el medio):* La forma “abstracta” de la última actividad del Taller. Que el niño represente las operaciones con el material concreto mientras tenga necesidad de hacerlo. Una vez que puede hacerlo en su mente, ya no tendrá necesidad del material y podrá resolver también las operaciones un poco más complejas al final.

Completar el 100

Hoja de trabajo 32.2 *(abajo):* La operación de complementar números a 100 puede ser útil en diversas situaciones. Por ejemplo cuando pagamos algo con un billete de 100 y tenemos que calcular el vuelto. O al simplificar sumas de varios sumandos (vea *Unidad 33*) es práctico si podemos llegar a 100. Con la última serie de operaciones en esta hoja de trabajo practicamos completar el 100.

Ampliaciones

Problemas de suma y resta

Ayúdate con un dibujo si es necesario.

1. Pablo tiene 34 canicas, Pedro tiene 35.
¿Cuántas canicas tienen los dos juntos?

2. Juan tiene 15 canicas, Alberto tiene 8 y Julio tiene 30.
¿Cuántas canicas tienen los tres juntos?

3. Fernando y Francisco tienen juntos 26 canicas. Francisco tiene 17. ¿Cuántas canicas tiene Fernando?

4. En la calle Pinos hay 28 casas. 13 de ellas son blancas. ¿Cuántas casas son de otro color?

5. Samuel viajó 53 km para visitar a su amigo. Después viajó de regreso, pero después de 45 km se malogró el carro.
¿A cuántos kilómetros de su casa se quedó Samuel?

6. Si Maribel duerme 9 horas cada noche, ¿cuántas horas al día está despierta?

7. Fernando hizo compras por 53.–, pero solamente tenía 45.–. ¿Cuánto quedó debiendo?

8. Marta compró papas por 9.–, queso por 30.–, y unas zanahorias. Todo junto costó 47.–. ¿Cuánto costaron las zanahorias?

9. Hernán compró una olla por 46.– y un termo por 38.–. Pago con un billete de 100.–. ¿Cuánto de cambio recibió?

10. Sandra compró cuyes y pollitos. Pagó con 100.– y recibió 22.– de vuelto. Si los cuyes costaron 52.– , ¿cuánto costaron los pollitos?

11. Un gatito costó 11.– , y un perrito 6.– más que el gato. ¿Cuánto costaron los dos juntos?

*12. Un gallo y una gallina costaron juntos 54.– . La gallina costó 12.– más que el gallo. ¿Cuánto costó el gallo, y cuánto la gallina?

(Si intentaron por mucho tiempo resolver el problema 12 y no lo pudieron, pueden ver la pauta en el Anexo A.)

¿A dónde vamos desde aquí?

A partir de ahora, los niños podrán intentar resolver algunos de los desafíos de razonamiento con números en la Unidad 64; por ejemplo las primeras pirámides de números, las que contienen solamente números menores a 100.
También pueden simplemente avanzar a la unidad siguiente.

Unidad 33 - Sumas y restas con varios sumandos

Prerrequisitos:

- Sumas y restas hasta 100 *(Unidades 28 a 30)*

Materiales necesarios:

- Regletas Cuisenaire
- Recta numérica larga o cinta métrica
- Cinta adhesiva
- Dos dados
- "Máquinas" de tubos de papel higiénico (vea Unidad 24)

Investigación

¿Cuándo cumplimos cien años?

Sumen las edades de todos los miembros de la familia. Si da menos que cien, averigüen en qué año cumplirán juntos cien años. Si la suma es más que cien, pueden calcular hacia atrás para saber cuándo fue el año en que cumplieron juntos cien años.

Notas: Para resolver este acertijo exactamente, necesitarían otras operaciones que a este nivel todavía no se han introducido. Pero los niños pueden simplemente calcular "hacia adelante" o "hacia atrás" en pasos de un año: ¿Cuántos años cumpliremos todos juntos el próximo año? ¿y de aquí en dos años? ¿en tres años? – etc, hasta llegar a 100.

Si observan los números que resultan, pueden encontrar una regularidad que les ayudará a hacerlo más rápidamente.

Posiblemente no habrá ningún año en que llegarán exactamente a cien. Por ejemplo, en un año la suma puede ser 98, y en el siguiente año puede ser 104. Entonces elijan el año que está más cerca de 100 como vuestro "año de cumplir cien años".

En esta actividad pueden aparecer sumas mayores a 100. No se preocupen por eso: los que ya entienden esos números, pueden hacer estas "sumas grandes", y los que todavía no los entienden, pueden hacer aquellas sumas que dan menos que 100.

TALLER

Intercambiar sumandos

(Ley conmutativa)

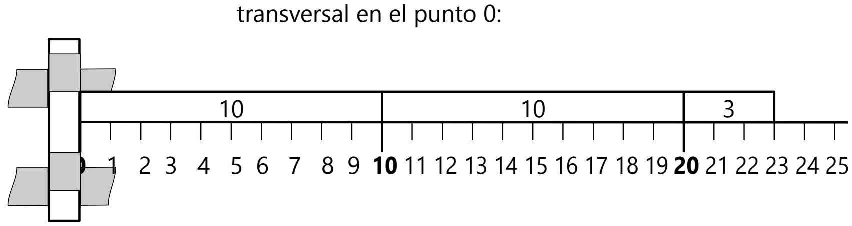
Los niños ya deben saber desde sus experiencias con números pequeños, que en una suma podemos intercambiar los sumandos y los resultados no cambian. Experimentaremos este mismo principio con los números hasta 100:

Intercambiar trenes

Representen con regletas Cuisenaire una suma, como por ejemplo 38 + 20. Intercambien las posiciones de los dos "trenes" y observen el resultado. También pueden medir los resultados de ambas operaciones con la recta numérica larga o con una cinta métrica.

Hagan lo mismo con sumas de tres "trenes", por ejemplo 26 + 43 + 30. ¿Cuántas formas diferentes encuentran de ordenar los sumandos? ¿y cuáles son los resultados de estas sumas? – Anoten las diferentes variaciones que encuentran, con sus resultados.

Pauta práctica: Para medir bien los "trenes" con la recta numérica o la cinta métrica, péguenla con cinta adhesiva sobre la mesa; y peguen una regleta Cuisenaire de manera transversal en el punto 0:



De esta manera, los "trenes" colocados pueden apoyarse en la regleta pegada y no se mueven tan fácilmente respecto a la recta numérica.

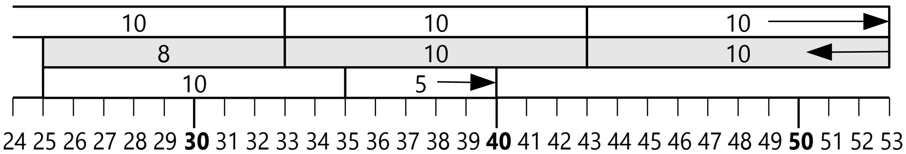
Viajes largos en la recta numérica

(Vea Unidad 24) Hagan unos "viajes largos" con varias sumas o restas en la recta numérica; por ejemplo:

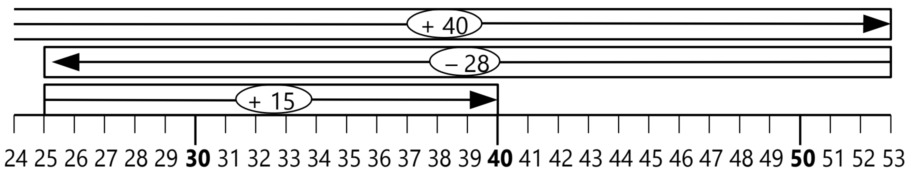
13 + 40 – 28 + 15

Hay varias maneras de representar un viaje como este:

- Colocando “trenes” de regletas. Una resta se representa con un tren “hacia la izquierda” que se coloca paralelamente a los trenes que ya están allí:



- Corten flechas largas de cartón con la longitud que corresponde a las operaciones dadas. Coloquen estas flechas de la misma manera como los trenes: Cada nueva flecha comienza donde terminó la anterior. Números que se suman van hacia la derecha; números que se restan van hacia la izquierda.



- Dibujen una recta numérica grande en el piso y hagan los “viajes” contando los pasos. (Quizás tendrán que hacerlo en el patio para que alcance hasta 100.)

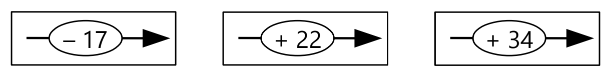
En vez de definir de antemano las operaciones que realizarán, pueden también dejar que los dados decidan: Tiren dos dados juntos. El dado con el puntaje menor significa decenas, el dado con el puntaje mayor significa unidades. Eso les da el número donde empezar. Tiren otra vez para definir un segundo número de la misma manera. Avancen hacia la derecha tantos pasos como indica este número (o sea, lo suman). Tiren los dados una tercera vez. Ahora retrocedan hacia la izquierda el número de pasos que indica (o sea, restan este tercer número).
Pueden repetirlo tantas veces como quieren. Si una operación les llevaría más allá de los extremos de la recta numérica (a la izquierda del cero, o a la derecha del 100), entonces descartan ese número y tiran los dados otra vez.

Intercambiar flechas hacia adelante y hacia atrás
Definan un “viaje largo” como en la actividad anterior. Ahora experimenten qué pasa si intercambiamos el orden de los “trenes” o de las flechas. Solamente tenemos que recordar una regla importante: *Ningún tren (y ninguna flecha) cambia de dirección.* Una flecha que señala hacia la derecha, no se puede usar para desplazarse hacia la izquierda, y vice versa.
En la operación escrita, eso corresponde a la regla de que cada número tiene que mantener su signo. Usando como ejemplo la operación anterior: 13 + 40 – 28 + 15: El “tren” del 28 siempre mirará hacia la izquierda. Los otros trenes siempre mirarán hacia la derecha. Entonces podemos ponerlos por ejemplo así: 13 + 15 – 28 + 40. O también así: 40 + 15 + 13 – 28. Pero no así: 13 + 40 – 15 + 28, porque en este caso hubiéramos cambiado las direcciones de los trenes del 28 y del 15.

Hagan varios ejemplos como estos. Primero practiquen con la recta numérica y las regletas o las flechas. Después anoten las operaciones, y sus resultados.

Por ahora todavía no consideren operaciones que nos llevarían más allá de los extremos de nuestra recta numérica, como p.ej. así: 13 – 28 + 15 + 40: Al retroceder 28 pasos hacia la izquierda, llegaríamos a un “terreno desconocido” más allá del cero. Aunque es una operación matemáticamente válida; pero a este nivel todavía no sabemos manejarla. (Eso involucraría los números negativos. Empezaremos a investigarlos hacia el fin del nivel de Primaria II.)

Cadenas de máquinas
Como en la *Unidad 24*, fabriquen unas “máquinas” con tubos de papel higiénico. Usen operaciones como las anteriores, con números hasta 100. Formen una “cadena” de dos o tres máquinas sucesivas, por ejemplo así:



Hagan pasar algunos números por esta cadena de máquinas, observen y anoten los resultados.
Después intercambien el orden de las máquinas. Hagan pasar los mismos números como antes y anoten los resultados. Pueden también usar las operaciones de la ***Hoja de trabajo 33.1*** *(arriba)*. Observen y saquen sus conclusiones.

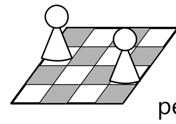
Notas acerca de la ***Hoja de trabajo 33.1*** *(arriba)*:
Máquinas iguales (con el mismo dibujo) realizan operaciones iguales. Así por ejemplo, el primer número arriba (25) entra en la primera máquina arriba, y sale 32. Esto permite descubrir la operación que realiza esta máquina. Pero la segunda máquina en la segunda fila es igual a la primera, entonces esa máquina realiza la misma operación como la primera.
Después de llenar todo, verifiquen que realmente los números que salen al final son los mismos, si pasamos por la cadena de arriba o la de abajo (con un orden diferente de las mismas máquinas).
El segundo ejercicio de este tipo es bastante difícil. Primero habrá que encontrar máquinas cuya operación podemos descubrir – sea porque son iguales como una máquina conocida, o sea porque conocemos un número que entra y el número correspondiente que sale. Con la ayuda de estas máquinas conocidas podemos completar más números, y eso a su vez permite descubrir las operaciones de las máquinas restantes.

Encontrar la manera más fácil de resolver una operación larga

Usando la ley conmutativa, podemos resolver ciertas operaciones largas de una manera más sencilla. Las ordenamos de tal manera que resulten números "fáciles" al calcular los pasos.

Ejemplos:
Calcula 29 + 55 – 29. En este orden será un poco difícil. Lo ordenamos así: 29 – 29 + 55, y ahora es fácil de ver que 29 – 29 = 0, y queda 55.
37 + 56 – 27 también es bastante difícil de calcular. Pero vamos a ordenarlo de esta manera: 37 – 27 + 56. Ahora 37 – 27 = 10, y 10 + 56 es una operación más fácil que las anteriores.
49 + 26 + 24 se ve también un poco difícil. Pero es más fácil en este orden: 26 + 24 + 49, porque 26 + 24 = 50, y 50 es un número "fácil" para seguir sumando.
En la operación de los ejemplos anteriores, 13 + 40 – 28 + 15, pudimos observar que 13 + 15 = 28. Entonces si calculamos primero 13 + 15 – 28 llegamos a 0, un número "muy fácil". La última operación es ahora 0 + 40 = 40.

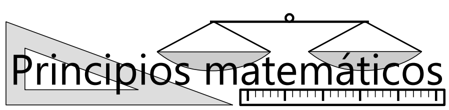
Practiquen con los ejemplos en la ***Hoja de trabajo 33.1*** *(abajo)*.



Juego: ¿Quién llega a 100?

Este es un juego que se juega entre dos personas con regletas Cuisenaire en una recta numérica o cinta métrica. Los dos jugadores, por turnos, construyen juntos un "tren" largo de regletas, desde el 0 hasta el 100. El primer jugador coloca una regleta al inicio de la recta numérica. Puede escoger cualquiera, desde el 1 hasta el 10. El segundo jugador añade otra regleta donde termina la primera. El primer jugador continúa con otra regleta, y así sucesivamente. Cada vez pueden escoger una regleta cualquiera, del 1 hasta el 10. No se puede renunciar a su turno; o sea, hay que poner por lo menos un 1. Gana el que puede colocar su regleta de manera que el tren llega exactamente al 100.

Es un desafío interesante, investigar cómo hay que jugar para poder ganar. En el nivel de Primaria II volveremos a este juego y haremos unas preguntas de investigación al respecto.



Conmutatividad de sumas y restas combinadas

En esta unidad hemos visto una ampliación de la ley conmutativa. Normalmente se enseña que solamente la suma es conmutativa, pero la resta no:

3 + 7 = 7 + 3 = 10,
pero 10 – 3 no es lo mismo como 3 – 10.

Pero eso no es la historia entera. Como hemos visto en el taller, las restas también se pueden intercambiar, *siempre y cuando cada número se mantiene junto con su signo:*

$$10 + 3 - 7 = 10 - 7 + 3$$

Entonces, la manera correcta de "intercambiar" la operación 10 – 3 sería así:

$$10 - 3 = (-3) + 10$$

(porque el 3 tiene signo negativo; y el 10, al inicio de la primera operación, por defecto tiene signo positivo.)
Vemos que aquí intervienen los números negativos, y eso es un tema todavía demasiado difícil de entender para los niños del nivel donde estamos ahora. Pero entre mayores vamos a continuar con este razonamiento hasta el final:

Cada operación combinada de sumas y restas se puede entonces escribir como una pura *suma*, que contiene tanto sumandos positivos como negativos:

$$13 + 45 - 30 - 5 = 13 + 45 + (-30) + (-5)$$

... y ahora es obvio que podemos aplicar la ley conmutativa. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 13 + 45 + (-30) + (-5) &= 45 + (-30) + 13 + (-5) \\ &= 45 - 30 + 13 - 5. \end{aligned}$$

Entonces, matemáticamente, una operación como esta no es otra cosa que una simple suma – solamente que algunos sumandos son positivos y otros son negativos. Por esta razón tampoco cargamos a los niños con términos técnicos como "sustraendo" y "minuendo"; porque tan pronto como avanzamos un poco más en la matemática, lo único que existe son "sumandos": sumandos positivos y sumandos negativos.
Con esto hemos cumplido un objetivo importante de la buena matemática: La buena matemática consiste en representar las cosas ***de la manera más sencilla posible***. Normalmente esto se consigue ***generalizando***, y reduciendo los casos especiales a ***principios fundamentales***.
Hemos reducido las operaciones combinadas de sumas y restas al caso más sencillo, el de la suma. Y hemos encontrado que a este caso se aplica un principio fundamental: la ley conmutativa.
Los niños todavía no lo entenderán de esta manera, con sumandos negativos. Pero lo entenderán manejando materiales concretos, intercambiando flechas o "máquinas", como lo hemos hecho en el Taller.

¡Esto no es "hacer trampa"!

En el sistema escolar convencional es bastante común que los profesores prohíben a los alumnos utilizar procedimientos propios: "Hay que hacerlo como yo digo". Por eso, algunos alumnos incluso piensan que aplicar un procedimiento más sencillo sería "hacer trampa". Tenemos que deshacernos de esa idea. "Hacer trampa" sería si un alumno copia el resultado de otro alumno (o de un libro) sin haber resuelto el problema él mismo. Pero encontrar una manera más sencilla de resolverlo no es "trampa", es aplicar el razonamiento propio. Todo procedimiento es válido mientras aplica correctamente los principios matemáticos.

En Alemania hace unos 200 años, un profesor dio a sus alumnos de primaria la tarea de sumar todos los números de 1 a 100: 1 + 2 + 3 + ... + 100. Probablemente el profesor quería tener un rato tranquilo sin ser interrumpido por sus alumnos. Pero después de pocos momentos, un alumno ya trajo el resultado correcto. El profesor, asombrado, preguntó: "¿Cómo hiciste esto?" – "Fácil", respondió el alumno. "Junto el primer número y el último, 1 + 100 = 101. Después, 2 + 99 también da 101, 3 + 98 también ... así sigo hasta 50 + 51. Son 50 pares de números que dan 101, entonces es 50 x 101 = 5050." (Una simple aplicación de la ley conmutativa.)

Aquel alumno se convirtió más tarde en un matemático muy famoso. Su nombre fue Carl Friedrich Gauss.

Dejemos que nuestros niños apliquen su razonamiento propio, como lo hizo Gauss.

Matemática divina

Creatividad en la matemática

En esta unidad practicamos transformar operaciones en otras que son más fáciles de calcular. Para hacer eso, necesitamos creatividad. Como humanos, todos tenemos creatividad, porque somos creados según la imagen de Dios, el Creador. Así que todos participamos de la creatividad que Dios mismo aplicó al crear el mundo.

En la matemática puede ser difícil ver dónde hay lugar para la creatividad. Pero en realidad, los matemáticos profesionales constantemente inventan nuevas operaciones y nuevos objetos matemáticos, y descubren maneras novedosas de solucionar problemas. Todo eso es creatividad. En lo pequeño, nosotros podemos practicar nuestra creatividad al probar diferentes maneras de escribir una operación.

Es cierto que esta aplicación de la creatividad tiene sus límites. No puedo decir que 23 + 8 = 2 + 38, porque esta es una transformación que no corresponde a las leyes de la matemática. Eso no es diferente de la situación de un inventor que inventa máquinas nuevas: El inventor debe tener muchas ideas novedosas, pero dentro de los límites de las leyes naturales. Si su creatividad no respeta las leyes de Dios que gobiernan la creación, su máquina no va a funcionar. Pero los buenos inventos hacen uso de estas leyes de manera creativa y novedosa.

Seamos entonces "inventores matemáticos". Dios se alegra cuando tenemos ideas novedosas y usamos la creatividad que él nos dio, aun en la matemática. Busquemos nuevas maneras de hacer un uso creativo de las leyes de la matemática.

Ampliaciones

Uso de paréntesis

Podemos introducir en este punto el uso de los paréntesis. Su significado es sencillo: La operación entre paréntesis se resuelve antes que todas las otras. Por ejemplo en esta operación: 38 – (7 + 11), se suma primero 7 + 11 = 18. Entonces la expresión entera entre los paréntesis significa 18, y la operación queda 38 – 18 = 20. Podemos anotarlo así:

$$\begin{aligned} & 38 - \underbrace{(7 + 11)} \\ = {} & 38 - \;\; 18 \quad = \underline{20} \end{aligned}$$

Experimenta y observa: ¿Es el resultado el mismo como si no hubiera paréntesis? O sea:

¿Es 38 – (7 + 11) = 38 – 7 + 11 ?

Unos ejemplos para resolver en el cuaderno:

a) 55 – (13 + 20)
(36 + 40) – 17
100 – (99 – 98)

b) 96 – 22 – 18
(96 – 22) – 18
96 – (22 – 18)

c) (44 + 40) – (20 + 34)
81 – (32 + 43) + 60
77 – (76 – (75 – 74))

d) (68 – 23) + (35 – 10)
68 – (23 + 35 – 10)
68 – (23 + 35) – 10

Nota: Por ahora no practicamos el intercambio de sumandos cuando hay paréntesis, ni hacemos actividades con material concreto al respecto; porque eso nos llevaría a la introducción de las leyes de los signos, y eso es un tema todavía demasiado complejo a este nivel.

Bloque IV: Introducción de la multiplicación y división (Unidades 34 a 43)

Para entender bien las actividades de este bloque, es necesario que el niño domine la suma y resta hasta 100, como se practicó en el bloque anterior.

En este bloque se introducen las operaciones de la multiplicación y división. Se aplican a estas operaciones los principios ya conocidos desde la suma y resta: Ley conmutativa, ley asociativa, principio de la operación inversa, principio del entero y sus partes (que aquí asume la forma de "el producto y sus factores").

Se introducen también operaciones combinadas, y problemas que requieren diferenciar entre razonamiento aditivo y razonamiento multiplicativo. En este contexto se tratan las convenciones acerca de la precedencia de las operaciones, y el uso de paréntesis.

Se incentiva la memorización de las tablas de multiplicación hasta 10 x 10. Aunque esta es una capacidad más memorística que matemática; pero facilita grandemente el cálculo de multiplicaciones más complejas más adelante.

El espacio numérico sigue limitado a los números hasta 100, con pocas excepciones. Esto permite seguir trabajando con materiales concretos sencillos: material contable; cadenitas de cuentas; regletas Cuisenaire; ábaco.

En términos del sistema convencional, el dominio de los temas de los Bloques III y IV es suficiente para el nivel del segundo grado de primaria, en cuanto a la aritmética (cálculo numérico). Todavía no hay necesidad de preocuparse por los temas más avanzados que aparecen en la mayoría de los libros convencionales para este grado. Más importante es un entendimiento claro y seguro de los conceptos y principios tratados hasta aquí.

Niños que se desarrollan más rápidamente, o que tienen un interés particular por la matemática, siempre pueden avanzar con temas de los bloques siguientes, de acuerdo a su nivel de comprensión.

Acerca del uso del "Camino de aprendizaje" para medir el progreso del niño, vea en el capítulo "¿Cómo usar las unidades de aprendizaje de este libro?", p.22. Donde dice que el niño "domina" una tabla de multiplicación (por ejemplo del 3), se entiende que el niño:

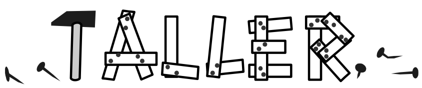
- sabe las multiplicaciones en orden aleatorio (3x6=18, 3x4=12, 3x9=27, etc.)
- sabe completar multiplicaciones (¿3 por cuánto es 24?)
- y reconoce los múltiplos correspondientes (¿El 23 está en la tabla del 3 o no?).

Si un niño no logra memorizar una tabla, eso no impide que siga adelante; el cuadro correspondiente del camino puede quedar vacío por ahora. Pero tendrá necesidad de repasarlo más adelante, para no dificultar excesivamente cuando le toca practicar multiplicaciones más grandes.

Unidad 34 - Introducimos la multiplicación

Prerrequisitos:
- Sumas y restas en las decenas superiores *(Unidad 28)*

Materiales necesarios:
- Objetos de la vida diaria
- Cadenitas de cuentas
- Regletas Cuisenaire



Multiplicación en la vida diaria

"Multiplicar" significa "aumentar más de lo mismo", o "producir copias de algo". Si tienen la oportunidad de cultivar plantas o criar animales, entonces podrán observar este proceso en la naturaleza – pero se requiere paciencia para eso. Por ejemplo, si han sembrado maíz, unos meses más tarde tendrán plantas de maíz que producen choclos con granos de maíz iguales a los que hemos sembrado. ¡Los granos de maíz se multiplicaron! Igualmente si han sembrado papas, después tendrán más papas. O si crían animales, por ejemplo cuyes, los cuyes se multiplicarán teniendo crías.

Si queremos demostrar el mismo concepto con objetos de la casa, necesitaremos varios objetos iguales. Por ejemplo, damos a un niño dos lápices. Pero si son cinco niños, necesitamos más lápices; tenemos que multiplicarlos. ¿Cuántos lápices necesitaremos para dar dos a cada niño? – Aprovechen las oportunidades cuando damos a cada niño lo mismo (frutas, galletas, hojas para dibujar, etc), para señalar el concepto de la multiplicación.

Quizás los niños ya conocen la fotocopiadora. Si un niño hizo un dibujo interesante, podemos decir: "¡Vamos a multiplicar este dibujo!" Hacemos tres copias, entonces tenemos cuatro ejemplares del dibujo (incluyendo el original). Hemos multiplicado el dibujo por cuatro.

"Trenes" de cadenitas o regletas

Con las cadenitas de cuentas o con las regletas Cuisenaire podemos formar unos "trenes" o "gusanos" largos. Pero para que sea una multiplicación, todas las cadenitas o regletas tienen que ser del mismo tamaño. Ya que se distinguen por sus colores, podemos decir: "Vamos a formar trenes de un solo color."
Ahora será interesante saber "cuánto vale" el tren que hemos construido. Con las cadenitas podemos contar cuántas cuentas contiene el tren entero. Con las regletas no podemos hacer eso. Pero podemos formar paralelamente un tren de la misma longitud, usando decenas:

6	6	6	6

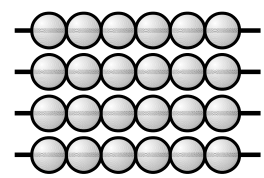
10	10	4

Así podemos ver fácilmente cuánto mide el tren, porque ahora podemos contarlo por decenas.
Al hacer estas actividades, quizás algunos niños ya descubrirán que la longitud del tren se puede averiguar también sumando todas las cadenitas o regletas que contiene.

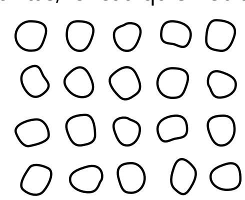
Formar rectángulos

En vez de formar trenes, podemos también colocar las cadenitas o regletas paralelamente, de manera que forman un rectángulo:

6
6
6
6



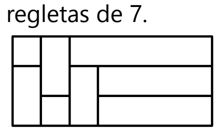
Podemos usar también habas, piedritas, o cualquier otro material contable, para formar rectángulos. Que los niños descubran varias formas de averiguar cuántas habas, piedritas, etc, contienen los rectángulos.



En el transcurso de estas actividades podemos de manera natural introducir la forma de decir las multiplicaciones: "Este es un rectángulo de 4 por 5. Contiene 20 piedritas. 4 multiplicado por 5 es igual a 20." (O más corto: "4 por 5 son 20.")

Con las regletas Cuisenaire se puede hacer otro experimento. Formamos un rectángulo, por ejemplo con 7 regletas de 3. ¿Hay otra manera de formar un rectángulo del mismo tamaño? – Mientras no imponemos ninguna otra condición, los niños pueden sugerir diversas variaciones que usan regletas de distintas longitudes. ¿Y si queremos que todas las regletas sean iguales? – Sí, podemos usar 3 regletas de 7.

3	3	3	3	3	3	3



7
7
7

Con esta pequeña experiencia será fácil entender después que la multiplicación es conmutativa: "3 por 7" da lo mismo como "7 por 3".

Principios matemáticos

Representaciones visuales de la multiplicación

Cuando representamos una multiplicación en forma de ***"tren"***, facilitamos el entendimiento de los niños de que el resultado se puede encontrar sumando. El "tren" corresponde a la forma como anteriormente representamos las sumas:

4	4	4	4	4

4 + 4 + 4 + 4 + 4

Esto satisface las necesidades de los niños de esta edad, pero no satisface las exigencias del matemático. Es que más adelante encontraremos multiplicaciones que ya no se pueden explicar mediante una suma. Por ejemplo, ¿cuánto es 3,8 x 2,4? No puedo sumar un número "2,4 veces" o "3,8 veces".

4	4	4	4	4

El ***rectángulo*** es una representación que nos va a servir por más tiempo. Servirá para ilustrar no solamente las multiplicaciones de los números naturales, sino también de los números decimales y de las fracciones. (Sin embargo, empieza a fallar cuando lleguemos a los números negativos. Pero para entonces los niños ya habrán madurado lo suficiente para acercarse al razonamiento abstracto, y entonces tendrán menos necesidad de ilustraciones con material concreto.)

El rectángulo demuestra además la *conmutatividad* de la multiplicación. Hemos visto esto en la actividad correspondiente del taller. La ***Hoja de trabajo 34.1.*** retoma este tema. Con el "tren", no es tan obvio que un tren de 5 regletas de 4 tendrá la misma longitud como un tren de 4 regletas de 5. Aun menos obvio es que 4 + 4 + 4 + 4 + 4 sea lo mismo como 5 + 5 + 5 + 5. Pero en un rectángulo se nota a primera vista: un rectángulo de 4 por 5 es lo mismo como un rectángulo de 5 por 4.

Con la ilustración del rectángulo es también obvio cómo calcular el área de un rectángulo. Entonces los alumnos lo entenderán fácilmente cuando se encuentren con el mismo tema en la geometría.

Por todas estas razones preferimos el *rectángulo* como ilustración de la multiplicación. Puede ser pedagógicamente sensato comenzar con los "trenes", para usar una ilustración que los niños ya conocen desde la adición. Pero después habrá que pasar al concepto del rectángulo, para introducir la multiplicación como una operación *distinta* de la adición.

Los colores de las regletas Cuisenaire

Los colores de las regletas Cuisenaire se eligieron según principios matemáticos. Georges Cuisenaire los agrupó en "familias" de colores, según su divisibilidad:

El 1 es el elemento neutro de la multiplicación (vea "Principios matemáticos" en la *Unidad 38*). Por tanto, el 1 tiene un color neutro: en las versiones de madera, el color natural de la madera; en las versiones de plástico, el blanco.

El 2 es rojo, y es la base de la familia de color rojo: Un "tren" de dos regletas de 2 es igual a una regleta de 4. El 4 es lila, una variación del rojo. Un "tren" de dos regletas de 4 da 8. El 8 es marrón, lo cual es un rojo muy oscuro.

El 3 es de un verde claro, y es la base de la familia verde-azul. (El azul se incluye en la "familia verde" porque es un componente del color verde.) Dos regletas de 3 dan 6, y el 6 es verde oscuro. Tres regletas de 3 dan 9, y el 9 es azul.

El 5 introduce un nuevo color, el amarillo. Dos regletas de 5 dan 10. Este mismo tren lo puedo formar también con cinco regletas de 2. Así podemos decir que el 10 es el producto de un "matrimonio" entre la familia roja y la familia amarilla. Por eso su color es anaranjado, la mezcla de rojo con amarillo.

Ahora queda solamente el 7. El 7 es un número primo y no tiene ningún múltiplo entre las regletas de 1 a 10. O sea, el 7 no tiene "parientes", excepto el 1. Por eso el 7 también tiene un color neutro, el negro.

Matemática divina

La multiplicación, principio inherente de todo ser vivo

Cuando Dios creó los animales, les dijo: "¡Multiplíquense!" – Y lo mismo lo dijo a los primeros hombres. (Génesis 1:22.28). La procreación de los seres vivos se puede describir como multiplicación porque produce "copias de lo mismo", seres vivos de la misma especie.

Cuando Dios creó los seres vivos, cada vez dice: "Y Dios vio que era bueno". Dios quiere que lo bueno se multiplique. La multiplicación es un principio de la vida misma.

Ahora lo escribimos

En el transcurso de las actividades del Taller podemos introducir el símbolo "x" para la multiplicación. Ahora podemos escribir las operaciones que estamos formando con las cadenitas o las regletas. Por ejemplo, formamos un rectángulo de 4 regletas de 6, contamos o sumamos a cuánto equivale, y entonces el niño escribe en el cuaderno o en la pizarra: 4 x 6 = 24.

Podemos también preparar unas tarjetitas con multiplicaciones, y pedir a los niños que representen y calculen las multiplicaciones que están en las tarjetas.

Vocabulario matemático

Las partes de una multiplicación se llaman:

Factor x Factor = Producto

Nota: En algunos libros podemos encontrar en vez de "factores" las palabras "multiplicando" y "multiplicador". Estas palabras son poco usuales y pueden causar confusión, porque dan la impresión de que el orden de los factores sea esencial, mientras en realidad se pueden intercambiar según la ley conmutativa.

La ***Hoja de trabajo 34.1.*** retoma el tema de los rectángulos, el símbolo "x", y hace hincapié en el hecho de que cada rectángulo se puede formar con regletas de dos formas distintas (por ejemplo 3 regletas de 5, ó 5 regletas de 3).

Un poco de historia

El símbolo de multiplicación

El símbolo "x" para la multiplicación fue introducido por William Oughtred (1574-1660), un autor de libros de enseñanza matemática para universidades. La cruz oblicua ya se había usado para indicar las multiplicaciones que se deben efectuar al convertir una proporción en una igualdad de productos, y al multiplicar dos sumas en el álgebra:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

$$ad = bc$$

$$\begin{array}{c}(a+b)\\ |\times|\\ (c+d)\end{array} = ac + ad + bc + bd$$

El matemático alemán Leibniz (1646-1715) no estuvo de acuerdo con este símbolo, porque la letra ***x*** ya se estaba usando como una variable en el álgebra. Para evitar confusiones, Leibniz propuso en su lugar usar un punto un poco elevado: 3 · 4. Este símbolo prevaleció en Alemania.

Durante varios siglos, los matemáticos no hicieron mucho uso de estos símbolos. En el siglo 19 comenzó a establecerse la costumbre de usar la x en la multiplicación de números, y el punto · en el álgebra.

Recordemos nuevamente que los símbolos y las notaciones no son leyes establecidas de una vez por todas. Están sujetos a acuerdos y convenciones. Los símbolos son solamente unos medios para comunicar verdades más profundas de la matemática. Y esos principios y leyes más profundos sí son eternos e inmutables, independientemente de los símbolos que usamos para expresarlos.

¿A dónde vamos desde aquí?

Las actividades de esta unidad son suficientes para establecer el *concepto* de la multiplicación. Pero para dominar su *técnica*, será necesario que los niños conozcan las tablas de multiplicación. Es recomendable que estas se trabajen sistemáticamente, según las sugerencias en las siguientes tres unidades (35 a 37).

Los niños que no hicieron las actividades de la Unidad 26 ("Contar por pares"), podrían hacerlas ahora como introducción a la tabla del 2.

Pregunta capciosa:

¿Por qué no puede llover por dos días continuamente?

Respuesta en el Anexo A.

Unidad 35 - Tablas de multiplicación: 2, 3, 4

Prerrequisitos:
- Sumas y restas hasta 100 *(Bloque III)*
- Concepto de la multiplicación *(Unidad 34)*

Materiales necesarios:
- Objetos de la vida diaria
- Material contable (habas, granos de maíz, piedritas, etc.)
- Cadenitas de cuentas
- Regletas Cuisenaire
- Tiza (para el juego de saltar)

Para los educadores

Entrenando las tablas de multiplicación

Este es uno de los pocos (!) temas en la matemática donde la memorización es muy beneficiosa. Muchas situaciones de la vida diaria requieren multiplicar, y los niños estarían en una gran desventaja si tuvieran que calcular todas estas multiplicaciones mediante sumas repetidas.
Pero busquemos maneras de hacer que esta memorización no se vuelva tediosa. Las actividades del Taller sugieren unas posibilidades de hacerlo con material concreto, a manera de juego. Si un niño ha contado la tabla del 3 con cadenitas varias veces, o ha jugado por media hora el juego de saltar con la tabla del 4, es probable que después ya sepa estas tablas de memoria. – Como siempre, las hojas de trabajo sirven como repaso *después* de haber hecho las actividades concretas. ¡De ninguna manera se deben descuidar las actividades con material concreto "ya que tenemos hojas de trabajo"!
Es también importante no sobrecargar a los niños con demasiada información nueva a la vez. De preferencia emplee *una semana entera* para cada tabla aparte, haciendo cada día un poquito. Eso será un buen ritmo para la mayoría de los niños. A este paso, si lo hacen seguido, cubrirán la tabla entera hasta 10 x 10 en un poco más de dos meses. Si a un niño le conviene avanzar más rápidamente, ya lo hará por sí mismo si le damos la libertad de hacerlo.
Por el otro lado, algunos niños se pueden aburrir practicando tablas de multiplicación cada día. Estos niños podrán practicar algunas tablas, después intercalar algún tema distinto (por ejemplo del Bloque I o del Bloque VII), y después volver a las tablas.

Razonamiento aditivo o multiplicativo

En la Unidad anterior (en "Principios Matemáticos") hemos mencionado brevemente que la multiplicación es una operación de carácter muy distinto de la adición. Mientras la adición nos limita a avanzar en una línea recta, podríamos decir que la multiplicación nos permite construir áreas y espacios.
A medida que avanzamos practicando multiplicaciones, es importante que los niños lleguen a distinguir entre situaciones aditivas y situaciones multiplicativas: "Un caballo tiene 4 patas; ¿cuántas patas tienen 5 caballos?" – ¿es esto una suma o una multiplicación? – "En el bus viajan 5 varones y 8 mujeres, ¿cuántos pasajeros son?" – ¿es esto una suma o una multiplicación? – A menudo les ayudará *dibujar* la situación para entenderla correctamente. (Vea en la *Unidad 25*, "Para los educadores", acerca de los problemas de texto.)
Las hojas de trabajo, a partir de la Hoja 35.3, presentan diversos problemas de texto. Entre esos problemas se encuentra de vez en cuando alguno que *no es multiplicativo*. Eso es para desafiar a los niños a estar atentos y a razonar; para que no estén resolviendo estos problemas de una manera puramente mecánica. Como siempre, ayudará a dibujar primero la situación.
Pero no debemos apoyarnos únicamente en los problemas de texto para entrenar esta clase de razonamiento. Busque ocasiones en la vida diaria donde puede practicar la distinción entre situaciones aditivas y multiplicativas: Al hacer compras y calcular precios; al hacer trabajos manuales donde hay que medir, cortar papel, etc; al cocinar según una receta; al planear un viaje y calcular tiempos o distancias; etc.

TALLER

Las tablas de multiplicación en la vida diaria

Busquen objetos de la vida diaria que vienen por cantidades determinadas (siempre 2, siempre 3, siempre 4, ...) Por ejemplo para el 2: pares de zapatos, de guantes, y otros objetos que vienen en pares. (Vea la *Unidad 26*, "Contar por pares".)
Para el 3 podemos buscar trébol. Cada trébol tiene 3 hojas, entonces si tenemos 6 tréboles, ¿cuántas hojas tienen? Podemos contarlas de 3 en 3.

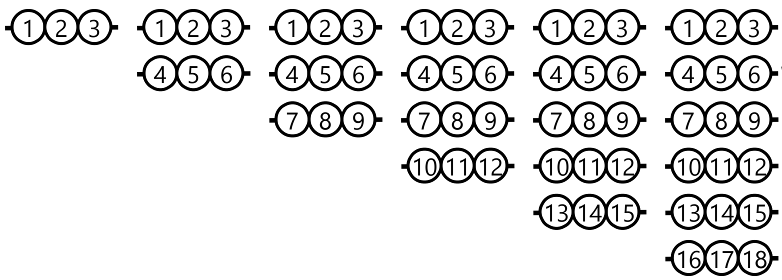
Para el 4 encontraremos en la casa muchos muebles con 4 patas: sillas, bancas, mesas ... ¿Cuántas patas tienen dos sillas? ¿y tres, cuatro, cinco sillas? – También podemos observar animales y contar las patas de vacas, ovejas, perros, gatos, cuyes ...

- Quizás algunos niños preguntarán por qué empezamos con la tabla del 2 y no del 1. En la *Unidad 38* hay una actividad correspondiente; pueden anticiparla si quieren. En esa misma unidad hablamos también de la multiplicación por cero.

Practicar las tablas con material contable

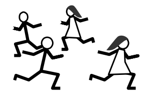
Usen cualquier material contable para formar rectángulos. Pero ahora lo haremos de una manera más sistemática: Para la tabla del 2, comenzamos con 2 piedritas. Ponemos por debajo otra fila de 2, entonces tenemos 2 por 2, son 4 piedritas. Aumentamos otra fila de 2, ahora tenemos 6. Avancen así sucesivamente hasta 2 por 10, son 20.

Lo mismo podemos hacer con las cadenitas de cuentas. Por ejemplo, para la tabla del 3, usen diez cadenitas de 3. Pongan primero una sola cadenita y cuenten: 1, 2, 3. Después pongan otra cadenita debajo y sigan contando: 4, 5, 6. Otra más: 7, 8, 9. Y así continúen hasta el 30.

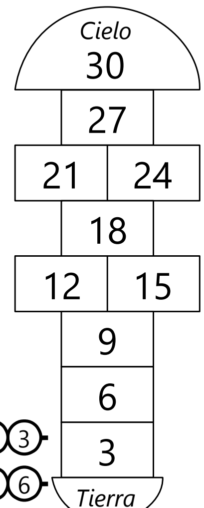


Cuando ya pueden contar de frente en pasos de 3 (o de 2, o de 4), entonces podemos hacer lo mismo con regletas Cuisenaire donde ya no se pueden contar las unidades por separado: Una regleta de 4, son 4. Dos regletas de 4, son 8. Tres regletas de 4, son 12. Etc.

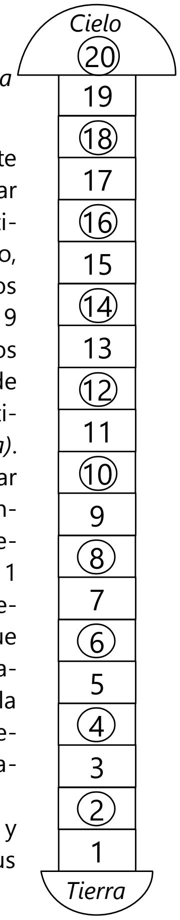
La meta final es que los niños sepan las tablas de memoria; pero eso no lo debemos forzar tan rápidamente. (Vea arriba en "Para los educadores".) Si los niños hacen repetidamente estas actividades con material concreto, podrán en una primera etapa llegar a recordar simplemente los números que resultan al contar una tabla de esta manera: 3, 6, 9, 12, etc. – Más tarde, en una segunda etapa, podrán recordar también la relación entre la cantidad de regletas (o cadenitas) y el resultado: Una regleta de 3 es 3; dos regletas de 3 son 6; tres regletas de 3 son 9; etc. – Y finalmente, cuando ya dominan la tabla, podrán recordar las operaciones también en orden arbitrario: ¿Cuánto es 3 por 5? – ¿3 por 9? – ¿3 por 4? – ¿3 por 6? – O también así: ¿Cuánto por 3 es 24? – ¿Cuánto por 3 es 12? – ¿Cuánto por 3 es 21?

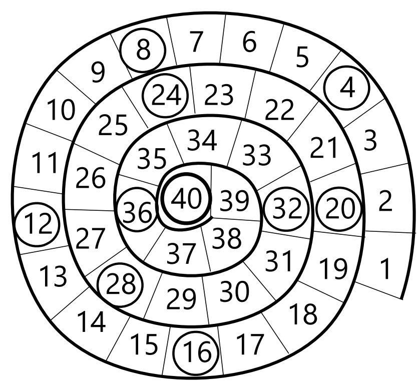


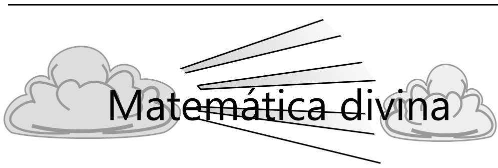
El juego de saltar *(Vea también Unidades 20, 27.)*



Podemos adaptar este juego para entrenar las tablas de multiplicación. Por ejemplo, en vez de poner los números de 1 a 9 resp. 10, podemos poner los números de una tabla de multiplicación *(izquierda)*. O podemos inventar un diseño que contiene todos los números, por ejemplo de 1 a 20, pero establecemos la regla de que hay que pisar solamente los números de la tabla del 2 *(derecha)*. Lo mismo podemos hacer con el "caracol" – abajo un ejemplo con la tabla del 4. Inventen nuevas variaciones, y tomen la libertad de adaptar las reglas a sus necesidades.







Restitución cuadruplicada

Cuando Zaqueo se arrepintió, dijo: "Si en algo he engañado a alguno [cobrándole por demás], se lo devuelvo cuadruplicado." (Lucas 19:8). Tan grande fue su arrepentimiento, que no se contentaba con restituir lo robado: Zaqueo devolvió lo que había robado multiplicado por cuatro.

Principios matemáticos

Dos formas de interpretar las tablas

Si tengo 5 cadenitas de 3, puedo interpretarlo de dos formas distintas: Puedo decir que es una cadena de 3, multiplicada por 5, o sea "tres por cinco". O puedo decir que son "5 cadenas de 3", y entonces será más natural decir "cinco por tres".
Si usamos la primera forma, entonces escribiremos la tabla del 3 así: 3 x 1, 3 x 2, 3 x 3, 3 x 4, etc. (Opté por esta forma en las hojas de trabajo de este libro). Si la segunda forma les parece más natural, entonces tendrían que escribir la tabla así: 1 x 3, 2 x 3, 3 x 3, 4 x 3, etc.
Esta diferencia no afecta los principios matemáticos, ya que sabemos que matemáticamente, 3 x 5 es lo mismo como 5 x 3. Pero algunos niños (y adultos) se inclinan intuitivamente por la primera forma y otros por la segunda, según la preferencia individual o según el uso general de su entorno. En algunos lugares, se enseña a todos los niños las tablas según la primera forma, y en otros lugares según la segunda. Si ustedes prefieren la segunda forma, tal vez tendrán que corregir las hojas de trabajo en este sentido.

Comprobación con resultados conocidos

La multiplicación por 10 es fácil, y los niños ya deben haberse dado cuenta al mover decenas en el ábaco. Entonces, si un niño elabora p.ej. la tabla del 4, y al final llega a 4 x 10 = 39, deberá darse cuenta por sí mismo de que hay un error.

Ahora lo escribimos

La ***Hoja de trabajo 35.1*** continúa con el tema de los rectángulos, pero ahora exclusivamente con operaciones de la tabla del 2. La idea es que los niños coloquen primero regletas Cuisenaire sobre los rectángulos, según los dibujos, y entonces cuenten o calculen a cuánto equivalen.
Las operaciones puramente abstractas al final de la hoja son como repaso para aquellos niños que ya han hecho suficientes actividades concretas.

Hoja de trabajo 35.2* – *La tabla del 3:
La tabla a la izquierda arriba es para llenar con regletas Cuisenaire, una por una, y entonces el niño puede llenar los resultados correspondientes.
Las otras actividades de esta hoja incentivan al niño a contar objetos de 3 en 3 (o de 2 en 2). Las operaciones de la tabla del 3 se mezclan deliberadamente con algunas de la tabla del 2, para que los niños no pongan mecánicamente los números memorizados de la tabla del 3, sino que observen y reflexionen ante cada operación.

Hoja de trabajo 35.3* – *La tabla del 4:
Las actividades de la primera mitad de la hoja se hacen igual como en la hoja anterior.
La segunda mitad contiene unos problemas de texto para repasar la tabla del 4, y para entrenar la distinción entre razonamiento aditivo y razonamiento multiplicativo. (Vea arriba en "Para los educadores", acerca del propósito de estos ejercicios.) Si un niño dificulta en entender las situaciones descritas, se recomienda que las represente primero en forma de un dibujo, antes de intentar aplicar una operación matemática.

Hoja de trabajo 35.4* – *¿Cuál rectángulo es mayor?
Esta actividad es similar a la Hoja 34.1. ("Formando rectángulos"). Los rectángulos se llenan con regletas Cuisenaire para averiguar "cuánto contienen". (Se puede en esta ocasión introducir ya la expresión "área del rectángulo".) Pero aquí se trata adicionalmente de hacer una comparación entre dos rectángulos. Se recomienda que los niños estimen primero a simple vista cuál de los dos es mayor. Después que comprueben su estimación, colocando regletas y calculando.

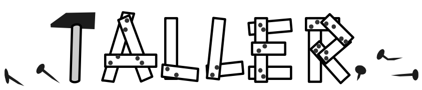
¿A dónde vamos desde aquí?

La siguiente unidad continúa el aprendizaje de las tablas de multiplicación. Pero quizás algunos alumnos querrán intercalar aquí algún tema menos "pesado", por ejemplo de juegos o de actividades de razonamiento, antes de continuar con los números. Algunas unidades del Bloque I ó del Bloque VII son buenas para intercalar aquí.
Si surgen preguntas acerca de la multiplicación por 1 y por 0, se pueden ahora anticipar estos temas que se tratan específicamente en la Unidad 38.

Unidad 36 - Tablas de multiplicación: 5, 6, 7

Prerrequisitos:
- Sumas y restas hasta 100 *(Bloque III)*
- Concepto de la multiplicación *(Unidad 34)*

Materiales necesarios:
- Objetos de la vida diaria
- Material contable
- Cadenitas de cuentas
- Regletas Cuisenaire

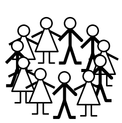


Las tablas del 5, del 6, y del 7 en la vida diaria

Busquen objetos que aparecen en grupos de 5, de 6 y de 7, para contarlos y practicar multiplicaciones con ellos.
Para el 5 podemos usar nuestras propias manos. ¿Cuántos dedos hay en 7 manos? Junten sus manos para contar los dedos de 5 en 5.
El 6 lo tenemos por ejemplo en los dados. ¿Cuál es el puntaje máximo que se puede tirar con 4 dados? – También hay galletas que vienen en paquetes de 6. ¿Cuántas galletas hay en 8 de estos paquetes? – O si les gustan los animales, pueden contar las patas de insectos (hormigas, mariposas, moscas, ...)
Los días de la semana nos permiten calcular con el 7. ¿Cuántos días son 5 semanas? Pueden examinar un calendario y contar los días.

Practicar las tablas con material contable

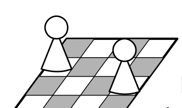
Hagan las mismas actividades de la unidad anterior también con las tablas del 5, del 6 y del 7, formando rectángulos, contando con material contable, etc.
Igualmente pueden adaptar el ***juego de saltar*** a estas tablas.



Juego: 1, 2, 3, ... ¡bum!

Los que participan en el juego, se sientan en un círculo. Por turnos cuentan, diciendo los números en orden: 1, 2, 3, 4, ... O sea, por turnos cada persona dice un número, la persona a su derecha dice el siguiente número, y así sucesivamente. Pero hay un "número prohibido", y los números de la tabla de este número no se pueden decir. Si por ejemplo el número prohibido es 6, entonces no se pueden decir el 6, el 12, el 18, etc. La persona que le toca uno de esos números, en vez de decir el número tiene que decir "bum". La cuenta sería entonces así: 1, 2, 3, 4, 5, bum, 7, 8, 9, 10, 11, bum, 13, 14, ...
- Sigan contando hasta que ya no pueden más. Para muchos niños de este nivel será difícil extender la tabla del 6 más allá del 60, entonces después del 60 probablemente habrá que parar, o comenzar de nuevo con otro número prohibido. Niños mayores podrán continuar hasta el 100 o aun más allá.

Variaciones:
- Se puede acordar un pequeño "castigo" para los que se equivocan. Por ejemplo: Cada persona que se equivoca, tiene que pararse. Si en la siguiente vez que le toca dice lo correcto, puede sentarse otra vez. Si se equivoca por segunda vez, tiene que quedarse parada (o incluso pararse sobre su silla).
- Se puede acordar que no solamente los números de la tabla del número prohibido son "bum", sino también aquellos números que contienen ese número como dígito. Así por ejemplo en el caso del 6, habría que decir "bum" también en lugar del 16, del 26, del 36, del 46, del 56, y de todos los números del 60 hasta el 69.



Juego: Multiplicar dados

Pueden jugar dos o más niños. Se necesitan dos dados. Cada niño, en su turno, tira los dos dados y multiplica sus puntajes. Gana quien tiene el producto más grande.
Variación: Se juegan tres turnos y se anotan los productos respectivos. Al final, cada niño suma sus tres productos. El que tiene la mayor suma, gana.

Para los educadores

Esta unidad (como también la siguiente) es bastante cargada con hojas de trabajo. Pero no se deberían por eso disminuir las actividades prácticas del taller. El aprendizaje sucede mayormente en estas actividades prácticas. Las hojas de trabajo son más para el repaso y la evaluación posterior. Si a un niño las hojas de trabajo le parecen "muy difíciles", eso indica que todavía no está listo para este tipo de tareas más abstractas, y que debería primero hacer más actividades prácticas.

Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 36.1* – *La tabla del 5:
El concepto de esta hoja de trabajo es igual a las Hojas 35.2 y 35.3 (La tabla del 3, resp. del 4). Vea las descripciones allí.

Hoja de trabajo 36.2* – *Pinta los múltiplos:
En cada cuadro, se deben rellenar completamente con un color aquellas regiones que contienen un número de la tabla indicada. Las otras regiones quedan en blanco. Los dibujos contienen su propia evaluación automática, porque si el niño los pinta correctamente, aparecerá una figura reconocible.

Hoja de trabajo 36.3* – *La tabla del 6:
Como las Hojas 35.2, 35.3, y 36.1.

Abajo – Sumas y restas de la tabla del 6: La última parte de esta hoja presenta esta vez no multiplicaciones, sino sumas. Que los niños descubran la relación entre estas sumas y restas, y la tabla del 6. (Si comienzo con un número de la tabla del 6, y le sumo 6 o le resto 6, el resultado será nuevamente un número de la tabla del 6. Eso se puede comprobar fácilmente, usando regletas de 6 para representar estos números. Entonces si sé esos números de memoria, puedo también completar estas sumas y restas de la memoria.)

Hoja de trabajo 36.4* – *¿Cuántos puntos hay? - ¿Cuántos cuadrados hay?:
Unos ejercicios adicionales de interpretar dibujos que representan multiplicaciones.

Hoja de trabajo 36.5* – *La tabla del 7:
Como las hojas anteriores con tablas de multiplicación.

Ampliaciones

Hoja de trabajo 36.6* – *Formar rectángulos de unidades:
Esta actividad es opcional; es preferiblemente para niños que ya están un poco más avanzados en su razonamiento. Esta hoja anticipa el tema de la factorización de números, que se tratará con más detalle en las *Unidades 56 y 57* y en el nivel de Primaria II.
La tarea consiste en escoger el número indicado de cubitos de unidad y formar un rectángulo con ellos; y después anotar la multiplicación correspondiente. Eso equivale a encontrar una multiplicación que da un resultado dado. Algunos niños podrán pronto encontrar las multiplicaciones sin necesidad de experimentar con los cubitos; otros necesitarán usar el material concreto para cada uno de los números dados.

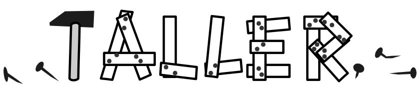
¿A dónde vamos desde aquí?

La siguiente unidad continúa el aprendizaje de las tablas de multiplicación. Pero quizás algunos alumnos querrán intercalar aquí algún tema menos "pesado", por ejemplo de juegos o de actividades de razonamiento, antes de continuar con los números. Algunas unidades del Bloque I o del Bloque VII son buenas para intercalar aquí.

Unidad 37 - Tablas de multiplicación: 8, 9, 10

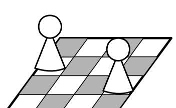
Prerrequisitos:
- Sumas y restas hasta 100 *(Bloque III)*
- Concepto de la multiplicación *(Unidad 34)*

Materiales necesarios:
- Objetos de la vida diaria
- Material contable
- Cadenitas de cuentas
- Regletas Cuisenaire
- Tarjetas para el juego de memoria



Las tablas del 8, del 9, y del 10 en la vida diaria

Busquen objetos que aparecen en grupos de 8, de 9 y de 10, para contarlos y practicar multiplicaciones con ellos.
Para el 8 podrán encontrar unas galletas que vienen en paquetes de 8. O podrían dibujar o fabricar estrellas de 8 puntas y contar sus puntas. O si les gustan las arañas, pueden calcular con patas de arañas ...
Para el 9 puede ser difícil encontrar un ejemplo; pero ustedes mismos pueden agrupar algunos objetos en grupos de 9 (canicas, uvas, fresas, caramelos, ...) O pueden inventar una manera de fabricar estrellas con 9 puntas.
Para el 10 podemos usar nuevamente nuestras manos: ¿Cuántos dedos tienen 4 personas juntas en sus manos?
- En realidad, la tabla del 10 no necesita mucha práctica, porque es muy fácil. Deje que los niños descubran por sí mismos cómo pueden fácilmente multiplicar un número por 10.



Juego: Memoria de multiplicaciones

¡Fabriquen su propio juego de memoria con multiplicaciones! – Necesitarán 90 tarjetas del mismo tamaño para que escriban todas las multiplicaciones desde 2 x 2 hasta 10 x 10, sin repetir las iguales. O sea, si ya tienen una tarjeta con 3 x 6, no habrá otra con 6 x 3. – Para cada multiplicación, escriban en una tarjeta la operación, p.ej. 3 x 6, y en otra tarjeta el resultado, en este caso 18. El reverso de todas las tarjetas se queda en blanco. Ahora pueden jugar el juego de memoria; pero en vez de juntar siempre dos tarjetas iguales, se debe juntar cada operación con su resultado. O sea, la tarjeta con "3 x 6" y la tarjeta con "18" forman juntas un par.

Variaciones:
Al comenzar, el juego puede ser demasiado difícil por la gran cantidad de tarjetas. Pueden separar las tarjetas que contienen multiplicaciones con 2, con 3 y con 4, junto con sus resultados, y jugar solamente con estas. Más tarde pueden jugar solamente con las otras, las que contienen multiplicaciones entre los números de 5 a 10.
Algunas multiplicaciones tienen resultados iguales. Si quieren, pueden distinguir estas con colores distintos. Por ejemplo, pueden escribir la tarjeta 4 x 3 con rojo y un 12 rojo, y la tarjeta 2 x 6 con verde y un 12 verde. Entonces al jugar se deben juntar las tarjetas del mismo color.

Otras actividades

Hagan con estas tablas también las otras actividades descritas en las unidades anteriores:
- Formen rectángulos de piedritas, semillas, u otro material contable, de acuerdo a las tablas del 8, del 9 y del 10. O hagan lo mismo con cadenitas de cuentas y con regletas Cuisenaire. Cuéntenlos hasta conocer los números de las tablas.
- Intenten adaptar el ***juego de saltar*** a estas tablas.
- Jueguen ***"1, 2, 3, ... ¡bum!"*** con el 8, el 9 y el 10 como "números prohibidos".

Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 37.1* – *Repaso de multiplicaciones
La serie de hojas de trabajo comienza con un repaso de las tablas anteriores. Si un niño dificulta mucho con este repaso, que vuelva a practicar primero las tablas del 2 al 7, antes que avance a las siguientes.

Hoja de trabajo 37.2
Arriba: Esta actividad ayuda al niño a descubrir que las multiplicaciones por 8, por 9 y por 10 ya están "implícitas" en las tablas que aprendió hasta ahora: 8 x 2 está en la tabla del 2; 8 x 3 está en la tabla del 3; etc. Entonces las tablas del 1 hasta el 7 permiten llenar casi todos los cuadros de la tabla de multiplicación. Después se completa con las pocas multiplicaciones que todavía son "nuevas".
Abajo: Para el significado de las sumas y restas en esta parte, vea la descripción de la Hoja 36.3.

Hoja de trabajo 37.3
Como siempre, los problemas de texto no deben solucionarse mecánicamente, asumiendo que "siempre es multiplicación". Que los niños analicen cada situación, haciendo un dibujo si es necesario. No todas estas situaciones son multiplicativas.

Hoja de trabajo 37.4* – *La tabla del 9
Las actividades de esta hoja se explican por sí mismas. – Los problemas no.5 y 6 están marcados con un asterisco *, eso significa que son un poco más difíciles que los anteriores.
- En el último ejercicio, "Encuentra multiplicaciones con estos resultados", donde aparece el resultado 9, hay que permitir que los niños pongan 1 x 9 como una de las soluciones, porque de otro modo no saldrán dos multiplicaciones distintas.

Hoja de trabajo 37.5
Como la Hoja 36.2; vea la descripción allí.

Hoja de trabajo 37.6* – *La tabla del 10
Como las hojas anteriores con tablas de multiplicación.

Principios matemáticos

El 10 como "número especial"

Contar de 10 en 10 es fácil, y la tabla del 10 es mucho más fácil de aprender que la tabla del 7 o del 8. Cuando anotan las tablas, deje que los niños observen bien los números que aparecen en la tabla del 10, y que descubran por sí mismos que es "fácil".
Después podemos quizás guiarlos a formular como ley general que podemos multiplicar un número por 10, escribiendo un cero detrás del número. Aunque matemáticamente eso no es completamente correcto; pero es lo más entendible para los niños de este nivel.
En realidad no hay nada tan "especial" en el número 10. Se volvió "especial" solamente porque escogimos este número como base de nuestro sistema de numeración. Eso se debe al hecho de que tenemos 10 dedos. Si tuviéramos 12 dedos, seguramente escribiríamos los números en base 12, y entonces el 12 sería el "número especial". (Y lo escribiríamos "10", pero significaría doce).
En el nivel de Primaria II exploraremos más detalladamente las propiedades de nuestro sistema decimal.

Ampliaciones

Hoja de trabajo 37.7* – *Más multiplicaciones
Esta hoja presenta algunas formas "nuevas" de multiplicaciones: Multiplicaciones con tres factores; comparación de dos multiplicaciones; etc.
Se puede trabajar esta hoja ahora, o también dejarla para la siguiente unidad ("Otras multiplicaciones").

Unidad 38 - Otras multiplicaciones

Materiales necesarios:
- Material contable
- Regletas Cuisenaire

Para el rompecabezas de multiplicaciones:
- Cartón, goma, cinta adhesiva, cúter, un dibujo o una foto de 17,5 x 24,5 cm.

TALLER **La tabla del 1**

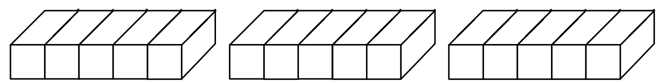
En el transcurso de las unidades anteriores, quizás algunos niños estarán curioseando: "¿Y qué de la tabla del 1? – ¿Por qué empezamos con la tabla del 2 y no del 1?". Podemos desafiarlos a construir la tabla del 1 ellos mismos. También pueden contarla con cadenitas de cuentas (cuentas sueltas, en este caso), o con regletas Cuisenaire (o sea, cubitos de unidad). Deben por sí mismos descubrir que "¡Esto es fácil!"
Para probar si realmente entendieron la multiplicación por 1, podemos desafiarlos con unas multiplicaciones "locas": ¿Cuánto es 1 x 40? – ¿89 x 1? – ¿Mil por uno? (Si lo han entendido, entonces pueden responder la última aunque no sepan cuánto es "mil".)

Multiplicación por cero

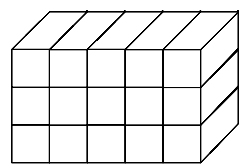
En las hojas de trabajo de las unidades anteriores, los niños ya encontraron algunas multiplicaciones con cero. Eso no se puede representar con material concreto, ya que cero es "nada". Pero podemos hacer entender a los niños (si es que no lo descubrieron por sí mismos), que "muchas veces nada sigue siendo nada".
Si quieren hacer una actividad concreta, pueden "regalarse nadas". Un niño abre sus manos juntas, y los otros hacen movimientos como si tirasen algo a sus manos, y el niño tiene que coger "la nada" con sus manos: "Te regalo una nada." – "Te regalo un cero." – "Te regalo cero pelotas." – Etc. Cuando el niño recibió algunas "nadas", podemos preguntarle: "¿Cuánto tienes ahora?" – Nada, obviamente.
Aquí también podemos probar el entendimiento con unas multiplicaciones como: 27 x 0, mil por cero, etc.
A algunos niños les gusta escribir números; ellos pueden también anotar "la tabla del cero", si desean.

Arquitectos de multiplicación: Multiplicaciones con varios factores

Podemos presentar a los niños unas multiplicaciones como estas: 2 x 4 x 3, 3 x 3 x 5, etc. Quizás ya descubren por sí mismos cómo calcularlas.
Hemos representado multiplicaciones con dos factores como "trenes" y como rectángulos con regletas Cuisenaire. ¿Cómo representaríamos ahora una multiplicación con tres factores? – Tomemos como ejemplo 2 x 5 x 3. La primera parte, 2 x 5, la podemos representar como un rectángulo. Ahora multiplicamos este rectángulo por tres. Eso significa que ahora tenemos tres rectángulos:



O podemos colocarlos uno sobre otro, entonces tenemos la forma de un "ladrillo" (o con su término técnico, un "prisma rectangular"):



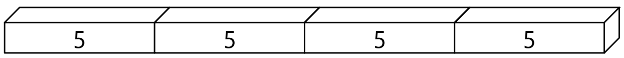
Pero ya sabemos que el rectángulo 2 x 5 se puede formar también con dos regletas de 5. Eso nos da algunas otras posibilidades de representar nuestra multiplicación. – Y si la multiplicación contiene el factor 3, ¿podemos también usar regletas de 3 para representarla? – Exploren cuántas formas diferentes encuentran para representar esta multiplicación (o alguna otra con tres factores).

Esta actividad puede dar lugar al siguiente razonamiento: Digamos que tengo la multiplicación 2 x 7 x 4. Comienzo multiplicando, y tengo 14 x 4. Esta multiplicación no figura en las tablas que hemos aprendido. Podemos calcularla, extendiendo la tabla del 4 hasta 4 x 14, o sumando el 14 cuatro veces. Pero eso es bastante trabajoso. (Recuerde que a este nivel no practicamos las multiplicaciones verticales, cifra por cifra. En la *Unidad 49* practicaremos un método para calcular tales multiplicaciones mentalmente, pero todavía no queremos anticipar eso.)
- Ahora, la actividad anterior nos demostró que podemos intercambiar el orden de los factores. Si representamos 2 x 5 x 3 con regletas de 3, entonces en realidad hemos representado 3 x 2 x 5, ó 3 x 5 x 2. ¿No podemos hacer lo mismo aquí? – Escribimos nuestra multiplicación así: 2 x 4 x 7, y ya no presenta ningún problema. Nos da 8 x 7, y esa es una multiplicación que conocemos desde nuestras tablas.

Después de practicar por un tiempo con material concreto, podrán practicarlo por escrito en la ***Hoja de trabajo 38.3.*** Esta hoja contiene también unos ejercicios de repaso con multiplicaciones por 0 y por 1.

Trenes de la misma longitud

Para este desafío matemático volvemos a los "trenes" de regletas Cuisenaire. Formamos un "tren" con regletas del mismo color; digamos, 4 regletas de 5:



¿Pueden encontrar otro tren, de otro color, que tiene la misma longitud como éste? - Pero este nuevo tren también debe ser de un solo color, o sea, sus regletas tienen que ser todas iguales. ¿Cuántos trenes diferentes pueden encontrar que tienen la misma longitud como este?
Formen algunos otros trenes, por ejemplo 3 x 8, ó 6 x 5, y resuelvan con ellos el mismo desafío.
- Esta actividad (como también la Hoja de trabajo 36.6) provee unas experiencias preliminares para poder entender más adelante los conceptos relacionados con divisores y múltiplos. Pero todavía no introducimos estos conceptos formalmente. Una primera introducción opcional se encuentra en las *Unidades 56 y 57*; y se profundizará en el nivel de Primaria II.

Fabricamos un rompecabezas de multiplicaciones

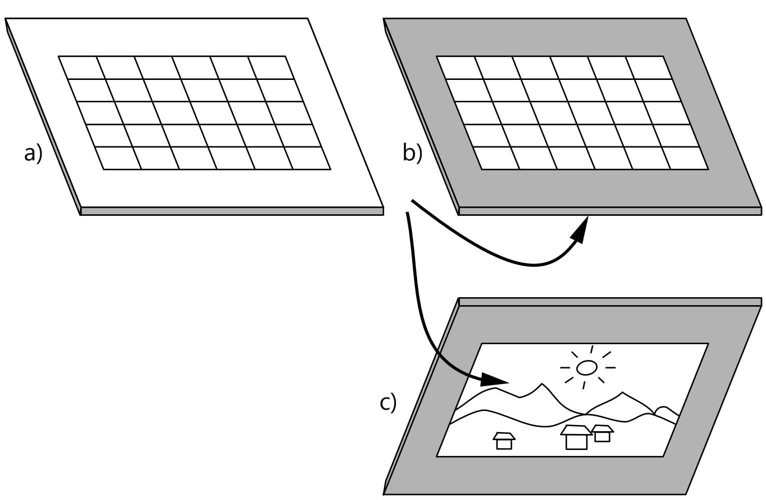
Este rompecabezas es una forma interesante de repasar las multiplicaciones, y se puede fabricar de manera casera. Los niños pueden ayudar también.

Corte tres pedazos de cartón de 20,5 x 27,5 cm.

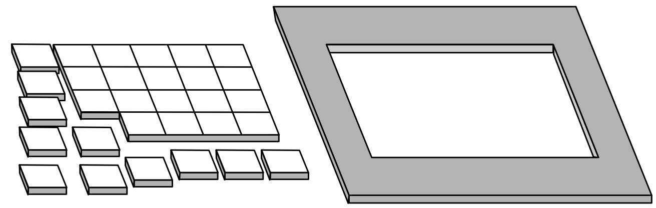
Sobre uno de ellos pegue la ***Hoja de trabajo 38.2*** (los resultados), de manera que el cuadro con los resultados se encuentre en el medio del cartón. *(Dibujo a)*

Sobre el segundo cartón pegue de la misma manera la ***Hoja de trabajo 38.1*** (las multiplicaciones). Esta hoja debe estar bien pegada por todas partes, porque este cartón lo cortaremos en piezas pequeñas *(Dibujo b)*.

Al reverso de este segundo cartón, en el medio, pegue una foto o un dibujo de las mismas medidas como el cuadro de las multiplicaciones (17,5 x 24,5 cm). Esta hoja también debe estar bien pegada por todas partes. *(Dibujo c)*

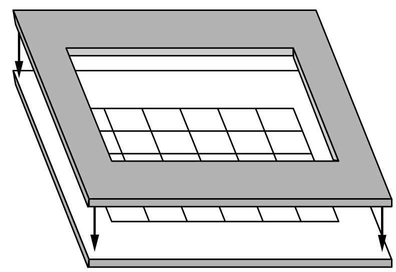


Del segundo cartón corte el cuadro de las multiplicaciones cuidadosamente con un cúter, de manera que el marco alrededor quede intacto. Corte el cuadro en rectángulos, de manera que cada multiplicación quede en una pieza aparte.

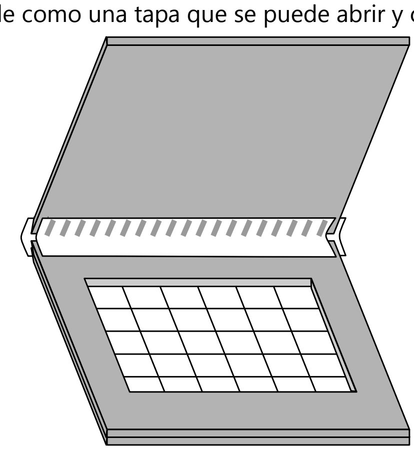


- Para poder armar mejor el rompecabezas, se recomienda quitar 1 a 2 mm del interior del marco, para que quede un poquito de espacio entre las piezas.

Pegue el marco del segundo cartón sobre el cartón de los resultados.



Pegue el tercer cartón con cinta adhesiva a los otros dos, para quede como una tapa que se puede abrir y cerrar.



Para armar el rompecabezas, ponga las piezas con las multiplicaciones arriba. Que los niños coloquen cada multiplicación sobre su resultado correspondiente. Después cierren la tapa, volteen todo de cabeza y ábranlo nuevamente. Si lo hicieron bien, entonces debe quedar ahora sobre la tapa la imagen armada correctamente.

Principios matemáticos

El rol especial del 1 y del 0

Los primeros temas de esta unidad muestran nuevamente que el "razonamiento multiplicativo" no funciona de la misma manera como el "razonamiento aditivo":
Si multiplicamos un número por 1, el número no cambia. (El matemático dice que el 1 es el *"elemento neutro"* de la multiplicación.) Pero al sumar tenemos este efecto no con el 1, pero con el 0. (P.ej. 83 + 0 = 83.) O sea, en la suma, el elemento neutro es el 0, pero en la multiplicación es el 1.
Si multiplicamos cualquier número con 0, el resultado es 0. O sea, la multiplicación con 0 "anula" todo, no importa con qué número comenzamos. En la suma, en cambio, no existe ningún número que produciría este efecto.

La ley conmutativa y la ley asociativa

Estas leyes, por el otro lado, funcionan en la multiplicación de la misma manera como en la adición. (Vea *Unidad 18*, "Principios Matemáticos".) Con la actividad "Arquitectos de multiplicación", los niños pueden experimentar estas leyes con material concreto.
Por ahora todavía no introducimos este tema formalmente; pero los niños pueden practicar su utilidad con las multiplicaciones de varios factores en la hoja de trabajo. Lo trataremos de una manera un poco más formal en el "Viaje matemático: Exploramos la multiplicación" *(Unidad 55)*, o alternativamente en las unidades correspondientes del Bloque V.

¿A dónde vamos desde aquí?

Si desean intercalar un tema de razonamiento, conjuntos, geometría, etc. (Bloques I ó VII), será un buen momento ahora que el tema de la multiplicación está concluido. De otro modo, pueden continuar con la siguiente unidad (División).

Unidad 39 - Introducimos la división

Prerrequisitos:

- Concepto de multiplicación *(Unidad 34)*

Materiales necesarios:

- Regletas Cuisenaire
- Material contable (granos de maíz, habas, piedritas, etc.)
- Figuras de juego

TALLER: Divisiones en la vida diaria

Podemos introducir la división en situaciones donde tenemos que repartir algo entre todos. Por ejemplo, hemos comprado unas uvas para toda la familia, y las repartimos de manera que cada uno recibe la misma cantidad de uvas. Digamos que son 30 uvas para 6 personas. Las repartimos, y encontraremos que cada uno recibe 5 uvas. Podemos explicar que esto se llama una división: 30 ÷ 6 = 5.

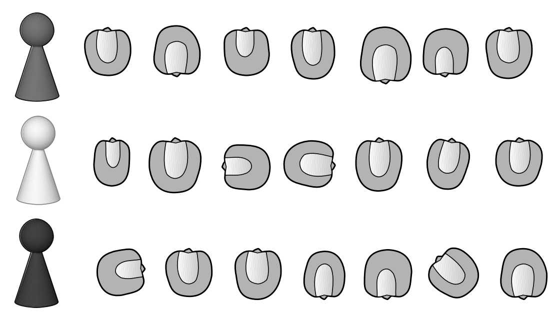
Busque situaciones concretas de la vida diaria donde pueden practicar la división de esta manera. Que los niños sugieran métodos de cómo asegurar que cada uno reciba la misma cantidad.
Hay diversas maneras de hacerlo. Por ejemplo, se puede repartir las uvas una por una: Primero cada persona recibe una uva; después se da una segunda uva a cada uno; después una tercera; y así sucesivamente hasta que todas las uvas están repartidas. – O se puede hacer primero un reparto aproximado, dando a cada persona un puñado de uvas; después comparan entre sí, y los que tienen más dan una o dos uvas a alguien que tiene menos, hasta que todos tienen la misma cantidad. – O las uvas se reparten en montoncitos de 6 sobre la mesa; después cada uno puede coger una uva de cada montoncito. – Etc. ...

Arréglelo de antemano de manera que la división resulte exacta. Si hay un residuo, tendremos complicaciones adicionales que todavía no deseamos tratar ahora. (Vea en la *Unidad 41*.)

Es posible que algunos niños descubran ya en estas actividades que la división es la operación inversa de la multiplicación. Por ejemplo, si somos 6 personas y cada una recibió 5 uvas, eso corresponde a la multiplicación 5 x 6 = 30. – Si los niños no se dan cuenta de ello, lo señalaremos explícitamente durante la siguiente actividad:

Dividir es repartir en partes iguales

Practiquemos el "repartir en partes iguales" con unas figuras de juego. Pueden usar figuras como las que se usan en el ludo, en "Escaleras y serpientes", y juegos similares; o unos muñequitos pequeños; o unos peones de ajedrez. (Aunque es preferible que las figuras que participan en el reparto tengan colores distintos.) Para representar una división como 21 ÷ 3, colocamos 3 figuras de juego en una fila y repartimos 21 objetos entre ellas (p.ej. granos de maíz, piedritas, habas, o los cubitos de unidad de las regletas Cuisenaire), de manera que cada figura recibe la misma cantidad:



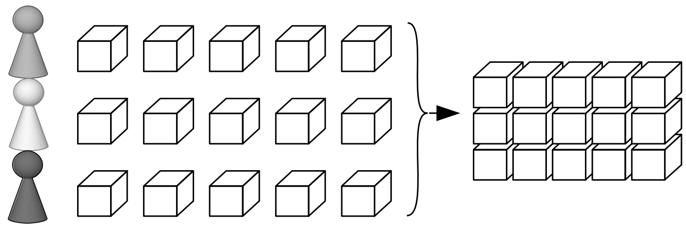
Cada figura recibió 7 granos de maíz; entonces el resultado de la división es 7.

Como en la actividad anterior, decimos a los niños que ellos mismos descubran un buen método para asegurar que todas las figuras reciban la misma cantidad. *(Aquí también, por ahora trabajamos solamente con divisiones que salen exactas.)*

Podemos decirles qué divisiones representar, o podemos usar las tarjetitas de la ***Hoja de trabajo 39.2-3*** – solamente la mitad de arriba, que son divisiones exactas.

Si trabajan con regletas Cuisenaire y ya han hecho varios ejemplos con cubitos de unidades, entonces hagan también lo siguiente: Suponiendo que la división es 32 ÷ 4, en vez de darle al niño 32 cubitos de unidad, dele 3 regletas de 10, y 2 cubitos de unidad. (Desde las unidades anteriores ya conocemos esta forma de representar números de dos cifras.) "¡Repártelo!" – Obviamente, este material no se puede repartir en 4 partes iguales. El niño debe descubrir que en este caso necesita hacer un *canje*: tiene que canjear las decenas por unidades, y entonces puede repartirlas como antes.

Después de hacer varios ejemplos, analicen la figura que forman los objetos repartidos. Con los cubitos de unidad se puede verlo mejor: tenemos un *rectángulo*, igual como los rectángulos que hemos formado al practicar la multiplicación. O sea, al representar una división, nos resulta la imagen de una multiplicación. Eso sucede porque la división es la operación inversa de la multiplicación.



Así podemos comprobar el resultado de una división, efectuando la multiplicación correspondiente: Si el niño dice que 40 ÷ 5 = 7, entonces 7 x 5 debería dar 40. Si dice que 63 ÷ 7 = 9, entonces 9 x 7 debe dar 63.
Así tenemos a la vez un método fácil de efectuar una división, si conocemos la tabla de multiplicación: En vez de preguntar: ¿Cuánto es 63 ÷ 7 ?, podemos también preguntar: ¿ 7 por cuánto es 63 ? – Haga algunos ejercicios de reparto como los anteriores, pero antes de repartir los objetos pregunte al niño si puede predecir el resultado. Después hagan el reparto para ver si la predicción fue correcta.
Pueden inventar sus propios ejemplos, o usar las tarjetitas de la ***Hoja de trabajo 39.2-3*** *(primera mitad)*.
Para practicar como se *escriben* estas divisiones, pueden usar la ***Hoja de trabajo 39.1.*** Vea las explicaciones en la sección "Ahora lo escribimos".

Formar grupos y hacer canjes

Esta actividad es una forma distinta de practicar divisiones. Comenzamos por ejemplo con 24 cubitos de unidad. ¿Cuántas regletas de 4 son iguales a estas unidades? – Para descubrirlo, podemos agrupar los cubitos en grupos de 4. Después canjeamos cada grupo de 4 unidades por una regleta de 4. Así encontraremos que son 6 regletas.
Esta es otra forma de representar la división 24 ÷ 4 = 6.
Hagan otros ejemplos de esta clase. Pueden inventar sus propios ejemplos, o usar las tarjetas de la ***Hoja de trabajo 39.2-3*** *(primera mitad)*.
(La segunda mitad de las tarjetas es para la *Unidad 41.*)

Podemos analizar el resultado y encontramos que así también tenemos lo inverso de una multiplicación. Si preguntamos: ¿Cuántas regletas de 4 hay en 24?, es lo mismo como preguntar: ¿Cuánto por 4 es 24?

Investigación

Analicen la división 12 ÷ 0. Intenten representar esta división con las actividades anteriores: Repartir en partes iguales; formar grupos del mismo tamaño. ¿A qué resultado llegan? – Formulen sus conclusiones.
(La sección "Principios matemáticos" contiene unas explicaciones. Pero no las lean todavía; investiguen primero por ustedes mismos.)

Ahora lo escribimos

Hoja de trabajo 39.1 *(arriba)* – ***Dividir en partes iguales:***
Practica estas divisiones con material concreto como en la primera actividad del Taller. Después escribe las divisiones correspondientes.

Hoja de trabajo 39.1 *(en el medio)* – ***Formar grupos del mismo tamaño:***
Cuenta los puntos. Encierra grupos de la cantidad indicada en una "bolsa". Cuenta cuántas bolsas resultan. Escribe la división correspondiente.

Hoja de trabajo 39.1 *(abajo)* – ***Comprobar divisiones mediante la operación inversa:***
Calcula las divisiones. (¿Ya puedes hacerlo en tu cabeza? – Si no, usa cubitos de unidades o algún otro material concreto.) – Después escribe y calcula la multiplicación correspondiente. Comprueba si tu división fue correcta.

Un poco de historia

Alrededor del año 1200 se comenzaron a escribir divisiones en la forma de fracciones como las conocemos hasta hoy; por ejemplo 36 ÷ 4 se escribió $\frac{36}{4}$. Esta notación se encontró en libros del autor árabe al-Hassar, y del comerciante y matemático italiano Leonardo de Pisa (Fibonacci). Es posible que desde allí se haya desarrollado el signo ÷, porque este signo es en realidad una "fracción en miniatura".

Principios matemáticos

Varias formas de interpretar la división

Esta unidad comienza con actividades de división como “repartir en partes iguales”. En este caso, el cociente es el número de objetos que recibe cada persona.
Otra clase de actividades interpreta la división como "formar grupos de un tamaño determinado". En este caso, el cociente es el número de grupos que se pueden formar.
Solamente al analizar detenidamente lo que sucede en estas actividades, los niños descubrirán una tercera forma de interpretar la división: *La división es la operación inversa de la multiplicación.* (Desde el punto de vista de los principios matemáticos, esta es la interpretación más significativa.)

División entre cero

¿Ya hicieron su propia investigación de la división $12 \div 0$? Si no, háganla.

Al "repartir en partes iguales" podríamos pensar que el resultado es cero: no hay nadie a quien dar algo, entonces nadie recibe nada. Pero nos sobran los doce objetos, no hemos repartido nada. Entonces, en realidad no hemos hecho ninguna división.
Al "formar grupos de igual tamaño", tendremos que formar grupos de cero. Podemos formar tantos grupos de cero como queremos: nunca llegaremos a doce. Entonces parece que este problema no tiene solución.
Lo vemos más claramente si recordamos que la división es lo inverso de la multiplicación. Dividir 12 entre 0 es lo mismo como preguntar: ¿Cuánto por cero es 12? – Pero *todo* número multiplicado por 0 da 0. Entonces no existe ningún número que podríamos multiplicar por cero, de manera que el producto fuera 12. *No se puede dividir entre cero.*

Aquí nos encontramos por primera vez con una operación matemática que realmente no se puede efectuar. Y en este caso tampoco podemos recurrir a números negativos, irracionales, complejos, o lo que sea: ningún número multiplicado por 0 puede dar un producto que no sea cero.

En la matemática existen problemas que no tienen solución. No porque fueran demasiado difíciles; sino porque existe una razón matemática por qué *no puede existir* ninguna solución. – En la *Unidad 11* nos encontramos con una situación similar (Los puentes de Königsberg). Allí hemos visto que en una tal situación, para un matemático, la "solución" consiste en *demostrar por qué* no existe ninguna solución.
La división entre cero es como un abismo sin fondo en medio del paisaje matemático. Tenemos que levantar un cerco de protección alrededor de ese abismo: ***Dividir entre cero es prohibido.***

Uno podría pensar que sí hay solución si la división es $0 \div 0$. ¿No podemos decir en este caso que el resultado es cero, porque $0 \times 0 = 0$? – Pero con el mismo derecho podríamos decir que el resultado es 19, porque $19 \times 0 = 0$. Podríamos dar cualquier número como resultado, y siempre sería correcto. ***Todos los números*** podrían ser el resultado de $0 \div 0$. Se trata entonces de una expresión indefinida, y por eso tampoco es una operación matemática válida.
(***Nota:*** Con el descubrimiento del cálculo infinitesimal, los matemáticos lograron dar un significado a la división entre cero *en ciertas situaciones especiales*. Pero eso es un tema demasiado avanzado para tratarlo aquí.)

Matemática divina

Repartir de manera equitativa

Al practicar la división, practicamos la virtud de la *equidad*: Cada uno recibe lo mismo, o lo que le corresponde. Así lo hicieron los israelitas al repartir la tierra prometida entre sus tribus:
"Y Josué les echó suertes delante del Señor en Silo; y allí repartió Josué la tierra a los hijos de Israel por sus porciones." (Josué 18:10)

También el padre del hijo pródigo tuvo que hacer un reparto equitativo de sus posesiones entre sus hijos:
"Y el menor de ellos dijo a su padre: 'Padre, dame la parte de los bienes que me corresponde.' Y les repartió los bienes." (Lucas 15:12)
El hijo menor tenía una actitud egoísta; pero aun así no pidió la cantidad de dinero que él quiso, pidió "la parte que me corresponde". Él sabía que no podía pedir cualquier monto arbitrario.

Solamente que en la vida real, "la parte que corresponde" no siempre es el resultado exacto de una división. Por ejemplo, si dos personas se reparten un trabajo, pero una de ellas trabaja más que la otra, entonces también le corresponderá una parte mayor del sueldo. Pero con eso ya entraríamos en un tema matemático un poco más avanzado...

¿A dónde vamos desde aquí?

Se puede introducir en este momento también la división con residuo (Unidad 41). Eso se recomienda especialmente si los niños ya hicieron preguntas al respecto. – De otro modo pueden continuar con la Unidad 40, "El producto y sus factores".

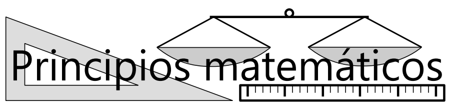
Unidad 40 - El producto y sus factores

Prerrequisitos:

- Concepto de multiplicación *(Unidad 34)* y división *(Unidad 39)*

Materiales necesarios:

- Carteles de 20x15 cm aprox, plumón, pita, cordel o cinta.
- (Opcional) Lámina adhesiva transparente para plastificar los carteles.
- Regletas Cuisenaire.
- Tarjetitas para escribir números encima.



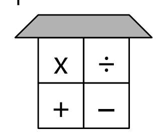
El principio del producto y sus factores funciona exactamente igual como el principio del entero y sus partes *(vea Unidades 25, 32)*. La multiplicación y división se relacionan entre sí de la misma manera como la suma y la resta entre sí: Si conocemos los factores y queremos obtener el producto, tenemos que multiplicar los factores:

3 x 8 = 24, el producto.

Si conocemos el producto y un factor, entonces podemos dividir el producto entre el factor para obtener el otro factor:

3 x ___= 24
24 ÷ 3 = 8, el factor que buscamos.

Podemos imaginarnos que las cuatro operaciones básicas viven en una casa de dos pisos. En el primer piso viven la suma y la resta, en el segundo piso la multiplicación y la división. Las operaciones del segundo piso tienen entre sí la misma relación como las operaciones del primer piso entre sí.



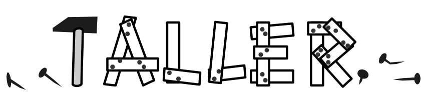
(Usaremos esta ilustración en diversas oportunidades para visualizar las propiedades de las operaciones aritméticas.)

Ya que la división es la operación inversa de la multiplicación, podemos comprobar el resultado de una división mediante la multiplicación correspondiente:

72 ÷ 8 = 9 porque 9 x 8 = 72.

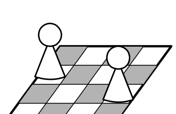
Y de la misma manera podemos comprobar el resultado de una multiplicación, efectuando la división correspondiente:

9 x 2 = 18 porque 18 ÷ 2 = 9.



Máquinas de multiplicación y división

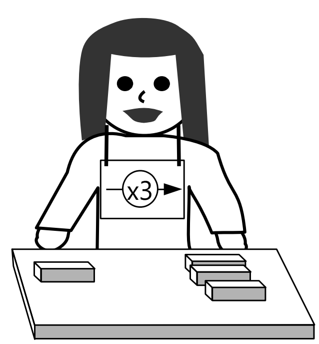
Para introducir el principio del producto y sus factores, podríamos usar "máquinas" de tubos de papel higiénico como en el taller de la *Unidad 18*. Solamente que alguien (un adulto o un niño) tiene que encargarse de "hacer funcionar" la máquina correctamente – o sea, se encarga de que el resultado correcto salga de la máquina.
Como alternativa, podemos practicar el siguiente juego:



La computadora viviente

Este juego es similar a la actividad de las máquinas, pero ahora los niños mismos actúan como "máquinas". Preparamos varios carteles de un tamaño de 20 x 15 cm aprox., con una pita o cinta para que los niños puedan colgárselos delante de su pecho. Con plumón dibujamos en cada cartel una "flecha de operación" (vea el dibujo a la derecha). – Podemos dibujar solamente el círculo y la flecha y después plastificar el cartel; entonces podemos escribir encima la operación que queremos con un plumón que se puede borrar (del tipo que se usa para pizarras acrílicas). Así podemos usar los mismos carteles varias veces para distintas operaciones.

Un niño o una niña se pone un cartel con una operación, por ejemplo "x3". Este niño es ahora la "computadora viviente". Los otros niños pueden hacer entrar un número por el lado de entrada de la operación, y la "computadora" se encarga de hacer salir el resultado correcto por el otro lado.

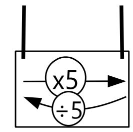


Los números pueden representarse con regletas Cuisenaire. Entonces la operación "x3" consiste simplemente en hacer salir tres ejemplares de la misma regleta que

entró en la computadora. (La "computadora" debe entonces tener una caja de regletas a su disposición.)
Los números se pueden también escribir en tarjetitas. Se da a la "computadora" una tarjetita con un número (p.ej. 7) por el lado de la entrada. Entonces la "computadora" efectúa la operación y escribe el resultado (21) en otra tarjetita, y la coloca por el lado de la salida.

Hacer correr la computadora al revés

Ampliamos ahora el juego de la computadora viviente. Supongamos que la computadora realiza la operación "x5", y como resultado salió 35. (Podemos representarlo con 5 regletas de 7; o podemos escribir el número en una tarjeta.) – Entonces ¿cuál número entró a la computadora? – Esto corresponde a la operación ___x 5 = 35.
Para descubrirlo podemos adivinar; o podemos probarlo con varios números y ver con cuál nos sale 35. Pero podemos también hacer correr la computadora al revés. ¿Cuál operación hace entonces la computadora? – Podemos probarlo con otros números. Pero ojo: No con todos funciona. Si ponemos 17 a la salida, no podemos indicar ningún número que entró para completar la operación ___x 5 = 17. (Por lo menos no con las operaciones que conocemos hasta ahora.)
Podemos ahora completar el cartel de la computadora viviente, indicando también la operación inversa.



Después podemos hacer lo mismo, pero con una división como operación "hacia adelante". Digamos, la computadora efectúa la operación "÷6". Probemos con varios números de entrada: Entra 24, sale 4. Entra 42, sale 7. – Si no se puede efectuar la operación (o sea, no sale exacta), la computadora emite una tarjeta que dice "ERROR". ¿Cuáles números podemos hacer entrar a la computadora, cuáles no?
Ahora lo hacemos al revés. De la computadora salió el número 6, entonces ¿cuál número entró? Eso sería la operación ___÷ 6 = 6. Intentamos hacer correr la computadora al revés. ¿Cuál es su operación al revés? Así podemos descubrir cuál número entró a la computadora. (No, no fue el 1.)

Hagan diversas operaciones de esta manera. Para variar, pueden también repasar sumas y restas con la computadora viviente.

Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 40.1** (arriba) **– Máquinas de multiplicación y división
Jugamos el juego de las máquinas de una manera un poco más abstracta, en el papel. – En la segunda fila de máquinas escribimos también la operación inversa (la operación cuando la máquina corre al revés); eso nos ayuda a encontrar los números que *entraron* a las máquinas.

Hoja de trabajo 40.1** (en el medio) **– Completar multiplicaciones y divisiones
Recuerda que eso es lo mismo como lo que hicimos con las máquinas; así no debe ser tan difícil.
La última serie de estos ejercicios ("¿Puedes estos también?") es solamente para quienes ya saben dividir con residuo *(Unidad 41)*. Los que todavía no saben eso, tendrán que saltar esta parte y volver a ella cuando hayan hecho las actividades de la *Unidad 41*.

Hojas de trabajo 40.2-3 – Repaso de multiplicaciones
Resuelve las operaciones en las hojas. Después busca en el dibujo correspondiente los campos que llevan los números de los resultados, y píntalos con el color que corresponde a la operación: Los resultados de todas las operaciones bajo el título "Marrón" se pintan de marrón; los que están bajo el título "Verde" se pintan de verde, etc.

Ampliaciones

Problemas de multiplicación y división

En las hojas de trabajo de las unidades anteriores ya nos hemos encontrado con diversos problemas de multiplicación y división. Si esos problemas fueron difíciles para los niños en la primera vez, podrán intentarlos otra vez con los conocimientos que ahora tienen de la división como operación inversa de la multiplicación, y del principio del producto y sus factores.
Para entender correctamente estos problemas, se requieren dos capacidades de razonamiento (aparte de la comprensión de lo que leen): Los niños tienen que ser capaces de distinguir entre razonamiento aditivo y razonamiento multiplicativo *(vea Unidad 35, "Principios matemáticos")*, y deben saber distinguir cuál es el producto y cuáles son sus factores (o cuál es el entero y cuáles son sus partes, en el caso de una situación aditiva). Casi

siempre, un dibujo de la situación les ayudará a hacer estas distinciones.

Intente buscar ***situaciones de la vida diaria*** donde podemos aplicar los mismos principios. Por ejemplo:

- Somos 6 personas y queremos dar a cada persona 2 manzanas; ¿cuántas manzanas necesitamos?

- Tenemos 6 manzanas y queremos dar a cada persona 2 manzanas; ¿para cuántas personas alcanza?

- Seguramente ocurrirán situaciones similares al comprar y repartir frutas, galletas, etc.

- Quizás los niños tienen que compartir un juguete muy solicitado del que hay un único ejemplar (por ejemplo un par de zancos), entonces tienen que turnarse. Si tenemos una hora (60 minutos) para jugar, y todos quieren usar los zancos, ¿cuánto tiempo le toca a cada uno? *(Con algunos números de niños, por ejemplo 7, el resultado no saldrá exacto. Entonces ya nos enfrentamos con el tema de las divisiones inexactas; vea la siguiente unidad.)*

- Al comprar alimentos u otros productos en cantidad, hay que calcular precios. Por ejemplo: Una botella de jugo cuesta 4.– y tenemos 20.– . ¿Cuántas botellas de jugo podemos comprar? – ¿Cuánto costarían 3 botellas?

- Diversos trabajos manuales también dan lugar a cálculos. Por ejemplo: Si necesito 4 clavos para fabricar un carrito de madera, y quiero hacer 6 carritos, ¿cuántos clavos necesito?

- Un problema como el siguiente es todavía difícil a este nivel; pero quizás algún niño ya logra resolverlo: Queremos cortar un pliego de cartulina de 50 x 70 cm en tarjetas de 7 x 10 cm. ¿Cuántas tarjetas saldrán? ¿y cómo hay que cortar la cartulina para que no sobre nada?

La ***Hoja de trabajo 40.1*** *(abajo)* presenta algunos problemas adicionales.

¿El producto siempre es mayor?

Cuando hemos examinado el principio del entero y sus partes, nos ayudó el razonamiento de que el "entero" es mayor que sus partes. Algo similar podemos aplicar aquí: El producto normalmente es mayor que sus factores. En las situaciones "normales" de la vida diaria, eso es cierto. Si tengo los números 3, 18, 6, puedo formar con ellos una multiplicación si interpreto el 18 como el producto: 3 x 6 = 18. Con los números menores como producto no funciona.

Pero existen algunas situaciones especiales donde el producto no es el número mayor. Por ejemplo si multiplicamos por cero: 0 x 7 = 0 ... el producto es cero, eso no es el mayor número en la operación. Y cuando avanzamos más en la matemática, encontraremos otras situaciones donde el producto tampoco es mayor. ¡No siempre cuando multiplicamos algo, se hace mayor!
*(Los adultos, y alumnos mayores, ya pueden estar pensando en qué otras situaciones un número se hace **menor** cuando lo multiplicamos ...)*

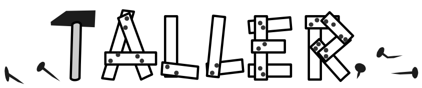
Unidad 41 - División con residuo

Prerrequisitos:

- División *(Unidad 39)*

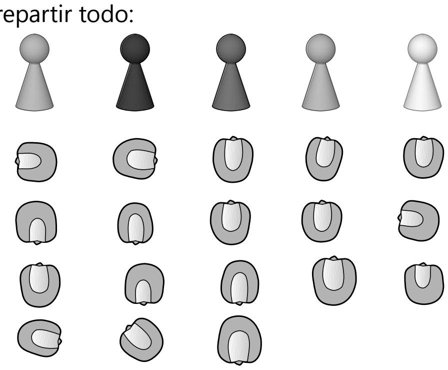
Materiales necesarios:

- Regletas Cuisenaire
- Material contable (granos de maíz, habas, piedritas, etc.)
- Figuras de juego



Repartir en partes iguales – cuando sobra algo

Volvamos a hacer la actividad de la *Unidad 39*, repartiendo semillas, piedritas, o cubitos de unidades entre varias figuras de juego. Por ejemplo, repartimos 18 granos de maíz entre 5 figuras. – Es posible que algunos niños querrán repartir todo:



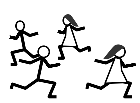
Entonces podemos decir por ejemplo: "Pero mira, estas dos figuras *(las últimas)* no van a estar contentas, porque les has dado menos. Hay que dar la misma cantidad a todos." – Otros niños quizás dirán que eso es imposible, que no se puede dar la misma cantidad a todos. ¿Qué haremos entonces?

Esos momentos nos pueden llevar a conversaciones interesantes acerca de posibles soluciones. No desperdicie esta oportunidad de hacer razonar a los niños. Puede que entonces la discusión gire no solamente en torno de la matemática; se pueden tocar también temas de justicia y equidad: ¿Qué es un reparto justo?
Si fueran manzanas, o chocolatillos, u otros objetos que se pueden partir, entonces podríamos cortarlos en pedazos, y así habría una manera de dar la misma cantidad a todos. Eso nos llevaría a las *fracciones*. A este nivel todavía no queremos entrar en los detalles matemáticos de esa solución. Pero pienso que deberíamos por lo menos mencionar esta posibilidad, si los niños no lo sugieren por sí mismos. *(Vea también en la Unidad 58.)*
Pero no podemos pedacear granos, piedras, o cubitos de unidad. Nos quedamos entonces con una situación insatisfactoria: efectivamente no podemos repartir *todo* de manera que todos reciban la misma cantidad. Pero si queremos una solución matemática, entonces tampoco podemos dar a unos más y a los otros menos, porque así no sabemos cuál es realmente el resultado de la división: ¿es 3 o es 4? En la matemática necesitamos un resultado definido. – Quizás podemos decir a los niños algo como lo siguiente:
"Si queremos dar por igual a todos, entonces estos 3 granos de maíz van a sobrar. Por ahora los dejamos aparte y no los repartimos. Eso se llama el *residuo*. Pero cuando seas más grande, vamos a aprender qué más se puede hacer con el residuo."
Decimos entonces que 18 ÷ 5 es 3, con un residuo de 3.

Hagan ejemplos con otras divisiones. Pueden inventar las suyas propias, o usar las tarjetitas de la Hoja de Trabajo 39.2-3 (segunda mitad).

Formar grupos de igual tamaño

Eso fue la otra forma de representar divisiones. En este caso, la pregunta sería: ¿A cuántas regletas de 5 corresponden 18 cubitos de unidad? – Podemos formar 3 grupos de 5, y sobrarán 3 unidades. Aquí también no hay manera como formar una regleta de 5 con los 3 cubitos que sobran; esos quedan como residuo.



El juego de las moléculas

Lo mismo se puede hacer con personas. Una persona dirige el juego, todos los demás son "átomos". Los átomos quieren juntarse para formar moléculas; pero la persona que dirige tiene que anunciar cuántos átomos habrá en una molécula. Dice por ejemplo: "¡Moléculas de 5!" – Entonces lo más rápido posible, los jugadores tienen que formar pequeños círculos de 5 personas que se toman de las manos o se abrazan. Los que sobran, no pueden formar una molécula y salen del juego. Los demás se sueltan y continúan: "¡Moléculas de 3!" (o cualquier otro número.) – La persona que dirige, controla si todas las moléculas tienen el número requerido de átomos. – Así siguen hasta que queden tan pocos átomos que no se puede formar ninguna molécula del tamaño requerido. Entonces todos juntos pueden comenzar el juego de nuevo.
Si los niños no entienden el concepto de "átomos" y "moléculas", se puede decir simplemente: "¡Grupos de 3!" – "¡Grupos de 2!", etc.

Ahora lo escribimos

Si en el Taller están usando las tarjetitas, los niños ya habrán visto allí que es usual abreviar la palabra "residuo" con R, entonces ellos mismos también pueden escribirlo así. Por ejemplo: **18 ÷ 5 = 3 R.3**.

Vocabulario matemático

Las partes de una división se llaman:

Dividendo ÷ Divisor = Cociente (más **residuo**)

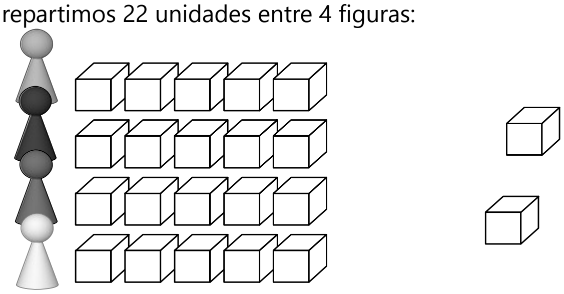
Nota: La palabra "dividendo" no es tan usual. El concepto de "divisor", en cambio, se volverá importante en otro contexto; vea Unidad 56.

Ampliaciones

La comprobación de la división con residuo

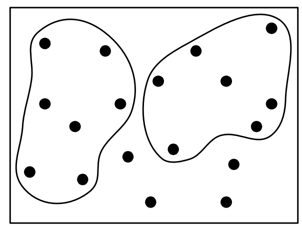
En una división exacta podemos hacer la comprobación, efectuando la multiplicación correspondiente. Pero ¿cómo funciona eso en una división con residuo?

Las actividades del Taller nos dan la respuesta, si analizamos las figuras que resultan. Por ejemplo, repartimos 22 unidades entre 4 figuras:



Tenemos un rectángulo de 4 x 5, y 2 cubitos sueltos. (O sea, el cociente es 5 y el residuo es 2.) Entonces, el número original (el producto o el "entero") se compone de 4 x 5 + 2.

Otro ejemplo: Tenemos 18 objetos, y queremos formar grupos de 7. Resultan 2 grupos, y 4 objetos sobran. (18 ÷ 7 = 2 R.4.) – El número total de puntos consiste en 2 grupos de 7 (una multiplicación), más 4 puntos sueltos (que se suman al final); o sea 2 x 7 + 4 = 18.



Con ejemplos como estos podemos deducir fácilmente cómo funciona la comprobación en el caso de una división con residuo. En palabras podríamos escribirlo así:

Dividendo = (Cociente x Divisor) + Residuo.

La última parte de la ***Hoja de Trabajo 41.1*** presenta unos ejercicios al respecto.

La ***Hoja de Trabajo 40.1*** (de la unidad anterior) contiene también unos ejercicios para practicar la división con residuo "al revés".

Investigación

1. Divisiones inexactas entre 10

Resuelve unas divisiones entre 10, como las siguientes:

43 ÷ 10, 58 ÷ 10, 92 ÷ 10, 35 ÷ 10, ...

Observa los resultados. ¿Qué cosa interesante observas? – ¿Puedes explicar ***por qué*** sucede eso?

2. La división que "no se puede"

Algunos niños piensan que no se puede resolver divisiones como las siguientes:

3 ÷ 8, 1 ÷ 4, 5 ÷ 6, ...

Analiza lo que pasa en esta situación. ¿Puedes dar los resultados correctos?

*3. Divisiones especiales entre 9

Divide unos números de la tabla del 10 entre 9:

20 ÷ 9, 30 ÷ 9, 40 ÷ 9, 50 ÷ 9, ...

Observa los resultados. ¿Qué cosa interesante observas? – ¿Puedes explicar ***por qué*** sucede eso?

(Si lo han pensado por varios días y no encuentran respuestas, pueden consultar las pautas en el Anexo A.)

Unidad 42 - Operaciones combinadas

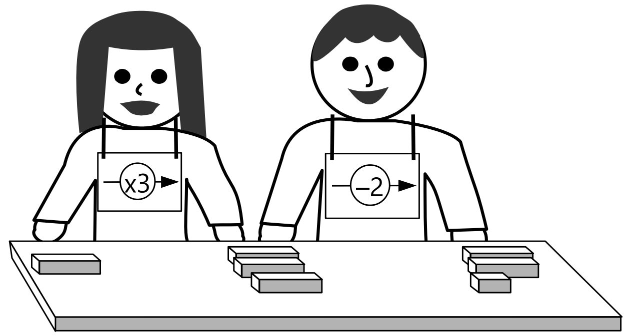
Prerrequisitos:
- Operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) hasta 100.

Materiales necesarios:
- Carteles del juego "La computadora viviente" *(vea Unidad 40)*, plumones
- Regletas Cuisenaire.
- Tarjetitas para escribir números encima.
- 4 dados
- Recta numérica hasta 100, o cinta métrica

TALLER

Juego: La computadora viviente

Volvamos a jugar a la computadora viviente *(vea Unidad 40)*. Pero esta vez construimos una computadora que efectúa ***dos*** operaciones. O sea, la computadora está formada por dos niños. Digamos que Marta tiene la operación "x3", y Jorge tiene la operación "–2". Entonces Marta recibe el número que entra a la computadora, lo multiplica por 3, y pasa el resultado a Jorge. Jorge resta 2 al número que recibe de Marta, y pasa el resultado a la salida de la computadora.



Hagan algunos ejemplos. Después usaremos esta "computadora viviente" para hacer unos experimentos e investigar sus resultados.

Investigación

Investigaremos qué sucede si intercambiamos el orden de las operaciones. Para eso tendremos que hacer una lista de los resultados de nuestras operaciones. Pasaremos algunos números por la "computadora viviente" y anotaremos los resultados (Tabla A). Si queremos hacer una investigación más exacta, anotamos también los resultados intermedios (Tabla B).

Tabla A

Entra	Sale
1	1
2	4
5	13
7	19
10	28

Tabla B

Entra	x3	–2 Sale
1	3	1
2	6	4
5	15	13
7	21	19
10	30	28

Después cambiamos el orden; o sea, Marta y Jorge intercambian sus lugares. Jorge recibe el número que entra, le resta 2, pasa el resultado a Marta, y Marta multiplica por 3 el número que recibió de Jorge. Hacemos entrar a la computadora los mismos números como antes, y anotamos los resultados.

(***Nota:*** Si Jorge recibe el 0 ó el 1, no puede restar 2; o sea su resultado va a ser "ERROR". Si Marta recibe "ERROR" de Jorge, ella no efectúa ninguna operación; simplemente pasa "ERROR" a la salida.)

Entra	–2	x3 Sale
1	ERROR	ERROR
2	0	0
5	3	9
7	5	15
10	8	24

Comparamos estos nuevos resultados con los resultados anteriores. Parece que no salen iguales. Estamos entonces ante una situación "nueva": Hemos visto anteriormente que en una suma podemos intercambiar los sumandos, y el resultado no cambia. Lo mismo sucede en una multiplicación. Y hemos visto que podemos también intercambiar las operaciones en una operación combinada de sumas y restas, si conservamos los signos *(vea Unidad 33)*. (Si no están seguros acerca de eso, pueden comprobarlo ahora con la computadora viviente. Combinen por ejemplo las operaciones "+20" y "–5", después intercambien su orden.) – Pero si combinamos una multiplicación con una resta, parece que no podemos intercambiar estas operaciones así no más; los resultados no salen iguales.

Investiguen entonces diversas combinaciones de operaciones, si se pueden intercambiar o no: Suma con multiplicación; suma con división; multiplicación con división; etc. Por ejemplo, pueden probar las siguientes combinaciones:

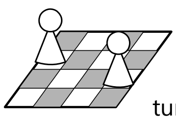
"+3" con "x5"; "+6" con "÷3"; "x4" con "÷2";
"–4" con "÷4"; etc.

También pueden probar combinaciones de operaciones del mismo tipo (suma con suma; división con división; ...):

"+4" con "+16"; "x2" con "x3"; "÷2" con "÷3"; ...

(En el último caso – dos divisiones – tenemos que pensar bien qué números podemos hacer entrar a la computadora para que no salga "ERROR". Aunque en la primera operación podemos escribir el resultado con residuo si no sale exacto, ese resultado no se puede procesar con una segunda operación. "5 R.1" no es un número; es solamente una forma de expresar que la división salió inexacta. Una expresión como "(5 R.1) ÷ 3" no tiene sentido.)

¿A qué resultado llega la investigación? ¿Cuáles combinaciones de operaciones podemos intercambiar sin que eso altere el resultado? ¿Encuentran una propiedad generalizada que distingue las combinaciones que se pueden intercambiar, de las que no se pueden intercambiar?

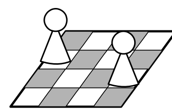


Juego: Suma, resta y multiplicación

Se juega con un dado. Cada jugador, en su turno, tira el dado cuatro veces. El primer puntaje que tira es el número inicial. De los puntajes siguientes, uno tiene que sumarse, uno tiene que restarse, y uno tiene que multiplicarse. Cada vez que el jugador tira el dado, tiene que decidir cuál de estas operaciones quiere aplicar; pero puede aplicar cada operación una sola vez.

Ejemplo: Walter tira primero un 2. Después tira un 5 y decide multiplicarlo: 2 x 5 = 10. Después tira 1 y decide restarlo: 10 – 1 = 9. Finalmente tira 4; ahora le queda solamente la suma: 9 + 4 = 13. Entonces el puntaje final de Walter es 13.
Si Walter hubiera decidido primero sumar, y ahorrarse la multiplicación hasta el final, su puntaje hubiera salido mayor: 2 + 5 = 7, 7 – 1 = 6, 6 x 4 = 24. Pero es parte del juego que a veces uno hace decisiones que después resultan desfavorables, porque uno no sabe de antemano los puntajes que va a tirar después.
El que saca el mayor puntaje como resultado de sus operaciones, gana.

Variación: Como variación, se puede acordar que cada uno decide sus operaciones recién después de tirar el dado cuatro veces. Así cada uno sabe todos los números que intervienen, y puede calcular cuál orden de las operaciones le da el mayor puntaje. Esta variación da una ventaja a los que saben calcular mejor; pero le quita un poco de "suspenso" al juego.

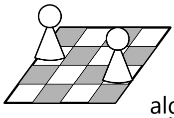


Juego: 24 con 4 dados

Este juego se puede jugar entre varias personas. Se necesitan 4 dados. Uno de los jugadores tira todos los dados juntos. Ahora, la tarea consiste en llegar a 24 con estos cuatro números. Podemos usar cualesquieras de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, en el orden que queremos. Pero tenemos que usar cada número exactamente una vez. Por ejemplo, si hemos tirado 1, 3, 3, 4, entonces podemos formar la operación (3 + 3) x 1 x 4 = 24. O si hemos tirado 1, 5, 6, 6, entonces tenemos (6 x 5) – (6 x 1) = 24.
(Los niños quizás no saben todavía cómo usar paréntesis. Pero podemos indicar con palabras cuál operación hacer primero: "Primero multiplico estos, también multiplico estos, y resto este producto de ese otro producto." – O podemos introducir los paréntesis antes de jugar este juego. Vea abajo en "Ahora lo escribimos".)

Por lo demás, establezcan las reglas que les parecen las más convenientes. Por ejemplo, podrían acordar que el que tira los dados tiene un minuto para encontrar una solución. Si no lo logra, los demás pueden ayudarle. – O pueden jugar que todos a la vez intentan resolverlo, pero no dicen su solución, solamente la anotan en un papel. *(Para eso necesitan saber ya cómo escribir operaciones combinadas.)*

Lo interesante es que casi siempre hay una solución, o incluso varias. Hay unas cuantas combinaciones de dados que no tienen solución (por ejemplo 1, 1, 1, 1); pero son muy pocas. (Puede ser un desafío para niños o adultos motivados, encontrar cuáles son esas "combinaciones imposibles".)
Con unas reglas adicionales, algunas "combinaciones imposibles" van a tener solución; y el juego se hace un poco más fácil. Por ejemplo, podemos acordar que se permite también formar números de dos cifras, combinando los números de dos dados. Así por ejemplo con 1, 1, 1, 2 podemos formar la operación (1 + 1) x 12 = 24.



Juego: Golf matemático

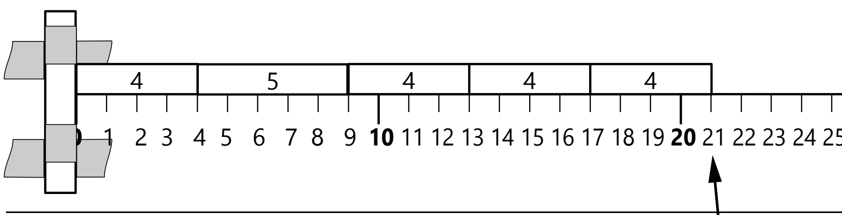
Existen muchas variaciones de este juego; algunas de ellas son matemáticamente bastante exigentes. Básicamente se trata de alcanzar un número determinado con una combinación de ciertas operaciones específicas. Se llama "golf" porque uno se imagina que estas operaciones son como palas de golf que hacen avanzar la "pelota" por una distancia determinada, y se trata de alcanzar exactamente la meta determinada. Por ejemplo, si definimos que el juego empieza en 1, las operaciones permitidas son "x2" y "–3", y la meta es 17, entonces la solución más corta sería:

1 x 2 = 2,   2 x 2 = 4,   4 x 2 = 8,   8 – 3 = 5,

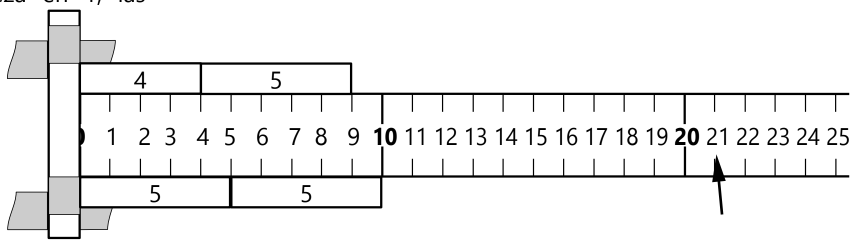
5 x 2 = 10,   10 x 2 = 20,   20 – 3 = 17.

Con los niños practicamos por ahora una versión muy sencilla: El juego comienza siempre en 0, y las operaciones permitidas son dos números específicos que podemos sumar. Estas operaciones se pueden representar con regletas Cuisenaire en una recta numérica larga o una cinta métrica. Por ejemplo, si la meta es 21 y las operaciones permitidas son "+4" y "+5", entonces la tarea consiste en formar un "tren" de regletas de 4 y de 5 que llegue exactamente al 21.

El juego se puede jugar a solas, o entre dos personas. Si juego yo solo, simplemente intento alcanzar la meta (21), usando solamente regletas de las longitudes permitidas (4 y 5, en este ejemplo).



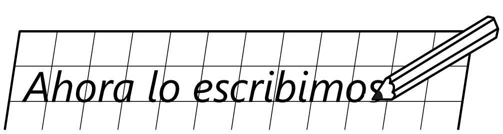
Para jugar entre dos personas, cada uno construye su propio "tren" por su lado de la recta numérica, y colocan sus regletas por turnos. En cada turno se puede hacer una de dos cosas: Colocar una regleta al final del "tren", o quitar la última regleta puesta (por si uno se da cuenta de que se ha equivocado). El que llega primero exactamente a la meta, gana. Si alguien sobrepasa la meta, pierde. – Si el jugador que empezó el juego llega a la meta, y el otro jugador enseguida también llega a la meta, entonces el juego termina con empate, porque ambos alcanzaron la meta con el mismo número de turnos.



Se puede establecer como regla adicional que es prohibido poner una regleta "solamente para probar" y enseguida sustituirla por otra. El jugador que pone una regleta, tiene que dejarla allí hasta su siguiente turno. Así se acostumbran a pensar antes de actuar.

Intenten diferentes combinaciones de regletas y metas. Por ejemplo, intenten llegar a 22 con regletas de 3 y de 5. O lleguen a 27 con regletas de 4 y de 7. O lleguen a 69 con regletas de 7 y de 10.

Se pueden hacer diversas investigaciones interesantes en relación con este juego, pero las dejaremos para el nivel de Primaria II. Por ahora sea suficiente con decir que no todas las combinaciones de regletas y metas tienen solución. Hagan sus experimentos.



Con los experimentos del Taller hemos visto que en ciertas combinaciones de operaciones, el orden importa. Entonces, en una operación como **3 + 4 x 5**, no es lo mismo si primero sumamos y después multiplicamos, o si primero multiplicamos y después sumamos. Esta expresión, tal como está escrita, es ambigua; o sea, se puede entender de varias maneras y así causa malentendidos – por lo menos mientras no hemos establecido ninguna regla adicional.

Uso de paréntesis

La forma más segura de evitar la ambigüedad es usando paréntesis. La regla para su uso es sencilla: La operación entre paréntesis se resuelve primero. **(3 + 4) x 5** significa que sumamos primero. **3 + (4 x 5)** significa que multiplicamos primero. Veamos la diferencia:

(3 + 4) x 5
7 x 5 = **35**

3+ (4 x 5)
3 + 20 = **23**

Un ejemplo un poco más complejo:

(35 – 15) ÷ (3 + 1)
20 ÷ 4 = **5**

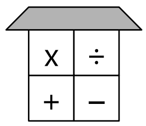
35 – (15 ÷ 3) + 1
35 – 5 + 1 = **31**

Esto es un formalismo un poco abstracto y es difícil de representar con material concreto. Pero si los niños han entendido bien las operaciones individuales, también deben poder combinarlas.

Precedencia de operaciones

Hasta ahora seguimos teniendo una ambigüedad cuando una combinación de operaciones no contiene paréntesis. Así que fue necesario establecer unas reglas también para estos casos. Estas reglas son:

1. Las operaciones del "segundo piso" tienen precedencia sobre las del "primer piso".



O sea, las multiplicaciones y divisiones se resuelven primero; las sumas y restas después. Entonces, si escribimos **3 + 4 x 5** sin paréntesis, eso significa que se multiplica primero: **3 + 4 x 5 = 3 + (4 x 5)**.

2. Operaciones del mismo "piso" se resuelven en su orden, desde la izquierda hacia la derecha.

Por ejemplo:

20 + 17 – 5 + 9	12 ÷ 4 x 6 ÷ 9
= 37 – 5 + 9	= 3 x 6 ÷ 9
= 32 – 9 = <u>23</u>	= 18 ÷ 9 = <u>2</u>

- Aunque hemos visto que en este caso se pueden intercambiar las operaciones, mientras se preserva el signo. (Esto vale para una combinación de sumas con restas; pero también para una combinación de multiplicaciones con divisiones. Revise los resultados de los experimentos con la "computadora viviente" para verificarlo.)

Una vez que entienden la manera de leer y escribir tales operaciones, pueden otra vez jugar el juego de los 4 dados, pero ahora *escribiendo* las operaciones que resultan.

Hojas de trabajo

Hoja de Trabajo 42.1 – ¡Combina!
La primera serie de ejercicios requiere sencillamente resolver las operaciones, tomando en cuenta las reglas que acabamos de mencionar. Se puede hacer anotando los pasos en un papel aparte (como en los ejemplos aquí en el libro); pero es preferible que los niños lleguen a hacerlo ***mentalmente***. Las operaciones de esta hoja todavía no son tan complejas que fuera necesario anotar algo; y el cálculo mental es muy bueno para entrenar la concentración y la memoria.

Los ejercicios siguientes son similares al juego de los 4 dados: Se deben descubrir las operaciones que permiten llegar a un número determinado, usando los números que se dan en el ejercicio.
En la primera serie de estos ejercicios, el orden de los números es fijo, solamente se deben insertar los signos de operaciones. – En la última serie de ejercicios (con los números en círculos), se debe descubrir también en qué orden usar los números. Se pueden usar en cualquier orden, pero cada uno de números indicados exactamente una vez.

Hoja de Trabajo 42.2** (arriba) **– Dos números por demás
En estas operaciones, en cada lugar donde hay dos números pequeños uno encima del otro, hay que escoger uno de ellos y tachar el otro. Vea el ejemplo de la primera operación. ¿Puedes hacerlo de tal manera que las operaciones salgan correctas?

Hoja de Trabajo 42.2** (abajo) **– Más combinaciones
Como en la Hoja 42.1 abajo. Solamente que ahora probamos una variedad de combinaciones con los mismos tres números. Todos los números indicados a la derecha del primer círculo (6, 25, 32, 10, 11, 2) deben alcanzarse con los mismos tres números 8, 3, 1 (en cualquier orden). En las dos líneas en blanco, intenta llegar a dos otros resultados que todavía no figuran en la hoja.

Unidad 43 - Problemas con las cuatro operaciones

Prerrequisitos:

- Operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división) hasta 100
- Operaciones combinadas *(Unidad 42)*

Materiales necesarios:

- Objetos de la vida diaria

TALLER

Operaciones combinadas en la vida diaria

Diversas situaciones de la vida diaria exigen una combinación de varias operaciones. Por ejemplo al hacer compras, calcular y comparar precios, calcular el cambio, hacer un presupuesto, etc. También al repartir frutas, galletas, etc. entre los niños, si juntamos cantidades diferentes de objetos diferentes, resultará una operación combinada. Los problemas en la sección "Ahora lo escribimos" tienen por temas algunas de estas situaciones. Intente encontrar situaciones similares en la vida diaria para practicar esta clase de operaciones y razonamientos.

Para empezar, simplemente deje que los niños encuentren algún razonamiento coherente que los lleve al resultado correcto. Para esta clase de problemas normalmente existen varias maneras de resolverlo. – Si los niños han desarrollado su razonamiento un poco más, podemos desafiarlos a que expresen su procedimiento en forma de una sola operación (combinada) escrita.

Para los educadores

Esta clase de problemas requiere diferenciar entre razonamiento aditivo y multiplicativo *(vea Unidad 35, "Principios matemáticos")*. También requiere entender el principio del entero y sus partes, y del producto y sus factores. En breve, requieren la comprensión y la aplicación de todos los principios matemáticos relacionados con las operaciones básicas que hemos tratado hasta ahora.

Esto será más fácil en situaciones prácticas de la vida diaria. Por tanto, intente primero encontrar tales situaciones donde los niños pueden entrenar su razonamiento en la práctica. Lea los problemas en la sección "Ahora lo escribimos" y déjese inspirar por estos problemas a encontrar situaciones similares en su vida diaria.

Resolver los problemas escritos es un paso más difícil, porque es más abstracto. Hay que hacerlo recién después de haber experimentado razonamientos similares en situaciones concretas. – Al resolver problemas escritos, es también una gran ayuda representar la situación con material concreto, y/o hacer un dibujo.

Ahora lo escribimos

Primero intenta resolver los siguientes problemas de cualquier manera. Ayúdate con un dibujo o con material concreto.

Después intenta expresar tu procedimiento con una sola operación (combinada) por escrito. Comprueba si esta operación da el mismo resultado como tu primer razonamiento.

1. Compramos jugo para la fiesta de cumpleaños: 4 botellas de 2 litros, y 5 botellas de 3 litros. ¿Cuánto de jugo es esto en total?

2. Mamá compra en la tienda 3 kg de papas a 3.– el kilo, 4 kg de manzanas a 5.– el kilo, y un litro de jugo a 4.–. ¿Cuánto cuesta todo junto?

3. Anita tiene una canastita de fresas. Ella da 7 fresas a cada una de sus seis amigas, y sobran 13 fresas. ¿Cuántas fresas había en la canastita?

4. Orlando tiene 70 uvas. Regala 6 uvas a cada uno de sus amigos. Le quedan 16 uvas. ¿Cuántos amigos son?

5. Compramos una caja de colores a 6.–, y cuatro cuadernos a 2.– cada uno, y pagamos con un billete de 50.–. ¿Cuánto de cambio deben darnos?

6. Papá compra 9 m de cable a 3.– el metro, un martillo a 25.–, y 3 kg de clavos. Todo junto costó 70.–. ¿Cuál fue el precio de un kilo de clavos?

7. Carlos fabrica cajitas de cartón para vender. De un cartón que cuesta 2.– puede fabricar 3 cajitas. Carlos hace 24 cajitas y las vende a 1.– cada una. ¿Cuánto de ganancia hace?

8. ¿Cuál es el número que dividido entre 8 da 4?

9. Un número se multiplica por 9, al resultado se le resta 22, el nuevo resultado se divide entre 5, y el resultado es 10. ¿Cuál es el número?

10. Una máquina divide entre 4, una segunda máquina suma 5, y una tercera máquina multiplica por 7. Un número pasa sucesivamente por las tres máquinas en este orden, y al final sale 63. ¿Cuál fue el número?

11. Un número multiplicado por 9 es igual al mismo número multiplicado por 8, más 6. ¿Cuál es el número?

*12. En una tienda, una bolsa con 8 kg de papas cuesta 22.–. En otra tienda, una bolsa con 10 kg de papas cuesta 30.–. ¿Dónde es más económico?

*13. Rodrigo hace un juego de saltar. En el piso hay cuadros enumerados del 1 a 10. Rodrigo salta primero del 1 al 2 y de regreso al 1. Después salta del 1 al 2, del 2 al 3, y de la misma manera regresando hasta el 1. Después hace lo mismo saltando hasta el 4 y de regreso, después hasta el 5 y de regreso, y así cada vez un cuadro más lejos hasta llegar al 10. Cuando llega al 10, el juego termina. Los saltos son siempre de un cuadro al que está a su lado, nunca hace saltos más largos.
¿Cuántas veces saltó Rodrigo en total?

(Si intentaron por mucho tiempo resolver los problemas 12 y 13, y no pudieron, entonces pueden ver las pautas en el Anexo A.)

Bloque V: Calcular hasta 1000 (Unidades 44 a 54)

Para entender bien las actividades de este bloque, es necesario dominar los siguientes conceptos y principios:

Principios que rigen la suma y resta (Bloques II y III)

Efectuar sumas y restas mentales hasta 100 (Bloque III)

Concepto de decenas y unidades (Bloque III)

Principios que rigen la multiplicación y división (Bloque IV)

Efectuar multiplicaciones y divisiones mentales hasta 10 x 10, incluida la división con residuo (Bloque IV)

Aplicación de operaciones combinadas sencillas (Bloque IV).

Las actividades de este bloque amplían el espacio numérico hasta 1000. Esto implica una mayor comprensión del sistema decimal. Esto a su vez permitirá también efectuar unas sencillas conversiones entre diferentes unidades de medida.
Se aplica aquí lo mismo como ya dicho en la introducción al Bloque III: No queremos enseñar muchos formalismos en cuanto a la "descomposición" o "codificación" de los números. Nuestra prioridad es la experiencia práctica y la adquisición de un sano sentido numérico.

Asimismo se efectúan las cuatro operaciones básicas en el espacio numérico hasta 1000. Como principio adicional se introduce la ley distributiva. Todo esto sucede mediante material concreto y de forma mental, pero todavía sin introducir los procedimientos escritos de "suma y resta vertical", "multiplicación larga", etc. Los niños necesitan primero consolidar su sentido numérico, y su experiencia con operaciones tanto concretas como mentales. Sin esta base, el aprendizaje de los procedimientos más abstractos los induce solamente a realizar esos procedimientos mecánicamente sin comprender los principios de fondo. Pero si lo hacen sin comprender, están propensos a olvidar el procedimiento y a cometer errores. Por eso esperamos con esos procedimientos escritos hasta el nivel de Primaria II.

En términos del sistema convencional, los temas de este bloque deberían ser suficientes para el nivel del tercer grado de primaria, en cuanto al cálculo numérico (aritmética). Sin embargo, el Bloque VI ofrece unos temas y actividades adicionales que figuran en los currículos escolares para este nivel, pero que requieren un nivel de razonamiento un poco más avanzado para entenderlos bien. Las actividades del Bloque VI pueden llevarse a cabo después del Bloque V, o también intercaladas con las del Bloque V; siempre tomando en cuenta el nivel de comprensión de los niños.

Unidad 44 - Números hasta 1000

Prerrequisitos:

- Operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) hasta 100.

Materiales necesarios:

- Diversos materiales de canje para representar los números; por ejemplo fósforos o mondadientes (y ligas de jebe); material Base 10; dinero (real o de juego); tapas de botellas; según la descripción en el Taller.
- Cartón, tijeras, goma (para fabricar la máquina contadora).
- Balanza exacta (para pesar en gramos).
- Opcional: Cordel de medir *(vea Unidad 31)*.
- Tarjetitas para escribir números.

Para los educadores

Al pasar más allá del cien, la complejidad y las dificultades para imaginarse los números aumentan considerablemente. Estamos sobrepasando el rango de los números que se pueden representar en el ábaco con cuentas individuales. (Se pueden representar números mayores, asignando a las cuentas un valor posicional; pero eso lo haremos recién en el nivel de Primaria II.) En la vida diaria, cantidades mayores a 100 casi nunca se cuentan uno por uno. Aun nosotros como adultos dificultamos en imaginarnos cantidades como 530 personas, 286 lápices, o 927 casas.

Las operaciones con decenas y unidades se pueden todavía llevar a cabo mentalmente sin entender bien el concepto del canje *(vea Unidades 28, 29, 30)*. El niño puede salvar esta dificultad, contando uno por uno en vez de efectuar la operación del canje. Pero cuando las centenas entran en el juego, eso ya no se puede hacer. Ahora es esencial que el niño comprenda el canje, y así empiece a acercarse a un entendimiento del valor posicional.

Entonces, estemos conscientes del gran desafío que significa para un niño, ampliar su rango numérico hasta 1000. Recordemos que a esta edad, un niño necesita la experiencia concreta para poder entender bien un concepto. Sobre el papel es fácil añadir una cifra más a un número. Pero si el niño no puede asociar ninguna imagen concreta con este número, entonces esa cifra adicional carece de sentido para él. La imaginación de un niño en los grados inferiores todavía no puede ver mucha diferencia entre 50 y 500. El sistema convencional exige de los niños que manipulen estas cifras de manera abstracta, según reglas que todavía no pueden comprender ni mucho menos fundamentar. Pero si hacemos eso, el niño comienza a distanciarse mentalmente de la matemática, y no desarrolla su sentido numérico.

Por tanto, antes de dar este salto hasta el 1000, asegurémonos de que los niños ya pueden manejar estas cantidades, con sus manos y con su imaginación. Y démosles suficientes oportunidades para hacer experiencias concretas con estas cantidades, como las descritas en el Taller.

¿Cómo sé si un niño ya entiende los números hasta 1000?

Al hacer las actividades prácticas, podemos observar hasta dónde los niños están desarrollando su sentido numérico. Por ejemplo al hacer estimaciones y después contar: ¿Cuán acertadas están las estimaciones de los niños? – O al representar los números con material concreto: ¿Saben representar correctamente las decenas, centenas y unidades? – O al leer y comparar números escritos: ¿Notan a primera vista si 722 es mayor o menor a 489, o tienen que realizar un procedimiento complicado para descubrirlo?

TALLER

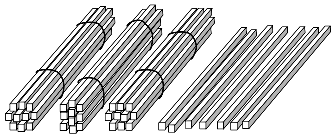
Es probable que los niños ya hayan manejado informalmente números mayores a 100. Sobre todo si están inmersos en nuestras experiencias de la vida diaria, seguramente ya habrán examinado botellas de yogur o de jugo donde dice "250 ml", "500 ml", o envases de tallarines u otros alimentos donde dice por ejemplo "300 g", etc; habrán visto recetas de cocina donde dice "350 g de tomates", "240 g de harina", y otras indicaciones parecidas; habrán jugado juegos donde se juega por puntos y en algún momento habrán llegado a más de 100 puntos; etc.

Tales experiencias concretas son la mejor preparación para el cálculo con números mayores. Pero ahora habrá necesidad de algunas actividades un poco más "formales" para que los niños entiendan bien el manejo de las centenas.

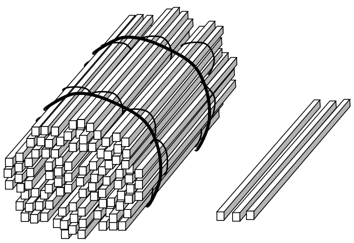
Contar con material de canje

Volvemos a hacer algunas de las actividades de la *Unidad 27*, pero ahora con números mayores. Por ejemplo:

Contamos ***fósforos o mondadientes***. Pueden empezar de nuevo con una cantidad de palitos sueltos (que sean más de 100), los contamos uno por uno, y cada vez que cumplimos una decena, amarramos 10 palitos con unas ligas de jebe. Entonces, si estamos por ejemplo en 37, se verá así:



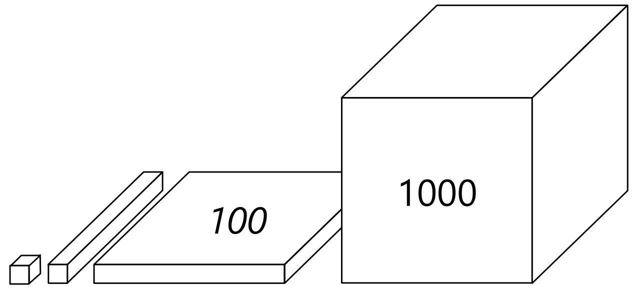
Cuando llegamos a 100, tendremos 10 decenas amarradas. Entonces juntamos estas 10 decenas y las amarramos juntas; así tenemos una centena. Y seguimos contando: 101, 102, 103 ...



Si tenemos ya el material listo (decenas y centenas amarradas) desde una oportunidad anterior, podemos también practicar el conteo con este: Comenzamos con unos palitos sueltos y los contamos uno por uno hasta tener 10. Entonces los canjeamos por una decena amarrada, y seguimos añadiendo palitos sueltos: 11, 12, 13, ... Así seguimos, practicando el canje cada vez que alcanzamos una decena nueva. Al llegar a 100, tenemos que canjear las 10 decenas por una centena, y seguimos añadiendo palitos. Lo mismo cuando llegamos a 200, a 300 ...
Podemos guardar las decenas, centenas, y unos palitos sueltos en una caja con el rótulo "Banco". Un(a) niño(a) puede ser "banquero" y nos da el canje según lo que pedimos. Efectivamente, este proceso es el mismo como cuando canjeamos 10 monedas de 1.– por un billete de 10.–, y vice versa.

Si queremos practicar específicamente el paso de la centena, podemos comenzar de frente con un número cercano a una centena, por ejemplo 292 ó 588, y contar avanzando desde allí. Solamente que eso requiere que los niños ya puedan entender la representación de números arbitrarios *(vea abajo)*.

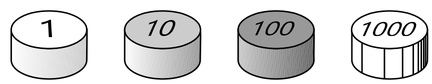
Lo mismo podemos hacer con el ***material Base 10***. Eso es una extensión de las regletas Cuisenaire: Las centenas se representan con cuadrados de 10 x 10 cm y 1 cm de altura; eso corresponde al tamaño de 10 regletas de 10 colocadas juntas. Los millares se representan con cubos de 10 x 10 x 10 cm; eso corresponde al tamaño de 10 centenas puestas una sobre otra.



Con este material podemos hacer las mismas actividades como arriba descritas con los palitos.

Si conviene según la moneda de su país, pueden hacer las mismas actividades con ***monedas*** y/o ***billetes***. O pueden usar dinero de juego como el que se usa para jugar a la tienda.

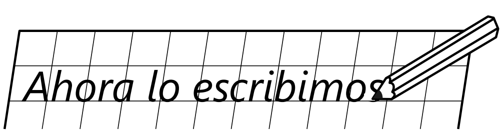
Podemos también fabricar un material de canje "de definición propia", coleccionando tapas de botellas de diferentes colores. Entonces definimos p.ej. que las tapas rojas son unidades, las azules decenas, las verdes valen como 10 azules (o sea, una centena), las amarillas como 10 verdes (o sea, un millar). Podemos escribir estos valores con plumón sobre las tapas:



Llamo a este un material de canje "de definición propia", porque hemos definido los valores de las tapas arbitrariamente, sin ninguna relación con su tamaño o su valor. Por eso, este material es un poco más "abstracto" que los anteriores: no hay ninguna razón obvia por qué canjeamos 10 tapas azules por una verde, eso es solamente porque nosotros lo hemos definido así.
Con este material podemos hacer las mismas actividades. Lo usaremos también para diversas actividades del nivel de Primaria II.

Representar números con material de canje

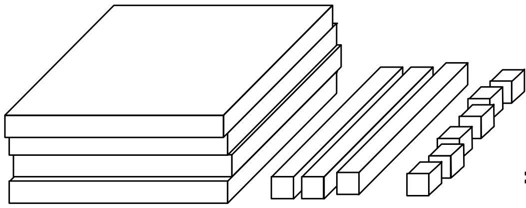
Representemos ahora números cualesquieras con nuestros materiales: "Pon 365 sobre la mesa." – "Pon 899." – Etc. O nosotros ponemos cierta cantidad de centenas, decenas y unidades, para que el niño diga a cuánto equivale. Los niños pueden jugar esto también entre sí, de dos en dos.
Esta actividad se puede hacer con cualquiera de los materiales antes descritos.



Escritura de los números

La escritura de los números es bastante obvia a partir de los materiales de canje, si nos acostumbramos desde el inicio a colocar este material en el mismo orden como escribimos los números (y como también los decimos): las unidades a la derecha, las decenas a su izquierda, y las centenas a la izquierda de las decenas. *(Evitamos decir "las centenas primero", porque si tenemos también millares, los millares vienen primero. Si queremos decir algo acerca de "lo que viene primero", tendríamos que generalizar: "Lo que es más grande, viene primero.")*

Entonces, si tenemos la representación de un número como este, podemos decir enseguida cómo se escribe:



= 436

4 cuadrados **3** regletas **6** cubitos

El juego de las tarjetitas

Ya conocemos este juego de unidades anteriores. Prepare unas tarjetitas con números de 3 cifras. Dé al niño una tarjeta; que represente el número que está escrito. – O de otra manera: Usted representa un número, y el niño lo escribe. – Una vez que los niños entienden como funciona, pueden jugarlo entre ellos, de dos en dos.

Una nota acerca de la escritura de los números en palabras:
Algunos niños escriben erróneamente “docientos”, “trecientos”, “seicientos”. Eso indica que no han entendido cómo se componen los nombres de los números. 200 es “dos - cientos”, 300 es “tres - cientos”, etc. Una vez que los niños entienden esta lógica, escribirán también las palabras correctamente: "doscientos", "trescientos", "seiscientos".

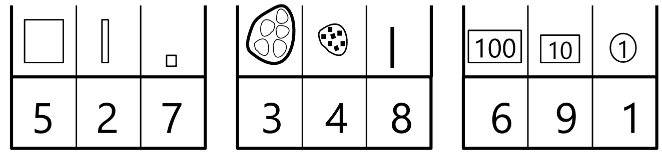
Vocabulario matemático

Millar: Una cantidad de mil.

El tablero posicional

El tablero posicional es una forma de ilustrar los valores posicionales de las cifras. Opcionalmente podemos introducirlo ahora si es que les ayuda a los niños a entender la escritura de los números. Si no les ayuda en este punto, podemos dejarlo todavía hasta el nivel de Primaria II.

Normalmente, las columnas del tablero posicional se rotulan con las abreviaciones U (Unidades), D (Decenas), C (Centenas), etc. Pero para comenzar, es más fácil usar símbolos que representan el material concreto con el cual estamos trabajando. Así podríamos usar las siguientes formas, según el material que estamos usando:

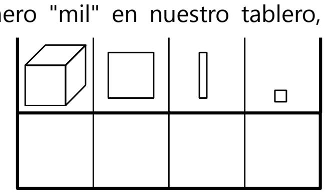


El primer ejemplo representa el material Base 10: La columna izquierda representa los cuadrados de las centenas, la columna del medio las regletas de 10, y la columna derecha los cubitos de unidad. El número 527 corresponde a 5 cuadrados de centenas, 2 regletas de 10, y 7 cubitos de unidad.
El segundo ejemplo representa el material de los fósforos o mondadientes. Los lazos dibujados simbolizan las ligas con las que amarramos los palitos. Así, la decena es dibujada como una liga con palitos dentro; y la centena es dibujada como una liga grande con ligas pequeñas dentro. (Quizás los niños objetarán que habría que dibujar más palitos resp. ligas pequeñas, para que sean 10. Que ellos lo hagan así si quieren ser exactos; pero podemos decirles que son sólo símbolos y no necesitan ser representaciones exactas.)
El tercer ejemplo representa el dinero: Billetes de 100, billetes de 10, y monedas de 1. Así, el número 691 se representaría con 6 billetes de 100.–, 9 billetes de 10.–, y una moneda de 1.–.

Hojas de trabajo

La ***Hoja de trabajo 44.1*** contiene unos ejemplos. Si los niños todavía no usan el tablero posicional, que escriban simplemente los números correspondientes.

Si queremos escribir el número "mil" en nuestro tablero, tenemos que añadir una columna más para los millares. Por ejemplo con el material Base 10:



C	D	U

Una vez que los niños lo entienden con estos símbolos y el material concreto, podemos usar también tableros posicionales con las abreviaciones usuales. – Para los miles se usa M (Millares) o UM (Unidades de millares).

Hoja de trabajo 44.2 *– Para contadores aficionados:*
Esta hoja es opcional, para aquellos niños que tienen la perseverancia de hacerlo. Es una versión un poco más abstracta de la actividad de contar palitos, amarrando siempre 10 con una liga, y después amarrando siempre 10 decenas para formar una centena. Solamente que en vez de palitos tenemos puntos en el papel, y en vez de amarrarlos con ligas, dibujamos una "bolsa" alrededor de los puntos.
Mientras los niños hacen esta actividad, podemos señalar que la matemática nos ayuda a poner orden en las cosas, y eso a su vez nos permite realizar actividades que de otro modo estarían imposibles. Por ejemplo, sería imposible contar estos puntos con exactitud, simplemente tocando cada punto con el dedo. Aun si marcamos cada punto que hemos contado, todavía podemos equivocarnos fácilmente, porque podemos olvidar en qué número estábamos. Pero si los agrupamos de 10 en 10 como en esta actividad, entonces creamos un orden que hace que los puntos sean fáciles de contar.

Hoja de trabajo 44.3 *(arriba) – Escritura de números*
Unas prácticas de escribir números con cifras y con palabras. Ya no será difícil si hicieron las actividades anteriores.

Matemática divina

¿Puedes contar las estrellas?

Dios hizo una promesa extraordinaria a Abraham. De noche lo llevó afuera y dijo: "Mira el cielo y cuenta las estrellas, si las puedes contar. Tantos serán tus descendientes." (Génesis 15:5)

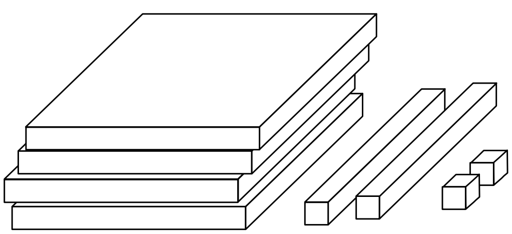
Intenta contar las estrellas en una noche despejada. ¡Eso es más difícil que contar puntos en un papel! – De hecho, es imposible, porque existen muchas estrellas que ni siquiera podemos ver. Mira el cielo con unos binoculares, y verás mucho más estrellas que solamente con los ojos.

Las estrellas son una muestra de cuán grande y poderoso es Dios. Y de hecho, Dios cumplió su promesa y mucho más – por lo menos en lo que se refiere a las estrellas visibles. Existen unas nueve mil estrellas que se pueden ver con el ojo en condiciones óptimas. Pero los descendientes de Abraham hoy en día son muchos, muchos más – varios millones.

TALLER

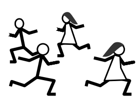
(Continuación)

Contar retrocediendo



Así como hemos contado hacia adelante con nuestros materiales de canje, podemos también contar hacia atrás. Comencemos con cualquier número, por ejemplo 422. Lo podemos representar con el material Base 10. Quitamos unidades, una por una, y contamos: 421, 420 – ahora ya no hay ninguna unidad para quitar. Tenemos que canjear una decena por unidades. Ahora tenemos 4 centenas, 1 decena y 10 unidades. Seguimos quitando: 419, 418, 417 ... y así sucesivamente hasta que tenemos que canjear de nuevo. – Cuando llegamos a 400, tenemos que hacer dos canjes: Primero canjeamos una centena por 10 decenas. Después canjeamos una de las decenas por 10 unidades. Ahora podemos seguir quitando unidades. Al quitar una unidad, tendremos la representación de 399; y seguimos: 398, 397, 396 ...
Ahora, el material de canje nos ayuda también a responder preguntas como: ¿Cuál número viene después de 659? ¿Después de 799? ¿Antes de 300? ¿Antes de 550?

Hoja de trabajo 44.3 *(en el medio, y abajo a la izquierda):*
Unos ejercicios para repasar el conteo hacia adelante y hacia atrás. No será difícil si hicieron las actividades con el material concreto.



El viaje de mil pasos

Iremos a pasear a un lugar cercano, adonde pueden fácilmente llegar a pie. ¿Quizás hay un parque adonde te gusta ir? ¿O están cerca a un río, un bosque, un mirador? – Pero en este paseo vamos a contar nuestros pasos. Piensa de antemano: ¿Hasta dónde serán mil pasos?

Entonces pónganse en marcha, y cuenten vuestros pasos desde el momento en que salen por la puerta. ¡Necesitarán buena concentración! – Puede ser una ayuda, llevar unos objetos que te hacen recordar las centenas. Por ejemplo, puedes poner diez piedritas a tu bolsillo izquierdo, y cada vez que completas una centena, trasladas una de las piedritas al bolsillo derecho. Así no te olvidarás en qué centena estás.

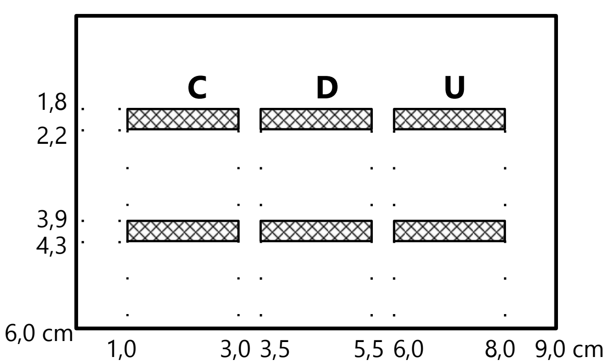
Cuando completes los mil pasos, compara con la estimación que hiciste al inicio. ¿Estás cerca o lejos del lugar adonde pensabas llegar con mil pasos? - Por supuesto que los mil pasos no serán exactamente iguales para todos. Los grandes llegarán un poco más lejos que los pequeños.

Máquinas contadoras

Busque oportunidades para que los niños observen alguna máquina que lleva la cuenta de ciertas cantidades. Por ejemplo una fotocopiadora donde se puede observar el contador del número de copias sacadas; o el medidor de agua o de electricidad; o quizás tienen una antigua reproductora de casetes donde un contador indica el avance de la cinta. Los contadores mecánicos son más interesantes para esta actividad que los digitales, porque podemos reproducir uno de ellos como trabajo manual:

Fabrica tu propia máquina contadora

Corta un pedazo de cartón grueso según el siguiente modelo. - En vez de cortar tres aberturas separadas, puedes también cortar una sola abertura larga y después pegar tiras de cartón encima para hacer las separaciones.



Corta las tres tiras de números de la ***Hoja de trabajo no.44.5*** *(izquierda)*. Pasa cada tira por las aberturas correspondientes del cartón, y junta sus extremos por detrás con pegamento, para que quede en forma de aro:

Con esta "máquina contadora" puedes representar todos los números con 3 dígitos (incluido el cero), desde 000 hasta 999. (Si quieres formar números de cuatro, cinco o más dígitos, entonces fabrica un contador con más tiras de números.)

Practica "contar" con esta máquina igual como lo hace el contador mecánico: Comienza en 000 y avanza la tira de las unidades poco a poco por los números 1, 2, 3, ... hasta 9. Si seguimos avanzando, aparecerá nuevamente el 0. Entonces, para que el conteo sea correcto, tenemos que avanzar en este mismo momento también la siguiente tira (la de las decenas) por una posición, y aparecerá el 1 en las decenas. Así tenemos el número 10, y podemos seguir avanzando las unidades: 11, 12, 13 .... y así sucesivamente. Cada vez que las unidades pasan de 9 a 0, tenemos que avanzar las decenas al número siguiente. – Cuando llegamos al 99 y seguimos avanzando, las unidades pasan de 9 a 0 y las decenas también. Esto significa que ahora también las centenas tienen que avanzar al siguiente número; o sea, tenemos que avanzar las tres tiras juntas, y así llegamos al 100.

Si tienen un contador mecánico a disposición, los niños pueden observar como este realiza automáticamente estos pasos de las decenas y de las centenas. En nuestro contador de papel tenemos que hacerlo manualmente, pero esta actividad ayuda a los niños a razonar por sí mismos cómo funciona el sistema decimal.
Quizás algunos niños tendrán perseverancia para "contar" con esta máquina hasta 999. Otros pueden practicar desde 000 hasta 100 o hasta 200, y después practicar otros intervalos cortos que incluyen el paso de una centena, p.ej. de 688 a 704, o desde 897 hasta 912.
Después pueden hacer retroceder la máquina. Por ejemplo, pónganla en 042 y háganla contar retrocediendo hasta 000. Después practiquen también el paso de una centena retrocediendo: de 405 a 387, o de 813 a 796.

Estimar y medir hasta 1000

Vuelvan a hacer diversas actividades de estimar, pesar y medir *(Unidad 31)*, pero ahora con números y medidas hasta 1000. Por ejemplo:

- ¿Cuántos granos de maíz hay en un vaso grande?

- ¿Cuántos granos de arroz caben en una cucharita? ¿en una cuchara más grande?

- ¿Cuántas letras hay en un párrafo determinado de un libro?

- ¿Cuántas casas hay en nuestra calle entera?

- ¿Cuántos pasos son de aquí hasta la otra esquina; hasta el parque; hasta la tienda; hasta la casa de un amigo? – ¿Pueden estimar y medirlo también en metros? (Usen el cordel de medir; vea *Unidad 31*.)

- ¿Cuántos gramos pesa este libro (o algún otro libro); la olla; una manzana; un coco; un alicate; un vaso con agua; ...? (Usen de preferencia objetos que pesan entre 100 gramos y un kilo.)

Trabalenguas

Si 3 destornilladores destornillan 3 tornillos,

333 destornilladores destornillan 333 tornillos.

Ampliaciones

Contar de 10 en 10 y de 100 en 100

En vez de contar sucesivamente, podemos también contar en pasos de 10 o de 100. Eso se puede hacer con cualquiera de los "materiales de canje": decenas y centenas de palitos; material Base 10; dinero; o el material de las tapas de botellas. O se puede usar la "máquina contadora". Representen un número que no tenga unidades, p.ej. 470. Aumenten decenas y cuenten: 480, 490, – ahora tenemos 10 decenas y tenemos que canjearlas por una centena: 500, 510, 520, etc. – Lo mismo retrocediendo: 720, 710, 700, 690, 680, ... Aquí también, al llegar a 700 tenemos que canjear una centena por decenas para poder seguir quitando decenas.
De la misma manera podemos contar por centenas: 600, 700, 800, 900, 1000 (canjeamos por un millar).

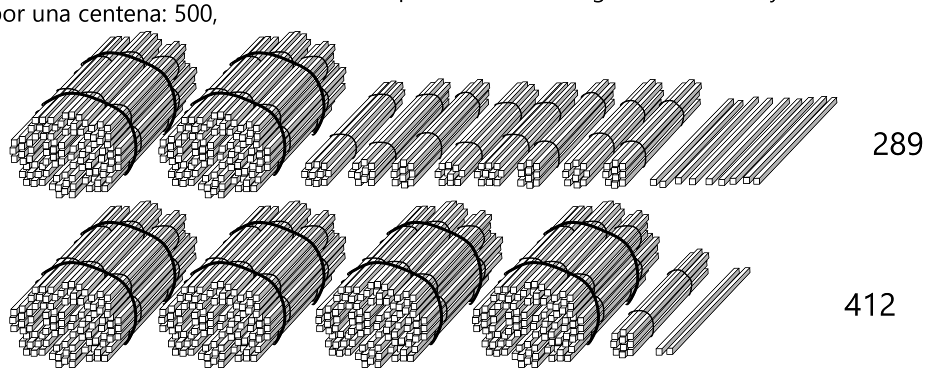
Si desean, pueden escribir algunas de las sucesiones que resultan. O pueden practicarlo en la ***Hoja de trabajo 44.4.***

Ahora podemos hacer lo mismo con números que contienen unidades. Por ejemplo, comenzamos con 267 y aumentamos decenas: 277, 287, 297, 307, 317, ... – Es fácil de ver que el dígito de las unidades es siempre el mismo, porque no cambiamos nada en las unidades.
Así también podemos retroceder por decenas; y podemos avanzar y retroceder por centenas.

Escriban también algunas de estas sucesiones, o practiquen con la ***Hoja de trabajo 44.4.***

Comparar y ordenar números

Las representaciones con material concreto nos ayudan a comparar números entre sí. ¿ 289 es mayor o menor que 412 ? – Si los niños conocen solamente los símbolos abstractos de los números, se pueden confundir: 289 tiene dos cifras "grandes" (el 8 y el 9), mientras 412 no tiene ninguna cifra "grande", entonces pueden pensar que 289 es mayor. Pero si representamos los números con un material concreto, podemos ver enseguida cuál es mayor:



Con este material es muy visible que las centenas tienen más "peso" que todo el resto del número. Así es claro que tenemos que comparar primero las centenas entre sí. – Hagan varias comparaciones de esta clase; y cuando los niños han entendido eso, podemos hacer unos ejemplos donde las centenas son iguales; por ejemplo 541 y 529. Así descubrirán pronto la manera de comparar números.

Si lo pueden hacer bien con material concreto, que lo hagan con los símbolos de los números. Dé a un niño dos tarjetitas con números, y unas tarjetitas con los símbolos <, =, >. Que ponga el símbolo correcto entre las tarjetitas.

367 < 503

Después pueden hacerlo por escrito, en el cuaderno o en las hojas de trabajo.

Un paso más allá es la seriación de números: Tomen cuatro, cinco o más números y ordénenlos de menor a mayor, o de mayor a menor. Si los niños están inseguros en eso, que usen un material concreto para descubrir cuáles son los números mayores. Después pueden ordenar tarjetitas con números, y por fin hacerlo por escrito.

Hoja de trabajo 44.4 *(abajo)* – ***Unir puntos:***
Con esta actividad, los niños practican ordenar números de menor a mayor, o vice versa. Los puntos deben unirse con líneas rectas y ordenadamente según los números, desde el menor hasta el mayor (o vice versa).

Recta numérica hasta 1000

Hoja de trabajo 44.5 *(a la derecha)*: Estas tiras de papel pueden servir como recta numérica hasta 1000 (aunque no cada número está indicado). Al mismo tiempo pueden servir como una cinta métrica que permite medir alternativamente en centímetros o en milímetros.

Corten las cinco tiras y péguenlas por los extremos sombreados para obtener una única tira de un metro de largo. Completen los números. (Los centímetros deben llegar hasta 100, los milímetros hasta 1000.)

Practiquen ubicar números determinados en la parte de los milímetros (la que va hasta 1000). ¿Dónde se encuentra 768? ¿Dónde está 413? ...

Comparen algunas medidas en centímetros y en milímetros: 32 centímetros son igual a 320 milímetros. ¿A cuántos milímetros equivalen 55 centímetros? ¿A cuántos centímetros equivalen 190 milímetros? – Así ya nos estamos preparando para la conversión de medidas *(Unidad 47)*.

- Alternativamente podrían fabricar una recta numérica hasta 1000 a la medida de las regletas Cuisenaire; o sea donde cada número ocupa un centímetro. ¡Pero tengan presente que esta recta numérica tendrá 10 metros de largo!

Aproximar y redondear números

Usen la tira del 1000 para medir diversos objetos en centímetros y en milímetros. Al hacer esto, notarán que la mayoría de los objetos no miden un número exacto de centímetros. Por ejemplo, si miden un lápiz con el lado de los centímetros, podrían ver que mide un poco menos de 12 cm (o sea, 120 mm). Si lo miden después con el lado de los milímetros, podrían resultar 118 milímetros. ¿Son 118 milímetros lo mismo como 12 centímetros? – No exactamente, pero 12 cm es la medida más exacta que podemos obtener con el lado de los centímetros.
Así introducimos mediante la experiencia práctica el concepto de la ***aproximación*** y del ***redondeo*** de números. 118 milímetros son *aproximadamente* iguales a 120 milímetros, si lo *redondeamos* al centímetro más cercano; o sea a la decena más cercana de milímetros.

Hagan una tabla de las medidas de diversos objetos, por ejemplo así:

Objeto	En cm	En mm	En mm *(redondeado)*
Lápiz	12 cm	118 mm	120 mm
Cuaderno (altura)	30 cm	297 mm	300 mm
Mesa (ancho)	75 cm	754 mm	750 mm
...			

Observen los resultados. Notarán que algunos números se han redondeado "hacia arriba", o sea, se hicieron un poco mayores al redondear (118; 297). Otros se han redondeado "hacia abajo" (754). ***¿Por qué?*** (Que los niños intenten encontrar una respuesta, antes de continuar con la actividad.)
- Observen otra vez lo que pasa si medimos estos objetos con el lado de los centímetros. Algunos objetos miden *un poco menos* que el centímetro más cercano; éstos son los que tenemos que redondear "hacia arriba". Otros miden *un poco más* que el centímetro más cercano; éstos son los que tenemos que redondear "hacia abajo".
Comparen estas observaciones con los números que resultaron al medir en milímetros exactos. Mirando solamente el número, ¿cómo podemos decir si hay que redondearlo hacia arriba o hacia abajo?
¿Y qué hacemos con los números que se encuentran justo en el medio entre dos decenas completas? (¿Pueden dar ejemplos de tales números que caen en el medio?) ¿Los redondeamos hacia arriba o hacia abajo?

*(**Nota:** Según las convenciones generalmente aceptadas, esos números "del medio", o sea los que terminan en 5, se redondean "hacia arriba". Eso es porque se asume que el número podría tener otros dígitos (decimales) adicionales detrás del 5, y en este caso sería "un poco más" que 5, o sea un poquito más cerca a la decena superior.)*

Pregunta capciosa:

¿Cuántas papas entran en un costal?

Respuesta en el Anexo A.

Unidad 45 - Sumas y restas hasta 1000

Prerrequisitos:
- Sumas y restas hasta 100
- Números hasta 1000

Materiales necesarios:
- Diversos materiales de canje para representar los números; por ejemplo fósforos o mondadientes, material Base 10, dinero (real o de juego), y otros.

Para los educadores

Acerca del sumar y restar hasta 1000, y prerrequisitos

En esta unidad no se introduce ningún principio matemático nuevo. Todos los principios necesarios para entender estas operaciones se introdujeron ya con las sumas hasta 100. Solamente que ahora se aplican a un espacio numérico más amplio.
Si un niño tiene dificultades con entender las operaciones de esta unidad, eso puede ser debido a que pasó demasiado rápidamente por las sumas y restas hasta 100, y por eso no llegó a comprender realmente los principios. En este caso se recomienda volver a repasar las *Unidades 28 a 33* más detenidamente, para que tenga suficiente tiempo para razonar y entender las situaciones y los principios que se presentan allí.
De todos modos es importante pasar suficiente tiempo con las actividades con material concreto, y no ir demasiado rápidamente al trabajo escrito.

La actividad de "sumar con material de canje" puede entenderse como un ejercicio preliminar para la suma y resta vertical. Sin embargo, *a este nivel todavía no introducimos el procedimiento de la suma y resta vertical.* (La introducción al Bloque V provee una fundamentación por qué.) La meta es que los alumnos lleguen a efectuar estas operaciones *mentalmente*, después de practicarlas con material concreto.
A este nivel es muy importante que los niños logren asociar imágenes concretos y mentales con los números, y que lleguen a distinguir las centenas, las decenas y las unidades entre sí con sus características distintas, para manejarlas correctamente. Los procedimientos "cifra por cifra" borran estas distinciones y tratan las cifras como una mera abstracción; y eso causa confusión en niños de los grados inferiores.

Acerca de los ejercicios para copiar y resolver en el cuaderno

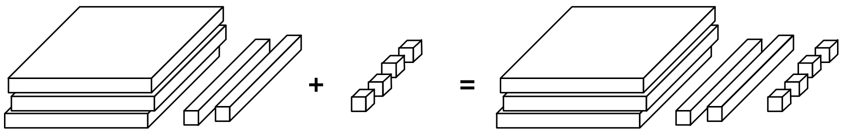
Esta unidad contiene varios ejercicios para copiar del libro y escribir en el cuaderno. Así los niños empezarán a acostumbrarse también a esta forma de trabajo escrito.
Si están usando este libro en familia o con un grupo pequeño de niños, los niños pueden compartir el libro para copiar. En un grupo más grande podemos escribir los ejercicios en la pizarra para que los niños copien aquellos que deciden resolver.

Como siempre en tales ejercicios, no se deben ver todos como "obligatorios". Algunos niños necesitan hacer más ejercicios, otros necesitan menos. Un niño que entiende las operaciones después de unos pocos ejercicios, no necesita hacer más. Un niño que demora más en entender, tendrá que hacer más. (Lo mismo aplica a las hojas de trabajo.)
Pero si un niño hace muchos ejercicios y sigue teniendo dificultades, deberá volver a las actividades con material concreto; o incluso a actividades de las unidades anteriores, porque puede ser que no haya entendido unas operaciones anteriores que son prerrequisitos para éstas. Recuerde siempre: Nuestra meta no es "completar los ejercicios" o "avanzar en el libro"; la meta es llevar al niño al *entendimiento* de la matemática.

TALLER

Sumar con material de canje

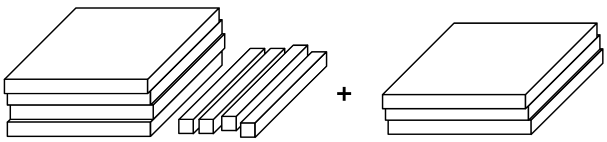
Representen unas sumas con material de canje, de la misma manera como representamos números en la unidad anterior. Solamente que ahora tenemos que representar ambos sumandos. Comiencen con sumas fáciles como 320 + 4, 500 + 78, 606 + 30 (o sea, sumas donde cada sumando tiene ceros en la posición donde el otro sumando tiene cifras "válidas"). Aquí, el resultado se da simplemente uniendo el material para formar un solo número.



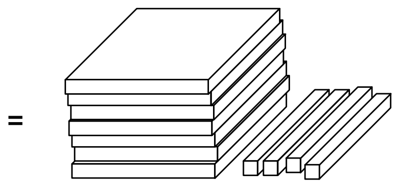
320 + **4** = **324**

Después de hacer unos ejemplos con material concreto, intenten hacerlo mentalmente.

Continúen con sumas donde una posición efectivamente tiene que sumarse, pero todavía sin "llevar": 500 + 200, 820 + 70, 203 + 5, 440 + 300, 210 + 56, etc. Aquí también podemos simplemente unir el material de ambos sumandos para obtener el resultado.



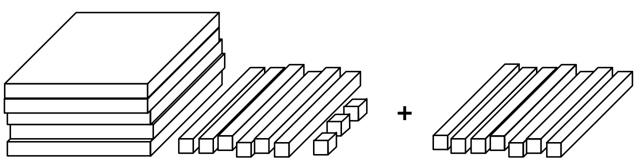
440 + **300**



= **740**

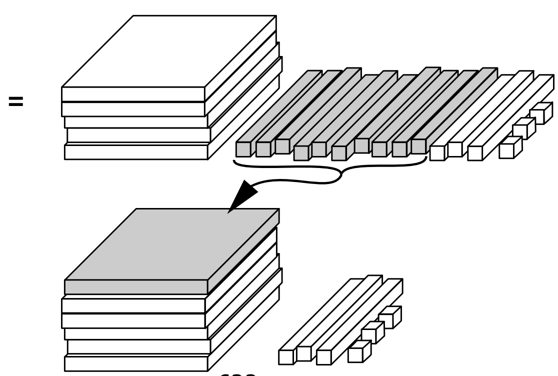
Pueden usar las tarjetas de la ***Hoja de trabajo 45.1-2*** para practicar. La dificultad aumenta desde arriba hacia abajo; entonces pueden usar primero solamente las tarjetas de las primeras dos filas; después las siguientes filas con sumas; y finalmente la penúltima fila de la hoja que contiene las más difíciles (pero todavía sin canje).

Cuando los niños se sienten cómodos con los números de tres cifras, podemos practicar sumas que requieren un canje; por ejemplo 563 + 70:



563 + **70**

Al juntar el material tenemos 13 decenas. Esto significa que 10 de estas decenas deben canjearse por una centena:



= **633**

Hagan otros ejemplos de este tipo: 280 + 27, 409 + 63, 695 + 8, etc.

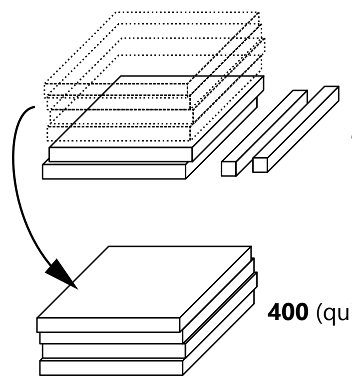
También pueden intentar algunos que requieren dos canjes, pero ¡esos ya requieren bastante concentración para resolverlos mentalmente!

747 + 76, 88 + 35, 964 + 36, etc.

Practiquen con las tarjetas de la ***Hoja de trabajo 45.3-4***. Aquí también, la dificultad aumenta desde arriba hacia abajo; comiencen con las más fáciles.

Restar con material de canje

Ahora podemos hacer lo mismo con restas, como por ejemplo 620 – 400. En este caso puede quizás llevar a confusiones si representamos el 400 con el material, porque eso no es una cantidad que "tenemos", es una cantidad que debemos quitar. Entonces ponemos la operación por escrito, representamos 620 con el material concreto, y ahora la operación consiste en quitar 400 de lo que está en la mesa. Después de hacer eso, tenemos por separado 400 y el resultado de la operación (lo que queda):



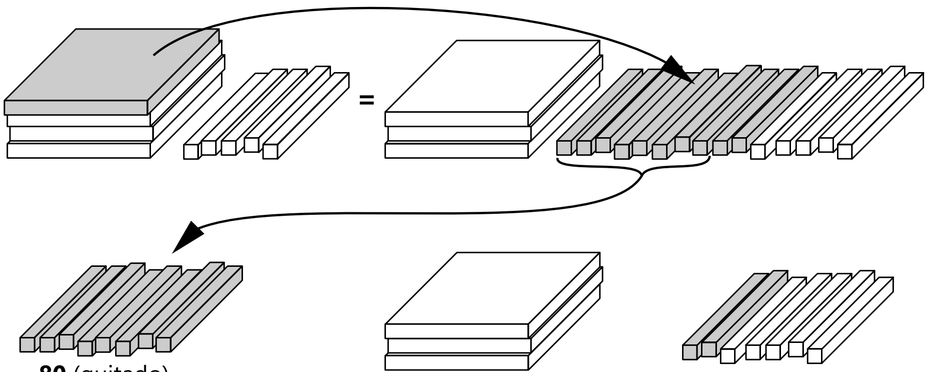
Aumentamos la dificultad poco a poco, como lo hicimos con la suma: Primero unas restas donde tenemos que manipular una sola posición, sin canje; y donde algunas de las otras posiciones contienen ceros: 608 – 7, 980 – 40, 709 – 500, etc.

Después unas más difíciles, pero que todavía no requieren ningún canje:

343 – 40, 853 – 200, 650 – 230, 804 – 303, 299 – 150, etc.

Practiquen con las restas de la ***Hoja de trabajo 45.1-2***, primero las más fáciles (tercera y cuarta fila), después las más difíciles.

Y finalmente pasamos a restas "prestando", o sea con canje. Por ejemplo 450 – 80. Tenemos que quitar 8 decenas, pero hay solamente 5. Entonces nos "prestamos" una centena y la canjeamos por 10 decenas. Ahora podemos quitar 8 decenas y quedan 7:



80 (quitado)

370 (quedan)

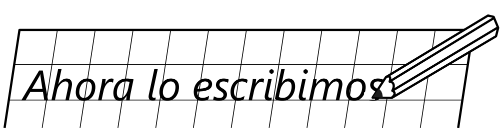
Hagan otras restas con canje, aquí también aumentando la dificultad poco a poco:
624 – 9, 430 – 50, 359 – 70, 1000 – 8, 1000 – 60, 1000 – 230, 510 – 260, 400 – 53, 903 – 66, 340 – 78, etc.
¡Las tres últimas ya son bastante difíciles porque requieren dos canjes!
Usen las tarjetas con restas de la ***Hoja de trabajo 45.3-4***, primero las más fáciles (tercera y cuarta fila), después las más difíciles.

Se recomienda al final hacer un repaso con algunas de las tarjetas en orden aleatorio, para practicar todas las variaciones que pueden ocurrir con esta clase de operaciones.
Las tarjetas no contienen sumas o restas donde en ambos sumandos todas las tres posiciones están ocupadas (tales como 275 + 328, ó 617 – 465). Si desean, pueden inventar también algunas de este tipo y resolverlas con el material concreto. Si los niños tienen una gran capacidad de concentración, pueden incluso intentar resolverlas *mentalmente*. Pero todavía no introduzcan ningún procedimiento de sumar o restar por escrito, cifra por cifra; eso puede causar confusiones a este nivel. *(Vea en "Para los educadores".)*

Pesar y calcular pesos en recetas

Las recetas de cocina brindan muchas oportunidades para practicar operaciones matemáticas. Por ejemplo, una receta de galletas pide como ingredientes: 75 g de mantequilla, 150 g de azúcar, un huevo, 225 g de harina. ¿Cuántos gramos de galletas resultarán? (Por supuesto que habrá que pesar el huevo para poder responder a la pregunta.)
- En este contexto puede surgir una pregunta que ya no está relacionada con la matemática, sino con la física: Si al final pesamos las galletas, probablemente encontraremos que pesan un poco menos de lo que hemos calculado. ¿Por qué?

El mismo proceso de pesar también da lugar a operaciones matemáticas. Dependiendo del tipo de balanza que tenemos, quizás no es posible echar los ingredientes directamente a la balanza. Si echamos la harina a un recipiente y pesamos todo junto, ¿cómo podemos saber cuánto pesa la harina sola? (Si pesamos aparte el recipiente vacío, podremos calcularlo.)
- Si estamos preparando la masa en una fuente y todo junto pesa 345 gramos, y ahora necesitamos añadir 225 g de harina, observando el peso total que muestra la balanza, ¿cuánto tendrá que mostrar la balanza cuando tenemos que parar con añadir harina?
Aprovechen de situaciones como estas en la vida diaria, para practicar el pensamiento matemático.



La ***Hoja de trabajo 45.5*** retoma unos ejercicios relacionados con el principio del entero y sus partes. (Vea las Hojas de trabajo 32.1-2.)

Ejercicios para copiar y resolver en el cuaderno

Copia al cuaderno, resuelve mentalmente y escribe los resultados en el cuaderno.

Haz tantos ejercicios como necesitas para hacer estas operaciones con facilidad.

(Padres y profesores, vean los comentarios en la sección "Para los educadores".)

a) 500 + 36	b) 778 – 40	c) 276 + 408
602 + 80	527 – 200	872 – 360
350 + 44	306 – 8	455 – 85

d) 720 + 89 – 500	e) 349 – 300 + 73
356 + 500 – 90	1000 – 780 – 26
643 + 320 + 37	800 – 403 + 8

f) 325 + __ = 385	g) __ – 200 = 754	h) 500 + 499 = __	i) __ + 1 = 999
__ + 250 = 462	350 = 429 – __	499 + __ = 500	__ = 1 + 999
597 – __ = 230	__ = 600 – 67	__ – 500 = 499	__ – 999 = 1
__ – 308 = 312	600 = 67 + __	__ = 500 – 499	1 = 999 – __
__ + 308 = 312	1000 – __ = 140	500 = __ + 499	999 – 1 = __
299 + __ = 501	490 = __ – 55	499 = __ – 500	999 = 1 + __

Ampliaciones

Máquinas de suma y resta

Hagan algunas actividades de "máquinas" o de la "computadora viviente" *(Unidad 40)*, usando números hasta 1000. Pueden representar los números con material Base 10, o escribirlos en papelitos.
Después pueden resolver la ***Hoja de trabajo 45.6*** *(arriba)*. Como en todos los ejercicios de esta clase, podemos descubrir lo que hace una máquina "incógnita", comparando los números que entran a la máquina con los que salen. Para encontrar números que faltan, puede a veces ser necesario hacer correr una máquina "al revés", o sea, calcular desde la derecha hacia la izquierda y aplicar la operación inversa. Esta hoja no contiene flechas para anotar explícitamente las operaciones inversas, pero los niños las pueden añadir si todavía les parece difícil hacerlo en la cabeza.
La última serie de máquinas contiene dos veces las mismas máquinas, solamente en orden invertido. Como siempre en los ejercicios de este tipo, las máquinas iguales efectúan operaciones iguales.

Resolverlo de la manera más fácil – *Hoja de trabajo 45.6* *(abajo)*

Estos ejercicios funcionan igual como los de la Hoja de trabajo 33.1 (abajo): Podemos intercambiar el orden de las operaciones, mientras mantenemos cada número unido a su signo. Entonces podemos ordenarlas de una manera más conveniente.
Descubrirán que para algunas de estas operaciones es útil poder detectar ***números que se complementan a 100***. Entonces quizás querrán hacer aparte algunos ejercicios como estos:
38 +__= 100,   45 +__= 100,   73 +__= 100, etc.
Pueden hacerlo con material concreto o mentalmente.

Hoja de trabajo 45.7 – Construye puentes

Aquí se trata de escoger inteligentemente entre las piezas que están a disposición, para que su suma abarque exactamente el intervalo dado. En el ejemplo dado en la hoja: ¿Cuáles de las piezas con longitudes 5, 6, resp. 7 podemos usar para cubrir el intervalo de 33 a 45? – La respuesta es que las piezas de 5 y 7 sirven para este propósito, porque 33 + 7 + 5 = 45.
Matemáticamente, estos problemas son una variación del "golf matemático" *(Unidad 33)*. Solamente que aquí no podemos repetir las piezas; podemos usar cada pieza una sola vez.
Según el caso, pueden existir diversos razonamientos que facilitan la tarea un poco. Piénsenlo primero por ustedes mismos. Si piensan que han explorado todas las ideas posibles y todavía necesitan ayuda, pueden ver las pautas en el *Anexo A*.

Problemas de suma y resta

Si tienes dificultades para imaginarte la situación, represéntala con material concreto o haz un dibujo.

1) Elisabet tiene 400 kg de papas para vender. Ya vendió 88 kg. ¿Cuántos kilos de papas le quedan?

2) En la papelería hay 259 lápices para vender. El lunes llegan 500 lápices más. En este mismo día se venden 30 lápices. ¿Cuántos lápices hay ahora?

3) Flor lee un libro con 360 páginas. Ya ha leído 240 páginas. ¿Cuántas páginas le faltan leer?

4) Un camión puede transportar 750 cajas de gaseosa. Ya contiene 326 cajas, y se quieren transportar 500 cajas más. Calcula y saca conclusiones.

5) Juan compra zapatos por 152.– y una camisa por 84.–. Después de pagar, le quedan todavía 64.–. ¿Cuánto dinero tenía Juan?

6) Jorge hace un viaje a la ciudad de su amigo Esteban, que vive a una distancia de 460 km. Jorge ya ha viajado 270 km y ahora hace un descanso. ¿Cuántos kilómetros le faltan viajar todavía?

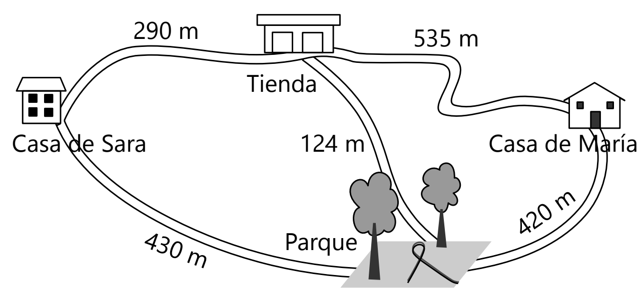
*7) Para recorrer los 588 km desde la ciudad de Álamos hasta la ciudad de Dalias, hay que pasar primero por Baños Fríos y después por Calentura. Desde Álamos hasta Calentura son 410 km; desde Baños Fríos a Dalias son 308 km. ¿Cuántos kilómetros son de Baños Fríos a Calentura?

8) El dibujo abajo muestra unas calles del barrio de Sara y María. Se indican también las longitudes de los caminos. Examínalos bien y responde:

a) ¿Cuál es el camino más corto de la casa de María a la tienda? ¿y cuánto mide?

b) ¿Quién de las dos tiene el camino más corto para llegar al parque?

c) ¿Cuál es el camino más corto desde la casa de Sara hasta la casa de María, y cuánto mide?



¿A dónde vamos desde aquí?

Algunas tareas de la *Unidad 63* ("Razonar con números") requieren sumas y restas de números mayores a 100, y/o una capacidad un poco más avanzada de razonar en cuanto a las sumas y restas: Estas se pueden resolver desde ahora.

Unidad 46 - Multiplicación de decenas, y de números mayores a 10

Prerrequisitos:

- Números hasta 1000
- Multiplicación hasta 10 x 10

Materiales necesarios:

- Material de canje en el sistema decimal:

Decenas y centenas de palitos; material Base 10; dinero; tapas de botellas según la descripción en la *Unidad 44*; etc.

Para los educadores

En este libro se ofrecen dos caminos alternativos para introducir la multiplicación de números mayores, y algunas propiedades adicionales de la multiplicación:

- Puede usar esta unidad y las siguientes (*46, 48* y *49*) para avanzar de la manera acostumbrada.
- O puede en su lugar usar ahora la *Unidad 55*: "Exploramos la multiplicación". Ese "viaje de exploración matemática" pone un mayor énfasis en la investigación y el razonamiento propio del niño. Repasa y amplía el tema de la multiplicación de una manera un poco más profunda, lleva a la multiplicación de números mayores, e introduce también unas propiedades de divisibilidad. Niños que estudian ese "viaje matemático" ya no tendrán necesidad de las unidades *46, 48* y *49;* pero si desean podrán estudiarlas a manera de repaso.

Investigación

Multiplicar fácilmente por 10

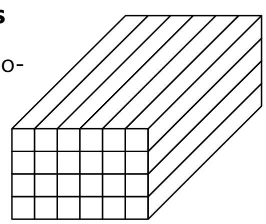
Extendemos la tabla del 10 más allá de 10 x 10. Por ejemplo, podemos usar "materiales de canje" para avanzar de 10 en 10 como en las actividades de ampliación en la *Unidad 44*, y anotamos los resultados. O si los niños ya pueden hacerlo mentalmente, que anoten no más la tabla:

10 x 11 = 110
10 x 12 = 120
10 x 13 = ...

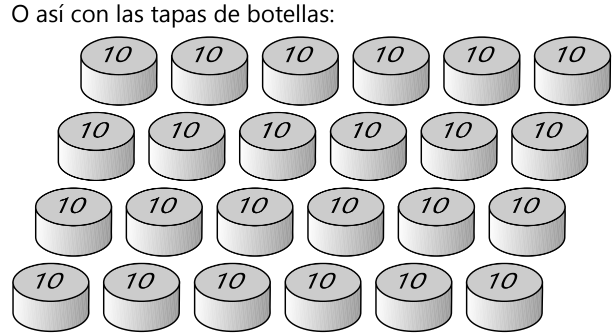
Observen los resultados. ¿Encuentran una propiedad que les ayuda a multiplicar muy fácilmente un número por 10? ¿Pueden decir entonces rápidamente cuánto es por ejemplo 10 x 45, 36 x 10, 79 x 10, etc?

Multiplicación de decenas puras

Representen ahora unas multiplicaciones con números que consisten en decenas puras. Por ejemplo 60 x 4 puede representarse así con regletas Cuisenaire:



O así con las tapas de botellas:



Cuenten o canjeen por centenas, para saber cuánto es el resultado.
Hagan otras multiplicaciones similares. Anótenlas, con sus resultados.
Analicen esta colección de multiplicaciones. ¿Encuentran una propiedad que les ayuda a multiplicar muy fácilmente estos números que consisten en decenas? ¿Pueden decir entonces rápidamente cuánto es por ejemplo 40 x 7, 80 x 9, 5 x 40, etc ?

Nota: La ley matemática que explica esta propiedad es la *ley asociativa*. Vea en la sección "Principios matemáticos"

Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 46.1** – **Tablas de multiplicación de puras decenas

(Arriba): Completa los resultados de estas tablas de multiplicación.
(En el medio): Si encuentras la conexión entre estas operaciones y las tablas que acabas de escribir, será muy fácil.

Hoja de trabajo 46.1 *(Abajo)* – ***Cadena de máquinas***
Ya hicimos ejercicios similares con sumas y restas. (Hojas 33.1, 45.6) Las máquinas iguales realizan la misma operación. Se puede intercambiar el orden de las multiplicaciones sin que eso altere el resultado final (Ley conmutativa).
La pregunta al final pide combinar las operaciones de ambas máquinas en una sola. ¿Cuál operación nos lleva directamente desde el número que entra a la izquierda, al número que sale finalmente a la derecha?

TALLER

Tablas de multiplicación más allá de 10x10

Esta actividad podemos considerar opcional, porque para la mayoría de las necesidades prácticas es suficiente saber las tablas de multiplicación hasta 10 x 10. Pero en algunas situaciones es útil saber algunas tablas adicionales. Entonces si los niños están motivados para ello, pueden ampliar las tablas de multiplicación que conocen hasta ahora. Esto se puede hacer de diferentes maneras. Por ejemplo:

Extiendan las tablas que conocen hasta el 12, usando regletas Cuisenaire o cadenitas de cuentas, y cuenten como en las *Unidades 35 a 37*. Después anoten los resultados. Por ejemplo, ya conocemos la tabla del 4 hasta 4 x 10 = 40. Continuamos en pasos de 4, entonces tenemos:

4 x 11 = 44
4 x 12 = 48

Hoja de trabajo 46.2 y 46.3 – *Une los puntos*
Estos ejercicios requieren unir los puntos (en línea recta) siguiendo el orden de las tablas de multiplicación. Se encuentran algunos puntos "por demás", o sea, que no pertenecen a las tablas; esos hay que ignorar. Así por ejemplo en la tabla del 3, los puntos se unen en el orden 3, 6, 9, 12, ... El 5 y el 8 se pasan por alto porque no pertenecen a la tabla del 3. – La mayoría de estas tablas van más allá del "x 10". Ya se darán cuenta cuando lleguen al último número de la tabla que está allí.
El dibujo de la ***Hoja de trabajo 46.3*** *(arriba)* combina cuatro tablas; o sea, aquí hay que dibujar cuatro trazos en el mismo dibujo, empezando con el 5, el 7, el 8 y el 9, respectivamente.

De estas tablas ampliadas ya podemos obtener inmediatamente las tablas del 11 y del 12. Solamente tenemos que coleccionar las multiplicaciones respectivas de las tablas que hemos anotado, y escribirlas en orden, para tener las tablas nuevas:

11 x 1 = 11	12 x 1 = 12
11 x 2 = 22	12 x 2 = 24
11 x 3 = ...	12 x 3 = ...

Alternativamente, podemos elaborar estas tablas también "contando". Si tienen la paciencia de hacerlo, fabriquen cadenitas de cuentas de 11 y de 12, diez de cada tamaño. Si quieren usar regletas Cuisenaire, entonces el 11 se representaría con una regleta de 10 y un cubito de unidad juntos; el 12 con una regleta de 10 y una regleta de 2 juntas. (Encontrarán que la tabla del 11 es en realidad muy fácil de aprender.)

Si quieren, pueden extender las tablas del 11 y del 12 también hasta x 12:

. . .	. . .
11 x 10 = 110	12 x 10 = 120
11 x 11 = 121	12 x 11 = 132
11 x 12 = 132	12 x 12 = 144

Si los niños están motivados a "coleccionar números", entonces pueden hacer lo mismo con algunas otras tablas que en ciertas situaciones son útiles. Por ejemplo:

- La tabla del 15, porque multiplicaciones o divisiones con 15 ocurren con bastante frecuencia. Más adelante, al calcular con fracciones y números decimales, veremos que aun más frecuente es la multiplicación por 1,5, porque esto corresponde a "añadir la mitad" a una cantidad conocida.

- La tabla del 16, porque 16 pertenece a la sucesión de duplicar un número repetidamente: 1, 2, 4, 8, 16. Por eso, multiplicaciones y divisiones con 16 pueden también ocurrir en diversas situaciones prácticas. Además, la tabla del 16 es importante para personas que se especializan en la programación de computadoras, porque allí se usan frecuentemente números escritos en el sistema hexadecimal, o sea en base 16.

- La tabla del 24 se usa al convertir días en horas.

- La tabla del 25, porque 0,25 es la representación decimal de 1/4, y por eso los múltiplos de 25 ocurren en el contexto de dividir entre 4 usando números decimales.

Por supuesto que el criterio de lo que es "importante" o no, es un poco subjetivo. Quizás hay algún niño que considera el 13 y el 18 como más importantes que los números mencionados; entonces ¿por qué no debería calcular y aprender las tablas del 13 y del 18?

Hojas de trabajo

Repaso de diversas operaciones

Las ***Hojas de trabajo 46.4-7 ("Banderas del mundo")*** repasan diversas operaciones, tales como la división con residuo, la multiplicación de números con decenas, y unas operaciones combinadas.

En la ***Hoja 46.4*** se deben buscar los resultados de las operaciones arriba indicadas, y pintar su campo con el color correspondiente. (Algunos campos quedarán en blanco.)

En la ***Hoja 46.5*** se deben escribir los resultados de las operaciones en la bandera a su lado, una cifra en cada cuadro. Después se pintan los cuadros con los colores indicados arriba en la hoja, cada cuadro según la cifra que contiene.

En la ***Hoja 46.6***, cada bandera es una tarea aparte. En cada campo de la bandera hay un número, el cual debe dividirse por el número indicado en la descripción de la tarea. Según el *residuo* que resulta, se pinta el campo con el color indicado encima de la bandera.

La ***Hoja 46.7*** funciona igual como la Hoja 46.5.

La ***Hoja 46.4*** contiene además el ***código secreto*** para descifrar los nombres de los países que se encuentran escritos en clave al lado o debajo de cada bandera. Para descifrar un símbolo, se debe descomponerlo en sus dos partes y buscar la letra que se encuentra en la intersección de la fila y de la columna de las dos partes. Por ejemplo la letra K se encuentra en la fila del ◇ y en la columna del ×, entonces el símbolo para K es , la combinación de ambos.

Principios matemáticos

La ley asociativa explica la multiplicación de decenas

En la tarea de investigación probablemente descubrieron que el resultado de una multiplicación como 60 x 4 es igual al resultado de 6 x 4, solamente que se aumenta un cero al final. Pero hemos visto que aumentar un cero al final tiene el mismo efecto como multiplicar el número por 10. O sea, 60 x 4 es igual a 10 x 24.

La ley asociativa nos explica por qué eso es así. Descomponemos el 60 en factores: 60 = 6 decenas = 10 x 6. Ahora podemos agrupar los factores de la multiplicación de otra manera, según la ley asociativa:

60 x 4 = (10 x 6) x 4 = 10 x (6 x 4) = 10 x 24 = 240.

- Algunas otras aplicaciones de la ley asociativa en la multiplicación veremos en la *Unidad 49*.

Ampliaciones

Resuelve los siguientes problemas. Si dificultas en imaginarte la situación, haz un dibujo.

1) Un carro viaja a una velocidad de 70 km/h durante cuatro horas. ¿Qué distancia avanza?

2) Un edificio tiene 20 pisos, de una altura de 3 metros cada uno. Calcula la altura del edificio.

3) Un restaurante compra 3 mesas a 100.– cada una, y 12 sillas a 40.– cada una. ¿Cuánto cuesta todo junto?

4) El panadero usa 50 gramos de harina para hacer un panecillo. ¿Cuánto de harina necesita para 20 panecillos?

5) Una botella grande de jugo cuesta 7.–. La caja de 12 botellas cuesta 80.–. ¿Cuánto se ahorra al comprar una caja, en vez de comprar 12 botellas individuales?

6) Un comerciante compró 50 kg de arroz por un precio total de 125.–. Lo vendió por 3.– el kilo. ¿Cuánto fue su ganancia?

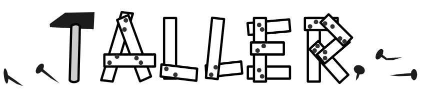
¿A dónde vamos desde aquí?

La siguiente unidad (47), acerca de la conversión de las unidades de medida, se encuentra aquí porque está relacionada con el tema del sistema decimal y de la multiplicación de decenas. Si desean primero completar el tema de la multiplicación, pueden saltar a la Unidad 48 y dejar la Unidad 47 para más tarde.

Unidad 47 - Conversión de medidas

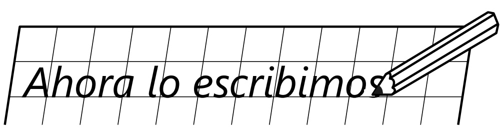
Prerrequisitos:
- Números hasta 1000 *(Unidad 45)*
- Multiplicación de decenas *(Unidad 46)*

Materiales necesarios:
- Regla; Cinta métrica
- Dinero (verdadero y/o de juego)
- Balanza de cocina
- Litrera



Estimaciones y mediciones con metros y centímetros

Busquen oportunidades de medir unas medidas en metros y centímetros. Por ejemplo, midan la estatura de todos los presentes. O midan todas las dimensiones de la sala donde se encuentran: el ancho, el largo y la altura. Lo mismo pueden hacer con otros ambientes de la casa, o con la casa entera. (¿Encuentran una manera práctica de medir la altura de la casa? – Eso puede ser una interesante investigación práctica.)
Para hacerlo un poco más interesante, pueden *estimar* las medidas antes de medirlas. ¿Quién llega más cerca con su estimación? ¿Qué razonamientos usaron para llegar a sus estimaciones?



Tres maneras de anotar las medidas

Para anotar los resultados de nuestras mediciones en metros y centímetros existen tres formas válidas. Podemos practicar estas mientras hacemos nuestras estimaciones y mediciones. Supongamos que Dorotea mide un metro y treinta centímetros. Esto se puede escribir de las siguientes maneras:

- En metros y centímetros: **1 m 30 cm**
- Todo en centímetros: **130 cm**
  (porque 1 m = 100 cm)
- Todo en metros: **1,30 m** (ó **1.30 m**)

En la última forma (1,30 m) estamos expresando que tenemos "un poco más que un metro". El número delante de la coma nos dice cuántos metros hay: **1** metro. El número detrás de la coma nos indica los centímetros: **30** centímetros. Decimos "un metro treinta"; eso es como una abreviación de la primera forma: "un metro y treinta centímetros".

Nota: *Se podría escribir también* ***1,3 m****, porque como número decimal, 1,3 es lo mismo como 1,30. Pero a este nivel todavía no introducimos los números decimales. Entonces, para no confundir a los niños, escribimos siempre dos decimales cuando se trata de metros y centímetros, para que los decimales indiquen el número correcto de centímetros. Así que por ahora escribimos 1,30 m y no 1,3 m, aunque matemáticamente lo último sería también correcto.*

Como ejercicio, escriban sus mediciones en las tres formas, hasta que los niños lo entiendan y se sientan cómodos con estas notaciones.

TALLER *(Continuación)*

Estimar y medir cosas pequeñas (Centímetros y milímetros)

Midamos ahora unos objetos pequeños que podemos medir más exactamente: en milímetros. Lo podemos hacer con una regla, con una cinta métrica (si tiene escala de milímetros), o con nuestra tira del 1000 de la *Unidad 44*.
Por ejemplo: la longitud de un lápiz; el largo, el ancho y el grosor de un libro o de un cuaderno; las medidas de la mesa; el diámetro de la tapa de una olla; etc.
En diversos trabajos prácticos necesitamos medidas exactas: si tenemos que cortar tarjetas de cartulina; si tenemos que remplazar un vidrio de una ventana; ...
Aquí también podemos primero *estimar* las medidas y después medir.

En la escala de la regla podemos ver que dentro de un centímetro hay 10 milímetros. Entonces la conversión entre centímetros y milímetros es un poco diferente de la conversión entre metros y centímetros, porque en los metros y centímetros tuvimos que calcular con el 100.
Pero tenemos las mismas tres maneras de anotar las medidas. Por ejemplo, si una hoja de papel mide 29 centímetros y 7 milímetros, podemos escribir:
- En centímetros y milímetros: **29 cm 7 mm**
- Todo en milímetros: **297 mm** (porque 1 cm = 10 mm)
- Todo en centímetros: **29,7 cm** (ó **29.7 cm**)

Practiquen estas formas de anotar con las mediciones que están realizando.

Hoja de trabajo 47.1 *(arriba)* ***– Medir segmentos en el papel***
Para este ejercicio hay que usar la regla para medir con exactitud los segmentos dibujados. Después escribe las medidas de las tres formas arriba mencionadas.

Para pensar: ¿Cuántos milímetros hay en un metro?

Entonces, ¿puedes explicar por qué los "milímetros" se llaman así? ¿y los "centímetros"?

Canjear dinero

Esta actividad ya es conocida, pero vamos a analizarla ahora bajo el aspecto de la conversión de medidas. En la mayoría de los países, su moneda es subdividida en centavos. O sea, la unidad básica (1 peso, 1 sol, 1 dólar, etc.) equivale a 100 centavos. Probablemente los niños ya están familiarizados con el hecho de que 1.– se puede canjear por 10 monedas de 10 centavos. (O 5 monedas de 20 centavos; o 2 monedas de 50 centavos.) Pero quizás nunca se han puesto a pensar a cuántos centavos equivale entonces la moneda de 1.–. En este caso podemos hacerles esta pregunta ahora. – ¿Y cuántos centavos son 3.–? ¿8.–? ¿10.–? ¿4.80?
Busquen oportunidades de calcular con precios que involucran centavos: al comprar y vender, al hacer un presupuesto, etc. Calculen el precio total de sus compras; el cambio que deben recibir; etc.
Jueguen a la tienda, y practiquen canjear dinero: "Señora, ¿puede sencillarme una moneda de 2.–? Pero quiero unas monedas de 20 centavos."

También es bueno incentivar a los niños a que comiencen algún pequeño negocio propio. Quizás pueden fabricar algún producto útil y venderlo: Galletas, pan, gelatina; cajitas de cartón, tarjetas con adornos, etc. Aparte de proveerles una pequeña ganancia, les enseña a los niños la responsabilidad, la sociabilidad, y diversas habilidades prácticas. Y no por último les enseña a calcular con el dinero, porque tendrán que hacer su presupuesto (¿Cuánto costarán los ingredientes?), fijar un precio de venta sensato (que hagan suficiente ganancia, pero que no sea demasiado caro), llevar la contabilidad de sus ingresos y egresos, etc.
(Volveremos a este tema en el nivel de Primaria II.)

Al hacer compras o ventas y calcular el precio total o el cambio, notarán que hay diversas maneras de hacerlo. Por ejemplo, se puede calcular todo en centavos y hacer la conversión al final:
- Compramos 8 huevos, a 60 centavos cada uno. ¿Cuánto cuestan?
Podemos calcular 8 x 60 = 480 centavos, eso equivale a 4.80.
- Compramos zanahorias por 2.80 y arvejas por 4.60. Pagamos con un billete de 10.–. ¿Cuánto de cambio tienen que darnos?
Podemos convertir los precios en centavos y calcular así:
1000 – 280 – 460 = 260, eso equivale a 2.60.
(O en dos pasos: 280 + 460 = 740, 1000 – 740 = 260.)

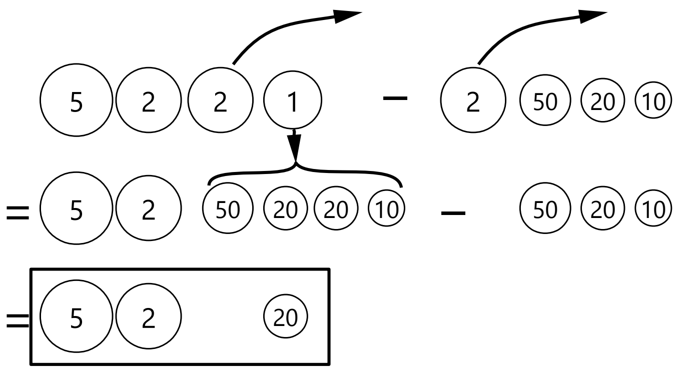
Pero notamos en el segundo ejemplo que eso puede volverse un poco complicado; y los números pueden fácilmente exceder el 1000. En un caso así puede ser más fácil calcular con los enteros, y convertir a centavos solamente donde es necesario. Por ejemplo así:

10.– – 2.80 = 8.– – –.80
= 7.– + 100 centavos – –.80 = 7.20

7.20 – 4.60 = 3.20 – –.60
= 2.– + 120 centavos – –.60 = 2.60

O sea, en un primer paso restamos los enteros. Después canjeamos un entero por centavos (si es que el canje es necesario), y de allí restamos los centavos.

Esto puede parecer un poco complicado cuando se escribe así, pero en realidad es lo mismo como siempre lo hicimos cuando practicamos restas con canje, usando un material concreto. Practíquenlo con monedas, y encontrarán que esta manera de hacerlo es realmente útil para el cálculo mental.



Quizás aun más práctico es el método que usan la mayoría de los vendedores y cajeros para dar el cambio: Ellos *complementan* el precio total, hasta alcanzar el monto que les hemos dado. Primero juntamos los precios individuales para llegar al precio total:

2.80 + 4.60 = 6.– + 140 centavos = 6.– + 1.40 = 7.40

Y ahora complementamos los 7.40 hasta alcanzar 10.–. Con monedas verdaderas se haría así:

7.40 ***+ –.10*** = 7.50
7.50 ***+ –.50*** = 8.–
8.– ***+ 2.–*** = 10.–

Juntamos todas las monedas que hemos añadido: 2.– + –.50 + –.10 = 2.60.
En el cálculo mental podemos hacer lo mismo. Solamente que nos podemos ahorrar un paso: De 7.40 podemos saltar de frente al entero siguiente:

7.40 ***+ –.60*** = 8.–
8.– ***+ 2.–*** = 10.–   2.– + –.60 = 2.60.

Practiquen situaciones como estas al jugar a la tienda, y al ir de compras de verdad.

Recuerde que a este nivel todavía no introducimos la suma y resta vertical. Los niños necesitan primero hacer sus experiencias prácticas con las monedas y con otros materiales de canje, para formarse una imagen mental de estas operaciones. Podemos notar que cumplieron este proceso con éxito cuando son capaces de hacerlo mentalmente, sin tener el material en la mano y sin anotar nada. Sólo entonces serán capaces también de entender lo que hacen cuando más tarde usarán procedimientos más abstractos.

Puede ser necesario explicar a los niños la notación especial que usamos con el dinero, porque es diferente de la notación de otras unidades de medida. Si tenemos por ejemplo 0 metros y 60 centímetros, escribimos **0,60 m**. Pero si tenemos 60 centavos, escribimos **–.60**. En la posición de los enteros, en vez de un cero escribimos una rayita –. O sea, esta rayita no es un signo "menos"; es un remplazo del cero.
De la misma manera con los enteros sin centavos. Si tenemos 4 metros exactos, podemos escribir **4,00 m**, o simplemente **4 m**. Pero con el dinero escribimos **4.–**. Ahora, la rayita ocupa la posición de los centavos y remplaza los ceros que se escribirían allí.
Note que este uso de la raya horizontal está limitado a la notación de los montos de dinero. Si la usamos de esta manera en otros contextos, causamos confusiones.

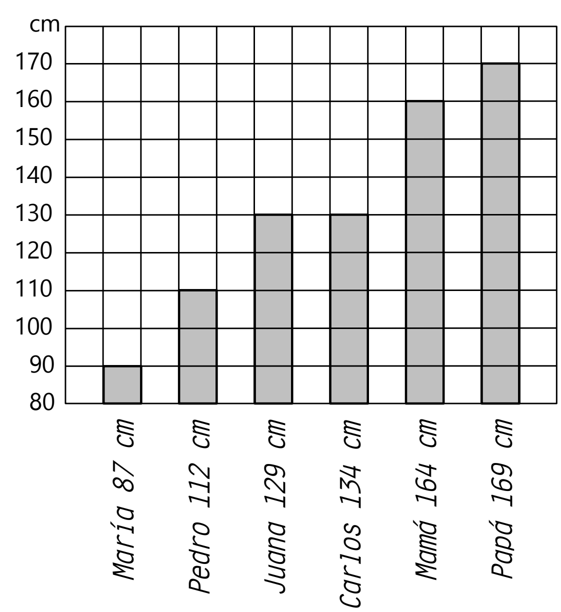
Pesos y volúmenes

Hagan más experiencias pesando objetos, ingredientes para recetas de cocina, etc. (Vea las sugerencias en la *Unidad 45*.)
Todavía no es necesario que los niños conviertan kilogramos en gramos y vice versa, porque eso requeriría números mayores a mil. Pero observando la escala de una balanza de cocina, ya pueden observar que 1 kg = 1000 g.

De la misma manera podemos medir volúmenes de líquidos en mililitros con una litrera: ¿Cuánto de agua es una taza llena? ¿o un plato de sopa?
Y aquí también, observando la escala de la litrera, podemos ver que 1 *l* = 1000 *ml*.

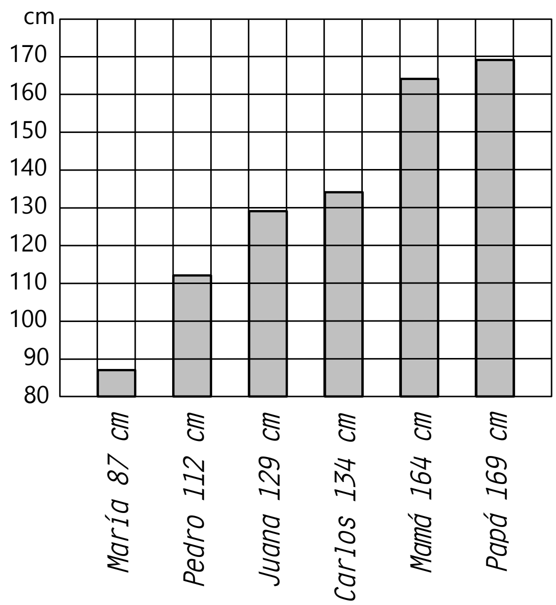
Gráficos de barras para representar las mediciones

Representen con gráficos de barras algunas de las mediciones que hicieron. Si midieron diversos objetos similares, puede ser una buena idea ordenar sus medidas de menor a mayor, o vice versa. Así por ejemplo podrían representar la estatura de cada miembro de la familia en un gráfico donde un cuadradito corresponde a 10 cm:

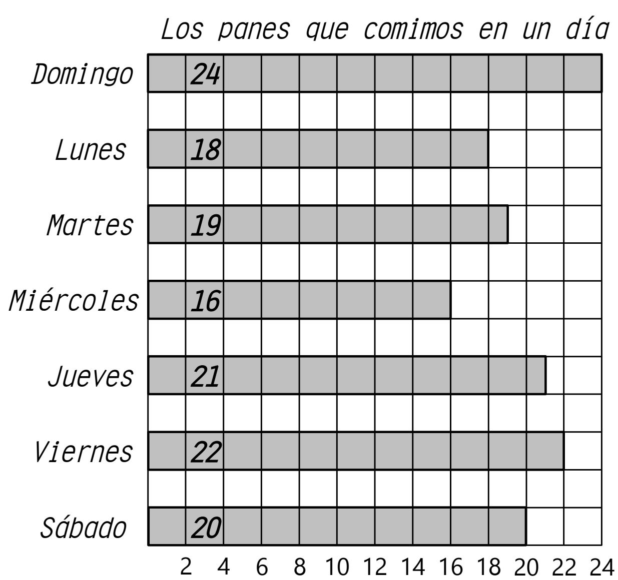


En este gráfico hemos redondeado todas las medidas a la decena más cercana, para que resulten cuadraditos enteros. En la *Unidad 44* ya practicamos cómo aproximar números. – Notamos también que el gráfico no comienza con cero. Ya que aquí ningún miembro de la familia mide menos de 80 cm, no es necesario considerar los números menores.

Alternativamente podríamos estimar las porciones de los cuadraditos que corresponden a las medidas exactas. En este caso, el gráfico resultaría así:



No solamente las mediciones pueden representarse de esta manera; lo mismo podemos hacer con cualquier clase de conteos y estadísticas. Por ejemplo pueden elaborar una estadística acerca del consumo de pan en la familia: Cada día cuentan cuántos panecillos comen, y después hacen un gráfico como este:



(Notamos que un gráfico como este se puede dibujar en horizontal o también en vertical, según les parece conveniente.)

Lo mismo pueden hacer con el consumo de otros alimentos: huevos, papas, frutas, leche, ...

Algunas otras ideas para proyectos de medición o conteo:

Hagan unas ***"mini-olimpiadas"*** y midan los logros de cada niño en algunas disciplinas deportivas. Los mismos niños pueden ayudar a hacer las mediciones. Pueden medir de cada uno: cuán lejos puede saltar; en cuántos segundos puede correr los cien metros; en cuántos segundos puede subir las gradas; cuán lejos puede tirar una pelota; cuántas veces seguidas puede saltar la soga; etc. Representen los resultados con gráficos de barras.

Investiguen cuáles son ***las letras más frecuentes en el idioma español.*** Escojan algún texto de pocos párrafos. Cuenten y anoten cuántas veces ocurre en el texto la letra "a", cuántas veces la "b", etc. Después hagan un gráfico del resultado.

Una manera práctica de hacer el conteo consiste en hacer de antemano un lista de todas las letras del abecedario. Un niño dicta en orden las letras del texto, y otro niño marca en la lista con palitos las letras correspondientes.

Hagan una ***estadística del tráfico*** en la calle donde viven: Cuenten cuántos carros pasan en una hora. Hagan eso en las diferentes horas del día y elaboren un gráfico: ¿Cuántos carros pasan entre las 6 y las 7 de la mañana? ¿De 7 a 8? ¿De 8 a 9? etc. Entonces podrán ver en el gráfico cuáles son las horas punta, y en cuáles horas hay menos tráfico.

Para hacerlo en la práctica será necesario que se turnen varias personas para hacer el conteo. Y no es necesario hacer todo en un mismo día: pueden por ejemplo en un día contar de 6 a 7 y de 8 a 9, y en otro día de 7 a 8 y de 9 a 10, etc. Solamente tomen en cuenta que los sábados y domingos el patrón del tráfico es diferente. Entonces hay que hacer toda la estadística en los días de lunes a viernes. Después, si se animan a hacer otra, pueden hacer el mismo conteo para los sábados y domingos, y compararlo con los resultados de los lunes a viernes.

Elaborar gráficos como estos es también una forma de conversión de medidas, solamente que nosotros mismos definimos el factor de conversión.

Hoja de trabajo 47.1 *(abajo)* ***– Interpretar un gráfico de barras***

Observen el gráfico a la derecha y descubran las medidas que representa. Para eso hay que descubrir cuánto vale un cuadradito (cuántos centímetros), y qué significa cuando una barra termina en el medio de un cuadradito.

Busquen gráficos similares en el diario, en páginas web, etc, y practiquen interpretar los datos juntos con los niños.

Principios matemáticos

Partes grandes y partes pequeñas

Al convertir medidas, aplicamos un principio que interviene también en otras situaciones. Este principio es importante en el razonamiento multiplicativo, o sea, para entender situaciones de multiplicación y división. Lo podemos formular de la siguiente manera: ***Cuánto más pequeñas las partes, más partes necesitamos.*** O vice versa: ***Cuánto más grandes las partes, menos partes necesitamos***.

Por ejemplo, un milímetro es más pequeño que un centímetro. Entonces, una medida en milímetros nos da un número *mayor* que la misma medida en centímetros. (6 cm = 60 mm) Aun podemos decirlo con números exactos: Ya que hay 10 milímetros en un centímetro, la medida en milímetros es 10 veces la misma medida en centímetros.

Para los educadores

En la sección de "Ampliaciones" se presentan diversos problemas que involucran medidas. Como siempre en esta clase de problemas, si los niños dificultan en imaginarse la situación, que la representen con materiales concretos o que hagan un dibujo.

Para razonar correctamente en los problemas de suma y resta, necesitamos aplicar constantemente el principio del entero y sus partes. Por eso es tan importante que los niños ya hayan entendido bien este principio con las unidades anteriores donde se introdujo.

Ya que se trata de situaciones reales, se recomienda también pensar siempre si los resultados obtenidos son razonables. Por ejemplo, si a un niño le sale como respuesta que una casa tiene una altura de 1,20 m, obviamente hay un error en el cálculo, porque no existen casas tan bajas.

(En los problemas con dinero, los números indicados pueden no corresponder al valor de la moneda de su país. Si es necesario, puede adaptar los números o los problemas de manera correspondiente.)

Ampliaciones

Problemas con medidas y dinero

Si no puedes resolverlo en la mente, pruébalo o haz un dibujo.
Piensa si tus soluciones son razonables.
Resuelve y calcula situaciones similares que se dan en tu casa.

1) Claudia mide 1,34 m. Mónica mide 6 cm menos que Claudia. Alicia mide 15 cm más que Mónica. ¿Cuánto mide Mónica, y cuánto mide Alicia?

2) La casa de Carlos tiene dos pisos. El primer piso tiene una altura de 2,80 m. El segundo piso es en 30 cm menos alto que el primero. ¿Cuál es la altura de la casa entera?

3) La casa de Andrea tiene tres pisos y tiene una altura de 8 metros. Si el primero y el segundo piso tienen ambos una altura de 2m 80cm, ¿cuál es la altura del tercer piso?

*4) Una casa de tres pisos tiene 7,40 m de altura. El tercer piso comienza a 5,20 m sobre el suelo. El segundo y el tercer piso juntos tienen una altura de cinco metros. Calcula la altura de cada piso.

5) ¿Cuántos metros de lana se necesitan para poder cortar 5 piezas de 60 cm cada una?

6) Mamá quiere hacer cortinas para las ventanas de la sala grande. Hay dos ventanas de 1,30 m de largo y una de 180 cm. ¿Cuántos metros de cortina se necesitan?

7) En la papelería se almacenan cuadernos. Un cuaderno tiene un grosor de 8 mm. ¿Cuántos centímetros mide el espacio que ocupan 80 cuadernos en la repisa?

8) Para una instalación se necesitan 4,60 metros de tubo. El gasfitero tiene un tubo de 2 metros y otro de 140 cm. ¿Le alcanza para completar la instalación? ¿Cuánto de tubo sobra, o cuánto falta?

9) En una hoja de papel A4 (21 cm de ancho y 29,7 cm de alto) se quiere centrar una imagen, de manera que por todos los lados quede un margen de 17 mm. ¿Cuál es el ancho y el alto de la imagen?

*10) En la fiesta de cumpleaños de Fernando se necesita formar una mesa de 3,10 m de largo. En la casa hay tres mesas de 75 cm, dos mesas de 85 cm y una mesa de 110 cm. ¿Cuáles de estas mesas hay que juntar para obtener el tamaño deseado?

*11) El carpintero tiene tres maderas de 3 metros de largo. Necesita tres piezas de 80cm, dos de 90 cm, y tres de 1m 40cm. ¿Cómo tiene que cortar las maderas para obtener las longitudes deseadas?

*12) El carpintero tiene varias tablas de 3 m de largo. Para un trabajo necesita tres tablas de 80 cm, una tabla de 1 m, dos tablas de 1,20 m y dos tablas de 1,40 m. ¿Cómo puede cortar las tablas de 3 m para usar un mínimo de ellas? ¿Cuántas tablas de 3 m necesita? ¿Cuánto sobrará de ellas?

13) ¿Cuánto cuestan 6 panecillos, a 30 centavos cada uno?

14) En el mercado venden huevos a 40 centavos. Mamá compra 8 huevos y paga con una moneda de 5.–. ¿Cuánto de cambio recibe?

15) Fabiana tiene 5.–. Compra un cuaderno a 1.20 y unos lápices. Si un lápiz cuesta –.80, ¿cuántos lápices puede comprar a lo máximo? ¿y cuánto de cambio recibe?

16) De 5 hojas se quieren sacar 6 fotocopias de cada una. Si una copia cuesta 10 centavos, ¿cuánto cuestan todas las copias juntas?

17) En la tienda compramos fideos por 3.60, papas por 1.80, y un coliflor. Pagamos con un billete de 10.– y recibimos 3.40 de cambio. ¿Cuánto costó el coliflor?

¿A dónde vamos desde aquí?

Más temas relacionados con unidades de medida se encuentran en las Unidades 53 (El calendario) y 54 (Horas, minutos y segundos).

La Unidad 59 (El promedio) amplía el tema de los conteos y estadísticas.

Las unidades siguientes (48 y 49) introducen la multiplicación de números de dos cifras. Alternativamente se puede trabajar el tema de la multiplicación también con la Unidad 55 (“Exploramos la multiplicación”), la cual enfatiza más fuertemente la investigación propia del alumno.

Unidad 48 - Multiplicación de números con dos cifras; Ley distributiva

Prerrequisitos:

- Números hasta 1000
- Multiplicación hasta 10 x 10
- Multiplicación de decenas *(Unidad 46)*

Materiales necesarios:

- Material de canje en el sistema decimal:

Decenas y centenas de palitos; material Base 10; dinero; tapas de botellas según la descripción en la *Unidad 44*; etc.

Investigación

Representa la multiplicación 28 x 4 con material concreto (por ejemplo regletas Cuisenaire).

¿Encuentras una manera de calcular mentalmente el resultado?

Haz lo mismo con otras multiplicaciones de números con dos cifras: 7 x 36, 42 x 9, etc. (Inventa tus propias multiplicaciones.)

¿Encuentras un procedimiento que funciona de la misma manera con todas estas multiplicaciones?

Nota: No existe un "único procedimiento correcto". Estas multiplicaciones se pueden calcular de diversas maneras. Si están haciendo esta investigación con 3 a 6 personas, pueden ponerse el reto de que cada persona encuentre un procedimiento *distinto*.

(Padres y profesores, lean también los comentarios en la sección "Para los educadores" a continuación.)

Para los educadores

Permita que los niños inventen sus propios procedimientos

Acerca de la tarea de investigación, aquí hay una posibilidad de representar 28 x 4 con regletas Cuisenaire:

10	10	8
10	10	8
10	10	8
10	10	8

De esta representación ya se pueden deducir dos procedimientos posibles para calcularlo. Para encontrar otros procedimientos se necesita un poco más de ingenio. Tome en serio la nota de que no existe un "único procedimiento correcto". Al hacer la investigación juntos, permita que cada niño presente su propio procedimiento. Permita también distintas representaciones concretas de las operaciones. Todo es válido, mientras no se violan los principios de la matemática. Entonces no diga "Así no se hace", si un niño presenta un procedimiento inusual. Revíselo primero; quizá es matemáticamente correcto. Incentive la creatividad matemática.

Si están trabajando en grupo, una manera práctica de permitir que cada niño encuentre su propio procedimiento, es la siguiente: Primero, cada niño trabaja por sí mismo, representando la operación y calculando mentalmente el resultado. Cada niño, cuando llega al resultado, levanta su mano, pero *sin decir nada*. Esperen hasta que todos los participantes tengan la mano levantada. Hay que dar a cada uno el tiempo que necesita para terminar su operación. Entonces cada uno da su resultado y explica cómo llegó al resultado. Valore la diversidad de procedimientos posibles.

Si algunos niños se sienten muy "expuestos" al tener que explicar sus resultados ante los demás, o si temen que los demás se burlarían si se equivocan, entonces se puede usar la siguiente variación: En vez de levantar la mano, el niño que llegó a un resultado lo susurra al oído de un adulto. En el caso de que está equivocado, tiene la oportunidad de corregirlo antes de tener que compartirlo con los demás.

Otra posibilidad consiste en retar a los niños que cada uno encuentre un procedimiento *distinto*, como se sugiere en la descripción de la tarea. En este caso pediríamos primero a los niños menos capaces que presenten su procedimiento, y los más inteligentes o más "avanzados" tendrán que esperar hasta el final, porque para los últimos la tarea es más difícil.

(¿No cree que se puede multiplicar 28 x 4 hasta de seis maneras distintas? – Para los curiosos, en el *Anexo A* hay seis procedimientos útiles, lógicos, y matemáticamente correctos. Pero antes de mirar allí, inténtenlo ustedes mismos.)

Solamente si ocurren errores de razonamiento, tenemos que intervenir corrigiendo. Normalmente, los razonamientos equivocados llevan a resultados equivocados; entonces es suficiente que el niño compare su resultado con los resultados de los otros niños para darse cuenta de que algo está mal. En este caso también valoramos el esfuerzo que el niño realizó, y al mismo tiempo lo animamos a buscar dónde está el error en su razonamiento.
Más difíciles son los casos donde un niño llega al resultado correcto con un razonamiento equivocado. Por ejemplo, al multiplicar 28 x 4, un niño podría decir que sumamos las cifras de los números (2 + 8 + 4 = 14) y multiplicamos esta suma por 8. Por casualidad, esto da efectivamente 112, el resultado correcto – pero el razonamiento es equivocado. Para analizar esta situación, puede ayudar si decimos al niño que aplique el mismo procedimiento a un ejemplo con números distintos. Por ejemplo, 28 x 5 se calcularía en este caso así: (2 + 8 + 5) x 8 = 15 x 8 = 120, pero este resultado es equivocado. Entonces, el procedimiento entero es equivocado – aunque en casos excepcionales puede llevar al resultado correcto. Un procedimiento correcto "funciona" igual en todos los casos comparables.

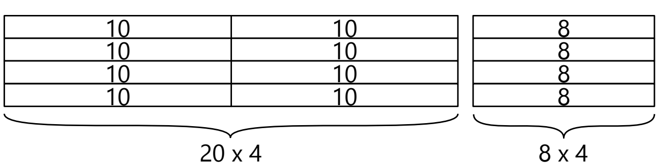
En el Taller de esta unidad practicamos exclusivamente el método basado en la ley distributiva, descomponiendo decenas y unidades. No es que este método sea "mejor" que otros; pero es uno de los que más fácilmente se pueden generalizar, o sea, se puede hacer de la misma manera para todas las multiplicaciones de este tipo. Y es también el procedimiento que en el nivel de Primaria II ayudará a los niños a comprender por qué funciona la multiplicación por escrito, cifra por cifra (un procedimiento que todavía no introducimos al nivel de Primaria I).

Algunos otros procedimientos posibles se practicarán en la siguiente unidad (49).

TALLER

Usamos la ley distributiva para multiplicar números grandes

Volvamos a la representación de 28 x 4 en forma de rectángulo con regletas Cuisenaire. (Vea en la sección "Para los educadores".) Posiblemente ya han descubierto en la actividad de investigación que este rectángulo se puede separar en dos rectángulos, uno con decenas y el otro con unidades:



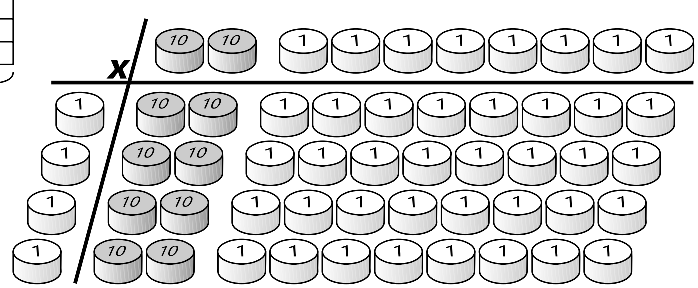
Estos dos rectángulos corresponden a las multiplicaciones 20 x 4 y 8 x 4. Si sumamos los resultados de estas dos multiplicaciones, tenemos el resultado de la multiplicación entera.
Notamos además lo siguiente: Si separamos los rectángulos de esta manera, cada "tren" de 28 se separa en una parte de 20 y una parte de 8. Cada una de estas partes se multiplica por separado, para decir así. O sea, podemos escribir la operación entera de esta manera:

28 x 4 = (20 + 8) x 4 = (20 x 4) + (8 x 4) = 80 + 32 = 112.

O dicho en palabras: Para multiplicar un número de dos cifras, podemos multiplicar las decenas por separado y las unidades por separado, y finalmente sumar los resultados de estas multiplicaciones. Esto es una aplicación de la *ley distributiva. (Vea en "Principios matemáticos".)*

Como hemos visto en la actividad de investigación, este no es el único procedimiento posible. Pero es el más usual, y vamos a practicarlo un poco más.

Representen diversas multiplicaciones de esta manera, y calculen sus resultados. En vez de las regletas podemos usar otros materiales. Aquí por ejemplo tenemos la misma multiplicación representada con tapas de botella:



(Afuera de las líneas gruesas representamos los factores, uno horizontalmente y el otro verticalmente. Entonces el rectángulo a la derecha y debajo de las líneas gruesas representa el resultado.)

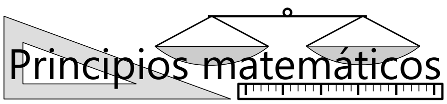
Para saber cuánto es el resultado, pueden usar las siguientes alternativas:

a) Hagan los canjes necesarios con el material para poder decir cuánto vale todo junto. En el ejemplo de arriba, las 32 unidades (4 regletas de 8, ó 32 tapas de botella) pueden canjearse por 3 decenas (y quedan 2 unidades). Entonces tenemos en total 11 decenas. 10 de estas pueden canjearse por una centena, y queda una decena. Tenemos 1 centena, 1 decena y 2 unidades, eso es 112.

b) Calculen mentalmente las multiplicaciones parciales, anoten sus resultados, y súmenlos mentalmente: 28 x 4 = 80 + 32 = 112.

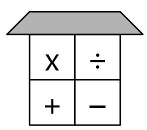
c) Por último, cuando dominan mejor el proceso, hagan la operación entera mentalmente. Esto es más exigente porque tienen que mantener en la memoria el resultado de la primera multiplicación mientras calculan la segunda. Pero con un poco de práctica lo pueden lograr.

Para practicar pueden inventar sus propias multiplicaciones, o pueden usar las tarjetitas de la ***Hoja de trabajo 48.1-2.***



La ley distributiva

La ley distributiva nos explica por qué podemos multiplicar un número grande "por partes". Pero eso es solamente una de sus muchas aplicaciones. La ley distributiva se aplica a casi todas las combinaciones de una operación del "segundo piso" con una operación del "primer piso": la multiplicación de una suma, la multiplicación de una resta, la división de una suma, y la división de una resta:



(20 + 8) x 4 = (20 x 4) + (8 x 4)

(20 – 8) x 4 = (20 x 4) – (8 x 4)

(80 + 32) ÷ 4 = (80 ÷ 4) + (32 ÷ 4)

(80 – 32) ÷ 4 = (80 ÷ 4) – (32 ÷ 4)

Practicaremos la aplicación a la división en la *Unidad 51.*

Este mismo principio rige también las multiplicaciones y divisiones "largas" por escrito, que practicaremos en el nivel de Primaria II.
En el nivel de Secundaria I estudiaremos aplicaciones de la ley distributiva a las potencias y raíces, y a operaciones algebraicas.

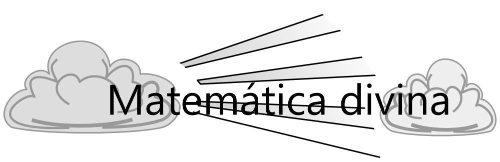
La ley distributiva se llama así porque la operación del "segundo piso" se "distribuye" entre todos los sumandos por igual:

20 x 4   8 x 4

(20 + 8) x 4

La única combinación donde no funciona, es en la división entre una suma o una resta:
80 ÷ (10 + 4) = ¿?   80 ÷ (10 – 4) = ¿?

Sería una pregunta de investigación interesante, ***por qué*** en este caso no funciona, y si existe alguna otra ley que podemos aplicar aquí. Pero esta investigación tendrá que esperar todavía hasta un nivel más avanzado.



La "ley distributiva" de Dios

Muchas acciones de Dios son "distributivas", o sea, se aplican a todos; se "distribuyen" entre todos. Por ejemplo dice Jesús, que Dios el Padre "hace salir su sol sobre malos y buenos, y hace llover sobre justos e injustos." (Mateo 5:45) Una acción que se aplica a un "entero", se aplica a cada parte de ese entero. Si Dios provee por su creación, su provisión se aplica a cada parte de la creación. Podríamos casi escribirlo como fórmula:

Sol x (malos + buenos) = (Sol x malos) + (Sol x buenos).

Lluvia x (justos + injustos) = (Lluvia x justos) + (Lluvia x injustos).

Por eso dice que nosotros seamos también "distributivos" con nuestra bondad: "Amen a sus enemigos, bendigan a los que les maldicen, hagan bien a los que les odian, y oren por los que les afrentan y persiguen. (...) Porque si aman a los que les aman, ¿qué recompensa tendrán? ¿No hacen también los cobradores de impuestos lo mismo? Y si saludan solamente a sus hermanos, ¿qué hacen de más? ¿No hacen también las naciones lo mismo?" (Mateo 5:44.46-47)

Ampliaciones

Unos problemas relacionados con multiplicaciones:

1) La tienda de abarrotes hace un pedido de 84 botellas de gaseosa. Si una botella cuesta 4.–, ¿cuánto cuesta este pedido?

2) Un ciclista avanza a 24 km/h. ¿Cuántos kilómetros avanza en 5 horas?

3) Pedro avanza con su bicicleta a 20 km/h, Jaime avanza con la suya a 18 km/h. ¿A qué velocidad avanzan si los dos manejan juntos?

4) Si un trabajador gana 8.– por cada hora de trabajo, ¿cuánto gana en una semana si trabaja 9 horas diarias durante 5 días?

5) Un rascacielos tiene 78 pisos; cada piso tiene una altura de 3 metros. Calcula la altura del rascacielos.

6) Para una invitación se necesitan 7 kg de carne; el kilo cuesta 23.–. ¿Cuánto cuesta la carne?

7) Imagínate que eres capitán de un barco. El barco tiene 8 metros de ancho, y avanza a una velocidad de 56 km/h. ¿Cuántos años tiene el capitán?

8) Un bus tiene 46 asientos, y el pasaje cuesta 6.–. Calcula los ingresos, si todos los asientos están ocupados.

9) Esta semana le toca a Paulina lavar los platos en su casa. Si en la familia de Paulina son 6 personas, y comen 3 veces al día, ¿cuántos platos tiene que lavar Paulina en una semana?

*10) En la papelería Amalia, una docena de lápices cuesta 14.–. En la papelería Beltrán, la caja de quince lápices cuesta 18.–. Calcula el precio de 120 lápices en cada una de las papelerías.

Nota: Entre estos problemas hubo dos preguntas capciosas. ¿Te diste cuenta? Si no, piénsalo otra vez...

¿A dónde vamos desde aquí?

La Unidad 49 es opcional. (Incentiva el razonamiento al examinar algunos procedimientos alternativos de multiplicación.) Si desean, pueden ir de frente a la Unidad 50 (División).

Unidad 49 - “Trucos” para la multiplicación mental

Prerrequisitos:

- Suma y resta hasta 1000 *(Unidad 45)*
- Multiplicación de decenas y hasta 12 *(Unidad 46)*

Materiales necesarios:

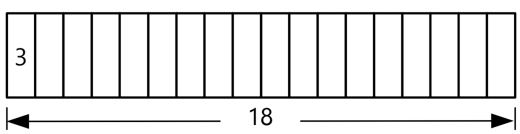
- Regletas Cuisenaire

TALLER

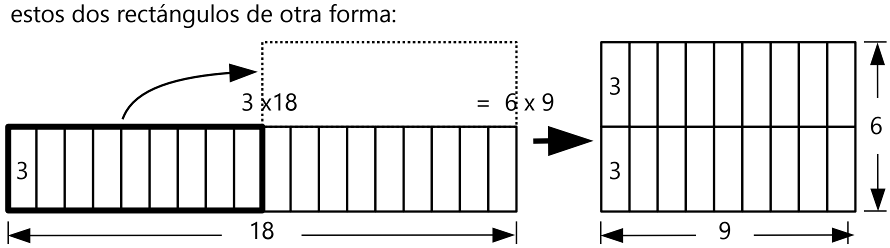
En la unidad anterior ya hemos investigado unas formas de multiplicar números de dos cifras. Hemos visto que siempre podemos multiplicar las decenas por separado y las unidades por separado, y después sumar. Pero en algunos casos especiales podemos hacerlo de una manera un poco más fácil. Vamos a examinar algunos de estos casos.

Simplificar multiplicaciones con la ley asociativa

Vamos a multiplicar 3 x 18. Lo podemos representar así con regletas Cuisenaire:



Pero 18 es 9 x 2. O sea, podemos agrupar nuestras regletas en dos grupos de 9 regletas. Y ahora podemos colocar estos dos rectángulos de otra forma:

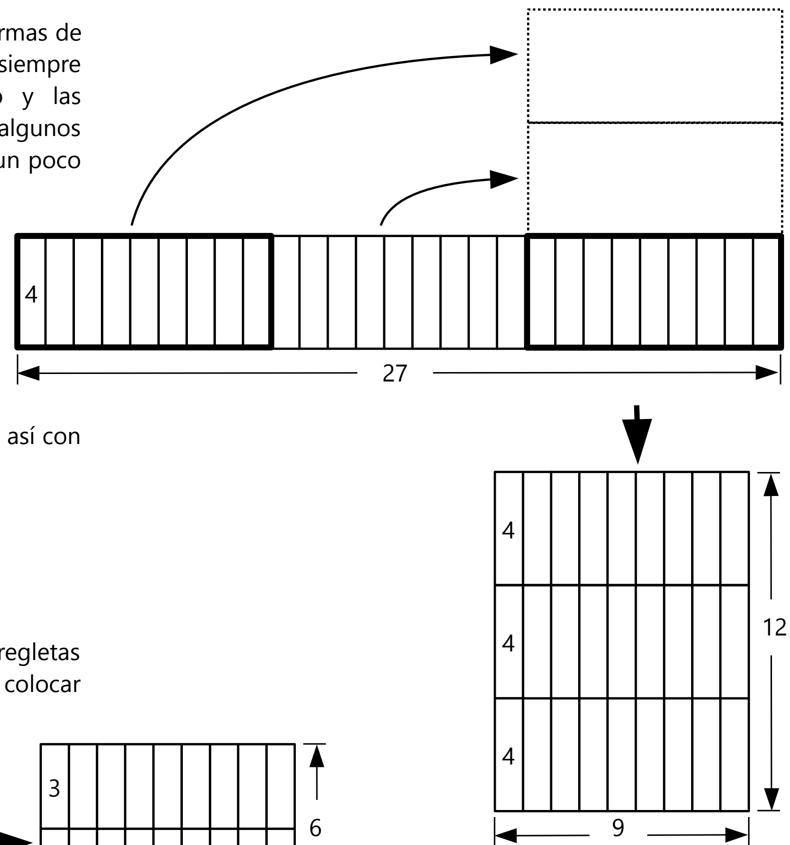


Tenemos un nuevo rectángulo que tiene 9 unidades de largo y 6 unidades de alto. Pero esta es una multiplicación que conocemos de la tabla: 9 x 6 = 54. Esto es igual a la multiplicación original, 3 x 18, porque no hemos aumentado ni quitado nada.

Matemáticamente, estamos descomponiendo el 18 en 2 x 9, y después usamos la ley asociativa para agrupar los factores de otra manera:

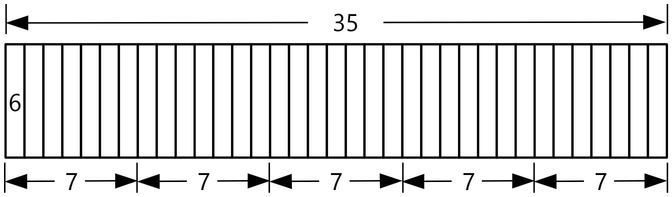
3 x 18 = 3 x (2 x 9) = (3 x 2) x 9 = 6 x 9 = 54.

Un ejemplo similar: 4 x 27. Colocamos 27 regletas de 4.



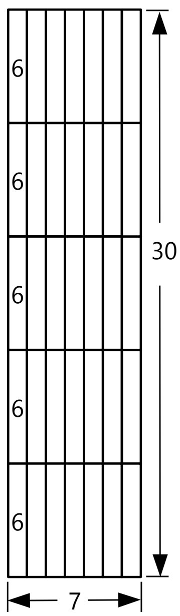
Podemos agruparlas en 3 grupos de 9. El nuevo rectángulo mide 9 x 12. Esta es una multiplicación conocida si han extendido las tablas de multiplicación hasta 12 *(Unidad 46)*.

4 x 27 = 4 x (3 x 9) = (4 x 3) x 9 = 12 x 9 = 108.



Un último ejemplo de este tipo: 6 x 35. Coloquen 35 regletas de 6 sobre la mesa. *(Vea arriba.)* Podemos agruparlas en 5 grupos de 7 y así formar otro rectángulo. Así resulta una multiplicación conocida si sabemos multiplicar números de puras decenas.

6 x 35 = 6 x (5 x 7) = (6 x 5) x 7 = 30 x 7 = 210.



Busquen otras multiplicaciones que pueden calcular fácilmente de una manera similar. (Una pauta: Todas la multiplicaciones de 5 por un número par son "fáciles". ¿Pueden descubrir por qué?)

El 9 nos ayuda

Otra clase de multiplicaciones que podemos hacer de una manera un poco más fácil, son aquellas con un número que termina en 9. Por ejemplo, podemos representar 29 x 6 de la manera "normal" así:

10	10	9
10	10	9
10	10	9
10	10	9
10	10	9
10	10	9

Pero podemos decir también que 29 es 30 – 1, entonces la misma multiplicación se representaría así:

10	10	10	1
10	10	10	1
10	10	10	1
10	10	10	1
10	10	10	1
10	10	10	1

Esto es ahora un poco más fácil de calcular:

29 x 6 = (30 – 1) x 6 = 180 – 6 = 174.

Pruébenlo con otras multiplicaciones similares.

A veces, este método es ventajoso incluso cuando el número termina con 8. Por ejemplo:

78 x 4 = (80 – 2) x 4 = 320 – 8 = 312

(Es posiblemente más rápido que sumar 280 + 32.)

Diversas operaciones de las tarjetitas de la ***Hoja de trabajo 48.1-2*** se pueden calcular con uno de estos métodos más fácilmente que con el procedimiento "normal". ¡Inténtenlo!

Sumas de multiplicaciones con factores iguales

¿Pueden descubrir por qué la siguiente operación es "fácil"?

38 x 3 + 38 x 7

Tomen el tiempo de representarla con 38 regletas de 3, y 38 regletas de 7. Si juntamos estos dos rectángulos, ¿qué operación tenemos?

Esta es nuevamente una aplicación de la ley distributiva. Escrito con números, la operación sale así:

38 x 3 + 38 x 7 = 38 x (3 + 7) = 38 x 10 = 380.

¡Mucho más fácil que multiplicar por separado y después sumar!

Inventen y practiquen otros ejemplos similares.

Matemática divina

Hacer las cosas de manera eficaz

Es una virtud buena y útil, saber administrar bien el tiempo (Efesios 5:15-17). Una parte de ello consiste en encontrar maneras inteligentes y eficaces de lograr una meta, para ahorrar tiempo y recursos. Una definición de sabiduría es: "saber cómo hacer". Seamos sabios para saber cómo resolver las operaciones matemáticas de la manera más eficaz. Y usemos esta misma sabiduría también en otros asuntos de la vida.

Unidad 50 - División de decenas

Prerrequisitos:

- Multiplicación de decenas *(Unidad 46)*
- División dentro de la tabla de multiplicar hasta 10 x 10

Materiales necesarios:

- Material Base 10
- Figuras de juego

TALLER

Repartimos decenas

Volvemos a repartir objetos entre figuras de juego, como lo hicimos en la *Unidad 39*. Pero esta vez repartimos decenas, o sea regletas de 10.
Por ejemplo, queremos dividir 80 ÷ 2. Tenemos 8 regletas de 10, y las repartimos entre 2 figuras de juego. Podemos dar 4 regletas a cada figura. Entonces:

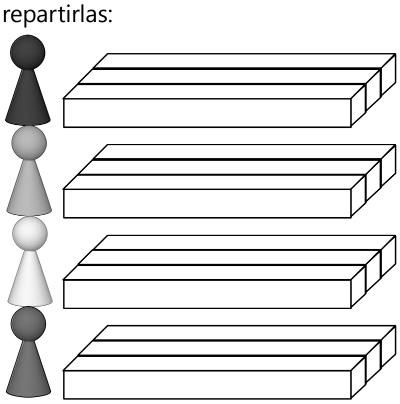
80 ÷ 2 = 40.

Pero con las regletas hemos hecho una operación mucho más fácil: Hemos repartido solamente 8 regletas. O sea, hemos hecho la siguiente operación:

8 ÷ 2 = 4.

Si lo escribimos con números y comparamos las dos operaciones, notamos que son casi iguales. La única diferencia consiste en los ceros adicionales. Entonces, ¡dividir números de puras decenas es fácil!
Hagan algunos otros ejemplos de este tipo: 60 ÷ 3, 40 ÷ 2, 80 ÷ 4, 90 ÷ 3, ...

Ahora avanzamos a números mayores a 100. Por ejemplo 120 ÷ 4. Tenemos una centena y dos decenas; eso no lo podemos repartir entre 4 figuras. Pero podemos canjear la centena por 10 decenas. Ahora tenemos 12 decenas y podemos repartirlas:



Cada figura recibe 3 decenas. O sea:

120 ÷ 4 = 30.

Con las regletas hemos hecho la siguiente operación:

12 ÷ 4 = 3

- o sea, la misma operación sin los ceros.
Hagan otros ejemplos de este tipo, aun con más centenas, si es que tienen suficientes regletas para canjear: 180 ÷ 3, 240 ÷ 4, 200 ÷ 5, 210 ÷ 3, 320 ÷ 4, 420 ÷ 6, ...
Si desean, pueden usar para practicar las primeras tarjetitas de la ***Hoja de trabajo 51.1-2*** (las que están marcadas con un círculo).

La división como operación inversa de la multiplicación

Jueguen otra vez a las "máquinas" o a la "computadora viviente" *(Unidad 40)*, usando máquinas que multiplican. Entonces podemos por ejemplo instruir a la "computadora viviente" que multiplique por 8. De la computadora salió el número 560. Entonces, ¿qué número entró al inicio? – Como operación, eso se escribiría así: __x 8 = 560. Esta clase de multiplicaciones ya conocemos.
Pero recordamos que la división es "multiplicación al revés". Entonces, el número que entró a la computadora es el resultado de la división 560 ÷ 8. Así podemos resolver fácilmente las divisiones de números de puras decenas.
Hagan otros ejemplos de este tipo con las "máquinas" o con la "computadora viviente".

De esta manera podemos también entender otra clase de divisiones que serían más difíciles de representar con las figuritas de juego; por ejemplo 420 ÷ 70. (¡Necesitaríamos 70 figuras de juego!) – Pero podemos representar una máquina que multiplica por 70, y después podemos hacerla correr al revés: Salió 420 de la máquina, ¿qué número entró? O sea, podemos escribir nuestra división de esta otra manera: __x 70 = 420. Esta es nuevamente una operación conocida.
Hagan más ejemplos de este tipo: 640 ÷ 80, 400 ÷ 50, 350 ÷ 70, 540 ÷ 60, 810 ÷ 90, ...

Principios matemáticos

Los principios que explican esta clase de divisiones, están relacionados con la ley asociativa para la multiplicación. Solamente que aquí tenemos una combinación de multiplicaciones y divisiones. Eso hace que el asunto sea un poco más complicado, y los niños de este nivel probablemente no podrían comprender las siguientes explicaciones. Es por eso que introducimos estas operaciones mediante material concreto.
Pero si analizamos matemáticamente las operaciones que hemos hecho, encontramos para la primera clase de divisiones:

$80 \div 4 = (10 \times 8) \div 4 = 10 \times (8 \div 4) = 10 \times 2 = 20.$

Efectivamente, la ley asociativa funciona en este caso, aunque la segunda operación es una división.
La segunda clase de divisiones se descomponen así:

$$\begin{aligned} 420 \div 60 &= (42 \times 10) \div (6 \times 10) \\ &= (42 \div 6) \times (10 \div 10) = 7 \times 1 = 7. \end{aligned}$$

Ahora, aquí es más difícil de entender por qué la última multiplicación se convirtió en una división. Interviene aquí una ley que corresponde a las leyes de signos en la suma y resta, pero aplicada a las operaciones del "segundo piso" (multiplicación y división). Para entender bien esa parte habrá que esperar hasta un nivel más avanzado. Por eso, por ahora preferimos explicarlo a los niños en términos de la operación inversa; y así es más fácil de entender.

Ahora lo escribimos

Para resolver mentalmente: (Di las respuestas; o copia y escribe las respuestas en el cuaderno.)

a) 4 x__= 280	b)__x 50 = 250	c)__x 7 = 490	d) 360 ÷ 9	e) 560 ÷ 80	f) 180 ÷ 2
8 x__= 320	__x 70 = 420	__x 90 = 720	480 ÷ 6	270 ÷ 30	240 ÷ 80
3 x__= 210	20 x__= 160	5 x__= 300	490 ÷ 7	700 ÷100	630 ÷ 9
9 x__= 540	80 x__= 640	60 x__=360	400 ÷ 5	200 ÷ 40	350 ÷ 50

Ampliaciones

Problemas con divisiones

1) Un carro corre con 50 kilómetros por hora. ¿Cuántas horas demora para recorrer 250 km?

2) Otro carro avanzó 180 kilómetros en tres horas. ¿Cuál fue su velocidad?

3) Si una persona adulta en promedio pesa 70 kg, ¿cuántas personas pueden entrar en un ascensor con una capacidad de 630 kg?

4) De un tubo de 5 metros de largo se cortaron cuatro pedazos iguales, y sobraron 140 cm. ¿Cuánto midió cada uno de los pedazos?

5) Un restaurante compró dos mesas y ocho sillas por un total de 800.–. Si una mesa costó 160.–, ¿cuánto costó una silla?

6) El carpintero cortó pedazos de 70 cm de una tabla de 6 metros. Si al final sobraron 1,10m, ¿cuántos pedazos cortó?

*7) Si una bolsa con 50 caramelos cuesta 3.–, ¿cuánto cuestan 200 caramelos?

Unidad 51 - División de números de tres cifras

Prerrequisitos:
- Suma y resta hasta 1000
- Multiplicación de decenas *(Unidad 46)*
- División de decenas *(Unidad 50)*

Materiales necesarios:
- Material Base 10
- Figuras de juego

TALLER

Repartición de premios

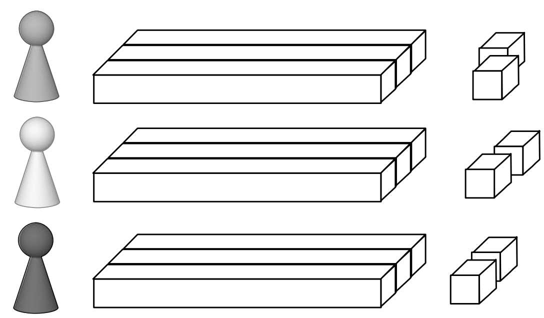
La siguiente actividad se puede realizar por ejemplo cuando los niños han hecho algún trabajo especial que merece un premio; o en una ocasión especial como un cumpleaños; o si quieren también en un día común y corriente, simplemente para diversión.
Consiga una cantidad bastante grande de objetos pequeños que se pueden repartir entre los niños como "premios": estíquers, canicas, uvas, caramelos, lentejas de chocolate, o lo que pueda conseguir; pero que sean más de cien, y más de diez veces el número de niños presentes. Entonces repartan estos "premios" entre los niños por partes iguales.
Pero para que sirva como introducción a las actividades que siguen, hagámoslo según el sistema decimal. Primero contamos todos los "premios", y al mismo tiempo los agrupamos en grupos de diez. Después repartimos primero estas decenas, o sea todas las que podemos repartir por partes iguales sin que algún niño reciba más que los otros. Después repartimos los premios restantes por unidades. Al fin contamos cuántos le tocaron a cada uno, contando primero las decenas y después las unidades.

* * * * *

Para las actividades siguientes pueden inventar sus propios ejemplos, o pueden usar las tarjetitas de la ***Hoja de trabajo 51.1***. Están en dificultad creciente; escoja las tarjetitas del tipo correspondiente para cada actividad. Al final pueden mezclarlas todas para repasarlo todo.

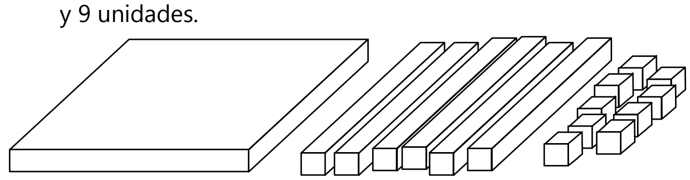
Repartimos decenas y unidades

Representen con el material Base 10 y las figuras de juego la división 96 ÷ 3. Tenemos 9 regletas de 10, y 6 cubitos de unidad. Los repartimos entre 3 figuras:



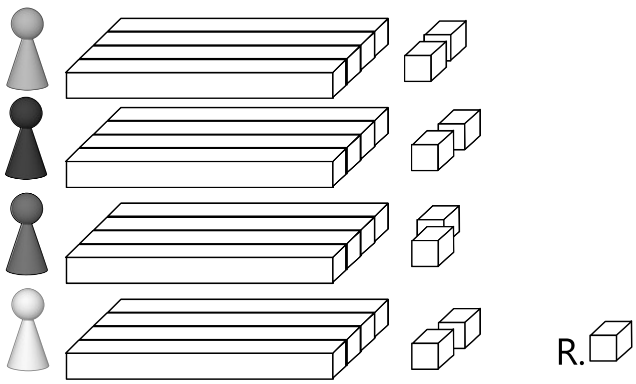
Cada figura recibe 3 decenas y 2 unidades. O sea,
96 ÷ 3 = 32.
Hagan otros ejemplos como este, donde *no queda residuo de las decenas*. Por ejemplo: 86 ÷ 2, 63 ÷ 3, 84 ÷ 4, 39 ÷ 3, 46 ÷ 2, ...
Si quieren ahora mismo analizar lo que pasa en esta operación por escrito, pasen a la sección "Ahora lo escribimos".

Ahora haremos lo mismo con unos números mayores a 100. Por ejemplo 169 ÷ 4. Tenemos una centena, 6 decenas y 9 unidades.



Podríamos empezar a repartir las decenas o las unidades, pero eso puede causar confusiones después, porque si canjeamos la centena a decenas, nos van a resultar unas decenas adicionales. Por eso tenemos que acostumbrarnos en la división a **empezar siempre con las partes *más grandes***.
No tenemos 4 centenas, entonces no podemos repartir centenas: tenemos que canjear la centena por decenas.

Ahora podemos repartir 16 decenas, eso da 4 decenas para cada figura. Por fin repartimos las unidades: hay 2 para cada figura, y una unidad queda como residuo:



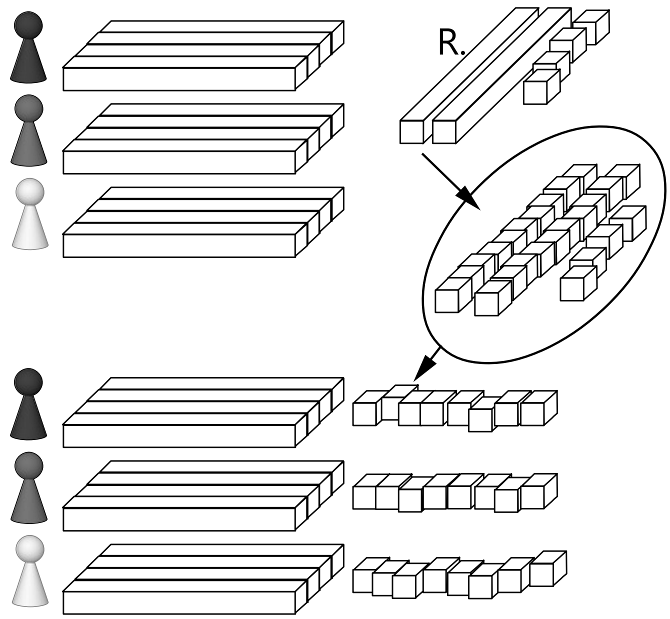
Hagan otros ejemplos de esta clase: 128 ÷ 4, 287 ÷ 7, 219 ÷ 3, 368 ÷ 4, 459 ÷ 9, 186 ÷ 3, ... (Todavía nos limitamos a operaciones donde no queda residuo de las decenas.) A esta clase de operaciones corresponden las tarjetas marcadas con un triángulo en la Hoja 51.1.

Si quieren, pueden también probar algunas donde se pueden repartir las centenas (pero sin que quede un residuo): 639 ÷ 3, 628 ÷ 2, 848 ÷ 4, ...

Si quieren analizar ahora lo que pasa en esta operación por escrito, pasen a la sección "Ahora lo escribimos". Si quieren primero practicar más operaciones, continúen con la siguiente actividad.

¿Y si queda un residuo de las decenas?

Ahora vamos a ver qué pasa si no podemos repartir las decenas exactamente. Por ejemplo 144 ÷ 3. No podemos repartir la centena: la canjeamos por decenas y repartimos. Podemos dar 4 decenas a cada figura, y sobran 2 decenas. No podemos repartirlas; pero podemos canjearlas por unidades. Ahora tenemos 24 unidades y podemos seguir repartiendo:



Al final, cada figura tiene 4 decenas y 8 unidades, o sea 48.

La manera de repartir el material es entonces la siguiente: Comenzamos con las partes más grandes y repartimos tantas como podemos. Las que sobran, las canjeamos por partes más pequeñas y seguimos repartiendo. Así continuamos hasta terminar con las unidades.

Hagan otros ejemplos de este tipo: 172 ÷ 2, 189 ÷ 4, 222 ÷ 3, 349 ÷ 5, 204 ÷ 6, etc. (Algunos de estos dejan un residuo al final.)

A esta clase de operaciones corresponden las tarjetas marcadas con un cuadrado en la Hoja 51.1.
Si hay suficientes centenas para poder dar a cada figura una centena (o varias), entonces repartimos las centenas primero, y canjeamos solamente aquellas que sobran. Por ejemplo 838 ÷ 3: Podemos repartir 6 centenas, y quedan solamente 2 centenas para canjear por decenas. Hagan también unos ejemplos de este tipo: 468 ÷ 4, 726 ÷ 6, 546 ÷ 3, 692 ÷ 2, etc.

Principios matemáticos

Estas operaciones se basan en la ***ley distributiva***. Lo explicaremos en detalle en la sección "Ahora lo escribimos" a continuación.

Ahora lo escribimos

"Distribuyendo" la división

En los primeros ejemplos del Taller pudimos simplemente repartir las decenas y las unidades por separado. Para dividir 96 entre 3, hemos dividido aparte $90 \div 3$ y $6 \div 3$. Si queremos escribir la operación entera, paso por paso, se ve así:

$$96 \div 3 = (90 + 6) \div 3 = (90 \div 3) + (6 \div 3) = 30 + 2 = 32.$$

Esta es otra aplicación de la ley distributiva *(Unidad 48)*: La división "se distribuye" sobre las decenas y las unidades por igual.
No es que tuviéramos que escribir todos estos pasos, cada vez que hacemos una división. Con un poco de práctica, pronto podrán hacerlo en la cabeza. Si desean anotar un paso intermedio, tal vez pueden anotar los sumandos en los que descomponemos el dividendo; lo demás se entiende por sí mismo:

$$96 \div 3 = (90 + 6) \div 3 = 32.$$

Los primeros ejemplos con números mayores a 100 funcionan igual: Ponemos las decenas aparte y las unidades aparte, y dividimos por separado:

$$\begin{aligned} 169 \div 4 &= (160 + 9) \div 4 \\ &= (160 \div 4) + (9 \div 4) = 40 + 2 \text{ R.1} = 42 \text{ R.1} \end{aligned}$$

O de la manera más corta:

$$169 \div 4 = (160 + 9) \div 4 = 42 \text{ R.1}$$

¿Y si queda un residuo de las decenas?

El primer ejemplo de este tipo se ve así, escrito detalladamente:

$$\begin{aligned} 144 \div 3 &= (120 + 24) \div 3 \\ &= (120 \div 3) + (24 \div 3) = 40 + 8 = 48. \end{aligned}$$

Notamos aquí que no estamos descomponiendo el 144 simplemente en "decenas y unidades". No escribimos 140 + 4; escribimos 120 + 24. ¿***Por qué*** lo hacemos así?
(Si no pueden ver por qué, vuelvan a hacerlo con el material concreto y observen de dónde viene el 120.)
En la operación con el material concreto tal vez no es tan obvio cuántas decenas hemos repartido, porque no había necesidad de contarlas. Pero hemos notado que cada una de las 3 figuras recibió 4 decenas; esto significa que hemos repartido 4 x 3 = 12 decenas.

Si ya han hecho suficientes ejemplos con material concreto, intenten uno por escrito. Por ejemplo $447 \div 6$. ¿Cómo tenemos que descomponer el 447 para que podamos dividir entre 6? *(Pauta: Primero tenemos que repartir las decenas, entonces la meta es que las decenas puedan dividirse entre 6. Solo después nos ocuparemos de las unidades.)*
Hay 44 decenas. De esas podemos repartir 42, porque 42 es un número de la tabla del 6. Entonces, la descomposición es así:

$$447 \div 6 = (420 + 27) \div 6 = 74 \text{ R.3}.$$

- De vez en cuando nos encontraremos con unas divisiones donde podemos repartir primero unas centenas. En este caso tenemos una descomposición en tres sumandos: Centenas, decenas, y unidades. Como en el ejemplo de $838 \div 3$: Podemos repartir 6 centenas, porque 6 está en la tabla del 3. Entonces, hasta aquí la descomposición es: 838 = 600 + 238. Vemos que nos quedan ahora 23 decenas para repartir. El número que podemos dividir entre 3 es 21, entonces seguimos descomponiendo así:
838 = 600 + 210 + 28. De aquí es fácil encontrar el resultado de la división: 200 + 70 + 9 R.1 = 279 R.1.

Recuerden que en la división tenemos que comenzar siempre con las partes más grandes. Eso aplica también cuando lo hacemos de manera abstracta con los números. Entonces, en un número de tres cifras tenemos que fijarnos primero si podemos repartir centenas. Si se puede, las apartamos y ya tenemos una primera descomposición del dividendo. Si no se puede, comenzamos con las decenas.

- Aquí hay unos casos especiales que tenemos que pensar bien. Por ejemplo $428 \div 4$: Podemos repartir 4 centenas, entonces la primera descomposición es: 428 = 400 + 28. Ahora nos tocaría repartir decenas, pero hay solamente 2 decenas, esas no se pueden repartir entre 4. Entonces nos quedamos con esta descomposición:

$$428 \div 4 = (400 + 28) \div 4 = 100 + 7 = 107.$$

Si lo hacemos con el material concreto, es obvio que tiene que salir así. Si escribimos la descomposición como lo hemos hecho ahora, también es bastante obvio.
Mucho más difícil es para aquellos niños que prematuramente aprendieron ya el procedimiento escrito, cifra por cifra. Ese procedimiento oculta el verdadero valor posicional de las cifras, de manera que los niños ven solamente que tienen que dividir $4 \div 4$ (=1), y que tienen que dividir $28 \div 4$ (=7). Entonces escriben equivocadamente que el resultado es 17, porque no se dan cuenta de que el 1 representa centenas. Esta es una razón más por qué todavía no introducimos este procedimiento aquí. Que lo hagan con material concreto, y después mentalmente, pensando en la descomposición real de los números; entonces no cometerán este error más adelante.

Ampliaciones

Problemas relacionados con la división *(o tal vez no)*:

1) Ocho vendedoras se reparten en partes iguales 600 pulseras para vender. ¿Cuántas pulseras tiene que vender cada una de ellas?

2) El gato de Camila come en 48 días el contenido de una bolsa grande de comida para gatos. Su amiga Miriam tiene 3 gatos. ¿Para cuántos días les alcanza la misma cantidad de comida para gatos?

3) Siete sastres compran juntos una tela y la reparten entre sí. Cada uno recibió 9,10 metros. ¿Cuánto midió la tela?

4) En el zoológico se reparten 156 plátanos entre los monos. Cada mono recibió 6 plátanos. ¿Cuántos monos son?

5) En una bolsa había 60 caramelos. 4 niños comieron cada uno un caramelo. ¿Cuántos caramelos sobraron?

6) Olivia hace un collar de perlas de 48 cm de largo. Cada perla mide 5 mm. ¿Cuántas perlas necesita?

7) Si 9 mandarinas pesan un kilo, ¿cuántas mandarinas hay en 99 kg?

8) Si 6 naranjas pesan un kilo, ¿cuántos kilos son 150 naranjas?

9) Los pollitos de Luis comen 40g de maíz cada día. ¿Para cuántos días alcanza una bolsa de 1 kg?

10) El carro del señor Miranda gasta 8 litros de gasolina por 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede viajar con 64 litros?

11) Eduardo necesita 9 pasos para caminar de un extremo de la sala al otro extremo. La sala mide 4,77m. ¿Cuánto mide un paso de Eduardo?

12) Para limpiar las ventanas de un edificio grande, 5 trabajadores tienen que limpiar cada uno 140 ventanas. Si en cada piso hay 20 ventanas, ¿cuántos pisos tiene el edificio?

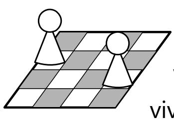
Nota: Como siempre, los problemas no requieren todos necesariamente una división. En caso de duda, hagan un dibujo o representen la situación con material concreto. Tengan presente el principio del producto y sus factores; y la diferencia entre situaciones multiplicativas y aditivas.

Unidad 52 - Operaciones combinadas hasta 1000

Prerrequisitos:
- Seguridad en la suma, resta, multiplicación y división con números hasta 1000. *(Unidades 45, 47, 48, 50, 51).*
- Entender el orden de las operaciones *(Unidad 42).*

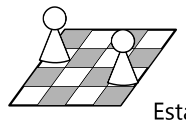
Materiales necesarios:
- Material Base 10 o algún otro material de canje.
- Carteles para el juego de la "Computadora viviente".
- Un dado.

TALLER



La computadora viviente

Vuelvan a jugar a la "Computadora viviente" *(Unidad 42)*, pero usen ahora números mayores. Al inicio pueden usar los bloques y regletas del material Base 10, o algún otro material de canje, para representar los números y las operaciones. Más tarde pueden pasar los números escritos en papelitos, y cada niño que realiza una operación escribe su resultado debajo del número anterior.
Hagan las mismas actividades como en la *Unidad 42*, pero con números y operaciones más difíciles:
- Practiquen unas operaciones y después hagan correr la computadora al revés, para comprobar los resultados con la operación inversa.
- Practiquen diversas combinaciones de dos o más operaciones: multiplicación con división, multiplicación con suma, etc. Intercambien el orden de las operaciones y fíjense si los resultados salen iguales o no.



Suma, resta, multiplicación y división

Esta es una variación un poco más difícil del juego "Suma, resta y multiplicación" de la *Unidad 42*. Cada jugador tira el dado un total de seis veces. La primera y la segunda vez definen el número inicial: el primer puntaje representa decenas y el segundo unidades. De los cuatro puntajes siguientes, uno tiene que sumarse, uno restar, uno multiplicar y uno dividir. Si una división sale inexacta, el residuo se desestima.
Ejemplo: Valeria tira primero un 3 y después un 6; eso significa 36. Después tira 3 y decide sumarlo: 36 + 3 = 39. Después tira 2 y decide dividir: 39 ÷ 2 = 19 (el residuo se desestima). Después tira 4 y decide multiplicar: 19 x 4 = 76. Por fin tira 5, y le queda como única operación la resta: 76 – 5 = 71, este es su puntaje final.
(Para pensar: ¿Hubiera Valeria alcanzado un puntaje mayor con un orden distinto de las operaciones?)

Variación: Como en el juego de la *Unidad 42*, se puede también acordar que cada uno tira primero el dado seis veces, y recién después de saber todos sus números, decide acerca del orden de las operaciones.

Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 52.1: Máquinas de multiplicación y división:
Esta hoja funciona igual como los otros ejercicios con "máquinas" que ya conocemos, por ejemplo en la Hoja de trabajo 45.6 arriba. Para descubrir lo que hace una máquina "incógnita", hay que observar un número que entra y uno que sale. Para encontrar los números que faltan, a veces hay que hacer correr una máquina "al revés"; o sea hay que calcular desde la derecha hacia la izquierda y aplicar la operación inversa.

La segunda cadena de máquinas aparece una segunda vez con las mismas máquinas, solamente en otro orden. Como siempre en los ejercicios de este tipo, las máquinas iguales efectúan operaciones iguales.

En esta segunda cadena de máquinas se puede también encontrar una única operación que hace lo mismo como las tres máquinas juntas. (Se escribe en la flecha larga que pasa desde el inicio hasta el final.) Si lo hicieron correctamente, esta operación debe ser la misma en ambas versiones de la cadena.

Las ***hojas de trabajo 52.2 y 52.3*** son bastante exigentes, porque repasan todas las operaciones que hemos practicado hasta ahora. Por tanto se recomienda esperar con estas hojas hasta que los alumnos dominen bien las operaciones que hicimos en las unidades anteriores.
Serán pocos los alumnos que tienen la perseverancia necesaria para completar una de estas hojas en una sola vez. Los demás tendrán que avanzar poco a poco cada día, en el transcurso de una semana o aun más.

Hoja de trabajo 52.2:
Los ejercicios de esta hoja funcionan igual como los de la Hoja 42.1. Solamente que ahora las operaciones son más exigentes.
Al resolver operaciones largas puede ser una ayuda copiarlas en el cuaderno y anotar resultados intermedios.

Hoja de trabajo 52.3 *(arriba)* ***– "Tres números por demás":***
Funciona igual como el ejercicio correspondiente de la Hoja 42.2. Solamente que ahora hay en cada operación *tres* números que se deben tachar.

Hoja de trabajo 52.3 *(abajo)* ***– "Más combinaciones":***
Como en la hoja anterior (52.2 abajo) y en las Hojas 42.1 y 42.2. Estos problemas están marcados con una estrella, porque con cuatro números las posibilidades ya son muy amplias, y puede ser difícil tener las ideas acertadas para obtener los resultados que se piden. Si lo intentaron por mucho tiempo y no encuentran las soluciones, pueden consultar las pautas en el *Anexo A*.

Ampliaciones

Problemas diversos

Primero intenta resolver los siguientes problemas de cualquier manera. Ayúdate con un dibujo o con material concreto.
Después intenta expresar tu procedimiento con una sola operación (combinada) por escrito. Comprueba si esta operación da el mismo resultado como tu primer razonamiento.

1) Unas familias hacen una colecta para apoyar a tres ancianos enfermos que no tienen dinero para comprar medicina. La familia Molina contribuye 62.–, la familia Luna 104.–, la familia Fernández 120.– y la familia Salas 38.–. El dinero se reparte entre los tres ancianos en partes iguales. ¿Cuánto recibe cada uno de ellos?

2) Yolanda y Yurema trabajan pintando figuras de arcilla. Yolanda pinta 3 figuras cada hora y trabaja 8 horas al día. Yurema pinta 4 figuras cada hora y trabaja 9 horas al día. ¿Cuántas figuras pintan las dos juntas en una semana de 5 días de trabajo?

3) El panadero compra 150 kg de harina y un paquete de levadura. Todo junto costó 500.–. Si la levadura costó 50.–, ¿cuánto costó el kilo de harina?

4) En el cumpleaños de Jaime se quieren dar 8 caramelos a cada uno de los 23 invitados. Hay 50 caramelos rojos, 60 blancos y 60 amarillos. ¿Hay suficientes caramelos? ¿Cuántos sobrarán, o cuántos faltan?

5) Pamela tiene 600g de maíz para sus dos pollitos. Uno de ellos come 15g de maíz al día, el otro 25g. ¿Para cuántos días alcanza el maíz?

6) El señor Muñoz cosechó 984kg de papas. Pero 57kg tenían gusanos, y 33kg comieron los ratones en el almacén. Lo que quedó, lo repartió en partes iguales a sus tres hijos. ¿Cuánto recibió cada uno?

*7) En cierto día, un restaurante compró 13 kg de verduras a 4.– el kilo, 4 litros de aceite a 10.– el litro, 6 kg de arroz a 5.– el kilo, y 3 kg de carne a 16.– el kilo. En ese día se vendieron 60 platos a 6.–. ¿Cuánto fue la ganancia del día?

*8) ¿Cuántas losas cuadradas de 30 x 30 cm se necesitan para cubrir el piso de una sala de 4,50 m por 5,40 m?

*9) La familia Moreno tiene cinco gallinas. Una de ellas pone un huevo cada 2 días; otra pone 2 huevos cada 3 días; otra pone 3 huevos cada 4 días; otra pone 4 huevos cada 5 días; y la última pone 5 huevos cada 6 días. La familia consume cada día 3 huevos. Los huevos que sobran, los regalan a sus amigos o a personas necesitadas. Al cabo de dos meses (60 días), ¿cuántos huevos pudieron regalar?

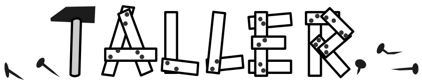
*10) La familia Salinas tiene una parejita de conejos. En marzo, la hembra pare cuatro crías, y en septiembre otras cuatro crías. A partir de allí, cada marzo y cada septiembre nacen cuatro crías de cada hembra que tiene un año de edad o más. Supongamos que siempre la mitad de las crías son hembras. Entonces ¿cuántos conejos son al fin del segundo año? ¿y al fin del tercer año? Y si la familia Salinas no decide deshacerse de los conejos y ninguno de ellos muere, ¿cuántos son al fin del cuarto año?

Acerca de los problemas 7 a 10, si lo intentaron por mucho tiempo y no tienen idea de cómo resolverlos, pueden consultar las pautas en el *Anexo A*.

Unidad 53 - El calendario

Prerrequisitos:
- Operaciones básicas hasta 1000.

Materiales necesarios:
- Unos calendarios (de preferencia en diversos formatos y de diversos años).
- Papel o cartulina, colores (para fabricar su propio calendario).



Hablando de las fechas

En la vida diaria hay muchas oportunidades para hablar de fechas; empezando con la simple pregunta: "¿Qué día es hoy?" – La respuesta se puede dar de distintas maneras. A veces decimos simplemente: "Hoy es jueves", o: "Hoy es el 19." O sea, la fecha se identifica con un día de la semana, pero también con un número. Y si queremos ser exactos, tendremos que mencionar también el mes y el año. Por ejemplo: "Hoy es jueves, el 19 de octubre de 2017." (El número del año está más allá del rango numérico que los niños manejan a este nivel; pero puede ser una oportunidad para introducir informalmente números con varios miles.)

Podemos hablar de fechas que nos interesan; por ejemplo los cumpleaños de todos los miembros de la familia. Podemos buscar todos los cumpleaños en un calendario para ver en qué día de la semana caen.

Podemos también avanzar y retroceder en las fechas: "¿Qué día es mañana? – ¿Qué día fue ayer? – ¿Qué día va a ser de aquí en una semana?"

Un poco más exigente es calcular cuántos días faltan hasta una fecha determinada: "¿Cuántos días faltan hasta tu cumpleaños? – ... hasta que viajemos a la playa? – ... hasta que llegue la abuela?" etc. (Por supuesto que tiene que tratarse de eventos que ya tienen sus fechas definidas.) Consultando el calendario, podemos encontrar las respuestas. Lo más sencillo sería simplemente contar los días en el calendario. Pero hay maneras de hacerlo más rápidamente; ¿descubren cómo?

Días, meses y años

Examinen juntos un calendario. Fíjense cuántos días tiene cada mes. Encontrarán que el número varía entre un mes y otro. Traten de recordar cuántos días tiene cada mes. (Abajo encuentran un "truco" para recordarlo mejor.)

Entonces, convertir meses en días no es tan sencillo, si queremos hacerlo con exactitud. Por ejemplo, “tres meses” no son siempre el mismo número de días.

Investiguen: ¿Cuál es el mínimo de días que pueden tener tres meses sucesivos en total? (¿Cuáles meses del año son?) – ¿Y cuál es el máximo de días que pueden tener tres meses sucesivos en total? (¿Cuáles meses del año son esos?)

Calculen el total de los días del año. Pueden hacerlo sumando el número de días de cada mes. (¿Cómo puede hacerse eso de la manera más fácil?)

Investiguen: ¿Cuál día se encuentra exactamente en la mitad del año?

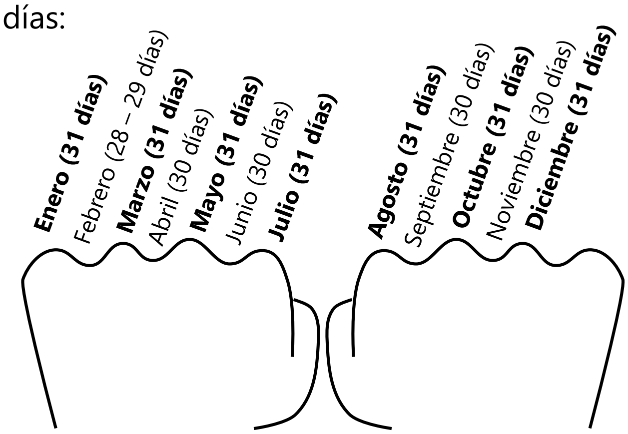
Comparen los calendarios de dos años distintos. ¿Caen las fechas siempre en los mismos días de la semana? Por ejemplo, ¿el 5 de agosto es el mismo día de la semana en ambos calendarios? – ¿Por qué sí, o por qué no? – ¿Qué cálculo podemos hacer para explicar este hecho?

Años bisiestos

En un año "normal", el mes de febrero tiene 28 días. Cada cuatro años es un año bisiesto donde el febrero tiene 29 días. Busquen un calendario de un año bisiesto y otro de un año que no es bisiesto, y verifiquen este hecho. – ¿Cuántos días tiene un año bisiesto?
Nota: En realidad, la regla para los años bisiestos es un poco más complicada que eso; pero es todavía un poco difícil de comprender para los niños de este nivel. Para los curiosos, en la sección "Principios matemáticos" se encuentra la regla exacta.

Una regla fácil para recordar cuántos días tiene cada mes:

Haz puños de tus dos manos. Enumera los meses del año desde la izquierda, usando tus nudillos y los hoyitos entre los nudillos. Cada mes que cae en un nudillo, tiene 31 días:



Fabricamos nuestro propio calendario

Fabriquen juntos un calendario del año entero. Si participan varios niños, pueden compartirse el trabajo.
Los calendarios vienen en diferentes formatos. Algunos contienen el año entero en un cartel grande. Otros tienen una hoja para cada mes. Otros emplean una página para cada semana. Y otros usan una página para cada día. Elijan el formato que más les conviene. Lo importante es que el calendario enumere todos los días del año.

El trabajo es más interesante si lo hacen ustedes mismos, sin copiar de ningún calendario ya hecho. Los únicos datos que necesitan son la regla para saber cuántos días tiene cada mes *(vea arriba)*, y el día de la semana de una única fecha del año. Por ejemplo, podrían averiguar de antemano qué día de la semana fue el 1ro de enero. O podrían empezar con la fecha actual y desde allí retroceder hasta el 1ro de enero y avanzar hasta el 31 de diciembre. – O como alternativa, podrían comenzar su calendario con la fecha de hoy, y extenderlo hasta la misma fecha del próximo año. – O también podrían planificar sus actividades de tal manera que esta actividad les toque en el mes de diciembre, y así pueden fabricar su calendario para el año que viene.

Si hacen el calendario de tal manera que contiene un espacio vacío para cada día, podrán usarlo a la vez como agenda familiar *(vea a continuación)*.

La agenda familiar

Anoten eventos importantes en un calendario o agenda que toda la familia puede ver. Por ejemplo, pueden usar un calendario que tiene una hoja grande para cada mes, y un cuadro para cada día que tiene un espacio vacío para hacer anotaciones; y pueden colgar este calendario en la pared en un lugar visible. Anoten cumpleaños, viajes que están planeando, feriados, visitas de familiares o amigos, ausencias de uno de los padres, consultas médicas, etc. (De manera similar pueden hacerlo en una escuela.) – Si no tienen un calendario adecuado, hagan uno ustedes mismos.
Esta "agenda familiar" será una ayuda para recordar eventos y compromisos importantes. También facilitará ver "cuántos días faltan hasta ...".

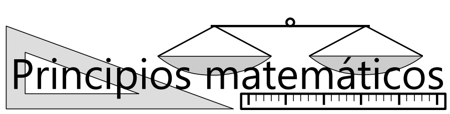
ABRIL 2018

Martes	Miércoles	Jueves
10 Cumpleaños Felipe	11 10 am Clase de natación	12 Mami Médico 3:30 pm
17	18 10 am Clase de natación	19

Pregunta capciosa:

¿Cuál es el mes en que los niños comen menos?

Respuesta en el Anexo A.



La regla de los años bisiestos

La regla completa, actualmente válida, para determinar los años bisiestos es la siguiente:

1. Cada cuatro años es un año bisiesto. (O sea, cuando el número del año es divisible entre 4.)

2. Excepción: Cada cien años ***no*** es un año bisiesto. (O sea, cuando el número del año es divisible entre 100.)

3. Excepción de la Regla 2: Cada 400 años ***sí*** es un año bisiesto. (O sea, cuando el número del año es divisible entre 400.)

Así por ejemplo los años 2016, 2020, 2024 son resp. fueron años bisiestos (Regla 1).
Los años 1700, 1800, 1900 no fueron bisiestos, porque son números divisibles entre 100 (Regla 2).
El año 2000 en cambio sí fue bisiesto, porque además de ser divisible entre 100, 2000 es también divisible entre 400 (Regla 3).

¿Por qué esta regla es tan complicada?
Los años bisiestos están relacionados con el tiempo que demora la tierra para orbitar una vez alrededor del sol. Se quiere asegurar que cada 1ro de enero, la tierra se encuentre en el mismo punto de su órbita, para que las estaciones del año coincidan siempre con las mismas fechas.
Ahora, si el período de la órbita de la tierra fuera exactamente 365 días, no necesitaríamos años bisiestos, porque los años tendrían un número exacto de días. Pero este período es aproximadamente 365,25 días o 365¼ días. Entonces, cada cuatro años aproximadamente la tierra está "atrasada" por un día entero, y se debe aumentar este día al año respectivo. Pero el número 365,25 tampoco es el valor exacto del período. Por eso se necesitan las correcciones adicionales cada 100 años y cada 400 años, para acercarse más al valor exacto.

Matemática divina

Las medidas naturales del tiempo

Cuando Dios creó el sol, la luna y las estrellas, dijo: "...y sirvan de señales para las estaciones, para días y años" (Génesis 1:15). Este es uno de los propósitos de los astros: proveernos con medidas del tiempo.

Un día es el período en el cual la tierra gira alrededor de su propio eje, respecto al sol. (Y las horas, minutos y segundos son fracciones del día.)

Un año es el período en el cual la tierra orbita alrededor del sol.

Un mes es (aproximadamente) el tiempo en el cual la luna orbita alrededor de la tierra.

De las unidades usuales para medir el tiempo, una sola no se basa en los astros, sino en una revelación directa de Dios: la semana de siete días. "Porque en seis días hizo el Señor los cielos y la tierra ... y descansó en el séptimo día." (Éxodo 20:11).

Ampliaciones

Problemas con fechas

1) Si anteayer fue viernes, ¿qué día será pasado mañana?

2) Si de aquí en una semana será el 4 de octubre, ¿qué fecha fue ayer?

3) ¿Cuántos días son del 15 de junio hasta el 24 de septiembre?

4) El 26 de noviembre, el señor Peralta dice: "Mañana iré de viaje por seis semanas." – ¿En qué fecha estará de regreso?

5) En un año determinado, el 17 de abril fue un miércoles. ¿Qué día de la semana fue el 7 de julio del mismo año?

*6) El papá de Jaime nació el 29 de febrero de 1984. Hasta hoy, ¿cuántas veces pudo celebrar su cumpleaños en la fecha correcta?

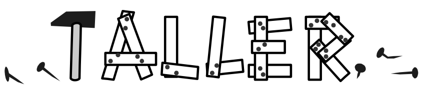
*7) Susana pregunta a Anita: "¿Cuántos años tienes?" – Anita responde: "Anteayer yo tenía nueve años, y el próximo año cumpliré doce." – Aunque suena increíble, Anita dijo la verdad. Entonces, ¿en qué día del año tuvo lugar esta conversación, y cuándo es el cumpleaños de Anita?

Los problemas 6 y 7 tienen pautas en el *Anexo A*. Pero inténtenlo primero ustedes mismos.

Unidad 54 - Horas, minutos y segundos

Prerrequisitos:
- Suma y resta hasta 1000 *(Unidad 45)*
- Multiplicación de decenas *(Unidad 46)*
- División de decenas *(Unidad 50)*
- *(para la conversión entre días y horas)* Multiplicación y división de decenas con unidades, resp. Tabla del 24 *(Unidades 46, 48, 51)*

Materiales necesarios:
- Varios tipos de relojes, de preferencia un reloj analógico (con agujas).
- Temporizador o cronómetro.



¿Cuánto dura un minuto?

Estimamos cuánto dura un minuto. Alguien indica el momento de inicio y controla el tiempo con un cronómetro o un reloj con segundero. Todos los demás, sin mirar el reloj, dicen "Ahora" cuando piensan que un minuto ha pasado. Al final, la persona con el cronómetro dice quién estaba más cerca.

Medirse el pulso

Todos palpan su pulso en la muñeca o en la arteria del cuello. Eso hay que practicarlo primero algunas veces. El pulso se nota mejor cuando se palpa con tres dedos y no con uno solo. Entonces alguien controla el tiempo, y todos cuentan su pulso durante un minuto. (Se puede también contar solo medio minuto y multiplicar el número por dos; o solamente 15 segundos y multiplicar por 4. Eso es más rápido de contar, pero el resultado sale menos exacto.)
También pueden hacer la siguiente prueba: Hagan algún movimiento vigoroso durante 5 minutos (correr, saltar soga, etc). Inmediatamente después midan su pulso. Enseguida descansen 5 minutos sentados o echados. Después de este descanso, midan otra vez su pulso. (Es un indicador de buena salud si el pulso puede normalizarse rápidamente al descansar, después de subir a valores altos durante un esfuerzo.)

Calcular la distancia de una tormenta

Durante una tormenta eléctrica pueden medir y calcular a qué distancia están cayendo los rayos: Cuando ven un rayo, empiecen a contar los segundos. Las primeras veces háganlo con un cronómetro o un reloj con segundero. Pero con un poco de práctica, pronto podrán contar en el ritmo de los segundos sin necesidad de un reloj. Fíjense entonces después de cuántos segundos escuchan el trueno. Dividan este número entre 3; eso les da la distancia en kilómetros.

Explicación: La velocidad de la luz es tan rápida que vemos el rayo prácticamente en el mismo momento en que cae. La velocidad del sonido, en cambio, es más lenta: demora aproximadamente tres segundos para avanzar un kilómetro. Por eso escuchamos el trueno varios segundos más tarde, dependiendo de la distancia que tuvo que viajar el sonido.

Carreras a tiempo

Hagan diversas clases de carreras y midan con cronómetro el tiempo que cada uno necesita. Por ejemplo: Correr 100 metros; avanzar un kilómetro en bicicleta (¡en un lugar donde no hay tráfico!), subir una escalera larga, etc. Pueden tabular los resultados.
Pueden también hacer unas carreras más originales o inventar nuevas: Saltar metido en un costal; correr con un vaso de agua en la mano sin que el agua se derrame; montar una carrera de obstáculos; correr por debajo de 10 mesas seguidas; etc.

Actividades cotidianas que requieren medir el tiempo

Diversas actividades de la vida diaria requieren medir una duración del tiempo. Esas pueden a la vez ser oportunidades de hacer unos cálculos. Por ejemplo:
La torta tiene que hornearse 40 minutos. Ahora son las 11:34. ¿A qué hora tenemos que sacar la torta?
Vamos a visitar a la abuela que vive a una hora y media de viaje. Si salimos a las 7:50, ¿a qué hora estaremos donde la abuela? – Si tenemos que estar de regreso a las 3 de la tarde, ¿cuánto tiempo podemos pasar en casa de la abuela?
Tenemos que tomar un bus que sale a las 3:15. Necesitamos 25 minutos para llegar a la estación del bus. ¿A qué hora tenemos que salir de la casa?
Etc....

Leer el reloj analógico

Hoy en día que más y más se usan relojes digitales y otros dispositivos electrónicos para leer la hora, muchos niños ya no saben leer un reloj analógico (con agujas). Pero el reloj analógico con su movimiento de las agujas provee una ilustración más gráfica (y por eso más "concreta") del pasar del tiempo. Por eso sigue siendo útil saber leer el reloj analógico. Es un poco más complicado, pero eso significa una oportunidad para un entrenamiento matemático adicional.
Al aprender a leer los minutos, el niño repite implícitamente la tabla de multiplicación con 5: Cuando el minutero está en el 7, han pasado 35 minutos desde la hora en punto, porque 7 x 5 = 35. La imagen del reloj con sus 12 números hace recordar al niño que el día tiene 12 horas. (Habrá que estar consciente de que la noche tiene también 12 horas, entonces el día y la noche juntos son 24 horas). Y ya que 12 x 5 = 60, le hace recordar al mismo tiempo que la hora tiene 60 minutos y el minuto tiene 60 segundos.

En el reloj se pueden "ver" inmediatamente ciertos intervalos de tiempo. Por ejemplo, son las 10:45, ¿qué hora será después de 20 minutos? – En el reloj se puede ver que será después de que el minutero avanzó 4 números, porque 4 x 5 = 20.

Más adelante, cuando calculamos con fracciones, el reloj sirve también para ilustrar las fracciones de una hora: media hora; un cuarto de hora – en el reloj se ven iguales como la mitad o un cuarto de una torta.

Inicialmente los niños pueden tener una dificultad para leer las horas, porque el horario normalmente no se encuentra en un número exacto. Por ejemplo a las 4:30, el horario se encuentra en el medio entre el 4 y el 5, entonces ¿son las 4:30 o son las 5:30? – A las 7:55, el horario se encuentra casi en el 8, entonces los niños pueden pensar que son las 8:55. Tienen que entender que decimos para el número de las horas la hora que *pasó*, no la hora que recién va a ser. Si falta poco para las 8:00, el horario está cerca del número 8 porque pronto van a ser las 8:00, pero todavía falta, todavía son las 7 y algún número de minutos.

También podemos enseñarles a leer el reloj "en la dirección opuesta" si falta menos de media hora para la siguiente hora: A las 7:55, el minutero está un número (5 minutos) a la izquierda del 12 (o sea, de la hora en punto), entonces podemos decir también: "Son las 8 menos 5." Igualmente a las 7:40 vemos que faltan 20 minutos hasta que el minutero llegue arriba, entonces son las 8 menos 20.

La ***Hoja de trabajo 54.1*** contiene unos ejercicios para "leer el reloj" a un nivel un poco más abstracto. Al lado izquierdo se debe escribir con cifras la hora que muestran los relojes. Al lado derecho se debe dibujar la posición de las agujas, de acuerdo a las horas indicadas. Antes de usar esta hoja, los niños deben tener suficiente práctica con leer el reloj en la vida diaria.

Decir la hora de otra manera

Practiquen decir la hora de una manera "diferente". Por ejemplo, en vez de decir: "Son las 9 y 15", podríamos decir también: "Son las 10 menos 45", o: "Son las 7 y 135 minutos", o: "Son 165 minutos para el mediodía", o: "Son las 9 y 900 segundos". Podemos de vez en cuando indicar la hora de una de estas maneras. Así los niños son desafiados a practicar la conversión de minutos a horas, de segundos a minutos, y vice versa. Después, ellos mismos pueden también intentar decir la hora de una manera "alternativa".

El decir la hora nos da también una oportunidad para practicar fracciones sencillas: “media hora”, “un cuarto de hora”. *(Vea Unidad 58.)*

Cálculos de la vida diaria para convertir medidas del tiempo

Pueden hacer cálculos como estos durante el día:
¿Cuántos minutos han pasado desde la medianoche? ¿desde el mediodía?
¿Cuántos minutos faltan hasta el mediodía? ¿hasta la siguiente medianoche?
¿Cuántos minutos ya estás despierto hoy?
¿Cuántos segundos has pasado en la ducha?
¿Cuántos segundos necesitas para barrer tu cuarto?
etc.

Podemos hacer cálculos similares con días y horas, mientras se trata de pocos días. Por ejemplo, unos cuantos días antes del cumpleaños: ¿Cuántas horas faltan para tu fiesta de cumpleaños? – O en los primeros días de un nuevo mes: ¿Cuántas horas ya estamos en este mes?
Busque oportunidades en la vida diaria para practicar esta clase de cálculos.

Un poco de historia

Vestigios del sistema sexagesimal

En las medidas del tiempo nos encontramos por primera vez con un sistema de numeración que no es decimal, o sea, que tiene una base distinta a 10. Todavía no nos ocupamos explícitamente con tales sistemas de numeración; pero tenemos que aplicarlo cuando calculamos con horas, minutos y segundos. En este caso, la base de este sistema es 60. Por eso, la conversión de estas medidas es más difícil para los niños que la conversión entre las medidas del sistema métrico que se basan en el sistema decimal.
Este sistema de numeración se remonta a los antiguos babilonios. Ellos escribían todos los números en el sistema sexagesimal, o sea, un sistema con base 60. Ellos originaron también la división de la circunferencia en 360 grados (un múltiplo de 60). Los grados a su vez se dividen en 60 minutos, y estos en 60 segundos, igual como las medidas del tiempo.
Se piensa que esta división en 360 grados está relacionada con las observaciones astronómicas de los babilonios, porque un año tiene aproximadamente 360 días, y así un grado corresponde a la distancia que las estrellas fijas parecen avanzar en el cielo de un día al otro, debido a que la tierra orbita alrededor del sol.
(Algunos científicos que confían en la Biblia han conjeturado que antes del diluvio un año pudo haber durado exactamente 360 días, y un mes exactamente 30 días; y que los eventos catastróficos del diluvio alteraron los movimientos de la tierra y de la luna. Así se podría explicar por qué los babilonios mantuvieron el número 360, aunque hicieron sus observaciones con suficiente precisión para saber que en realidad un año tiene 365¼ días.)

Matemática divina

Por qué el día se divide en horas

La palabra "hora" está relacionada con la palabra "orar". En la Edad Media, los monjes en los monasterios se reservaban ciertos tiempos durante el día para orar, y a esos tiempos los llamaron "(h)oras".
Podemos tener opiniones distintas en cuanto a la utilidad de una vida en el monasterio; pero podemos tomar esa idea de las (h)oras también para nuestra vida diaria, sin importar cual sea nuestra ocupación: Recordemos cada hora que nuestros quehaceres en la tierra no son la última realidad; busquemos el contacto con el Creador y recordemos que nuestros tiempos están en su mano (Salmo 31:15).

Ampliaciones

Problemas relacionados con las medidas de tiempo

1) A las 4:47, Sabina y Jorge comienzan a jugar ajedrez. Su partido dura 33 minutos. ¿A qué hora terminan?

2) Mónica y sus cuatro hermanas van al parque y alquilan un trampolín para saltar, por una hora. Si se turnan por tiempos iguales, ¿cuánto tiempo puede saltar cada niña?

3) A las 3:30, Pedro va a jugar con su amigo David. Tiene permiso para quedarse hasta las cinco. Durante 55 minutos juegan fútbol, después entran para leer un libro juntos. ¿Cuánto tiempo les queda para leer el libro?

4) ¿Cuántas horas hay en una semana?

5) ¿Cuántas horas son desde el lunes a las 3:00pm hasta el jueves a las 8:00am?

6) El martes a las 9 de la mañana, Carmen pintó un tubo de metal con una pintura cuyas instrucciones dicen: "Dejar secar durante 60 horas." ¿Cuándo estará seca la pintura?

7) Débora escribe tarjetas de invitación para su cumpleaños. Demora 8 minutos en escribir una tarjeta. ¿Cuántas tarjetas puede escribir en dos horas?

8) Fernando lee una página de un libro en 3 minutos. ¿Cuántas horas y minutos demora para leer un libro de 250 páginas?

9) La secretaria Anabel puede tipear 6 letras en un segundo. ¿Cuántas letras tipea en un minuto?

10) Paula tiene que tomar una pastilla cada 8 horas durante 5 días. ¿Cuántas pastillas tiene que comprar?

11) Si tu corazón late una vez cada segundo, ¿cuántas veces late en 15 minutos?

12) Un carro avanza 20 metros por segundo. ¿Cuánto demora en avanzar un kilómetro?

13) Un ciclista avanza 8 metros por segundo. ¿Cuántos minutos y segundos demora para avanzar un kilómetro?

Cuidado con conclusiones equivocadas:
1) Si en el problema no.1 te salió las 4:80, piénsalo otra vez. Esa hora no existe – excepto en las maneras "alternativas" de decir la hora.
2) Si en el problema no.2 te salió como respuesta 15 minutos, entonces pasaste por alto un detalle. Léelo otra vez detenidamente. – 20 minutos o 25 minutos también son respuestas equivocadas.
7) Aquí la respuesta no es 25. (¿Cuántos minutos tiene una hora?)
8) Si en el problema no.8 te salió 7 horas y 50 minutos, todavía tienes alguna confusión con las horas.
10) En este problema, la respuesta no es 40. Si te salió eso, piénsalo bien otra vez.
12) Si en el problema no.12 te salieron 5 segundos, averigua cuánto es un kilómetro.

¿A dónde vamos desde aquí?

Los niños que han entendido los temas del Bloque V, podrán pasar al nivel de Primaria II. Pero quizás hay unos temas de los Bloques I, VI y VII que todavía no hicieron, y que querrán hacer ahora.

El Bloque VI contiene unos temas que se encuentran en el límite entre los niveles de Primaria I y Primaria II. Se pueden tratar ahora (si no lo hicieron todavía), o pueden esperar hasta que estos temas se vuelvan a tratar con más detalle en el libro de Primaria II.

Los temas del Bloque VII son opcionales; pero son muy buenos para entrenar el razonamiento.

Bloque VI: Temas adicionales de cálculo numérico (Unidades 55 a 59)

Este bloque contiene unos temas adicionales que figuran en muchos currículos escolares para este nivel, pero que en realidad requieren un razonamiento un poco más avanzado para realmente entenderlos. Por eso, ya se encuentran en el límite hacia el nivel de Primaria II, y se retomarán con más profundidad en el libro para ese nivel.

Los prerrequisitos para las actividades de este bloque son mayormente los mismos como para el Bloque V. Por eso, estos temas pueden tratarse después del Bloque V o también intercalados con él.
Algunas actividades de este bloque requieren adicionalmente la comprensión de la ley distributiva y el cálculo de multiplicaciones y divisiones más allá de 10 x 10. *(Unidades 46, 48, 50, 51)*.

El Bloque VI no contiene ningún "Camino de aprendizaje", porque los conocimientos de este bloque ya están contenidos en el Camino del Bloque V, o en los Caminos respectivos del nivel de Primaria II.

Unidad 55 - Exploramos la multiplicación

Viaje de exploración matemática

Prerrequisitos:
- Conocer la multiplicación
- Conocer los números hasta 1000

Conceptos que se repasan en este viaje:
- Tablas de multiplicación hasta 10 x 10
- Ley conmutativa
- Ley asociativa

Conceptos nuevos que se introducen en este viaje:
- Tablas de multiplicación por 11 y por 12
- Reglas de divisibilidad
- Ley distributiva
- Multiplicación mental de números con dos dígitos

Materiales necesarios:
- Regletas Cuisenaire

Para los educadores

Este "viaje de exploración" repasa y amplía el tema de la multiplicación mediante diversos desafíos para la investigación propia. No contiene muchas actividades con material concreto; en su lugar usa hojas de trabajo que presentan diversos ejercicios de observación y razonamiento. En este caso, el "material de trabajo" son los números cuyas propiedades observamos.

En las hojas de trabajo no se trata entonces de llenar simplemente los resultados. La exploración y el aprendizaje suceden al *observar* los resultados, notar sus propiedades, y sacar conclusiones propias.

Use regletas Cuisenaire para reconstruir los ejemplos graficados con este material. Los ejercicios asociados pueden resolverse también con la ayuda de las regletas.

Estudie las sugerencias didácticas en la sección de "Taller" para sacar el máximo beneficio de las hojas de trabajo. Esta es la primera unidad donde entramos seriamente al campo de la investigación matemática; y hay que acostumbrarse primero a esta manera de razonar. – Por sus exigencias de investigación y razonamiento, esta unidad ya pertenece a la transición entre el nivel de Primaria I y el de Primaria II.

Para algunas preguntas un poco difíciles se encuentran pautas adicionales en el *Anexo A*.

Unas pautas generales acerca de la investigación matemática:

El propósito de una tarea de investigación se cumplirá solamente si permitimos al niño *buscar su propio camino hacia la solución*. Esto implica lo siguiente:

- **No dé instrucciones cerradas** como "así y así se hace".

- De todos modos, puede haber tareas donde usted como padre, madre o profesor(a) tampoco sabe "como se hace". Eso está perfectamente bien. **Conviértanse en co-exploradores al lado de los niños.** (Para no dejarles completamente perdidos, en el *Anexo A* se encuentran unas pautas acerca de algunas preguntas un poco difíciles.)

- "Investigación matemática" significa **acercarse a la solución *mediante el razonamiento propio*,** no buscar soluciones que otros ya encontraron. Entonces, no trate de encontrar "la fórmula" en alguna otra fuente de información. Eso solamente les quitaría la oportunidad de descubrir algo por ustedes mismos. El conocimiento más profundo y duradero es el que uno descubre por sí mismo.

- No se rindan si cometen errores o si no encuentran la solución en el primer intento. **"Investigación matemática" significa también aguantar tiempos de frustración, practicar perseverancia, y seguir probando caminos nuevos.** Esto es *lo contrario* de la matemática escolar que se enfoca solamente en encontrar una respuesta lo más rápido posible. Los matemáticos profesionales que trabajan en investigación dicen que pasan la mayor parte del tiempo equivocándose y persiguiendo ideas que al fin terminan en un callejón sin salida. Pero siguen probando ideas nuevas

(¡eso requiere creatividad!) hasta que por fin encuentran aquella que lleva a la solución. A veces es necesario ocuparse de una pregunta matemática por algún tiempo cada día, durante varios días – y después "llega" la solución en el momento menos esperado: en la noche cuando no puede dormir, al lavar los servicios, o en la bañera.

- Por el otro lado, "buscar el camino propio" no significa que no puedan **trabajar en equipo.** De todos modos, animen a los niños a investigar juntos en pequeños grupos; intercambien ideas entre niños mayores y niños menores, entre adultos y niños, entre padres y profesores. Junten sugerencias diversas, y animen a los que están en peligro de rendirse.

- Pero **si usted como educador ya sabe las respuestas, no las "enseñe".** Eso le quitaría el misterio y el encanto a la investigación. En cambio, intente animar y guiar a los demás mediante preguntas que hacen *reflexionar*. Solamente cuando los "investigadores" han agotado sus posibilidades, llega el momento de revelar los misterios.

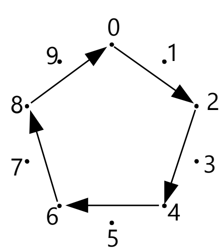
En esta unidad investigamos todavía conceptos muy sencillos. Pero tenga presente estas pautas cuando avancemos a temas más complejos.

Investigación

Multiplicación por 2 (Hoja de trabajo 55.1):

Arriba: La tabla del 2 se representa aquí de una forma que facilita descubrir el patrón regular de los últimos dígitos. (En las unidades se repiten siempre 0, 2, 4, 6, 8). Para que esta regularidad se note, en la segunda y tercera columna se deben escribir los números de tal manera que el dígito de decenas quede fuera del cuadro marcado y el dígito de unidades dentro de él; tal como se aprecia en el ejemplo del número 10 (en la multiplicación 2 x 5).
La meta es que el niño descubra esta regularidad por sí mismo, observando los resultados que él mismo escribió. Algunos lo verán al instante; otros pueden necesitar unas preguntas guía: "¿Notas algo especial en estos números? – Mira las cifras que están dentro de estos tres cuadros." – Etc.

Izquierda, en el medio: Este ejercicio también se dirige al patrón regular de las cifras de unidades. Funciona como las actividades de "unir puntos"; pero los números deben unirse de acuerdo a la secuencia de la tabla del 2: 0, 2, 4, 6, 8. Después del 8 sigue el 10, el cual termina con 0. Por tanto, desde el 8 continuamos al 0. Con eso se cierra el círculo, y el mismo patrón vuelve a repetirse.



Algunos niños pueden pensar que "algo está mal" porque nunca llegamos a los números 1, 3, 5, 7 y 9. Eso nos da una oportunidad de hacerles ver que estos números nunca aparecen como últimos dígitos en los números de la tabla del 2, y por eso nunca llegamos a ellos.
Podríamos preguntar por ejemplo: "Si continuáramos con la tabla del 2 hasta 100, o hasta 1000, ¿crees que alguna vez aparecerá un número que termina con 3? ¿o con 9?" – O también: "¿Crees que existe algún número que termina con 4 y *no* está en la tabla del 2?"
Un niño puede tener dudas en este punto, y eso no está mal. Al contrario, nos encontramos aquí ante una pregunta matemática muy profunda. En la hoja hemos examinado solamente tres decenas, hasta el 30. Podríamos continuar con la tabla hasta 2 x 20 = 40, o hasta 2 x 30 = 60, y veríamos que el mismo patrón regular continúa. Pero ¿eso nos garantiza que va a continuar así por toda la eternidad, hasta el infinito? – Aun un matemático profesional no aceptaría eso así no más. Él nos diría: "*Demuéstrame* que esta regla se puede generalizar para *todos* los números." Y eso no es nada trivial, porque tendríamos que demostrar que la regla vale para *infinitos* números. Así que una pregunta sencilla acerca de la tabla de multiplicación nos confronta repentinamente con uno de los misterios más grandes de la matemática, el infinito.
El pequeño gráfico con los números en el círculo no es una demostración matemática exacta, pero nos puede por lo menos dar una razón plausible: Si he dado vuelta al círculo y llego nuevamente al 0, es lógico que el mismo círculo comienza de nuevo. Entonces daré la vuelta eternamente por los mismos números (0, 2, 4, 6, 8), y nunca llegaré a los otros que están fuera del círculo.

Izquierda, abajo: Con este pequeño ejercicio comprobamos si el niño entendió realmente el carácter *general* de la regla que acabamos de descubrir. Si esta secuencia de los últimos dígitos continúa así hasta el infinito, entonces podemos decir de cualquier número si pertenece a la tabla del 2 o no; solamente tenemos que fijarnos en su último dígito.
Podemos formular la regla con palabras: "Un número pertenece a la tabla del 2 si termina con un dígito que es de la tabla del 2." – O más fácil: "Un número es par si termina con un dígito par." – Eso sería la regla de divisibilidad entre 2. (Si desea, puede en este punto ya introducir el término "divisibilidad". Oficialmente lo haremos en la siguiente unidad.)
- Notemos que el cero está incluido en los números pares. El cero es sin duda un número de la tabla del 2: 2 x 0 = 0. Entonces el cero es un número par. (Vea en la *Unidad 26* en "Principios matemáticos".)

Derecha: Estas actividades son un repaso de las primeras experiencias con la multiplicación: Una suma repetida puede expresarse como multiplicación. Y la multiplicación es conmutativa: Puedo intercambiar los factores, y el resultado sigue el mismo. (Vea *Unidades 34 y 35*.)

Multiplicación por 3 (Hoja de trabajo 55.2):

Izquierda, arriba: Aquí hacemos un experimento que a primera vista no parece tener ninguna fundamentación lógica: Tomamos los números de la tabla del 3 y sumamos sus cifras aparte. (Por ejemplo para el 12, sumamos 1 + 2. Para el 15 sumamos 1 + 5. Etc.) – Si un niño nos pregunta por qué hacemos esto, solamente podemos decir: "Espera hasta que veas los resultados, y entonces sabrás."
(Si lo resuelve correctamente, en los resultados se repetirá siempre – con excepción del cero – la secuencia 3, 6, 9.)
Aquí tenemos una regla sencilla que nos permite reconocer los múltiplos de 3: *Si sumamos sus cifras aparte,* el resultado será también un múltiplo del 3.
La tabla en la hoja nos hace sospechar que la secuencia 3, 6, 9 continuará para siempre. Pero si verificamos la siguiente multiplicación, vemos que este no es el caso: 3 x 13 = 39, y 3 + 9 = 12. Entonces, si una secuencia se repite varias veces, *eso todavía no comprueba que se repita de la misma manera para siempre*. Pero el 12 es también un múltiplo del 3, entonces esa parte de la regla sí es correcta.
(A este nivel todavía no podemos explicar a los niños *por qué* esta regla funciona; porque para eso necesitaríamos álgebra. Lo haremos en el nivel de Secundaria I.)

Derecha, arriba: Aquí hacemos lo mismo como con la tabla del 2: Unimos los puntos en el orden que siguen los dígitos de unidades en la tabla del 3. O sea, el orden es: 0, 3, 6, 9 – y después del 9 viene el 12 que termina con 2, entonces desde el 9 continuamos al 2, y siguen 5, 8, 1, 4, 7, 0 – con lo que se cierra el círculo (o mejor dicho la estrella, en este caso), y todo empieza de nuevo.
Una observación importante aquí es que en la tabla del 3, *todos* los dígitos pueden ocurrir como cifra de unidades. Y esto significa que *para la tabla del 3 no podemos establecer ninguna regla que se basa en el dígito de las unidades.* Después de aprender la regla para el 2, algunos niños esperarán que la regla para el 3 sea similar – por ejemplo que los números que terminan en 3, 6 ó 9 sean los múltiplos de 3. Pero un múltiplo de 3 puede terminar con *cualquier* cifra – y un número que no es múltiplo de 3 también. La regla correcta para reconocer múltiplos de 3 es la que hemos descubierto en la actividad a la izquierda.

Derecha, abajo: Otro repaso acerca de la conmutatividad, como en la hoja anterior.

Izquierda, abajo: Aquí se trata de aplicar la regla generalizada para reconocer múltiplos de 3. Las líneas que dicen "porque ..." invitan al niño a efectuar la suma de las cifras, en aplicación de la regla descubierta arriba.

Ahora, algunos niños pueden dudar en la aplicación de esta regla. La regla para el 3 es mucho más "misteriosa" que la regla para el 2, entonces puede que no encuentren sentido en este procedimiento, y puede parecer que no lo hayan entendido. ¿Qué hacemos en este caso?
Simple: averiguamos con otro método menos misterioso, si estos números son múltiplos de 3 o no. Aquellos niños que ya saben dividir números mayores *(Unidad 51)*, pueden directamente dividir entre 3. Si la división sale exacta, el número es un múltiplo de 3. – Para aquellos niños que todavía no dominan esta operación, hay otro método: Extendemos la tabla del 3 hasta llegar a los números que queremos averiguar. Eso es simple, porque solamente tenemos que sumar 3 al número anterior: 36, 39, 42, 45, 48 – ahora ya hemos sobrepasado el 46, entonces el 46 no es ningún múltiplo de 3. Y así continuamos – por lo menos hasta el 83, y si los niños tienen perseverancia, que sigan hasta el 130 o hasta el 288.
Estos métodos son "más seguros" para los niños, porque pueden entender su "por qué". Entonces, si un niño está en duda acerca de esa regla de sumar las cifras, no le digamos: "Así se hace, y punto." Démosle una salida para despejar sus dudas. Un científico en una situación comparable haría lo mismo: Si un método no le parece confiable, intentará primero confirmar sus hipótesis mediante un método más confiable.
Pero *después* de hacer eso, volvamos al método de sumar cifras. Podemos comprobar que este método da los mismos resultados como los otros métodos (división directa, o extender la tabla del 3). Así los niños pueden ver que al parecer, este método tan misterioso "sí funciona".

Multiplicación por 4 (Hoja de trabajo 55.3):

Arriba, izquierda: Las dos columnas paralelas permiten descubrir que los números de la tabla del 4 están "escondidos" dentro de la tabla del 2. Después, en la tercera columna, simplemente completamos la tabla del 4 hasta 4 x 12.

Arriba, derecha: Como en las hojas anteriores.
Se descubrirá aquí que los múltiplos de 4 terminan con las mismas cifras como los múltiplos de 2 (0, 2, 4, 6, 8), solamente en otro orden. Con eso puede surgir la pregunta si la regla para reconocer múltiplos de 4 es también la misma como para los múltiplos de 2; o sea, un número sería múltiplo de 4 si termina con una cifra par. *¿Es eso así? ¿Por qué sí, o por qué no?* – Reflexionen y conversen acerca de este tema, y formulen sus conclusiones. Después pueden leer más abajo en "Principios matemáticos": Los teoremas y sus inversos.

En el medio: Los ejemplos con regletas se basan en que cada regleta de 4 puede sustituirse por dos regletas de 2. Las operaciones debajo de los ejemplos corresponden exactamente a lo que representan las regletas.

Reconstruyan estos ejemplos con regletas y analícenlos. El rectángulo inicial y el rectángulo final de cada ejemplo tienen áreas iguales, porque no hemos aumentado ni quitado nada en el camino, solamente hemos cambiado su forma. Eso establece la igualdad.
Después resuelvan las igualdades a la derecha. Si es necesario, háganlo con regletas de la misma manera como en los ejemplos. Los niños que entendieron bien el principio, podrán hacerlo también mentalmente. (No es necesario que todos lo comprendan ahora mismo. Este tema se repite en las hojas siguientes.)

Abajo: Al colorear los cuadros según las indicaciones, saldrán unos patrones de color interesantes. Unas preguntas que pueden hacerse al analizar estos cuadros:
¿De dónde vienen las regularidades que se observan?
¿Qué propiedades tienen los cuadros que salieron verdes (o sea, se pintaron primero de amarillo y después de celeste)?
¿Por qué no hay cuadros de puro rojo (o sea, que pertenecen solamente a la tabla del 4 y a ninguna otra)?
¿Por qué aparecen esas franjas verticales celestes en el segundo cuadro, y amarillas y anaranjadas en el tercer cuadro? – ¿Qué influencia tiene el ancho del cuadro sobre el patrón que aparece?

Multiplicación por 5 (Hoja de trabajo 55.4):

Arriba, izquierda: Esta tarea es similar a la tarea correspondiente en la hoja anterior. La tabla del 5 contiene "escondida" la tabla de 10.

Arriba, en el medio: La regla para reconocer los múltiplos de 5 es muy fácil de descubrir, con la pauta de observar el último dígito. Aquí aplicamos la regla a números mayores.

Arriba, derecha: Como en las hojas anteriores. – Unos niños pueden pensar que su solución está mal porque se ve "extraña". Pero la solución es efectivamente una única línea recta que pasa del 0 al 5 y de regreso, porque no aparecen otros dígitos de unidades en la tabla del 5.

En el medio: Practicando la ley asociativa como en la hoja anterior. (Vea las explicaciones allí.)
Convertir multiplicaciones con el 5 en multiplicaciones con el 10 es muy práctico, ya que multiplicar por 10 es muy fácil.

Abajo: Aquí se pide por primera vez que el niño formule sus conclusiones por escrito. Es una ayuda si primero conversamos acerca de ello; después el niño puede escribir lo que ya formuló oralmente.
- Algunos niños dirán p.ej. que al multiplicar 5 por un número impar, el resultado es impar. Esto es correcto; pero se puede indicar una propiedad más específica. (No solamente es impar; sino que termina con una cifra impar *específica*.)

Nota: En este momento se puede intercalar la *Unidad 47* donde usamos la ley asociativa para multiplicar números de puras decenas.

Pintamos tablas de multiplicación (Hoja de trabajo 55.5):

La tarea es cada vez la misma: Primero completar la tabla con los números que faltan, después pintar los cuadros según las indicaciones. Resultarán unos patrones interesantes que están "escondidos" en la tabla. – La última tabla contiene adicionalmente la "tabla del cero" porque así el patrón sale más hermoso.
Como en todas las hojas de esta unidad, se trata no solamente de cumplir con la tarea de pintar. Después hay que observar y analizar las figuras que resultaron. Por ejemplo ***en la primera tabla:***
¿Por qué sale exactamente así?
¿Por qué hay mucho más números pares que impares?
¿Qué sucede cuando multiplicamos a) dos números pares; b) dos números impares; c) un número par con un número impar?
Acerca de la segunda tabla: (Los múltiplos de 3 se pueden distinguir mediante la regla descubierta en la Hoja 55.2.)
¿Por qué se encuentran los múltiplos de 3 exactamente en estos lugares?
¿Puedes formular exactamente la condición que tienen que cumplir los factores para que el producto sea un múltiplo de 3?
Acerca de la tercera tabla:
¿Por qué se encuentran estos números exactamente en estos lugares?
¿Cuáles son exactamente las propiedades de los números que terminan con 0, y de los que terminan con 5?

Multiplicación por 6 (Hoja de trabajo 55.6):

Arriba: Como las actividades correspondientes de la Hoja 55.3 (Multiplicación por 4). – La tarea a la derecha tiene esta vez una pregunta adicional. Si lo hicieron correctamente, saldrá una estrella igual a la que resultó con la tabla del 4. ***¿Por qué?***

En el medio: Como las actividades anteriores acerca de la ley asociativa (Hojas 55.3 y 55.4). – Una utilidad de estas actividades consiste en convertir multiplicaciones "desconocidas" en multiplicaciones "conocidas". Por ejemplo, los niños probablemente no saben cuánto es 3 x 16, pero sí pueden saber cuánto es 6 x 8 (y ahora descubrirán que es lo mismo).
En el siguiente ejercicio (ya no relacionado con la tabla del 6) hacemos uso de esta utilidad. Por ejemplo, tal vez no sabemos cuánto es 4 x 16. Pero ¿podemos usar la ley asociativa para convertir esta multiplicación en una que sí conocemos desde la tabla?

Abajo: Aquí hay que analizar para cada número por separado: si es múltiplo de 2, si es múltiplo de 3, y si es múltiplo de 6. Para el 2 y para el 3 ya conocemos las reglas, entonces eso es fácil. Para el 6 todavía no conocemos ninguna regla; entonces aquí tenemos que hacerlo con uno de los otros métodos: Dividir entre 6 y ver si sale exacto; o extender la tabla del 6 hasta el número que estamos examinando. (De hecho, solamente el 84 y el 87 requieren una extensión de la tabla conocida.)
Ahora, analizando las marcas que hemos puesto en cada número, podemos deducir una regla para reconocer los múltiplos de 6. (Obviamente tiene algo que ver con si el número es múltiplo de 2, y si es múltiplo de 3.) Ayúdense mutuamente a formular la regla: ¿Cuándo exactamente es un número un múltiplo de 6?

Multiplicación por 7 (Hoja de trabajo 55.7):

Arriba: Un experimento "misterioso". ¿Qué resultará si sumamos cada número de la tabla del 2 con el número correspondiente de la tabla del 5? – Comparando la columna de los resultados con la tabla del 7 que se encuentra a la izquierda, notamos que es lo mismo. ¿Por qué nuestro experimento da como resultado la tabla del 7? Que los niños tomen tiempo para reflexionar acerca de este misterio. Quizás ayuda si representamos con regletas Cuisenaire las operaciones que hemos hecho.

Abajo, izquierda: Otro experimento misterioso.
Comenzando con cada número de la tabla del 10, restamos el número correspondiente de la tabla del 3. Nuevamente resultará la tabla del 7. ¿Por qué?

Abajo, en el medio: Aquí tenemos la explicación de los dos experimentos. El primer dibujo representa la suma de un número de la tabla del 2 con el número correspondiente de la tabla del 5. Un rectángulo de altura 2, junto con un rectángulo de altura 5, da un rectángulo de altura 7 – o sea, un número de la tabla del 7. (¡Ármenlo con regletas Cuisenaire y reflexionen!) Las operaciones escritas con números explican lo que sucede numéricamente en este caso.
El segundo dibujo muestra una operación similar del segundo experimento: De un rectángulo de altura 10 quitamos un rectángulo de altura 3, y sobra un rectángulo de altura 7. Reconstruyan también esta operación con regletas Cuisenaire y analícenla.
Estos dos experimentos ilustran la ***ley distributiva***.

Abajo, a la derecha: Esta actividad ya es conocida. Con la tabla del 7 resultará nuevamente un dibujo igual a una de las tablas anteriores. ¿Por qué resulta así? – Si no pudieron descubrir este misterio en la hoja de la tabla del 6, aquí tienen una oportunidad más para analizar una situación similar.
(Si lo han pensado por mucho tiempo y no llegan a ninguna respuesta, consulten las pautas en el Anexo A.)

Multiplicación por 8 (Hoja de trabajo 55.8):

Arriba, a la izquierda: En hojas anteriores ya hemos encontrado unos "parentescos" similares entre tablas de multiplicación: entre la tabla del 2 y del 4; del 3 y del 6; del 5 y del 10. La tabla del 8 se encuentra "escondida" en la tabla del 4.

Arriba, a la derecha: Esta vez, esta actividad contiene dos círculos. Después de dar la vuelta por el primer círculo y regresar al 0, sigan haciendo lo mismo en el segundo círculo.
Lo dibujamos así, no por razones matemáticas, pero por una razón estética: Al hacerlo así, resultará al final la figura del 8.

Abajo, a la izquierda: Observamos una propiedad interesante de los dígitos de la tabla del 8: Las decenas siempre aumentan en 1; las unidades siempre disminuyen en 2. (¿Pueden explicar ***por qué*** es así?)
La regla "se rompe" entre el 40 y el 48, por eso no hay operadores del 40 al 48. Aun así, la propiedad descubierta puede ayudar para recordar la tabla del 8. Continuar después del 40 es fácil, porque 40 + 8 es una suma fácil.

Abajo, en el medio: Otra aplicación de la ***ley distributiva.*** Si sumamos números de la tabla del 8, resulta nuevamente un número de la tabla del 8. Podemos comenzar con la suma y después analizar lo que sucede con las multiplicaciones (primer ejemplo); o podemos comenzar con las multiplicaciones y después comprobarlas con la suma simple (segundo ejemplo). – El dibujo abajo a la derecha explica con regletas Cuisenaire lo que sucede en estas operaciones.
Los siguientes dos ejemplos demuestran cómo usar esta propiedad para multiplicar números más grandes por 8: Los descomponemos de una manera práctica (10 = 10 + 3), multiplicamos las partes por separado, y al fin sumamos. (La flecha hacia arriba, a la derecha de la operación, indica que al final copiamos el resultado de la suma a la línea de arriba. Con números más grandes como 36, la suma de abajo es la única manera práctica de llegar al resultado.)
Los últimos dos ejemplos siguen el mismo proceso, pero anotando menos pasos intermedios. Las multiplicaciones parciales se pueden hacer en la cabeza, y anotamos solamente sus resultados que después se suman. (Entonces en el caso de 8 x 47, la suma que anotamos es 320 + 56.)
Practicando este proceso un poco más, los niños pronto sabrán ***multiplicar mentalmente números de dos cifras.*** Si desean, pueden ahora practicarlo un poco más (vea Hoja 55.10).

Multiplicación por 9 (Hoja de trabajo 55.9):

Arriba, a la izquierda: El mismo ejercicio como con la tabla del 3 (vea Hoja 55.2). La regla para reconocer múltiplos de 9 es la misma como para el 3: *La suma de las cifras* es un múltiplo de 9.

(Inicialmente podríamos pensar que la suma es siempre 9. Pero en el 99 vemos que la suma puede también ser 18. Con números mayores podría también ser 27, 36, o algún otro múltiplo de 9.)

Arriba, a la derecha: Aquí descubrimos que la tabla del 9 está "escondida" dentro de la tabla del 3.

En el medio (Multiplicaciones con 3): Aquí hacemos uso de este "parentesco" entre la tabla del 3 y la tabla del 9, para convertir multiplicaciones con 3 en multiplicaciones con 9. (Compara la Hoja 55.6, acerca de la ley asociativa.) – Por supuesto que esto funciona solamente si el segundo factor es un múltiplo de 3.

Abajo, a la izquierda: Un "experimento" similar a los que hicimos en la Hoja 55.7. Es nuevamente una aplicación de la ley distributiva. (Pueden representarlo con regletas Cuisenaire.)

Abajo, en el medio: Aquí aplicamos la regla general para reconocer los múltiplos de 9. (Vea las explicaciones acerca del ejercicio correspondiente en la Hoja 55.2.)

Pintamos múltiplos (Hoja de trabajo 55.10):

Pintamos en las tablas los cuadros con los múltiplos indicados, como en la Hoja 55.3 abajo. Aquí también saldrán unos patrones interesantes que se pueden analizar haciendo preguntas similares como en la Hoja 55.3. El más fácil de analizar es el último: los múltiplos de 9 y de 11 forman unas "escaleritas" regulares, pero en direcciones opuestas. ¿Por qué?
Note que las tablas aquí (como en la Hoja 55.3) no son tablas de multiplicación; son tablas de números seguidos.

Al lado izquierdo de la hoja tenemos además unos ejercicios para practicar la ***multiplicación de números de dos y tres cifras***, aplicando la ley distributiva como en la Hoja 55.8.
La tercera serie de estos ejercicios ("¿Ya lo puedes todo en la cabeza?") contiene una especie de autocontrol, porque todos los resultados son números con alguna propiedad especial: con todas las cifras iguales (como 333); con cifras seguidas (como 123 ó 321); o con alguna forma de simetría (como 969).

Multiplicación por 10 y por 11 (Hoja de trabajo 55.11):

Arriba: La tabla del 10 no debe presentar ninguna dificultad. Los niños pueden haber descubierto ya anteriormente que para multiplicar un número con 10, se puede simplemente "añadir un cero" al final. (En el nivel de Primaria II analizaremos más detenidamente estas propiedades del sistema decimal.) El ejercicio arriba a la derecha comprueba si los niños son capaces de aplicar esta propiedad a números mayores. – La última multiplicación da un resultado mayor a 1000 que los niños tal vez no saben "leer" todavía; pero igualmente pueden aplicar el principio. Es una experiencia importante que los principios que se aplican a objetos "conocidos", pueden igualmente aplicarse a objetos "desconocidos"; y así se ensanchan las posibilidades de la matemática.

En el medio (Múltiplos de 2, de 5 y de 10): Este ejercicio funciona igual como el de la Hoja 55.6 abajo. Los niños ya habrán notado que los múltiplos de 10 se reconocen porque terminan en 0. Pero en este "experimento" verán que las propiedades de los múltiplos de 10 están también relacionadas con las propiedades de los múltiplos de 2 y de 5.

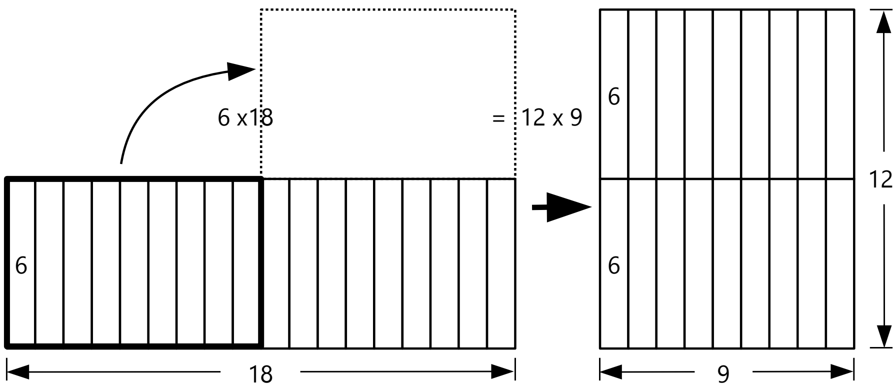
Abajo: Los niños notarán pronto que la tabla del 11 es "fácil", por lo menos hasta el 99. – En la segunda columna sumamos los números de la tabla del 10 con la tabla del 1; esta propiedad sigue válida aun después del 99. Así los niños tendrán una ayuda para reconstruir fácilmente la tabla del 11.
A la derecha generalizamos esta regla para la multiplicación de números mayores por 11. Analizamos lo que sucede al multiplicar 25 por 11: En el resultado, las centenas (2) vienen del dígito de decenas en el número original; las unidades (5) son iguales a las unidades del número original; y las decenas del resultado son la *suma* de ambas cifras (7 = 2 + 5). Por eso se puede realizar esta operación muy fácilmente: El número (25) se escribe con un poco de espacio entre las cifras, y en este espacio escribimos la suma de las dos.
La *nota* al final tiene un asterisco (*) porque contiene una pregunta difícil; no hay que insistir en que todos los niños encuentren la respuesta. Se clarificará este asunto en el nivel de Primaria II cuando analizaremos el sistema decimal y los procedimientos de sumar y multiplicar números grandes cifra por cifra.

Multiplicación por 12 (Hoja de trabajo 55.12):

Arriba, izquierda: Encontramos otro "parentesco" entre tablas de multiplicación, como ya lo hicimos en varias hojas anteriores. Esta vez, entre las tablas del 6 y del 12. Ya que hemos extendido todas las tablas anteriores hasta 12, los niños pueden descubrir que allí ya tenemos todos los números de la tabla del 12; el único "desconocido" es 12 x 12 = 144.

En el medio: Un repaso de una aplicación de la ley asociativa. (Vea Hojas 55.4 y 55.6). Queremos que resulte una multiplicación con 12; entonces hay que descomponer el segundo factor en factores correspondientes: 6 x 18 = ..., para que salga 12, hay que multiplicar el 6 por 2. Entonces tenemos 6 x 2 x___. El tercer factor que buscamos resulta de la descomposición del 18: 2 x___= 18; el número que falta es 9, entonces la multiplicación completa es 6 x 2 x 9. Multiplicando en orden tenemos 12 x 9, una multiplicación conocida desde la tabla.

Si los niños dificultan en resolver estas operaciones de manera abstracta, háganlas primero con regletas Cuisenaire como en las Hojas 55.4 y 55.6:



Abajo, izquierda: En la tabla del 12 podemos observar una regularidad muy similar a la que observamos en la tabla del 8 (vea Hoja 55.8).

Abajo, derecha: Como las actividades de la Hoja 55.10. Resultará cierta simetría entre los cuadros de la tabla del 8 y los de la tabla del 12. ¿A qué se debe esta simetría?

Pintamos tablas de multiplicación (II) (Hoja de trabajo 55.13):

Completen las tablas de multiplicación y pinten los cuadros indicados, como en la Hoja 55.5. En estas tablas observaremos unas simetrías notables en los patrones que resultan. ¿De dónde vienen estas simetrías? – En particular, observaremos que en cada caso, los dos grupos de números se complementan (por ejemplo los que terminan en 2, con los que terminan en 8), para formar un solo patrón completo. ¿Por qué?
Otra pregunta a analizar: En las dos tablas de abajo tendremos mucho menos cuadros pintados que en las tablas de arriba. ¿Por qué?

Principios matemáticos

Los teoremas y sus inversos

En esta unidad nos ocupamos un poco más intensamente con diversos teoremas o leyes de la matemática: Teoremas que describen las propiedades de los múltiplos de 2, de 3, de 5, etc; teoremas que nos dicen cómo convertir ciertas operaciones en otras operaciones equivalentes (ley asociativa, ley distributiva), y otros.
Todo teorema tiene sus condiciones, y entonces enuncia las propiedades que se cumplen bajo estas condiciones. Por ejemplo:

"Todos los números pares terminan con una cifra par."

La *condición* es que el número en cuestión sea par. *Entonces* se cumple que ese número termina con una cifra par. O sea, podemos formular el teorema de esta otra manera:

"***Si*** un número es par, ***entonces*** termina con una cifra par."

Ahora, en el transcurso de nuestras investigaciones hemos descubierto que si un número termina con una cifra par, podemos saber que ese número es par. O sea:

"Todos los números que terminan con una cifra par,
son pares."

Respectivamente:

"*Si* un número termina con una cifra par,
entonces el número es par."

Tenemos que formular este teorema aparte porque *no es el mismo teorema como el primero:* La condición y el enunciado de la propiedad han intercambiado sus lugares. Remplacemos estas afirmaciones por A = "El número es par", y B = "El número termina con una cifra par". Entonces el primer teorema dice: "Si A, entonces B"; mientras el segundo dice: "Si B, entonces A." *¡Eso no es lo mismo!* El segundo teorema se llama el ***inverso*** del primero; y vice versa.

En este contexto tenemos que cuidarnos contra un error de razonamiento que es bastante frecuente, sobre todo en principiantes. Uno podría pensar que si un teorema es verdadero, su inverso también tiene que ser verdadero. En el ejemplo de los números pares, eso es efectivamente así. El teorema es verdadero, y su inverso también es verdadero. ¡Pero no siempre es así!

Observemos como ejemplo los múltiplos de 4, o sea los números de la tabla del 4: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... Notamos que todos estos números son pares. Ya que las cifras de las unidades se repiten a partir del 20, podemos concluir que esta propiedad se puede generalizar para la entera tabla del 4, hasta el infinito. O sea:

"Todo múltiplo de 4 termina con una cifra par."

Respectivamente:

"Si un número es múltiplo de 4,
entonces termina con una cifra par."

Este es un teorema; es una afirmación verdadera. Entonces uno podría pensar que su inverso también es verdadero:

"Todo número que termina con una cifra par, es un múltiplo de 4."

Respectivamente:

"Si un número termina con una cifra par, entonces es múltiplo de 4."

Pero si hacemos unas pruebas, notaremos pronto que eso no es así. Por ejemplo el 14 termina con una cifra par, pero no es un múltiplo de 4. Podríamos encontrar muchos otros casos así; pero este único contraejemplo ya es suficiente para refutar la afirmación: *No es cierto* que todo número que termina con una cifra par, sea un múltiplo de 4; porque hemos encontrado *por lo menos un número* que cumple la condición, pero la propiedad no aplica. Por tanto, la afirmación es falsa. (Si fuera cierta, no existiría *ninguna* excepción.)

Para mencionar otro ejemplo, un poco menos matemático:

"Todos los gatos tienen cuatro patas."

Respectivamente:

"Si es un gato, entonces tiene cuatro patas."

Eso es cierto – por lo menos si excluimos a animales malformados o mutilados. Entonces ¿podemos afirmar lo siguiente?

"Todo lo que tiene cuatro patas, es un gato."

Respectivamente:

"Si tiene cuatro patas, entonces es un gato."

¡Obviamente no! Los perros tienen cuatro patas, pero no son gatos. Las jirafas tienen cuatro patas, pero no son gatos. Aun mi silla tiene cuatro patas, pero no es un gato. ¡El inverso del teorema no es verdadero!

Concluimos entonces: Si hemos demostrado que un teorema es verdadero, eso todavía no implica que su inverso sea también verdadero. Para *algunos* teoremas sí lo es; pero para otros no. Entonces, aun si un teorema ya está demostrado, su inverso debe examinarse por separado si es verdadero o no. De otro modo llegaremos a conclusiones equivocadas.

En los niveles posteriores tendremos que ocuparnos de este tema más conscientemente, junto con los alumnos, para evitar errores de razonamiento.

Matemática divina

Dios nos anima a investigar

La Biblia dice que Dios quiere ser buscado: "Busquen al Señor mientras puede encontrarse; llámenle mientras está cerca." (Isaías 55:6.) Dios no se muestra a la vista de todo el mundo; tampoco se impone al que no quiere saber nada de él. Él quiere que lo busquemos activamente. "Gloria de Dios es encubrir un asunto; pero honra del rey es investigarlo." (Proverbios 25:2.) Eso es no solamente para los reyes; porque todos los que pertenecen a Dios, pertenecen a "la familia del Rey".

Así como es necesario buscar para encontrar a Dios, también es necesario buscar e investigar para entender la matemática. También la matemática no quiere ser impuesta; quiere ser descubierta.

El misterio del infinito

Al examinar los múltiplos de 2 y la regla de divisibilidad entre 2, nos hemos enfrentado por primera vez con el misterio del infinito. Quizás unos niños ya hicieron preguntas como: "¿Los números nunca terminan?" – Desde un punto de vista matemático, la respuesta es sencilla: A cualquier número le puedo aumentar 1, entonces tengo un nuevo número "más allá" del número que encontré. Por tanto, nunca terminan. Pero no es tan sencillo desde un punto de vista filosófico o psicológico: El infinito está más allá de todo lo que podemos observar o siquiera imaginarnos. Por eso puede ser difícil aceptar que el infinito existe. Pero la matemática nos dice que sí existe. Y la Biblia dice lo mismo, porque dice que Dios no tiene principio ni fin (Hebreos 7:3). Así que el pensar acerca de lo infinito puede llevarnos a admirar la inmensa grandeza de Dios.

De hecho, para que los matemáticos lograran manejar el infinito, tuvo que surgir primero una cultura que reconocía al Dios infinito, y que al mismo tiempo incentivaba la investigación libre. Eso sucedió en Europa durante el siglo 17, como consecuencia de la Reforma. En ese tiempo vivían Newton y Leibniz, los descubridores del cálculo infinitesimal.

Unidad 56 - Múltiplos, divisores, y números primos

Prerrequisitos:
- Multiplicación de números de dos cifras, y división de números de tres cifras *(Unidades 48 y 51)*

Materiales necesarios:
- Material contable: piedritas, semillas, cubitos de unidad de las regletas Cuisenaire, etc.

Investigación **Formamos rectángulos**

Para esta actividad necesitamos algún material contable: piedritas, habas, granos de maíz, etc. También pueden hacerlo con los cubitos de unidad de las regletas Cuisenaire, si tienen suficientes.

a) Que cada uno saque un puñado de piedritas (o lo que tengan) e intente formar un rectángulo completo, usando todas las piedritas que tiene. Un rectángulo completo es un rectángulo donde cada fila contiene el mismo número de piedras:

```
o o o o o
o o o o o
o o o o o
```

O sea, un marco como este no sería un rectángulo completo:

```
o o o o o
o       o
o o o o o
```

Cuenten el número de piedritas y anoten la multiplicación que corresponde al rectángulo que encontraron. En el caso de que no encuentren solución, aumenten o quiten una piedrita, e inténtenlo nuevamente.
Intenten lo mismo con otros números de piedritas.

b) Respondan a la pregunta: ¿Es posible formar un rectángulo con cualquier número de piedritas? ¿O existen casos que no tienen solución? – Anoten ejemplos.

Nota:
Los números que permiten formar un rectángulo (donde cada lado mide por lo menos 2 piedritas), se llaman ***números compuestos***. Los números con los que se puede formar solamente una única fila de 1 piedrita de ancho, se llaman ***números primos***.

c) Usen ahora unos números "difíciles" de piedritas, e intenten descubrir si se puede formar con ellos un rectángulo o no (o sea, si son números primos o no).
Por ejemplo: 43, 51, 57, 59, 67, 69, 73, 79, 83, 87, 91.

d) Busquen una manera sistemática de descubrir para cualquier número cómo se puede representar en forma de rectángulo, o si es un número primo.

Notas:
Todos los rectángulos que hemos encontrado, representan *multiplicaciones*. Por ejemplo, con 12 piedritas podemos formar un rectángulo con los lados 3 y 4, porque 3 x 4 = 12. Se dice que 12 es un ***múltiplo*** de 3, porque 12 es el resultado de una multiplicación por 3. 12 es también un múltiplo de 4.
Los múltiplos de 3 son todos los números de la tabla del 3 (continuando hasta el infinito). Igualmente, los múltiplos de 4 son todos los números de la tabla del 4.

```
o o o o o o o o o o o o
```

Una fila de una sola piedrita de ancho es una multiplicación por 1: 1 x 12 = 12.

Entonces el 12 es también un múltiplo de 1 y un múltiplo de 12. Cada número es un múltiplo de 1, y cada número es un múltiplo de sí mismo.

Podemos invertir la multiplicación y escribirla como división: 12 ÷ 4 = 3, y 12 ÷ 3 = 4. Por eso se dice también: 4 es un ***divisor*** de 12, o: 12 es ***divisible*** entre 4, porque podemos dividir 12 entre 4 y sale exacto. 3 es también un divisor de 12; o sea, 12 es también divisible entre 3.

El 1 es un divisor de todos los números, porque todos los números se pueden dividir entre 1 y no queda residuo.

Cada número puede también dividirse entre sí mismo, y no queda residuo. Por ejemplo 12 ÷ 12 = 1. Entonces cada número es también un divisor de sí mismo.

Los números primos tienen exactamente dos divisores: el 1, y el número mismo. Los números compuestos tienen adicionalmente otros divisores.

Entonces ya conocemos cuatro divisores del 12: el 3, el 4, el 1, y el 12 mismo. Pero 12 es también 2 x 6. Entonces el 2 y el 6 también son divisores del 12.

e) Intenten ahora encontrar *todos* los divisores de un número. Pueden hacerlo formando rectángulos como antes. También pueden hacerlo anotando directamente, si ya se sienten seguros en eso.

Por ejemplo el 15: Ya sabemos que el 1 y el mismo 15 son sus divisores. Pero 15 es también 3 x 5. No hay otra manera de formar un rectángulo con 15 piedritas, entonces estos son todos los divisores de 15: 1, 3, 5, 15.
Inténtenlo con otros números. Por ejemplo:

16, 18, 24, 30, 39, 40, 42, 45, 49, 60, ...

Para quienes les gusta investigar, aquí dos preguntas un poco más exigentes:

***f)** De los números hasta 100, ¿cuáles tienen más divisores?

***g)** De los números hasta 100, ¿cuáles son números primos?

Para algunas de las preguntas hay pautas adicionales en el *Anexo A*. Pero tomen primero suficiente tiempo para investigar por ustedes mismos, antes de leer las pautas.

Vocabulario matemático

Múltiplo: Que es resultado de una multiplicación. – Por ejemplo 28 es un múltiplo de 4, porque es resultado de multiplicar 4 por 7.

Divisible: Que se puede dividir sin residuo. – Por ejemplo 15 es divisible entre 3, porque 15 ÷ 3 = 5 y no queda residuo. *Esto es sinónimo de decir que "15 es un múltiplo de 3."*

Divisor: Un número entre el cual otro número es divisible. – Por ejemplo 3 es un divisor de 15, porque 15 es divisible entre 3.

Número compuesto: Número que es producto de una multiplicación, sin usar el 1 como factor. – Por ejemplo 26 es un número compuesto porque 26 = 2 x 13.

Número primo: Número que tiene solamente dos divisores: el 1 y el número mismo.

Nota: Por definición, el 1 no es ni primo ni compuesto.

Nota para los profesionales: Se sobreentiende que todas estas definiciones se refieren a números naturales. No es necesario mencionar esto para niños de este nivel.

Para los educadores

En esta unidad y en la siguiente estamos entrando solamente unos pocos pasos a este terreno amplio de las factorizaciones y los números primos. No se preocupen si no pueden encontrar las respuestas a todas las preguntas. En el nivel de Primaria II (y en los niveles de Secundaria) investigaremos estos temas con más detalles. Por ahora es suficiente que los niños adquieran unas nociones muy básicas de estos temas.

Unidad 57 - Factorizar números; Divisibilidad entre 2 y entre 5

Prerrequisitos:
- Operaciones básicas hasta 1000 *(Bloque V)*
- Múltiplos, divisores, números primos *(Unidad 56)*

Para los educadores

Como los temas de la unidad anterior, estos se estudiarán con más detalle en el nivel de Primaria II.
La factorización en factores primos es difícil de representar con material concreto. Una factorización en *tres* factores se puede representar todavía en forma de un "ladrillo" tridimensional (vea *Unidad 38*, "Multiplicaciones con varios factores"). Pero cuando son cuatro o más factores, llegamos a un límite donde las representaciones con material concreto llegan a ser casi igual de difíciles de entender como las operaciones con números.
En el nivel de Primaria II introduciremos una forma de representar factorizaciones de manera *gráfica*; pero esa requiere una capacidad un poco más avanzada de razonar.
Por eso, esta unidad no contiene ningún "Taller". Sus actividades consisten en explicaciones de los principios, y unas actividades de ejercicios y de investigación.

Ahora lo escribimos

Entendiendo los factores primos

En la unidad anterior hemos buscado *divisores* de diversos números. O, lo que es lo mismo: Hemos buscado cómo representar los números en forma de una multiplicación. Eso se llama una ***descomposición en factores***, o una ***factorización***.

Ahora llevaremos este proceso un poco más allá: Una vez que encontramos una factorización, analizamos si los factores pueden a su vez descomponerse en otros factores.

Por ejemplo: 12 = 4 x 3

Ahora, el 4 se puede escribir como 2 x 2. Entonces, juntándolo todo, tenemos:

12 = 2 x 2 x 3.

El 2 y el 3 son números primos, entonces no podemos seguir descomponiendo. Hemos descompuesto el 12 en sus ***factores primos***.

Podríamos decir que 2 = 1 x 2, y 3 = 1 x 3. Pero eso no nos aporta ninguna información nueva, porque seguimos teniendo el 2 y el 3 en la factorización. Por eso, los matemáticos se han puesto de acuerdo en que el número 1 no lo contamos entre los números primos.
De hecho, es un teorema matemático importante que para cada número existe *una única manera* de descomponerlo en factores primos. (Excepto el orden de los factores: 2 x 2 x 3 es lo mismo como 3 x 2 x 2.) Pero si admitiéramos el 1 como número primo, entonces tendríamos:
12 = 2 x 2 x 3 = 1 x 2 x 2 x 3 = 1 x 1 x 2 x 2 x 3 = ...
O sea, la factorización ya no sería única; pero las factorizaciones que contienen el 1 no nos ayudan para nada, solamente complican el asunto. Esto es una buena razón para decidir que el 1 no lo incluimos entre los números primos.

Haremos otro ejemplo, con un número un poco más grande:

120 = 10 x 12

Pero 10 = 2 x 5, y 12 = 2 x 2 x 3 (acabamos de descubrir eso). Entonces:

120 = (2 x 5) x (2 x 2 x 3), o de manera más ordenada:

120 = 2 x 2 x 2 x 3 x 5.

Para descomponer un número en factores primos, podemos empezar con cualquier factorización que encontramos, y de allí seguir factorizando. Por ejemplo, llegamos al mismo resultado como arriba si comenzamos así:

120 = 8 x 15

8 = 2 x 4, 15 = 3 x 5, entonces:

120 = 2 x 4 x 3 x 5

Pero todavía no hemos terminado: 4 = 2 x 2, entonces:

120 = 2 x 2 x 2 x 3 x 5, como arriba.

En vez de comenzar con una factorización cualquiera, se puede hacer también de una manera un poco más sistemática y ordenada. Eso fue la pregunta **d)** en la unidad anterior. Por ejemplo, podemos probar los factores posibles en orden: ¿Es el 2 un divisor de nuestro número? ¿Es el 3 un divisor? Etc.

Pregunta: ¿Tenemos que probar con el 4 también? ¿Por qué sí? ¿o por qué no? – Piénsenlo bien. Si no están seguros acerca de su respuesta, pueden consultar el Anexo A.

Vocabulario matemático

Factorizar: Descomponer en factores.

Factor primo: Número primo que es un factor (resp. divisor) de un número dado.

Practicamos la factorización en factores primos

Practiquen ahora factorizar algunos otros números hasta llegar a sus factores primos. Pueden hacer sus propios ejemplos, o pueden practicar con los siguientes:

24, 28, 30, 44, 45, 50, 98, 100, 121, 128, 162, 200, 560, 1000.

Investigación

Factores primos y divisores

Si conocemos los factores primos de un número, eso nos ayuda para encontrar más fácilmente sus divisores. Investiga la relación entre los factores primos y los divisores.

Por ejemplo con el número 18:

Sus factores primos son: 18 = 2 x 3 x 3.

Sus divisores son: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Examina estos números. ¿Cómo se relacionan los divisores de 18 con los factores primos de 18?

Si descubres el principio, pruébalo con otros números. Haz unos ejemplos propios, o usa los números del ejercicio anterior. Encuentra y anota todos los divisores de esos números.

Si has intentado por mucho tiempo encontrar este principio y no lo descubres, puedes consultar el *Anexo A*.

Divisibilidad entre 2 y entre 5

Si hiciste la *Unidad 55*, entonces puedes saltar esta parte.

Para encontrar factores primos, puede ser necesario probar varias divisiones: ¿Podemos dividir nuestro número entre 2? ¿entre 3? ¿entre 5? etc. Pero con algunos de estos divisores no es necesario hacer la división, porque existen unas reglas de divisibilidad más sencillas.

Por ejemplo para el 2: Anotaremos la tabla del 2 en columnas de 5 números cada una:

2 x 0 = 0	2 x 5 =___	2 x 10 =___
2 x 1 = 2	2 x 6 =___	2 x 11 =___
2 x 2 = 4	2 x 7 =___	2 x 12 =___
2 x 3 =___	2 x 8 =___	2 x 13 =___
2 x 4 =___	2 x 9 =___	2 x 14 =___ etc.

Ahora fíjate en cada columna en los dígitos finales de los resultados (o sea, las cifras de las unidades). ¿Qué observas? ¿Encuentras una regularidad? ¿Te ayuda eso para decir rápidamente si un número está en la tabla del 2? Por ejemplo, ¿el 234 es divisible entre 2 o no?

Una regla similar existe para la tabla del 5. Anota los números de la tabla del 5. Fíjate con qué dígitos terminan. ¿Encuentras una regularidad? ¿Cómo puedes reconocer fácilmente los números divisibles entre 5?

Si hiciste la *Unidad 55*, entonces conoces también una regla fácil para reconocer los números divisibles entre 3.

Aplica ahora estas reglas para encontrar los factores primos de los siguientes números:

225, 352, 375, 384, 448, 625.

Hojas de trabajo

Hoja de trabajo 57.1 *(arriba):* ***¿Son divisibles o no?***
Marca para cada número la casilla correspondiente (“Sí” o “No”). En la primera columna queremos saber si son pares o impares, o sea, si son divisibles entre 2 o no. En la segunda columna, si son divisibles entre 5. En la tercera columna, si son divisibles entre 10.

Hoja de trabajo 57.1 *(abajo):* ***Pinta los múltiplos***
Si un número es múltiplo de 2, pinta el campo donde está el número con amarillo.
Si un número es múltiplo de 5, pinta su campo con rojo.
Si un número es múltiplo de 2 y también de 5, tendrás que pintar su campo con ambos colores, uno encima del otro (o sea, saldrá anaranjado).
Observa: ¿Qué puedes decir acerca de estos números doblemente pintados?

Principios matemáticos

¿Leyes matemáticas o convenciones?

En esta unidad mencionamos que los matemáticos se pusieron de acuerdo para no incluir el 1 entre los números primos. Eso puede haber dado la impresión de que los matemáticos pueden decidir de manera más o menos arbitraria qué es correcto en la matemática y qué no. ¡Pero eso no es así!
La decisión mencionada fue necesaria porque había una ambigüedad en la definición de los números primos. Si definimos los números primos como "los números que no son compuestos", entonces el 1 sería definido como primo. Pero si definimos los números primos como "los números que tienen exactamente dos divisores (el 1 y el número mismo)", entonces el 1 no sería primo, porque tiene un único divisor. Ahora, resultó más práctico preferir la segunda definición, porque así diversos teoremas pueden formularse de una manera más sencilla. Por ejemplo el Teorema Fundamental de la Aritmética que mencionamos en el Taller (que cada número tiene una única descomposición en factores primos).
Pero esta definición no altera ninguna de las propiedades matemáticas de los números. El 1 sigue teniendo un único divisor, y el 7 sigue teniendo dos divisores. La definición de que "el 1 no es primo" no es ningún teorema, no es ninguna ley de la matemática. Es solamente una *convención* (un acuerdo) acerca de los términos que usamos al hablar de la matemática. Como tal, no expresa ninguna verdad matemática; solamente expresa un acuerdo común acerca de la *comunicación* de la matemática.
Es cierto que con un cambio de la definición, se deben también hacer unos cambios en la forma como expresamos ciertos teoremas. Por ejemplo, en el siglo 19, cuando los matemáticos todavía incluían generalmente el 1 entre los números primos, era necesario añadir al Teorema Fundamental de la Aritmética una aclaración de que los factores primos tenían que ser *distintos de 1*. Pero eso es tampoco una alteración de la ley matemática; es solamente un cambio en nuestra forma de *expresar* la ley matemática – un asunto de comunicación.
Las verdades matemáticas en sí nunca cambian, y no pueden alterarse por una decisión de los matemáticos. Eso es lo hermoso de la matemática: No nos obliga a someternos a algún "experto", porque sus leyes son eternas y nadie las puede cambiar. Aun un niño (si sabe pensar lógicamente) puede descubrirlas; y aun el matemático más influencial tiene que someterse a ellas. Lo único que puede cambiar a lo largo del tiempo, son nuestras convenciones acerca de las palabras y los símbolos que usamos para *comunicar* la matemática.

Unidad 58 - Fracciones sencillas

Materiales necesarios:
- Objetos de la vida diaria.

TALLER

Fracciones en la vida diaria

Si estamos conversando con los niños durante nuestra vida cotidiana y estamos atentos a las oportunidades educativas que ocurren durante el día, entonces los niños ya habrán aprendido de manera informal algunas fracciones sencillas.

Por ejemplo en las recetas de cocina podemos encontrar expresiones como las siguientes: "Media cucharita de bicarbonato", "¾ taza de leche", etc. Al pesar y medir estas cantidades, los niños comienzan a entender lo que significan estas fracciones. O quizás tienen una litrera que permite medir medio litro, un cuarto de litro, etc. O al ir de compras: "Esta botella contiene 2 litros y medio de gaseosa." – "Hay que comprar un cuarto kilo de queso." – Etc.

O se da la situación de repartir una manzana entre cuatro niños. Cada niño recibe un cuarto. (¿Y qué si son cinco niños? ¿Alguien se atreve a cortar la manzana en quintos, o sea en cinco partes iguales?)

En los cumpleaños hay que repartir la torta en duodécimos (dozavos), en veintésimos, o en otra clase de fracciones.

Al decir la hora nos acostumbramos a decir: "Son las ocho y media"; "Son las diez menos cuarto". Estas fracciones se pueden ilustrar fácilmente al observar un reloj analógico: ¿Cuánto recorre el minutero en un cuarto de hora? ¿Y en media hora? Y al hacer estas observaciones podemos preguntar también: ¿Cuántos minutos son media hora? ¿y un cuarto de hora? ¿y tres cuartos de hora?

Algunos trabajos manuales también dan oportunidades para usar fracciones. Por ejemplo, muchos origamis requieren doblar la hoja primero por la mitad, después en cuartos, y quizás hasta en octavos. Algunos origamis especiales requieren doblar la hoja en tercios.

Repartir objetos que se pueden partir

Podemos ampliar las situaciones donde tenemos que repartir algo entre varias personas. Lo más práctico son ciertos alimentos como frutas, barras de chocolate, panecillos, etc. Si han conversado conscientemente acerca de situaciones como las antes mencionadas, seguramente los niños ya sabrán repartir una manzana entre dos, tres o cuatro personas. Pero ¿cómo hacemos para repartir *tres* manzanas entre cuatro personas? – Si intentan pensarlo "matemáticamente", probablemente los niños se enredarán con conceptos teóricos que todavía no entienden. Pero hay una manera práctica de entenderlo: Repartimos *cada manzana* en 4 partes; entonces a cada persona le toca una parte de cada manzana, o sea 3 partes en total.
Practiquen situaciones similares: Repartir 7 barras de chocolate entre 6 niños; repartir 7 panecillos entre 2 personas, repartir 3 tortitas entre 7 personas, etc.

Si los niños están listos para analizar estas situaciones de manera matemática (¡y solo entonces!), podemos hacerles ver que repartir 3 manzanas entre 4 personas equivale a la división $3 \div 4$. Además podríamos hacerles ver que en el caso de las 7 barras de chocolate entre 6 niños, podemos primero dar a cada niño un chocolate entero. (Quizás ya lo hicieron así.) Entonces solamente tenemos que partir el último chocolatillo restante (o sea el residuo) en 6 partes. Eso nos da el resultado de la división $7 \div 6$. Así llegamos a una primera respuesta a la pregunta de cómo podemos concluir una división inexacta de una manera más satisfactoria. Y al mismo tiempo preparamos el camino para entender que una fracción es simplemente otra manera de escribir una división.

Pregunta capciosa:

Dime una manera práctica de repartir 29 manzanas entre 13 niños.

Respuesta en el Anexo A.

Para los educadores

Esta unidad provee solamente una pequeña introducción informal a las fracciones, en el contexto concreto de la vida diaria. A este nivel todavía no introducimos formalmente las operaciones con fracciones. Eso lo haremos en el nivel de Primaria II.

Unidad 59 - El promedio

Prerrequisitos:
- Operaciones básicas hasta 1000 *(Bloque V)*
- Algunos conocimientos de fracciones pueden ser útiles *(Unidad 58)*.

Materiales necesarios:
- Instrumentos de medición (balanza, cinta métrica, termómetro ...) según los proyectos que eligen.

TALLER **Promedios en la vida diaria**

Ponga atención en las situaciones de la vida diaria que pueden servir para introducir el concepto del promedio. Por ejemplo:

Hoy tendremos cuatro invitados para la hora del té. ¿Cuántos panecillos habrá que comprar para ellos? – Para saber eso, sería bueno saber cuántos panecillos va a comer cada uno. Algunos comen más, y otros comen menos. Pero podemos calcular con un valor intermedio. Podemos asumir, por ejemplo, que *en promedio* cada uno va a comer tres panecillos; entonces compramos 12.

Esta semana hizo mucho frío. Seguramente esta semana fue más fría que la anterior. ¿Cómo podemos saberlo con exactitud? – Si queremos saberlo exactamente, entonces tendríamos que calcular los *promedios* de las temperaturas de la semana pasada, y de esta semana.

Muchas preguntas generalizadas se pueden responder solamente con un promedio. Por ejemplo, si un niño pregunta: "¿Cuánto pesa una oveja?", no está preguntando por el peso de una oveja específica; está preguntando por el peso *promedio* de una oveja. Si tienen ovejas o conocen a alguien que las tiene, entonces esta pregunta puede servir como punto de partida para un proyecto acerca de los promedios: Pesen algunas ovejas y calculen el promedio, así tendrán una primera respuesta. Lo mismo podrían hacer con cuyes, gallinas, gatos, perros...
Otras preguntas similares tal vez no permiten medirlo directamente, pero pueden averiguar algunos datos y después calcular el promedio: ¿Cuán rápido avanza una moto? – ¿Cuánto pesa un camión? – ¿Cuántos años vive una ballena? – Etc.

Proyectos calculando el promedio

Situaciones como las antes mencionadas proveen oportunidades para efectivamente calcular el promedio.

En el ejemplo de los panecillos: Supongamos que notamos al final que los invitados comieron 11 panecillos. ¿Entonces hemos estimado bien que en promedio iban a comer tres?
Por supuesto que en este caso, si queremos saber si hemos estimado bien, podríamos simplemente comparar los totales, sin necesidad de calcular el promedio: Hemos estimado que se comerían 12 panecillos en total, y se comieron 11, eso es muy cerca de 12. Pero ya que nos interesa ahora el concepto del promedio, hay que calcularlo.
Para calcular el total de panes, hemos *multiplicado* el promedio estimado por el número de invitados: 3 x 4 = 12. Entonces, si sabemos el total y queremos saber el promedio, tenemos que aplicar la operación inversa: tenemos que *dividirlo* entre el número de invitados. 11 ÷ 4 = 2 R.3. Esto significa que el promedio está entre 2 y 3 (pero más cerca de 3).
Los niños de este nivel probablemente no saben todavía cómo expresar el resultado de una división inexacta mediante fracciones; pero si queremos hacerlo, podemos ilustrarlo con material concreto como en las actividades correspondientes de la *Unidad 58*: Para repartir también el residuo, tendríamos que partir cada uno de los panecillos sobrantes en 4 pedazos. Entonces cada invitado recibiría uno de estos pedazos de cada uno de los 3 panecillos, o sea 3/4. Así que cada invitado habría comido 2 panes enteros y 3/4, eso son casi 3 panecillos. O sea, hemos estimado bien.

En el ejemplo de la temperatura: Pueden averiguar las temperaturas de la semana y calcular el promedio. En los diarios o en internet pueden encontrar donde publican los datos meteorológicos de las ciudades más importantes del país. O si tienen un termómetro para medir la temperatura exterior, pueden ustedes mismos anotar las temperaturas durante una semana.
¿Cómo se calcula la temperatura promedia de la semana? – Eso funciona igual como en el ejemplo de los panes. Allí hemos dividido el total de los panes entre el número de los invitados. Para calcular la temperatura promedia, tenemos que calcular el total de las temperaturas de todos los días de la semana, y después dividir este total entre 7, porque son 7 días. (No necesitamos tomar en cuenta el residuo; por ahora no hay necesidad de ser tan exactos.)
Solamente que hablando de temperaturas, hay un pequeño detalle: ¿Cuál es "la temperatura de hoy"? La temperatura varía durante el día. ¿Estamos hablando de la temperatura máxima o de la temperatura mínima del día? – Si desean, pueden calcular ambos: el promedio de las temperaturas máximas de cada día, y el promedio de las temperaturas

mínimas de cada día. Por si ustedes mismos hacen las mediciones de las temperaturas: La temperatura mínima ocurre normalmente en la mañana, poco antes de la salida del sol. La temperatura máxima, en circunstancias normales, suele ocurrir entre la una y las tres de la tarde.
O podemos hacer el cálculo con las temperaturas promedias de cada día: Primero calculamos para cada día el promedio entre su temperatura mínima y su temperatura máxima; y después calculamos el promedio de estos valores para la semana entera. Así tenemos aun más oportunidades para calcular promedios...

Algunas otras ideas para pequeños proyectos calculando promedios:

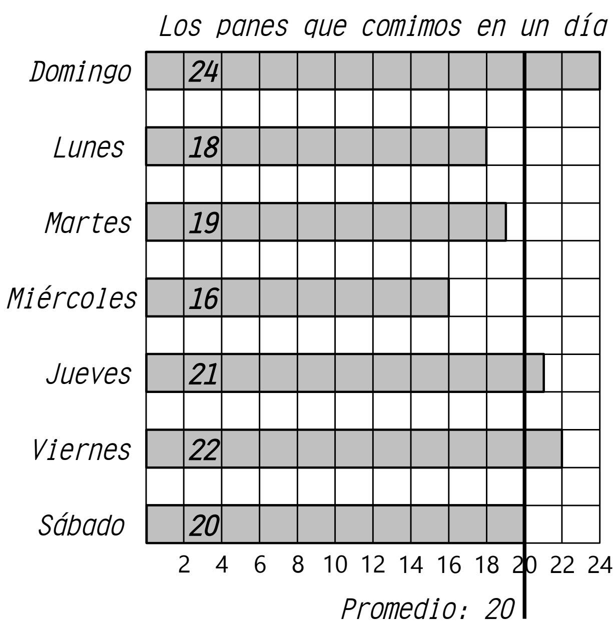
Calculen la edad promedia de los miembros de su familia.

Midan y calculen la estatura promedia de los miembros de su familia.

En los proyectos de medición y estadística de la *Unidad 47*, calculen los promedios de las mediciones que obtuvieron, si es que los números no son demasiado grandes.

Promedios y gráficos de barras

Usen los gráficos de barras de los proyectos de la *Unidad 47*, o hagan unos nuevos. Calculen el promedio de los datos (si todavía no lo hicieron), y representen el promedio en el gráfico como una línea horizontal resp. vertical (según la orientación que escogieron para el gráfico):



Así pueden ver bien que el promedio se encuentra "en el medio" de los datos que tenemos: se encuentra entre los extremos mayor y menor, y normalmente habrá muchos datos que se encuentran bastante cerca del promedio. Si calculamos el promedio de solamente dos números, el promedio es efectivamente el número que se encuentra *en el medio* entre los dos.

Unos puntos para razonar e investigar

Algunos aspectos del concepto del "promedio" pueden todavía ser un poco difíciles de entender para los niños; entonces hay que conversar acerca de estos aspectos para incentivarlos a razonar:

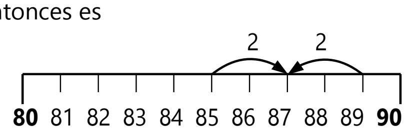
En el ejemplo de los panecillos, resultó que en promedio cada invitado comió "casi tres" panecillos (exactamente 2 $3/4$). ¿Significa eso que efectivamente cada uno de ellos comió esta cantidad? – Probablemente no, porque no vimos a nadie partir un panecillo en cuatro... Entonces, ¿cuánto puede efectivamente haber comido cada uno de ellos? – Probablemente los niños dirán que algunos comieron 2 panecillos y otros comieron 3. Eso es posible, pero ¿necesariamente tiene que ser así? ¿O puede alguien haber comido un solo pan? ¿Puede alguien haber comido 6 panes?
Sí, efectivamente todo eso es posible. En el caso más extremo, un solo invitado podría haber comido todos los 11 panecillos, y los otros nada. Aun en este caso, el promedio seguiría siendo 2 $3/4$. O sea, *el promedio no nos dice nada acerca de la distribución efectiva de los datos.* Si sabemos solamente el promedio, no podemos saber si los datos fueron todos similares, o si fueron muy dispares.

Otro ejemplo: Supongamos que una noticia dice: "La semana pasada fue la semana más fría del año. El jueves, la temperatura bajó a tan solamente 6 grados." – ¿Qué quiere decir eso? ¿Significa que el *promedio* de las temperaturas de la semana pasada fue menor que el promedio de las otras semanas del año? – ¿O significa que el jueves pasado fue el *día* más frío del año? – ¿O ambas cosas? – ¿El *día* más frío del año necesariamente tiene que ocurrir en la *semana* más fría, o puede ser de otra manera?
Conversen acerca de estas preguntas. Intenten fabricar un ejemplo con datos numéricos de las temperaturas de dos semanas diferentes, donde el día más frío pertenece a la semana que es menos fría (en promedio). ¿Pueden hacer un ejemplo así?

Si han pensado por bastante tiempo acerca de estas preguntas y todavía se sienten confundidos, consulten las pautas en el *Anexo A*.

El promedio es "el número del medio"

Si queremos saber el promedio de solamente dos números, este concepto nos ayuda a encontrarlo de una manera más sencilla; sobre todo si los dos números son cercanos el uno al otro. Por ejemplo, para saber el promedio de 85 y 89, podríamos calcular (85 + 89) ÷ 2. Pero mucho más sencillo es el siguiente razonamiento:
De 85 a 89 son 4 pasos. El promedio está en el medio, o sea, es el número que se encuentra a 2 pasos de cada uno de estos números; entonces es
85 + 2 = **87**.
Visualizándolo con la recta numérica:



Bloque VII: Juegos y problemas diversos (Unidades 60 a 65)

La mayoría de las actividades de este bloque no tienen prerrequisitos especiales, excepto algunas que requieren operaciones aritméticas hasta 100 o hasta 1000. Por eso, la mayoría de estas actividades pueden realizarse en cualquier momento del período.
Los juegos propuestos permiten a los niños desarrollar el pensamiento matemático de una manera divertida y "no-escolar".
Las hojas de trabajo se pueden colocar en un lugar accesible para que los niños escojan las que les interesan, como actividad electiva. De un modo similar se pueden ofrecer las actividades y los problemas propuestos en el libro.

El propósito de las actividades de este bloque es despertar curiosidad, incentivar a la investigación y desafiar al razonamiento propio acerca de los números y otros objetos matemáticos. Por tanto, es mejor dejar que los niños mismos escojan lo que les llama la atención, en vez de darles actividades de este bloque como "tarea obligatoria".
Las actividades de este bloque ayudan a desarrollar el pensamiento matemático en general, y de esta manera afirman las capacidades fundamentales del niño para hacer matemática; pero los temas en sí no son prerrequisitos para temas posteriores, y por tanto no deben tratarse como "obligatorios". Por la misma razón, este bloque no contiene ningún "Camino de aprendizaje".

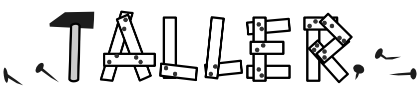
Unidad 60 - Juegos de pensamiento matemático y estratégico

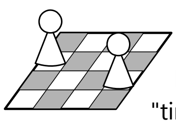
Materiales necesarios:

- Papel cuadriculado y lápices (“Marcar casitas”, “El juego del oso”)
- Fósforos (“Nim”, “Solitario”)
- Tablita de madera, o tablero ya hecho (“Solitario”)
- Tablero y fichas correspondientes (“Molino”, “Damas”)
- Tablero y piedritas o semillas (“Kalaha”)

Para los educadores

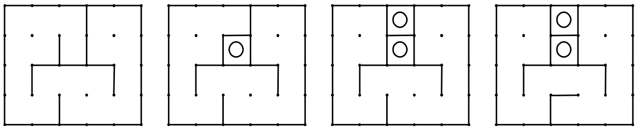
Todos los juegos presentados en esta unidad sirven para entrenar la capacidad de razonar y de solucionar problemas, de una manera muy general. Además obligan a los niños a "jugar según las reglas" – algo que es muy importante para tener éxito en la matemática.



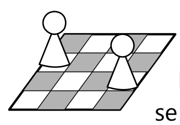


Marcar casitas

Este juego, conocido también como "timbiriche" y con varios otros nombres, se juega entre dos jugadores en papel cuadriculado. Primero se delimita una "cancha de juego", por ejemplo un rectángulo. La meta del juego es "conquistar" dentro de la cancha la mayor cantidad posible de cuadraditos, encerrándolos con rayas por sus cuatro lados.
Los jugadores trazan por turno cada uno *un* lado de uno de los cuadraditos dentro de la cancha. Si un jugador logra encerrar un cuadradito completamente (trazando su último lado), puede marcarlo con su símbolo (O resp. X) y trazar una raya adicional. Si con esta raya adicional él completa otro cuadradito, puede marcarlo también y seguir jugando, etc. hasta que ya no puede completar ningún cuadrado.
Los bordes de la cancha valen como rayas ya trazadas. (Como variación, se puede marcar la cancha solamente mediante puntos en sus cuatro esquinas, entonces sus bordes se vienen trazando en el transcurso del juego, igual como las líneas en el interior.)
Se juega hasta que todos los cuadrados de la cancha son marcados. Entonces es ganador el que marcó el mayor número de cuadrados.
La imagen siguiente muestra un ejemplo de una jugada.



Comenzando con la situación a la izquierda, el jugador del turno pudo sucesivamente marcar los dos cuadraditos mostrados, y después trazó una línea más (última imagen). Su adversario podrá entonces marcar para sí el cuadradito abajo en el medio. (Normalmente, la cancha se hará más grande que esta.)
- Aunque se dé la situación de que un jugador puede con una sola línea marcar dos cuadraditos a la vez, puede después trazar una sola línea adicional, no dos.



El juego del oso

Este es un juego similar al anterior. También se juega entre dos jugadores en un papel cuadriculado.
Se delimita una "cancha de juego" igual como en el juego de "marcar casitas". Los jugadores, por turnos, escriben una S o una O en uno de los cuadraditos de la cancha. Si un jugador logra completar la palabra "OSO" con las tres letras seguidas de manera horizontal o vertical, entonces anota un punto para sí y puede escribir otra letra. Si con esta nueva letra completa otro "OSO", entonces puede seguir jugando, y así sucesivamente hasta que con su última letra escrita no puede completar ningún "OSO"; entonces le toca al otro jugador.

Variación: Se pueden contar también los "OSO"s en diagonal. Así el juego es un poco más difícil.

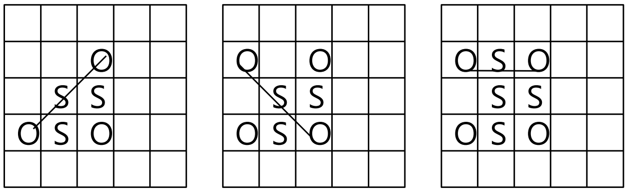
Ejemplo: Un jugador ha completado un "OSO" vertical. Puede escribir otra letra; con una S entre las dos "O"-es abajo completa otro "OSO". Puede seguir jugando; coloca una S en la esquina superior derecha para que su adversario no pueda completar ningún "OSO":

O			S	
		O		
		S		
O		O		

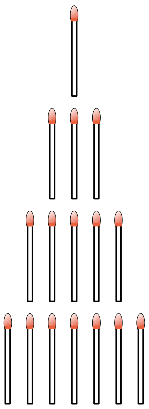
O			S	
		O		
		S		
O	S	O		

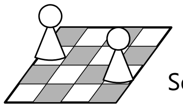
O			S	S
		O		
		S		
O	S	O		

Si se cuentan también los "OSO"s diagonales, entonces podría haber seguido completando "OSO"s:



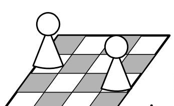
(etc.)



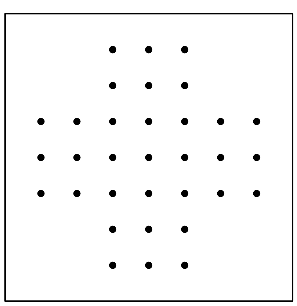


Nim

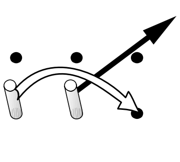
Se juega entre dos jugadores con objetos pequeños como palitos de fósforos o piedritas. Los palitos se colocan en tres, cuatro o más filas. No hay regla acerca del arreglo inicial, los jugadores están libres para comenzar con cualquier arreglo que deseen. Por ejemplo, se puede comenzar con una fila de 3, una fila de 4 y una fila de 5 palitos. Otra posición inicial común es con cuatro filas que contienen 1, 3, 5 y 7 palitos respectivamente.
Entonces, por turnos, cada jugador quita unos palitos de una fila. Puede quitar tantos palitos como desea, con tal que *todos se encuentren en la misma fila*. El que puede quitar el último palito, gana.
Este es un juego muy antiguo, y uno de los primeros que fue analizado a fondo por matemáticos profesionales. Se encontró que existe una estrategia generalizada que permite ganar *siempre* al jugador afortunado que la puede aplicar primero. Pero no la explicaré aquí, para que el juego siga siendo interesante ...



Solitario



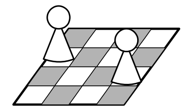
Este juego se juega a solas. También es conocido con el nombre "senku". El tablero tiene 33 agujeros en la siguiente forma:
En cada agujero se coloca un palito de fósforo, excepto en el agujero del medio que queda vacío.
Una jugada válida consiste en saltar con un palito sobre un palito vecino y colocarlo inmediatamente detrás del palito vecino en un agujero vacío, y enseguida se quita el palito vecino.

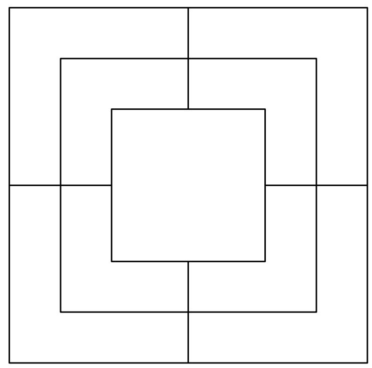


O sea, un palito puede saltar solamente si a su lado se encuentra otro palito (el cual será quitado), y si detrás de ese otro palito hay un agujero vacío. Se puede saltar solamente en dirección horizontal o vertical, pero no diagonal. Ningún otro tipo de jugadas es permitido. Cuando ya no se puede hacer ninguna jugada válida, el juego termina. La meta consiste en saltar y quitar palitos tantas veces como sea posible, o sea hasta que quede un número mínimo de palitos. La solución perfecta (que es difícil de lograr) consiste en dejar un solo palito.

Variaciones: Se puede comenzar con posiciones iniciales distintas, usando menos que 32 palitos. Es una tarea de investigación interesante (pero exigente), descubrir con cuáles posiciones iniciales es posible que al final del juego sobre un solo palito. - Existe también una variación donde el tablero tiene la forma de un hexágono con estructura triangular, de manera que se puede saltar en 6 direcciones.

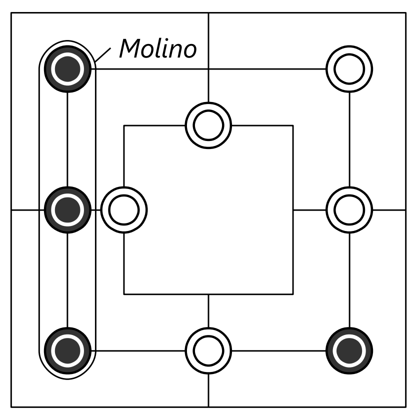
Molino





Se juega entre dos jugadores con fichas de damas en un tablero como en el dibujo.
Un jugador tiene 9 fichas blancas, el otro 9 fichas negras. El juego tiene dos fases: la de colocar fichas, y la de mover fichas.

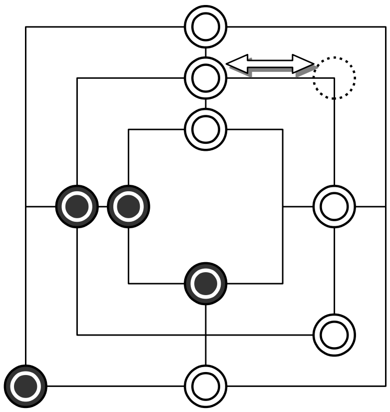
Primera fase:
Por turnos, cada jugador coloca una de sus fichas en uno de los puntos de intersección (o esquina) del tablero. Cada vez que un jugador logra colocar tres de sus fichas en una misma línea recta del tablero, puede quitar del tablero una ficha del oponente. Las fichas quitadas ya no juegan.



Las tres fichas en una línea se llaman "molino". Una ficha que pertenece a un molino no puede ser quitada, excepto si *todas* las fichas del jugador pertenecen a molinos. – Aun si un jugador lograse en un solo turno crear dos molinos simultáneamente, puede quitar una sola ficha del oponente. (Estas reglas valen también para la segunda fase.)

Segunda fase:
Cuando todas las fichas están colocadas, los jugadores (por turnos) mueven una de sus fichas por *un paso*; o sea, siguiendo una de las líneas negras hasta el siguiente punto (intersección o esquina). Si con este movimiento el jugador logra formar un molino, puede nuevamente quitar una ficha a su oponente.

Un jugador puede, en movimientos sucesivos, "abrir" y "cerrar" un mismo molino varias veces y quitar una ficha al oponente, cada vez que cierra el molino. Jugadores experimentados logran construir molinos combinados de tal manera que al abrir uno de ellos, con el mismo movimiento cierran otro.

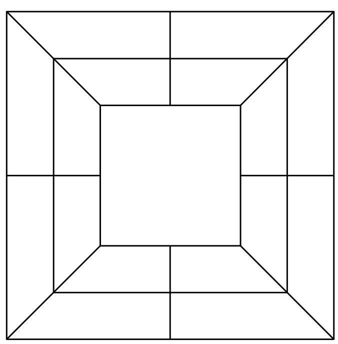


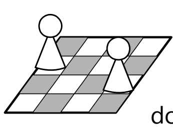
Izquierda: Negro puede cerrar un molino si este es su turno. Blanco tiene molinos combinados.

Si un jugador tiene solamente tres fichas en el tablero, puede saltar con una de ellas a cualquier punto libre.

Ganador es el que quita todas las fichas de su oponente; o el que logra encerrar a su oponente de manera que ya no puede hacer ningún movimiento.

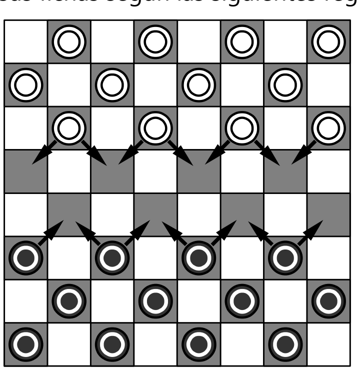
Variación: El mismo juego se puede jugar con 12 fichas por jugador. En este caso, al tablero se le añaden cuatro líneas diagonales. Ahora las fichas pueden también moverse, y formar molinos, a lo largo de estas líneas diagonales:





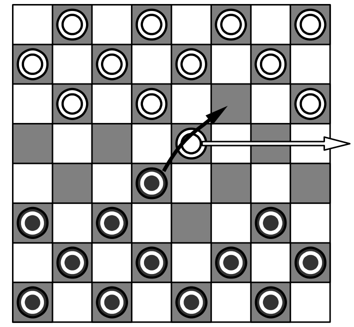
Damas

Este juego bien conocido se juega entre dos jugadores en un tablero de ajedrez. Un jugador tiene 12 fichas blancas y el otro tiene 12 fichas negras. Se juega solamente en los cuadros negros del tablero; no se pueden colocar fichas en los cuadros blancos.
Al inicio, cada jugador ocupa las tres primeras filas de su lado del tablero. Por turnos, cada jugador mueve una de sus fichas según las siguientes reglas:

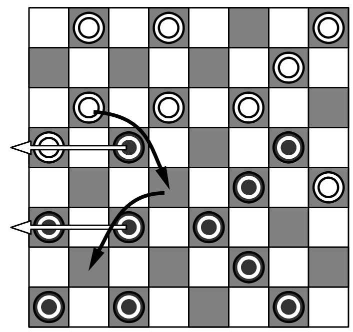


- Una ficha puede avanzar diagonalmente al siguiente cuadro negro, si ese cuadro está vacío. *(Dibujo a la izquierda)*

- Una ficha puede saltar diagonalmente sobre una ficha del adversario y "matarla" (quitarla del tablero), si en línea recta inmediatamente detrás de esa ficha hay un cuadro vacío *(Dibujo a la derecha)*.



Si desde allí puede inmediatamente con su misma ficha "matar" a otra ficha del adversario, puede hacerlo *(Dibujo abajo)*:



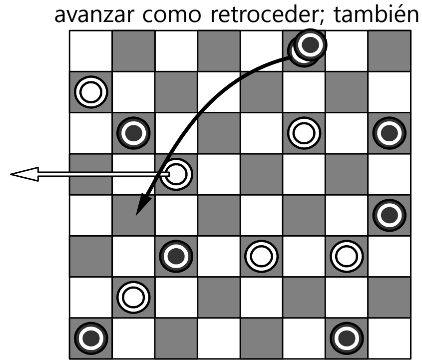
- Las fichas no pueden retroceder. Solamente pueden moverse hacia adelante.

Que los niños practiquen primero con estas reglas, hasta que entiendan bien cómo mover las fichas. Después pueden aprender las reglas adicionales que siguen:

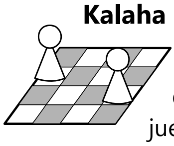
- En el juego de Damas es *obligatorio* "matar" una ficha (por lo menos una) si uno tiene la posibilidad de hacerlo. Si un jugador podría "matar" una ficha, pero en su lugar hace otra jugada, entonces el adversario puede "soplar" (quitarle) la ficha que podría haber "matado" a una de las suyas.

- Si a un jugador se le presentan varias posibilidades de "matar" una ficha del adversario, tiene que "matar" por lo menos una de ellas. Si no lo hace, el adversario le puede "soplar" *una* de las fichas que podrían haber saltado.

- Si una ficha llega hasta la última fila del tablero, se convierte en "dama". (Se le coloca otra ficha del mismo color encima para reconocerla.) Una dama puede tanto avanzar como retroceder; también puede "matar" fichas en dirección hacia adelante y hacia atrás; y puede avanzar más que un solo cuadro, tantos como estén libres en línea recta. Pero si la dama "mata" una ficha del adversario, tiene que detenerse en el cuadro inmediatamente después de la ficha "matada"; no puede seguir avanzando después de "matar". (Excepto si desde ese cuadro puede inmediatamente "matar" a otra ficha).

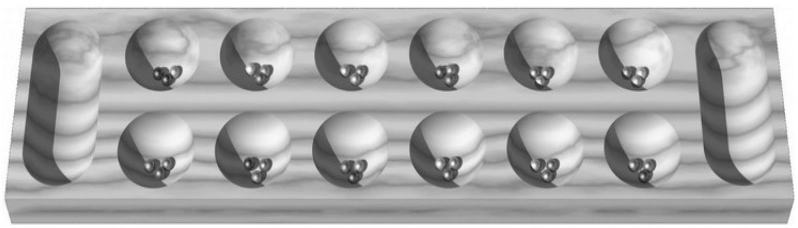


- A una dama se le puede (y debe) "matar" igual como a cualquier otra ficha.

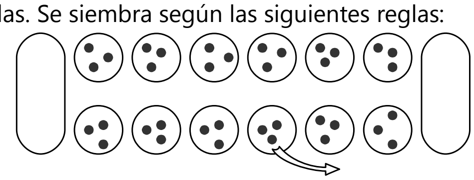


Kalaha

Este es un juego tradicional africano para dos jugadores. Los niños africanos lo juegan en el suelo arcilloso con frejoles y otras semillas, o con piedritas. Se forman huecos en la tierra según el siguiente diseño:



(En vez de jugarlo en la tierra, se puede fabricar este juego de madera o de arcilla.) Los huecos pequeños se llaman "casas", los dos huecos grandes se llaman "almacenes". A un jugador pertenece la fila superior de casas y el almacén a la izquierda; al otro jugador pertenece la fila inferior de casas y el almacén a la derecha. Se comienza con un número igual de semillas en cada casa (por ejemplo 3, 4, 5 ó 6 semillas en cada casa), y los almacenes vacíos. Una jugada consiste en sacar *todas* las semillas de una casa y "sembrarlas" en las casas adyacentes, una por una, hasta acabarlas. Se siembra según las siguientes reglas:

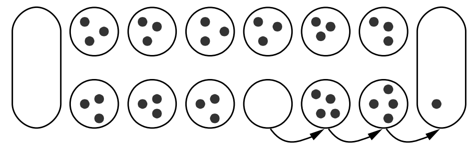


- Cada jugador siembra en dirección hacia su almacén, o sea (considerando el tablero como un círculo) en el sentido contrario a las agujas del reloj, una semilla en cada casa y también en su almacén.

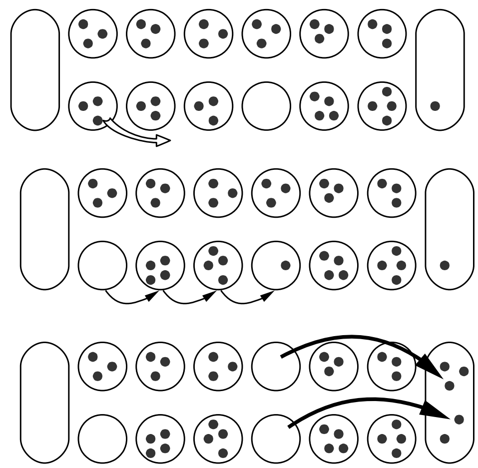
- Si el jugador al sembrar alcanzó su almacén y todavía sobran semillas, entonces sigue sembrando en las casas del otro jugador (siempre en el sentido contrario a las agujas del reloj), y si al terminarlas todavía sobran semillas, salta otra vez a su propia fila (pasando por alto el almacén del oponente) y sigue sembrando así, hasta acabar todas las semillas que sacó de la casa.

- Si la última semilla sembrada cae en el almacén, el jugador puede jugar otra vez. Esto se puede repetir varias veces, hasta que la última semilla sembrada ya no caiga en el almacén.

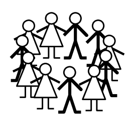
En la situación abajo, el jugador puede jugar otra vez porque su última semilla cayó en el almacén:



- Si la última semilla sembrada cae en una casa *vacía* del propio jugador, entonces puede vaciar la casa adyacente del oponente y echar todo el contenido a su almacén, junto con la última semilla sembrada:



- El juego termina cuando uno de los jugadores tiene todas sus casas vacías. Entonces, el otro jugador vacía todas sus casas a su almacén. Ganador es el que tiene más semillas en su almacén.



Cambiar de asiento – con números

Esta es una variación del juego "Cambiar de asiento" *(Unidad 1)*. En vez de usar características de los niños, se asigna a cada niño un número. (Se puede colgar a cada uno un letrero con su número.) Entonces la persona del medio llama alguna característica de los números: "¡Cambien de asiento todos los números impares!", "... todos los mayores de 6", "... todos los múltiplos de 3", "... todos los números primos", etc.

Matemática divina

Jugar según las reglas

Para jugar un juego bien y en paz, todos deben jugar según las reglas. También en cualquier competencia, por ejemplo en el deporte, se reconoce el esfuerzo solamente de aquellos que hacen caso a las reglas. Por eso dice: "Y si alguien compite como atleta, no es premiado, si no compite según las reglas." (2 Timoteo 2:5).

Jugar según las reglas nos ayuda también en la matemática. La matemática tiene sus reglas, y si pasamos por alto estas reglas, los resultados nos salen mal.

En la vida hay reglas que podemos cambiar si nos ponemos de acuerdo; y hay otras reglas que no se pueden cambiar. Las reglas de un juego se pueden cambiar si se ponen de acuerdo todos los que participan. Pero las reglas de la matemática no se pueden cambiar, porque la matemática existe más allá de nuestra mente y más allá de la sociedad humana. Para poder hacer matemática, tenemos que reconocer las reglas que están allí desde la creación del mundo.
Lo mismo sucede con las leyes de la naturaleza. Ningún científico o ingeniero puede cambiar la ley de la gravedad. Solamente nos queda reconocer que esta ley es parte del universo, tal como fue creado; y tomarla siempre en cuenta. De otro modo nos puede ir mal – por ejemplo si alguien quisiera saltar de la ventana del tercer piso porque piensa que quizás esa vez la ley de la gravedad no funcionaría.

En la convivencia humana existen ambas clases de reglas. Hay reglas que podemos cambiar si todos los afectados se ponen de acuerdo. Por ejemplo acerca del orden en nuestra casa; o a qué hora vamos a dormir; o dónde podemos jugar. Hay otras reglas que no podemos cambiar porque el gobierno las estableció como leyes, y estas no se pueden cambiar, excepto si las personas que conforman el gobierno están de acuerdo. Y finalmente hay reglas que ni siquiera el gobierno puede cambiar, porque son leyes de Dios; y si un gobierno intenta cambiarlas, al país entero le va mal.
Dios estableció sus leyes no así no más según su antojo. Él sabe cómo funciona el universo entero, y él sabe cómo funcionamos nosotros los humanos. Por eso, él puso las mejores reglas que pueden existir. Sus reglas hacen que podamos vivir juntos en paz, y que podamos administrar la creación de la mejor manera, como Dios lo quiere.

La matemática nos resultará bien si hemos aprendido a reconocer que hay reglas que no podemos cambiar. Y la matemática a la vez nos ayuda a reconocer las leyes de Dios, porque la matemática misma nos enseña a "jugar según las reglas".

Unidad 61 - Problemas con mover fichas y maniobrar trenes

Materiales necesarios:

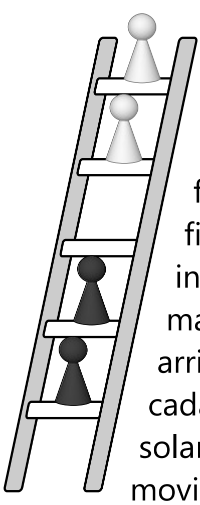
- Papel grande o cartulina
- Diversas fichas, figuras de juego, etc, para representar los problemas propuestos con material concreto.

TALLER

Convierta los problemas en juegos de tablero

Casi todos los problemas de esta unidad se pueden resolver en forma de juego de tablero. Dibuje el diseño en un papel o una cartulina, y represente las figuras movibles por fichas, figuras de juego, tapas de botellas o similares, con formas o colores distintos. Así, el niño puede moverlas con sus manos, en vez de intentar resolver el problema solamente en el papel.
Si dispone de un tren de juguete con rieles, puede con ese material reconstruir los problemas de trenes. De otro modo puede también dibujar los rieles en cartulina y representar las locomotoras y los vagones con fichas.

Como paso posterior, el niño puede dibujar en papel los movimientos que realizó para resolver un problema.



Subiendo y bajando la escalera

En esta escalera hay dos figuras blancas arriba y dos figuras negras abajo. Quieren intercambiar sus lugares, de manera que las negras estén arriba y las blancas abajo. Pero cada figura puede realizar solamente dos clases de movimientos: puede subir un escalón, o puede bajar dos escalones. No hay espacio para dos figuras en un mismo escalón. Pero si una figura baja dos escalones, puede saltar por encima de una figura que se encuentre justo por debajo de ella. Así por ejemplo la figura blanca en el último escalón puede saltar al escalón del medio que está desocupado. Pero la otra figura blanca (la del penúltimo escalón) no puede bajar, porque el escalón a dos pasos por debajo está ocupado por una figura negra.

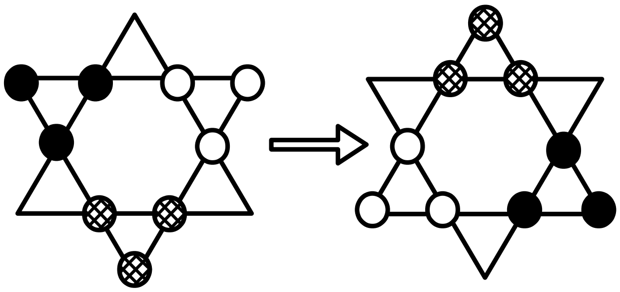
¿Cómo tienen que moverse las figuras para intercambiar sus lugares? ¿Cuál es el número mínimo de movimientos para lograrlo?

Perro, cabra y repollos

Este problema es muy antiguo. Probablemente fue inventado por Alcuino de York, quien reorganizó la educación en el reino del emperador Carlomagno, alrededor del año 800. El problema trata de un campesino que va al mercado con su perro, su cabra y unos repollos. En el camino tiene que cruzar un río en un bote. Pero el bote es tan pequeño que puede llevar consigo solamente una cosa a la vez: el perro solo, la cabra sola, o los repollos solos. Ahora hay una dificultad: No puede en ningún momento dejar el perro solo con la cabra, porque el perro es muy bravo y podría matar la cabra. Tampoco puede dejar la cabra sola con los repollos, porque la cabra comería los repollos. ¿Cómo puede llevar todo a la otra orilla?

Damas chinas en miniatura

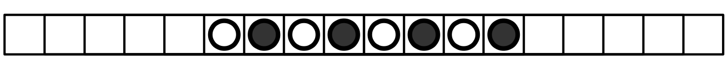
En las puntas y los cruces de una estrella se encuentran fichas de tres colores, tres de cada color, como muestra el dibujo. Cada ficha tiene que llegar al lugar exactamente opuesto en la estrella. Solamente pueden moverse a lo largo de las líneas, y solamente a un cruce desocupado. ¿Cómo pueden todas las fichas llegar a su destino en un número mínimo de movimientos?



Variación: Permitimos adicionalmente que las fichas salten como en el juego de damas chinas: en línea recta sobre una figura al punto que se encuentra directamente detrás de la figura. Se puede saltar solamente si ese punto está libre; y solamente sobre una figura a la vez, no sobre dos. Con esta regla, ¿cómo pueden las fichas llegar más rápidamente a su destino?

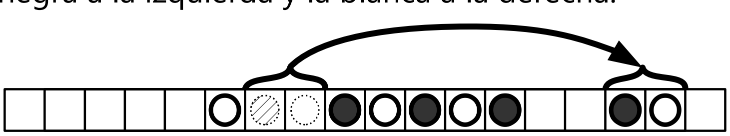
Ovejas blancas y negras

Las fichas representan cuatro ovejas blancas y cuatro ovejas negras.



La meta consiste en tener las ovejas blancas juntas y las negras juntas:

El problema es que las ovejas son muy miedosas: se dejan mover solamente de dos en dos. O sea, tienes que coger dos ovejas que están juntas y moverlas a dos cuadrados juntos que están vacíos. No puedes invertir el orden de las ovejas que mueves: Si coges una oveja negra a la izquierda y una oveja blanca a la derecha, en su nueva posición debe seguir la negra a la izquierda y la blanca a la derecha.

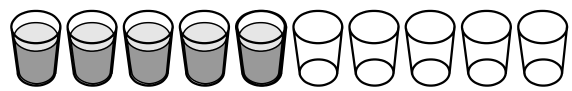


En este juego puedes suponer que el espacio es ilimitado. O sea, puedes añadir tantos cuadrados a la izquierda y a la derecha como deseas; con tal que al fin las ovejas estén nuevamente juntas.

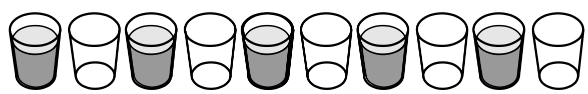
Si lo lograste con cuatro ovejas blancas y negras, puedes intentarlo con cinco, seis, o tantas como quieres.

Los diez vasos

Este problema es casi una pregunta capciosa, porque su solución se hace de una manera que tal vez no piensas. Tenemos diez vasos en una fila, los primeros cinco llenos de agua y los siguientes cinco vacíos.

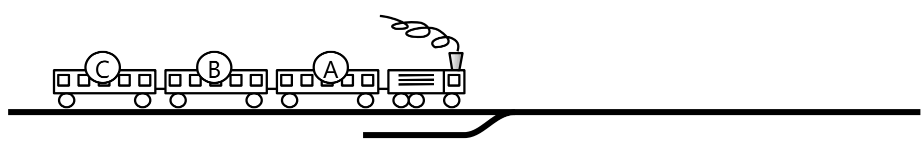


La meta es que los vasos se estén alternando: uno lleno, uno vacío, uno lleno, uno vacío, etc. Eso se debe lograr moviendo *sólo dos vasos* de su sitio. ¿Parece imposible? Pero hay una manera de hacerlo.



Tren invertido

El maquinista de este tren recibió la orden de invertir el orden de los vagones: Vagón C debe ir primero, después B, y al final A. Hay un riel adicional disponible como muestra el dibujo, pero el espacio alcanza solamente para estacionar un solo vagón allí. Ayuda al maquinista a cumplir la orden.



Nota que ningún vagón puede moverse solo; necesita ser jalado o empujado por la locomotora.

Puente angosto

Una locomotora que jala tres vagones llega a un puente con capacidad restringida: no soporta más que el peso de una locomotora con un solo vagón. Antes y después del puente se encuentra un riel adicional, como muestra el dibujo. En el riel antes del puente se puede estacionar un vagón, y en el riel después del puente se pueden estacionar dos vagones. Ningún vagón puede moverse por sí solo; necesita ser jalado o empujado por la locomotora. ¿Cómo puede la locomotora llevar los tres vagones al otro lado y continuar su viaje *con los vagones en el mismo orden como antes*?

Nota: Si el maquinista tuviera una soga muy larga, podría llevar los tres vagones muy fácilmente sin sobrecargar el puente y sin siquiera usar los rieles adicionales. ¿Descubres cómo? – Pero desafortunadamente, el maquinista no tiene ninguna soga tan larga.

Cruce difícil

Dos trenes, cada uno consistiendo en una locomotora y tres vagones, se encuentran en un lugar de cruce como muestra el dibujo y tienen que llegar al otro lado. Pero el riel adicional tiene espacio solamente para dos vagones, o para una locomotora y un vagón. ¿Cómo pueden ambos trenes llegar al otro lado y continuar su viaje, con sus vagones en el mismo orden como antes?

Las locomotoras pueden jalar y empujar vagones en ambos sentidos, hacia adelante y hacia atrás. Pero ningún vagón puede moverse solo, sin la ayuda de una locomotora.

El rompecabezas del 15

8	2	13	11
14	12	7	5
4	1		3
15	9	6	10

Este juego fue inventado por el inglés Sam Lloyd en el siglo 19; por eso se llama también "el rompecabezas de Lloyd". Para fabricarlo necesitas 15 fichas cuadradas de igual tamaño, y una cajita cuadrada con espacio suficiente para que las fichas se puedan deslizar cómodamente dentro de la caja, de la forma como muestra el dibujo. Enumera las fichas con los números de 1 a 15.

Las fichas se pueden mover horizontal o verticalmente al cuadrado vacío, pero es prohibido levantarlas fuera de la caja. Entonces, en la situación del dibujo se puede mover solamente una de las fichas donde se indica con una flecha.

Las fichas se mezclan, y la tarea consiste en ordenarlas del 1 al 15, como muestra el dibujo abajo, mediante una serie de movimientos permitidos. – Si se empieza con cualquier posición barajada a mano, a veces es imposible alcanzar el orden de 1 a 15. Pero en este caso será posible lograr el orden invertido, de 15 a 1, como muestra el dibujo a la derecha.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

Se pueden intentar otras formas de ordenar las fichas, como en los ejemplos que siguen:

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	

1	2	3	4
12	13	14	5
11		15	6
10	9	8	7

1	3	5	7
9	11	13	15
2	4	6	8
10	12	14	

Una variación más sencilla consiste en un cuadrado de 3 x 3 y solamente 8 fichas. La posición básica (a la izquierda) se puede convertir en las posiciones que se muestran a continuación:

1	2	3
4	5	6
7	8	

8	7	6
5	4	3
2	1	

1	6	7
2	5	8
3	4	

1	8	7
2		6
3	4	5

En cambio, es imposible alcanzar las siguientes posiciones desde la posición básica:

1	4	7
2	5	8
3	6	

1	2	3
8		4
7	6	5

Maniobras con regletas Cuisenaire

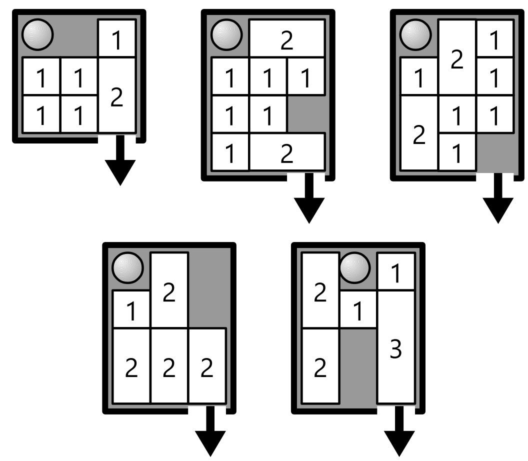
Este rompecabezas es similar al anterior. Pero en vez de tener fichas numeradas, tenemos fichas de distintos tamaños. Existen diversas variaciones de este juego; normalmente se trata de "liberar" a una ficha particular o a una billa, para que pueda salir de la caja.

Las versiones que siguen, se pueden fabricar con regletas Cuisenaire y una billa o pepa del tamaño apropiado. Solamente necesitas fabricar una cajita del tamaño correspondiente. La cajita debe tener una apertura de salida en el lugar indicado, por donde pueda salir la billa o pepa.

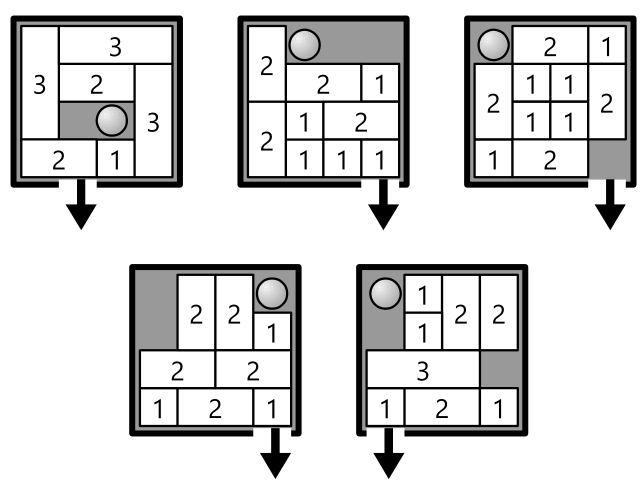
Las fichas pueden moverse igual como en el rompecabezas del 15: horizontal o verticalmente hacia donde hay un espacio libre. No se pueden girar.

Los dibujos a continuación muestran la posición inicial. La meta consiste en mover las regletas (y la billa) de tal manera que la billa pueda salir por la apertura marcada con una flecha. (¡Las regletas no deben salir de la caja!) Para facilitar la construcción, las regletas llevan el número que corresponde a su valor.

Primero unos fáciles para calentarse:



Y ahora unos que son un poco más difíciles:



Para algunos de los problemas de esta unidad se encuentran pautas en el Anexo A.

Unidad 62 - Juegos de construcción

Materiales necesarios:

- Juegos de construcción: bloques de madera, otros juegos de bloques para armar, legos, juegos de construcción metálica, etc.
- Regletas Cuisenaire

Para los educadores

Incentivar la creatividad y el pensamiento matemático con actividades de construcción libre

Los juegos de construcción son una herramienta excelente para entrenar el razonamiento, la ubicación en el espacio, y la creatividad. Los niños pueden ocuparse por horas con esta clase de juegos, construyendo casas, torres, carros, barcos, aviones, máquinas, y un sinnúmero de otros objetos. Existen muchas clases de estos juegos, desde los simples bloques de madera hasta los más sofisticados materiales de construcción metálica e incluso de robótica. (Los de robótica serán todavía demasiado difíciles para los niños de este nivel, pero son un buen desafío para niños mayores y adolescentes.)

Muchos juegos de construcción vienen en forma de modelos prediseñados que tienen sus instrucciones de cómo armarlos. Eso es bueno para el inicio y para familiarizarse con el material. Pero después es preferible que los niños inventen y construyan sus propios modelos. Solamente así desarrollan su creatividad y su razonamiento, experimentando y descubriendo por sí mismos cómo tienen que hacer para que la construcción funcione. En este camino pueden de vez en cuando necesitar la ayuda y el incentivo de un adulto. Cuando tienen una idea y no encuentran la manera de cómo realizarla, será el momento de ayudarles con unos razonamientos y señalarles algunos principios de la mecánica.

Para los casos donde las preguntas de los niños sobrepasan nuestras capacidades, puede ser bueno tener a un mecánico o ingeniero en el equipo de educadores o entre los amigos de la familia.

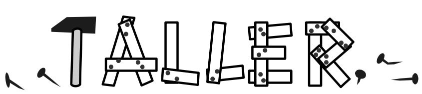
Las construcciones y la mecánica están relacionados no solamente con la matemática, sino también con la física. Las experiencias hechas con estos juegos serán muy valiosas más adelante cuando llegue el momento de aprender física.

Con los juegos de bloques se pueden experimentar principios de la estática y del equilibrio, descubriendo cómo hay que hacer para que la construcción sea estable. También se experimentan diversas estructuras tri-dimensionales; sobre todo con los bloques que pueden adherirse unos a otros (tipo Lego).

La empresa Lego antiguamente fabricaba cajas con material para construcción mecánica: ruedas dentadas con sus ejes, palancas, roscas, poleas, diversas clases de transmisiones, etc. Quizás tienen la oportunidad de conseguir una de esas. Con ese material se pueden construir toda clase de máquinas, y a la vez se experimentan muchos principios de la mecánica y matemática.

(Los productos actuales de Lego, desafortunadamente, en su mayoría son tales que se pueden armar de una única manera. Esos no ayudan mucho para la creatividad y el razonamiento.)

Los juegos de construcción metálica (por ejemplo Mécano y similares) normalmente vienen en cajas para un número limitado de modelos prediseñados. Pero se pueden comprar varias cajas de diferentes modelos y combinar sus piezas para inventar modelos nuevos. – Para niños pequeños, los juegos de construcción metálica pueden ser todavía demasiado difíciles porque se requiere bastante destreza para ajustar los tornillos pequeños. Pero a partir de los 8 a 9 años ya deben poder aprenderlo.



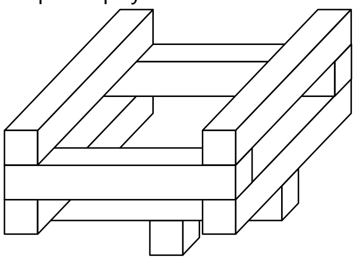
Inventen sus propias construcciones y descubran cómo hay que hacerlo para que resulten bien. (Vea arriba en “Para los educadores”.)
Por si desean unos desafíos adicionales, a continuación se enumeran unos problemas que pueden plantearse al jugar con juegos de construcción.

Juegos de bloques y regletas Cuisenaire

La construcción de casas, torres, y otros edificios puede llevar a distintos tipos de investigaciones y preguntas curiosas:
¿Cómo se puede construir una casa con techo de bloques de madera? – ¿Cómo puedes hacer que el techo sea más amplio que los bloques más largos?
¿Cuán larga puedes hacer la distancia entre dos pilares de un puente de bloques de madera, sin que el puente se caiga?

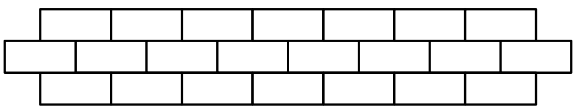
¿Cómo tiene que ser construida una torre para alcanzar una altura máxima? – ¿Y para que sea resistente a los sismos? (Pueden simular un sismo, moviendo la mesa sobre la cual está construida la torre.)

Es un desafío especial, construir torres de regletas Cuisenaire que se apoyan sobre un único cubito de unidad. Eso puede llevar a construcciones como la siguiente, que puede servir para apoyar una torre más alta:



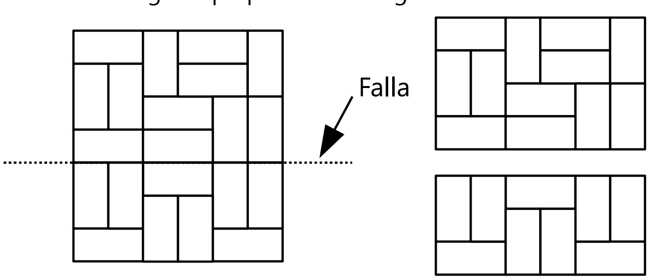
Rectángulos sin fallas

Al construir un muro, es necesario poner los ladrillos de manera intercalada para que el muro tenga mayor estabilidad:



Seguramente los niños ya habrán descubierto eso al construir muros con legos, bloques de madera o regletas Cuisenaire. (Si no lo descubrieron, tendrán que hacer unos experimentos con muros intercalados y no intercalados.)

Ampliamos ahora este concepto a rectángulos en dos dimensiones: Construimos rectángulos con regletas Cuisenaire de 2, e intentamos construir rectángulos (o cuadrados) que no tengan ninguna "falla". Con una "falla" entendemos una línea recta que traspasa el rectángulo desde un lado hasta el otro, de manera que podría partirse en dos rectángulos pequeños a lo largo de esa recta:

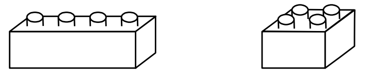


Este rectángulo entonces no cumple nuestra condición. Intenten construir uno que no tenga ninguna falla.

Investiguen: ¿Cuáles son las medidas del rectángulo *más pequeño* que se puede construir sin falla con regletas de 2? ¿y con regletas de 3?

Números en la construcción

A veces intervienen también los números en la construcción. ¿Puedes descubrir la altura de una torre de regletas Cuisenaire, sin medirla?

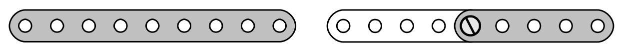


Al jugar con legos, un niño dice a otro: "Pásame un ladrillo de 4." – "¿Qué quieres decir con un ladrillo de 4? ¿Uno largo o uno cuadrado?" – Es que los "ladrillos de 4" pueden venir en distintas formas. ¿Y qué formas posibles existen para un "ladrillo de 12"?

Si tengo unos bloques de longitudes 2 y 4, ¿cómo puedo combinarlos para construir una pared que no tenga fallas? – ¿Y si los bloques disponibles tienen otras longitudes, por ejemplo 6 y 8? ¿Puedes construir con estos bloques una pared de longitud 20? ¿Y puedes en este caso también combinarlos de manera que la pared no tenga fallas?

Con un juego de construcción metálica se arma un armazón que tiene por un lado un fierro de 9 huecos. Pero ya no hay otro fierro tan largo para el otro lado. ¿Con fierros de cuántos huecos puedo armar el otro lado para que tenga la misma longitud? – Si quedan solamente fierritos de 3 huecos, ¿cuántos de estos tendríamos que juntar para obtener la misma longitud?

(Muchos niños se equivocan inicialmente con estas preguntas porque no toman en cuenta que al unir dos fierros con un tornillo, se "pierde" un hueco de su longitud. Cuando hacen el experimento, se darán cuenta del error.)



Desafíos mecánicos

Unos desafíos para construcciones con juegos que contienen elementos mecánicos (ruedas, ejes, ruedas dentadas, transmisiones, etc):

¿Puedes construir una escalera de caracol?

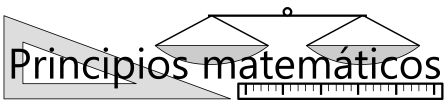
¿Puedes construir un parque de juegos con rodadero, subibaja y columpio?

¿Puedes construir un carro sencillo? ¿y un carro con timón, de manera que las ruedas delanteras cambian de dirección cuando se gira el timón?

¿Puedes construir una rueda hidráulica (que se mueve con la fuerza del agua)? ¿y puedes inventar una máquina cuyas partes se mueven con el impulso de esta rueda?

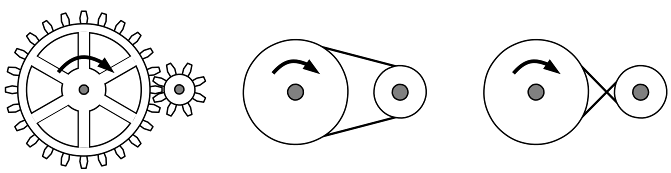
Si el juego incluye un motor: ¿Cuál es la velocidad máxima que puedes alcanzar con un carro con el motor?

Vea también abajo en "Principios matemáticos" acerca de los principios relacionados con ruedas dentadas y transmisiones. Además intervienen unos principios adicionales de la física. Por ejemplo, con la misma fuerza un carro ligero alcanzará una velocidad mayor que un carro pesado. Los niños descubrirán también que es importante minimizar la fricción.



Principios relacionados con ruedas dentadas y transmisiones

Un primer principio tiene que ver con la *dirección* en la cual gira una rueda. Que los niños construyan e investiguen las siguientes tres situaciones con ruedas dentadas resp. con poleas y correas de transmisión. En cada situación, la primera rueda gira en la dirección de las agujas del reloj. ¿En cuál dirección girarán las otras ruedas?

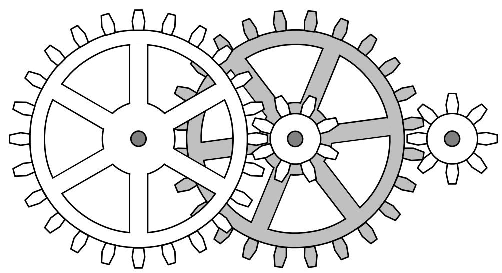


Un segundo principio nos ayuda a entender la *velocidad* con la que giran las ruedas. Este es más fácil de entender con las ruedas dentadas, porque allí podemos contar el número de dientes. Si la primera rueda tiene 24 dientes y da una vuelta por segundo, ¿cuántas vueltas por segundo da la rueda de 8 dientes? – Para encontrar la respuesta, tenemos que tomar en cuenta que los dientes encajan "uno por uno". O sea, si en un segundo pasan 24 dientes de la rueda grande por el punto de contacto entre las ruedas, entonces en el mismo tiempo pasan también 24 dientes de la rueda pequeña. Pero en la rueda pequeña, eso equivale a 3 vueltas, porque 3 x 8 = 24.

En el nivel de Primaria II cuando hablemos de las proporciones, entenderemos que la velocidad de la rueda es *inversamente proporcional* al número de dientes: La rueda grande tiene 3 veces el número de dientes de la pequeña; entonces la velocidad de la rueda *pequeña* es 3 veces la velocidad de la rueda grande.

(Lo mismo aplica a las poleas con correas de transmisión. Allí la proporción es entre los perímetros de las poleas. Pero este es un tema demasiado avanzado para este nivel, porque todavía no calculamos con círculos y perímetros.)

Ahora se pueden combinar engranajes para conseguir proporciones mayores de velocidades. En el siguiente diseño, las dos ruedas del medio están fijas en un mismo eje. De esta manera, la gran rueda gris está obligada a girar a la misma velocidad como la pequeña, o sea 3 veces la velocidad de la primera rueda. Si ahora a esta rueda grande y "rápida" se conecta otra rueda pequeña, esta girará con una velocidad que es 3 veces la velocidad de las ruedas del medio – ¿entonces cuántas veces la velocidad de la primera rueda?



Los niños tendrán que analizar esta situación para darse cuenta de que se trata de una situación multiplicativa (no aditiva): La velocidad de la última rueda es 3 x 3 = 9 veces la velocidad de la primera.

Ahora podríamos pensar que de esta manera se podrían alcanzar velocidades arbitrariamente grandes. Por ejemplo, si repitiésemos el diseño de arriba dos veces más, la velocidad de la última rueda sería 3 x 3 x 3 x 3 = 81 veces la velocidad de la primera. Pero si hacen este experimento en la práctica, probablemente encontrarán que esta máquina ya no puede moverse en absoluto. Eso es debido a la fricción. Para que una máquina siga moviéndose, constantemente hay que aportar energía para vencer los efectos de la fricción. Si la máquina (o una parte de ella) debe moverse con una velocidad 81 veces mayor, entonces tiene que ejercer una potencia 81 veces mayor. Eso muy probablemente sobrepasa la capacidad del motor o de la persona que intenta mover la máquina. (¡Cuidado! No intenten forzar una máquina como esa; las piezas se podrían trabar y romper.)

Pero el mismo principio funciona también al revés: Una máquina que se mueve más lentamente, requiere menos potencia. Por eso, a veces puede ser ventajoso armar las ruedas dentadas de manera que la velocidad *disminuye*. Por ejemplo, puede ser que hayan construido un carro tan pesado que el motor no puede moverlo. Pero si intercalan unas ruedas dentadas de manera que la velocidad del carro disminuye, es posible que el motor logre moverlo, aunque lentamente.

En el dibujo arriba, si se conecta el motor a la *última* rueda del engranaje, entonces la primera rueda se moverá con una velocidad 9 veces *menor* que la última. Es el mismo principio al revés, o sea la "operación inversa".

Unidad 63 - Sucesiones

Prerrequisitos:
- Para la Hoja de trabajo 63.2: Operaciones básicas hasta 100 (Bloques III y IV)
- Para la Hoja de trabajo 63.4: Operaciones básicas hasta 1000 (Bloque V)

Materiales necesarios:
- Ninguno.

TALLER

Sucesiones con figuras

Hoja de trabajo 63.1: Cada línea contiene una sucesión de figuras que se siguen en una secuencia lógica. En cada sucesión hay que descubrir cual es la "regla" que define la sucesión, y entonces dibujar algunas de las figuras que siguen (por lo menos tres).
En esta primera hoja, la lógica de las sucesiones debe ser bastante obvia, de manera que debe ser fácil de resolver.

Sucesiones propias: Descubre la regla
Después de resolver unas sucesiones de las hojas de trabajo, los niños podrán inventar sus propias sucesiones. Pueden hacer un juego entre ellos de la siguiente manera: Un niño inventa una sucesión y dibuja sus primeras figuras. Los otros niños tratan de descubrir la "regla de construcción" de la secuencia y dibujan la continuación.

La ***Hoja de trabajo 63.3*** contiene otras secuencias con figuras que son más difíciles. La mayoría de estas sucesiones combinan dos o incluso tres elementos que siguen cada uno su propia lógica, independientemente de los otros elementos. Así por ejemplo en la primera sucesión, el elemento "sombrero" sigue la regla "sin sombrero, con sombrero, sin sombrero, con sombrero", etc; o sea, se repite cada dos figuras. El elemento "cara", en cambio, sigue la regla "feliz, neutral, triste, feliz, neutral, triste", etc; o sea, se repite cada tres figuras. – O en la quinta sucesión de la hoja (las flechas), la flecha describe un movimiento giratorio, pero al mismo tiempo cambia el "contenido" de la flecha según otra regla.
Este tipo de sucesiones requieren un razonamiento más complejo, y por tanto será mejor esperar con estas hasta cerca del final del período de Primaria I.

Sucesiones con números

Ocupémonos ahora de unas sucesiones de números. La "regla de construcción" de estas sucesiones puede ser muy sencilla, como en este caso: 7, 11, 15, 19, 23, ... – De un miembro al siguiente siempre se aumenta 4, entonces la continuación es: 27, 31, 35, ...

O en este caso: 800, 400, 200, 100, ... – Cada miembro es la mitad del anterior, entonces la sucesión continúa: 50, 25. (Aquí tenemos el caso de una sucesión que no puede continuarse más allá con las operaciones que los niños de este nivel conocen.)
En otros casos, la regla es más complicada. Por ejemplo en esta sucesión: 125, 110, 96, 83, 71, ... – Notamos que la diferencia entre el primer y el segundo miembro es 15; la diferencia entre los siguientes (110 y 96) es 14; la siguiente diferencia es 13 y la siguiente es 12. Estas diferencias no son iguales, pero forman a su vez una sucesión lógica: 15, 14, 13, 12. Podemos concluir entonces que para continuar la sucesión hay que restar 11, después 10, etc; y así obtenemos la continuación: 60, 50, 41, ...
También se pueden alternar dos "reglas", como aquí: 17, 30, 20, 33, 23, 36, ... – Podemos interpretar esta secuencia como siguiendo la regla "+13, –10, +13, –10", etc:

$$17 \xrightarrow{+13} 30 \xrightarrow{-10} 20 \xrightarrow{+13} 33 \xrightarrow{-10} 23 \xrightarrow{+13} 36 \xrightarrow{-10}$$

O también podemos interpretarla como dos secuencias intercaladas, donde la diferencia es 3 en cada una de ellas. La primera de estas secuencias sería 17, 20, 23, ...; la otra 30, 33, 36, ...

$$17 \xrightarrow{+3} 20 \xrightarrow{+3} 23 \xrightarrow{+3}$$
$$30 \xrightarrow{+3} 33 \xrightarrow{+3} 36 \xrightarrow{+3}$$

Con ambas formas llegamos a la misma continuación: 26, 39, 29, 42, ...

Igualmente la siguiente secuencia puede interpretarse de dos formas: 0, 1, 4, 9, 16, ... – Podemos analizar las diferencias entre un miembro y el siguiente, y vemos que estas diferencias siguen la secuencia de los números impares: 1, 3, 5, 7, ... – O podemos darnos cuenta de que se trata de la secuencia de los cuadrados perfectos: 0x0, 1x1, 2x2, 3x3, 4x4, ... – De cualquiera de estas formas nos resulta la continuación: 25, 36, 49, ...

Sucesiones propias: Descubre la regla

Igual como con las sucesiones con figuras, los niños pueden también inventar sus propias sucesiones numéricas e intercambiarlas entre ellos para que continúen las sucesiones de sus compañeros.

En esta actividad hay que tomar en cuenta que para una sucesión dada se podrían nombrar varias "reglas de construcción" que todas son correctas, o sea, que producen la sucesión dada, pero que llevan a continuaciones diferentes. Eso sucede sobre todo cuando muy pocos miembros de la sucesión son dados.

Tomemos como ejemplo la sucesión 1, 2, 5, 10, ... – Podríamos sospechar que la "regla" es: x2, +3, x2, +3, etc. Esto produce la sucesión 1, 2, 5, 10, 13, 26, 29, 58, 61, ... – Pero la "regla" podría también ser: +1, +3, +5, +7, +9, etc. Entonces la sucesión sería 1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, ... o sea, una sucesión distinta de la anterior. Matemáticamente, ambas soluciones son correctas.

Para evitar tales problemas, podemos establecer como "regla del juego" que el que inventa la secuencia, tiene que dar por lo menos seis miembros de ella. Así será más claramente definida.

Sin embargo, las ambigüedades no pueden excluirse completamente. La siguiente sucesión tiene siete miembros dados: 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Podemos analizar las diferencias y decir que la regla es: +2, +4, +2, +4, etc. O sea, la sucesión continuaría: 25, 29, 31, 35, ... – Pero sería igualmente plausible, decir que es la secuencia de los números primos mayores a 3. En este caso, la continuación sería: 29, 31, 37, 41, ...

Por tanto, no se deberían usar reglas demasiado complejas para definir las sucesiones, porque de otro modo será demasiado difícil o incluso imposible, acertar la regla que el creador de la sucesión tuvo en mente.

La ***Hoja de trabajo 63.2*** contiene unas secuencias relativamente fáciles con números. Los niños deberán ser capaces de resolverlas una vez que dominan las operaciones básicas hasta 100, o sea las operaciones que se introducen en los Bloques III y IV.

La ***Hoja de trabajo 63.4*** contiene secuencias más difíciles, sea por su rango numérico o porque su "regla de construcción" es más compleja. Los niños deben poder resolverlas después de dominar las operaciones del Bloque V.

Las últimas tres secuencias de esta hoja tienen estrella (*) porque son más difíciles. Si lo han intentado por mucho tiempo y no encuentran la "regla", consulten el *Anexo A*.

Se entiende por sí mismo que se debe buscar la "regla" más lógica y sencilla. En realidad, los problemas de sucesiones no tienen una "única solución correcta". A menudo se pueden encontrar otras "reglas" que producen la misma sucesión, pero que son más complejas.

Matemática divina

Patrones previsibles y señales

En las actividades con sucesiones se entrena la capacidad de encontrar patrones regulares, repetidos, y desde allí hacer predicciones acerca de la continuación de la secuencia. Tales patrones existen también en la naturaleza creada y nos pueden servir, por ejemplo, para predecir el tiempo o para prevenir desastres.

Dios espera de nosotros que apliquemos esta capacidad también para entender sabiamente las señales de los tiempos que él nos da. Jesús reprochó a los religiosos de su tiempo porque sabían predecir el tiempo desde la apariencia del cielo, pero rechazaron las señales que Dios les dio para hacerles entender su voluntad:

"Cuando se hace tarde, dicen: '[Será] sereno, porque el cielo tiene arreboles.' Y en la mañana: '[Habrá] tempestad, porque el cielo está nublado con arreboles.' El rostro del cielo saben distinguir, ¿pero las señales de los tiempos no pueden?" (Mateo 16:2-3)

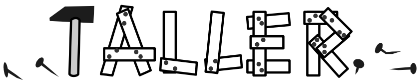
Nuestra razón natural no es perfecta; pero Dios quiere que la usemos para sacar conclusiones de lo que sabemos acerca de su manera de actuar en el pasado, para que sepamos entender los tiempos presentes.

¿A dónde vamos desde aquí?

A los niños que les gusta la clase de razonamiento que se usa al continuar sucesiones, probablemente les gustarán también otras actividades de razonamiento numérico como siguen en la unidad siguiente *(Unidad 64)*: Sudoku, pirámides de números, cuadrados mágicos, etc.

Unidad 64 - Razonar con números

Materiales necesarios:
- Tubos de papel higiénico, tijeras, goma (para el trabajo manual de las Hojas de trabajo 64.13-14)



Laberintos de números *(Hoja de trabajo 64.1)*

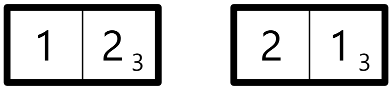
Se debe llegar desde el inicio hasta la meta, avanzando siempre de un número menor a uno mayor. O sea, el camino debe consistir en una sola secuencia ordenada (pero no necesariamente consecutiva) de números, de menor a mayor.
Se puede caminar solamente en dirección horizontal o vertical, pero no diagonal.

Sudoku

Para los principiantes comenzamos con sudokus de 4 x 4, o sea que usamos solamente los números de 1 a 4. (***Hoja de trabajo 64.2***) La regla es la siguiente: Se deben completar los cuadrados, escribiendo uno de los números de 1 a 4 en cada cuadrito. No se deben repetir números en ninguna fila, en ninguna columna, y en ninguna subdivisión (en este caso, en los cuadrados de 2x2 marcados con líneas gruesas). O sea, cada fila, cada columna y cada subdivisión debe contener cada número de 1 a 4 exactamente una vez.
En los sudokus de 5 x 5, las subdivisiones tienen formas arbitrarias, pero aplican las mismas reglas.
De la misma manera los sudokus de 6 x 6 (***Hoja de trabajo 64.3***), donde las subdivisiones son rectángulos de 2x3.

Sudoku de sumas *(Hojas de trabajo 64.4-5)*

Estos sudokus se llenan según las siguientes reglas:
No se deben repetir números en ninguna fila y en ninguna columna, como en el sudoku normal.
En las subdivisiones que contienen un número pequeño, este indica la suma de todos los números que componen la subdivisión. Por ejemplo, una subdivisión de dos cuadraditos que debe sumar 3, se puede llenar únicamente de una de las dos siguientes formas:

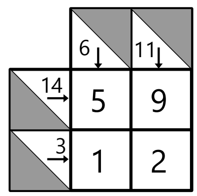


Dentro de una subdivisión se pueden repetir números, con tal que se encuentren en filas y columnas distintas.
Como en el sudoku normal, para un cuadrado de 4 x 4 se usan los números de 1 a 4; para un cuadrado de 5 x 5 los números de 1 a 5; para un cuadrado de 6 x 6 los números de 1 a 6.

Kakuro *(Hojas de trabajo 64.6-7)*

El kakuro es como un crucigrama con números, según las siguientes reglas:
- En cada cuadradito se escribe uno de los números de 1 a 9.
- En cada "palabra" (sección horizontal o vertical) los números deben dar juntos la suma que está indicada a la izquierda o arriba con un número pequeño.
- Dentro de una "palabra" no se debe repetir ningún número.

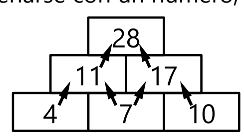
Ejemplo (izquierda): No hay otra forma de solucionarlo, porque la suma de 3 puede conseguirse únicamente con un 1 y un 2. Pero el 1 no puede estar a la derecha, porque en este caso la casilla encima del 1 debería contener un 10 para completar la suma de 11; pero el número 10 no está permitido.



Pirámides de sumas *(Hojas de trabajo 64.8-9)*

Prerrequisitos:
- Sumas y restas hasta 100.
- Para la Hoja 64.9 se requieren sumas y restas hasta 1000, y razonamientos un poco más complejos.

Cada ladrillo de una pirámide debe llenarse con un número, según la siguiente regla: El número en cada ladrillo es la suma de los números en los dos ladrillos inmediatamente por debajo.



Las pirámides de la Hoja 64.9 son más difíciles, porque requieren números mayores a 100. A partir del no.13, una dificultad adicional consiste en que los números ya no pueden determinarse paso por paso como en los problemas anteriores. En este caso se pueden resolver probando, o (más rápidamente) aplicando unos razonamientos lógicos. *(En el Anexo A se encuentran unas pautas.)*

Investigación: La pirámide no.19 tiene una propiedad especial: Tiene más que una sola solución correcta. ¿Cuántas soluciones diferentes puedes encontrar? – ¿Cómo puedes explicar esta propiedad de la pirámide?
Ahora cambia el número en la punta de la pirámide por otro (por ejemplo 96 en vez de 100). Intenta resolverla con este otro número. ¿Cuántas soluciones puedes encontrar ahora? ¿Puedes explicar por qué sucede esto?

Cuadrados mágicos

Prerrequisitos:

- Sumas y restas hasta 100.
- Para algunos problemas se requieren multiplicaciones de números de dos cifras, y divisiones que dan como resultado un número de dos cifras.

Un "cuadrado mágico" es un cuadrado compuesto de cuadraditos más pequeños, que se llenan con números de tal manera que la suma de los números en cada fila horizontal, en cada columna vertical, y en cada diagonal es la misma. Por ejemplo:

15	12	33
38	20	2
7	28	25

15+20+25 = **60**
15+12+33 = **60**
38+20+ 2 = **60**
7+28+25 = **60**
33+20+7 = **60**
33+2+25 = **60**
12+20+28 = **60**
15+38+7 = **60**

En este ejemplo, la "suma mágica", o sea la suma que se repite cada vez, es 60.

(En realidad los "cuadrados mágicos" no tienen nada que ver con magia. Se trata simplemente de unas propiedades matemáticas particulares de los números, que se pueden investigar razonando.)

Las ***Hojas de trabajo 64.10-11*** contienen unos problemas de completar cuadrados mágicos:

Hoja de trabajo 64.10 *(primera fila)*: Completa los números que faltan, para que resulte un cuadrado con la "suma mágica" indicada. Por ejemplo en el primer cuadrado, cada fila, columna y diagonal debe dar la suma 21.

Hoja de trabajo 64.10 *(segunda fila)*: Completa los números que faltan, para que resulte un cuadrado mágico. Aquí la "suma mágica" ya no está indicada, pero la puedes descubrir si observas los números que ya están allí.

Hoja de trabajo 64.10 *(tercera fila)*: Completa cada cuadrado mágico con los números que aparecen debajo del cuadrado. En el primer ejemplo, la "suma mágica" está indicada; después ya no, porque esta suma se puede descubrir a partir de los números dados. ¿Cómo se puede descubrir la "suma mágica", si sabemos todos los números que componen el cuadrado? Investiga...

(Si lo has pensado por mucho tiempo y no llegas a ninguna respuesta, puedes consultar las pautas en el Anexo A.)

Hoja de trabajo 64.11 *(primera fila)*: Los problemas de esta hoja ya son más difíciles y requieren bastante razonamiento. Los cuadrados de la primera fila se deben completar de manera que resulte un cuadrado mágico. En cada caso hay una sola solución, pero hay que probar un poco para encontrarla.

Hoja de trabajo 64.11 *(segunda y tercera fila):* Forma cuadrados mágicos con los números indicados. Si has investigado los cuadrados en la tercera fila de la hoja anterior, entonces ya sabes cómo descubrir la "suma mágica" en cada caso. Pero aun así hay que probar un poco.

Estos problemas tienen varias soluciones posibles, porque un cuadrado mágico se puede reflejar en espejo o girar, y sigue siendo "mágico".

Nota: Si observas bien los cuadrados mágicos de 3 x 3 cuadraditos, puedes darte cuenta de que el número del medio tiene una propiedad especial que tiene que cumplirse en cada uno de estos cuadrados, de otro modo no funciona. ¿Descubres cuál es esta propiedad?

Quizás todavía no vas a poder explicar el ***por qué*** de esta propiedad; eso lo haremos en el nivel de Secundaria cuando tengas conocimientos de álgebra.

Hoja de trabajo 64.12: Otros desafíos de razonamiento

Los triángulos mágicos *(arriba):*
Estos triángulos funcionan de manera similar como los cuadrados mágicos: La suma de los números a lo largo de cada línea recta debe ser igual.
En el primer triángulo, la suma es dada. En el segundo, la suma se puede deducir de los números dados. El tercer triángulo es el más difícil porque hay que probar con cuál "suma mágica" funciona.

Encuentra el camino más corto *(en el medio):*
En este tipo de problemas se trata de descubrir cuál ruta es la más corta, *sumando las distancias que se indican en los segmentos recorridos*. (¡No se trata entonces de ver cuál distancia parece la más corta "a la vista"!)
En los dos problemas a la derecha, el camino debe ser cerrado. O sea, debe empezar en uno de los puntos, recorrer por todos los otros puntos, y volver al punto donde comenzó.
Este tipo de problemas es conocido como "el problema del comerciante viajero", porque se basa en la situación de un comerciante que quiere visitar varias ciudades y volver a casa, y busca la ruta más corta para su viaje. Con un número pequeño de ciudades se puede resolver probando, pero se darán cuenta de que con cinco ciudades ya es bastante complicado. Con un número considerable de ciudades (por ejemplo 40), el problema se vuelve tan complejo que no se puede resolver ni siquiera con una computadora, porque no se conoce ninguna "fórmula" o estrategia eficiente para resolverlo.
Una pauta acerca del último de estos problemas (el de las 5 ciudades): El camino más corto mide menos de 600 metros en total.

Combinaciones de máquinas *(abajo, izquierda):*
Aquí se trata de obtener unos resultados específicos al hacer recorrer un número por una "cadena de máquinas" y efectuar las operaciones correspondientes, como en las Hojas de trabajo 33.1, 45.6, 52.1. Las máquinas se pueden conectar solamente por donde hay flechas. Así que en el primer problema se puede ir solamente de la izquierda a la derecha, pero no regresar. Por ejemplo, podríamos hacer pasar el número inicial (2) por todas las máquinas de la fila de arriba, entonces las operaciones serían:

$$2 + 4 = 6, \quad 6 \times 3 = 18, \quad 18 + 5 = 23.$$

El problema consiste en recorrer las máquinas en un orden tal que el resultado final sea 28, resp. 32.
En el segundo problema, las máquinas se pueden usar más que una sola vez, pero siempre pasando por donde hay flechas. Así por ejemplo no se puede comenzar con la máquina "+8", porque no hay ninguna flecha desde el inicio para allí. Tampoco se puede usar la misma máquina dos veces *seguidas*; por ejemplo 1 x 3 x 3 no sería un camino válido. El siguiente camino, en cambio, es válido:
$1 \times 3 = 3$, $3 + 8 = 11$, $11 \times 3 = 33$, $33 + 5 = 38$, $38 + 8 = 46$, $46 \times 3 = 138$.
Desde la máquina "x3" hay una flecha a la salida (como desde todas las máquinas), entonces 138 puede salir como un resultado final válido.
El *Anexo A* contiene unas pautas y preguntas adicionales acerca de estos problemas.

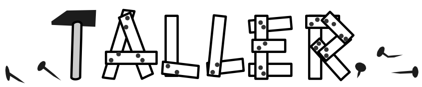
Hoja de trabajo 64.13-14: Los tubos ingeniosos

Con unos tubos de papel higiénico y estas hojas de trabajo puedes fabricar unos rompecabezas interesantes.
Cada hoja contiene dos rompecabezas: la parte de la izquierda es un rompecabezas y la parte de la derecha es otro.
Corta las tiras verticales y pega los extremos de cada tira juntos en forma de aro. Los aros deben poder deslizarse sobre un tubo de papel higiénico. Si deseas que el juego sea más resistente, puedes pegarlos primero sobre un pedazo de cartulina o sobre aros cortados de otro tubo de papel higiénico. (Si usas otro tubo, tendrás que abrir los aros de cartón para que sean un poco más grandes que el tubo sobre el cual se deslizan.)
Pon los aros sobre un tubo de papel higiénico, en el mismo orden como estaban en la hoja. (Las letras pequeñas en los aros te ayudan a mantener el orden.) Corta dos de los círculos en la parte inferior de la hoja. (Estos también los puedes reforzar con cartulina si deseas.) Corta los círculos interiores sombreados y deséchalos. Haz cortes rectos donde las líneas lo indican para conseguir lengüetas pequeñas. Dobla y pega estas lengüetas con goma al interior del tubo, un círculo en cada extremo del tubo. Estos círculos evitarán que los aros se salgan del tubo. (Dos círculos adicionales están en la Hoja 3.1.)
Ahora el desafío consiste en girar los aros hasta que se encuentren en una posición donde todas las operaciones que se forman son correctas. Cuidado: Pueden existir posiciones donde aparecen *algunas* operaciones correctas; pero hay que conseguir que *todas* sean correctas.

Unidad 65 - “Máquinas calculadoras” de papel

Materiales necesarios:

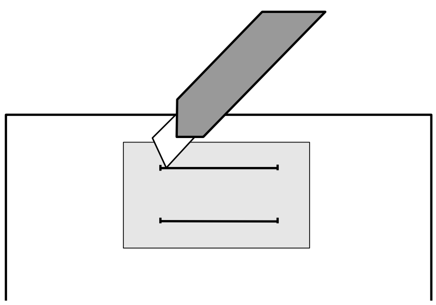
- Regla, cúter o tijeras, goma.



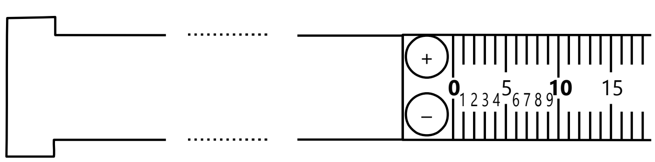
Tira de sumar y restar

Para fabricar esta “calculadora” tenemos que cortar las cuatro tiras y el rectángulo grande (que es la parte fija de la “calculadora”) en la ***Hoja de trabajo 65.1***. Además, corta de una hoja en blanco una quinta tira, igual a la tira en blanco (la que tiene un extremo más ancho).

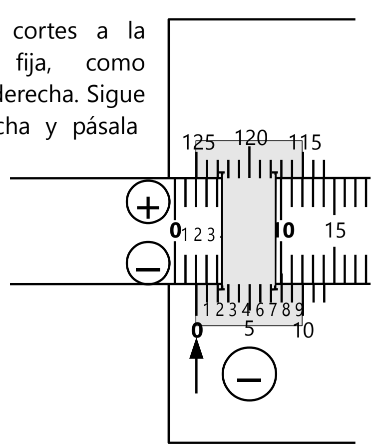
En el rectángulo grande, a la izquierda en el medio hay dos marcas de corte, e igualmente a la derecha. Refuerza el área alrededor de estas marcas de corte con un pedazo de cinta adhesiva transparente por adelante y por atrás; después corta a lo largo de las líneas con un cúter o con tijera.



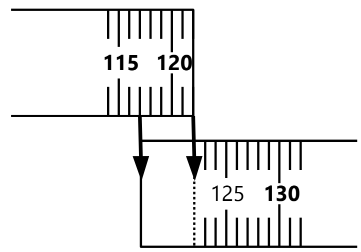
Pega la tira en blanco con su extremo delgado al inicio de la primera tira (la que contiene el cero).



Pasa la tira por los cortes a la izquierda de la parte fija, como muestra el dibujo a la derecha. Sigue jalando hacia la derecha y pásala también por los cortes de la derecha, de la misma manera.



Pega la segunda tira (la que comienza con 125) al extremo de la primera. Eso tienes que hacer exacto para que la “máquina” funcione bien: El extremo de la primera tira tiene que estar exactamente sobre la línea punteada de la segunda tira.



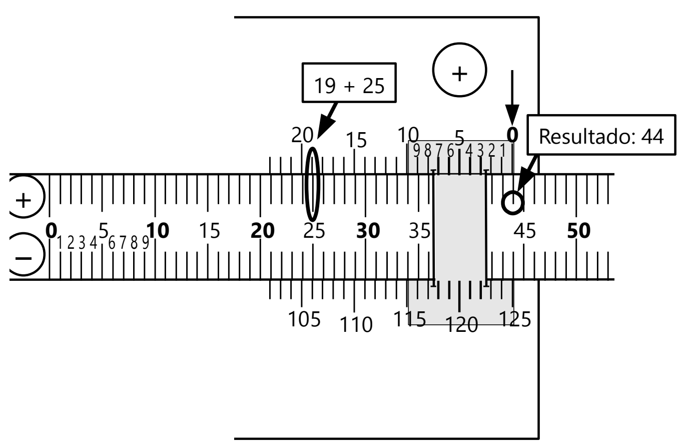
Al extremo de la segunda tira, pega de la misma manera la tercera.

Al extremo de la tercera tira pega la otra tira en blanco, con su extremo delgado.

Ahora debes poder mover la tira de un extremo al otro sobre la parte fija, y los extremos anchos de las partes en blanco deben evitar que el extremo se salga por los cortes.

Cómo usar la tira para sumar:

En la parte fija, usa la escala superior, la que tiene el signo + a la derecha. Desplaza la tira de tal manera que el primer sumando en la escala de la parte fija coincide con el segundo sumando en la tira. Por ejemplo, para sumar 19 + 25, hacemos coincidir el 19 de la parte fija con el 25 en la tira:

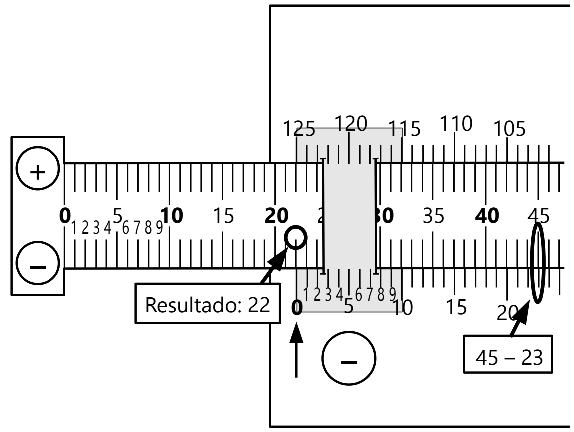


Ahora puedes leer el resultado debajo del 0 en la parte fija, donde señala la flecha. El 0 coincide con el 44 en la tira, entonces el resultado es 44.

Cómo usar la tira para restar:

Usamos la escala inferior, la que tiene el signo – a la izquierda. Por ejemplo, para restar 45 – 23, hacemos coincidir el 45 de la tira con el 23 de la parte fija:

Ahora puedes leer el resultado encima del 0 en la parte fija, donde señala la flecha. El 0 coincide con el 22 en la tira, entonces el resultado es 22.



Investigación

Experimenta con esta "calculadora" y comprueba los resultados. Intenta descubrir los principios matemáticos que hacen que esta "calculadora" funcione.

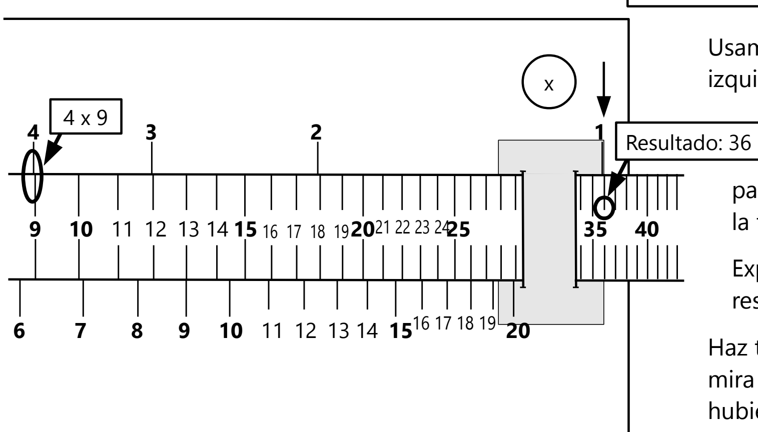
También puedes hacer el siguiente experimento: Efectúa una suma y mira el resultado. Supongamos que el resultado es 163. Si hubieras hecho *otra* suma que también da 163, ¿estaría la tira en la misma posición como ahora? ¿Cómo te ayuda la tira para encontrar todas las sumas que dan 163? – Y lo mismo con restas.

Tira de multiplicar y dividir

Esta "máquina" (***Hoja de trabajo 65.2***) se fabrica igual como la tira de sumar y restar. (Vea las instrucciones anteriores.) Aquí también es importante unir las tiras con exactitud para que funcione bien. Su uso es muy similar a la tira de sumar y restar:

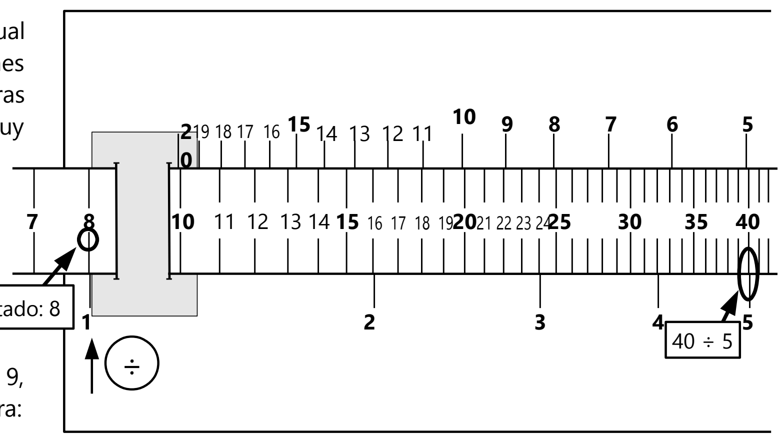
Cómo usar la tira para multiplicar:

En la parte fija, usa la escala superior, la que tiene el signo x a la derecha. Desplaza la tira de tal manera que el primer factor en la escala de la parte fija coincide con el segundo factor en la tira. Por ejemplo, para multiplicar 4 x 9, hacemos coincidir el 4 de la parte fija con el 9 en la tira:



Ahora puedes leer el resultado debajo del 1 en la parte fija, donde señala la flecha. El 1 coincide con el 36 en la tira, entonces el resultado es 36.

Cómo usar la tira para dividir:



Usamos la escala inferior, la que tiene el signo ÷ a la izquierda. Por ejemplo, para dividir 40 ÷ 5, hacemos coincidir el 40 de la tira con el 5 de la parte fija:

Ahora puedes leer el resultado debajo del 1 en la parte fija, donde señala la flecha. El 1 coincide con el 8 en la tira, entonces el resultado es 8.

Experimenta con esta "calculadora" y comprueba los resultados.

Haz también este experimento: Efectúa una multiplicación y mira el resultado. Supongamos que el resultado es 144. Si hubieras hecho *otra* multiplicación que también da 144, ¿estaría la tira en la misma posición como ahora? ¿Cómo te ayuda la tira para encontrar todas las multiplicaciones que dan 144? – Y lo mismo con divisiones.

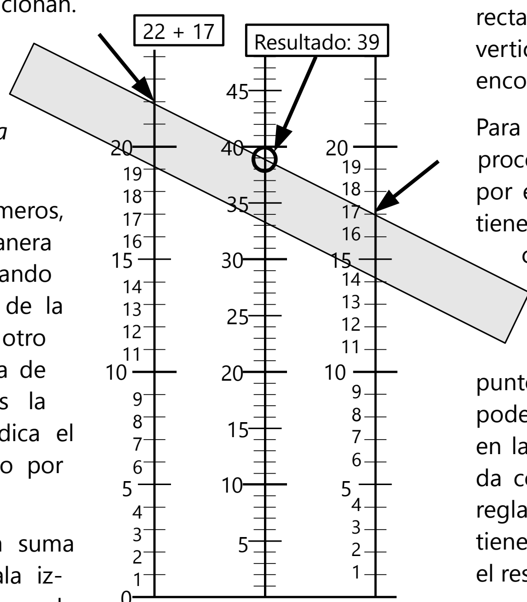
Nota 1: Si una división es inexacta, el 1 de la parte fija no coincidirá con un punto exacto en la tira. Por ejemplo si dividimos 30÷ 4, el 1 se quedará entre el 7 y el 8 en la tira. Si queremos saber el residuo, tenemos que mover ligeramente la tira para que el 1 coincida con un punto "exacto". En este caso, haremos coincidir el 1 de la parte fija con el 7 de la tira. Entonces, el 4 de la parte fija ya no se encontrará a la altura del 30, sino del 28. Entonces sabemos que con 28 la división es exacta, y el residuo es 30 – 28 = 2.

Nota 2: Al calcular con números mayores, ya no podemos leer con exactitud el resultado de una multiplicación, porque la escala se "achica" a medida que los números aumentan. ¿Descubres un método cómo puedes aun en este caso decir el resultado de la multiplicación con exactitud?
- Puedes descubrir además que esta inexactitud de la tira no afecta mucho las divisiones. Por ejemplo, usa la tira para dividir 594 ÷ 18. Aunque no puedes decir con toda exactitud dónde se encuentra el 594 en la tira, sin embargo verás que puedes leer el resultado con exactitud (si es que tu tira está bien fabricada). ¿A qué se debe eso?

Nota 3: A este nivel todavía no será posible explicar el principio matemático que hace que esta tira funcione. Es que se basa en una escala logarítmica, y este es un tema que llegaremos a entender recién al nivel de Secundaria II.

Nomogramas

Nomogramas son gráficos que permiten encontrar los resultados de ciertas operaciones matemáticas, colocando una regla sobre las escalas numéricas del nomograma. La ***Hoja de trabajo 65.3*** presenta dos nomogramas sencillos. Los niños pueden jugar con estas "máquinas de calcular", pueden verificar que sus resultados son correctos, y pueden investigar por qué funcionan.



Nomograma para sumar y restar *(lado izquierdo de la hoja)*

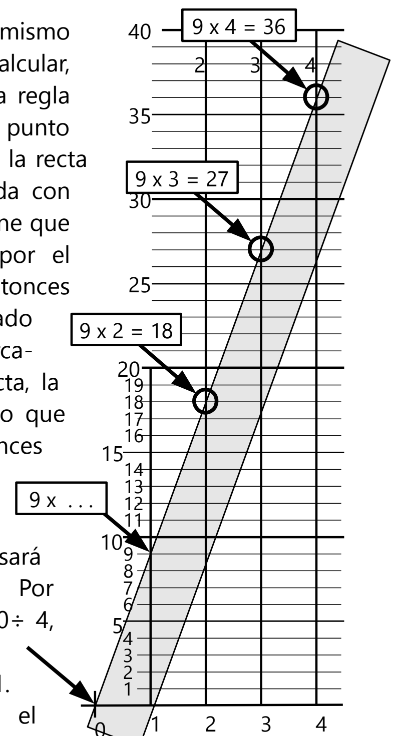
Para sumar dos números, coloca la regla de manera que pase por un sumando en la escala vertical de la izquierda, y por el otro sumando en la escala de la derecha. Entonces la escala del medio indica el resultado en el punto por donde pasa la regla.

El dibujo muestra la suma 22 + 17: En la escala izquierda, la regla pasa por el punto que corresponde al 22. En la escala derecha pasa por el 17. Fijándonos en la escala del medio, vemos que la regla pasa allí por el punto que corresponde al 39, eso es el resultado.

Para restar, nos guiamos por el principio de la operación inversa: Si queremos restar 39 – 22, recordamos que en este caso el 39 corresponde al resultado de una suma. Entonces la regla tiene que pasar por el punto 39 *en la escala del medio*. Si la regla pasa además por el punto 22 en la escala izquierda, la escala derecha mostrará el resultado, y viceversa. Se dará entonces la misma situación como en el dibujo, solamente que hemos comenzado con un punto de la escala del medio.

Nomograma para multiplicar y dividir *(lado derecho de la hoja)*

La regla siempre tiene que pasar por el punto 0 abajo. *(Señalado por la primera flecha abajo en el dibujo.)* Ahora, si queremos multiplicar por ejemplo el 9 por algún número, la regla tiene que pasar por el punto 9 en la recta vertical que está marcada con "1". *(Señalado por la segunda flecha desde abajo en el dibujo.)* Ahora, los puntos de cruce con las otras rectas verticales indican los múltiplos de 9: Al cruzar la recta vertical marcada con "2" encontramos 9 x 2, en la recta "3" encontramos 9 x 3, y así sucesivamente.



Para dividir hacemos el mismo proceso al revés. Para calcular, por ejemplo, 36 ÷ 4, la regla tiene que pasar por el punto con la altura 36 en la recta vertical marcada con "4". La regla tiene que pasar también por el punto 0 abajo. Entonces podemos leer el resultado en la recta vertical marcada con "1". En esta recta, la regla pasa por el punto que tiene la altura 9, entonces el resultado es 9.

Nota: Si la división es inexacta, la regla no pasará por un punto exacto. Por ejemplo si dividimos 30÷ 4, la regla pasará entre el 7 y el 8 en la recta del 1. Si queremos saber el residuo, tenemos que mover ligeramente la regla para que pase por el punto "exacto". En este caso, haremos que la regla pase por el punto 7 en la recta del 1 (mientras mantenemos fijo el punto 0). Entonces, en la recta del 4 ya no pasará por el 30, sino por el 28. Entonces sabemos que con 28 la división es exacta, y el residuo es 30 – 28 = 2.

Anexo A: Pautas para las preguntas de investigación

Unidad 2: Relaciones

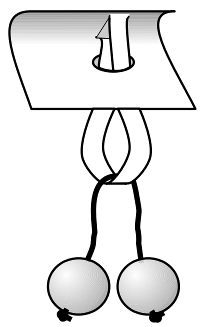
Pregunta capciosa: Fueron el abuelo, el padre y su hijo. El abuelo es padre del padre, y el padre es padre del hijo: dos padres. El hijo es hijo de su padre, y el padre es hijo del abuelo: dos hijos.

Unidad 3: Nos ubicamos en el espacio

Pautas para los rompecabezas de nudos y enredos:

El llavero ingenioso
A primera vista el problema parece imposible de resolver, porque la llave no.1 no puede dar la vuelta alrededor del llavero. Pero si la llave no.1 se coloca horizontalmente, puede atravesar la llave no.3, y de esta manera se puede resolver el problema.

Las cerezas presas
Si doblas cuidadosamente la mitad superior del papel o plástico hacia adelante, la tira delgada entre los dos cortes va a poder pasar a través de la apertura hacia atrás. Si haces pasar toda la tira, hasta donde puedes, se pueden sacar las cerezas por detrás de la apertura.

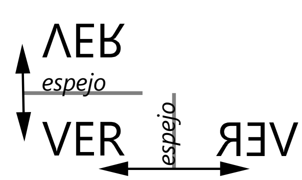


El anillo atado
La solución es similar al juego de las cerezas Primero hay que llevar el anillo cerca a la apertura del medio. Después se puede jalar el pequeño lazo central del cordel a través de la apertura, desde atrás hacia adelante, y entonces el anillo puede seguir pasando sin que tenga que atravesar la apertura. ¡Inténtalo!

Unidad 4: Girar y reflejar figuras

Un misterio de espejos
Si estás parado delante de un espejo, en realidad el espejo no invierte "izquierda y derecha". Eso te parece así solamente porque en tu imaginación te volteas para ponerte en el lugar de tu imagen reflejada. Compárate con tu imagen reflejada sin voltearte; o sea, en tu imaginación das solamente unos pasos hacia adelante hasta que te encuentras en el lugar donde está tu imagen en el espejo. Entonces notarás que en realidad el espejo invierte *"adelante y atrás"*.
El espejo siempre invierte la dirección que es *perpendicular al plano del espejo*. Si el espejo está colgado en la pared y tú te paras delante de él, entonces el espejo invierte "adelante y atrás". Pero si fijas un espejo en el techo de la habitación y te paras debajo de él, entonces el espejo va a invertir efectivamente "arriba y abajo": tu imagen reflejada estará colgando de cabeza.

Algo similar podemos observar en las letras reflejadas: Si colocamos el espejo al costado de las letras, se invierten "izquierda y derecha". Pero si colocamos el espejo por encima o debajo de las letras, se invierten "arriba y abajo".



Como añadidura puedes hacer el siguiente experimento: Escribe en mayúsculas y con letras negras la palabra BICHO. A su lado escribe también en mayúsculas, pero con letras azules, la palabra AZUL. Coloca un espejo encima de las letras. ¡El espejo afecta solamente las letras azules, pero las negras no se invierten! ¿Por qué?

Unidad 5: Figuras geométricas en el geoplano

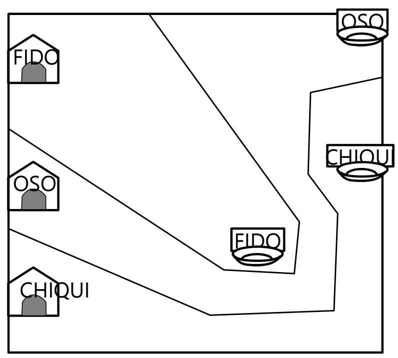
Pregunta capciosa: No te digo la respuesta, pero te digo que la respuesta no es tres. Si no lo crees, haz el experimento. Pero te recomiendo no hacerlo con una mesa; puedes hacerlo con una hoja de papel.

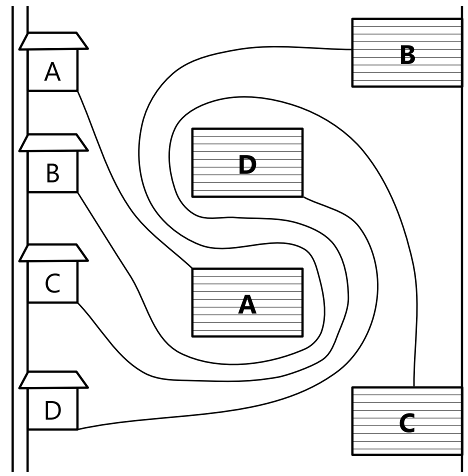
Unidad 11: Más topología

Hoja de trabajo 11.1 – Caminos sin cruzar:
Los problemas en la segunda mitad de esta hoja son quizás un poco difíciles. Aquí las soluciones:

En el problema de los caminos (derecha) se pueden reflejar todos los caminos verticalmente, y así se obtiene una segunda solución correcta.

Pregunta capciosa: Toma el bolígrafo negro y escribe con él estas palabras: "letras rojas".

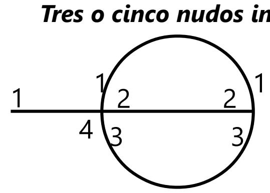




Unidad 12: Los puentes de Königsberg

Un puente adicional en Königsberg: Piensa cómo cambian los nudos si se construye un puente nuevo. ¿Habrá un cambio en el número de nudos impares? ¿y qué significa eso para poder o no resolver el problema? – ¿Sucede eso siempre, o hay que construir el puente nuevo en un lugar determinado?

Tres o cinco nudos impares: Recuerda que cada línea tiene dos extremos. ¿Qué significa eso para los nudos que se pueden formar? – Nota que un "cabo suelto" como en la figura a la izquierda es también un nudo impar, porque de él parte una sola línea, y el 1 es un número impar. Esta figura tiene entonces dos nudos impares (y un nudo par).



Unidad 19: Adelante y atrás en la recta numérica

Pregunta capciosa: Porque la cola no puede mover al perro.

Unidad 25: El entero y sus partes

Pregunta capciosa: Ningún pájaro queda en el árbol. Los demás se asustan de los disparos y vuelan.

Unidad 28: Sumas y restas en las decenas superiores

Pregunta capciosa: Quedan dos velas: las dos que apagaste. Es que las otras velas se consumen, y no queda nada de ellas.

Unidad 32: El entero y sus partes II

***Problema 12:** Se puede resolver con métodos avanzados (álgebra); pero a este nivel tenemos que usar razonamientos que un niño de ocho o nueve años puede entender. Las siguientes ideas les pueden guiar hacia la solución:

La gallina más el gallo valen 54.–. Pero la gallina vale lo mismo como el gallo más 12.–. Entonces, en vez de "gallina" podemos poner "gallo más 12.–". O sea, el precio total se compone de la siguiente manera:

(Gallo + 12.–) + gallo = 54.–.

En otras palabras: Dos gallos más 12.– valen 54.–. ¿Pueden desde aquí deducir cuánto vale el gallo?

Unidad 34: Introducimos la multiplicación

Pregunta capciosa: Porque entre los dos días hay una noche.

Unidad 41: Divisiones con residuo

Pregunta 1: Divisiones inexactas entre 10
Al dividir un número entre 10, observamos que las mismas cifras del número vuelven a aparecer en el resultado: 47 ÷ 10 = 4 R. 7, el 4 y el 7 forman juntos el número original, 47. La pregunta es por qué sucede eso.
Podemos interpretar estas divisiones como una tarea de "formar grupos de igual tamaño". En este caso formamos grupos de 10. Entonces, ¿qué relación hay entre el resultado, y nuestra forma de escribir los números?

Pregunta 2: La división que "no se puede"
Representa algunas de estas divisiones con material contable y figuras de juego.
Es cierto que no podemos repartir 3 caramelos entre 8 niños en partes iguales; no podemos repartir nada. Y no podemos juntar 5 cubitos en grupos de 6; no se puede formar ningún grupo. Pero matemáticamente, "nada" y "ninguno" también se puede escribir con un número. ¿Cuál? – ¿Cuál es entonces el resultado de la división (el cociente)? ¿y cuánto es el residuo?

O sea, en realidad no hay nada de especial en estas divisiones. Solamente tienes que hacer de manera lógica lo mismo como en todas las otras divisiones; y no debes dejarte confundir si el resultado es un número un poco "extraño" o inesperado.

***Pregunta 3: Divisiones especiales entre 9**
Seguramente habrás notado la propiedad interesante de los resultados. Pero es quizás un poco difícil describir de dónde viene eso. El siguiente razonamiento puede ayudar:
¿Qué hubiera sucedido si en vez de dividir entre 9, hubiéramos dividido entre 10? – Y si hacemos grupos de 9 en vez de 10, ¿de dónde viene el residuo? – Compara ambas situaciones (la división entre 10 y la división entre 9) con material contable; y entonces podrás ver cómo se origina esta propiedad interesante.
- Para ampliar: Puedes observar situaciones similares si divides números de la tabla del 9 entre 8; o si divides números de la tabla del 8 entre 7; etc...

Unidad 43: Problemas con las cuatro operaciones

Los problemas 12 y 13 pueden resolverse con métodos un poco avanzados; pero a este nivel tenemos que hacerlo con razonamientos que los niños pueden entender. A continuación unas sugerencias:

***Problema 12:** Una posibilidad consiste en intentar calcular el precio de un kilo de papas en cada una de las tiendas. Una de las divisiones saldrá con residuo. Aun así podemos decir dónde cuesta menos, sin tener que recurrir a decimales o fracciones. ¿Cómo podemos saber dónde es más económico, comparando los resultados de las divisiones?
Otra posibilidad es la siguiente: Con una de las tiendas, la división sale exacta. O sea, allí podemos saber exactamente cuánto cuesta el kilo de papas. Entonces imaginémonos que en esta tienda compramos la cantidad de papas de la *otra* tienda. ¿Cuánto costaría eso aquí? Así podemos comparar los precios directamente.

***Problema 13:** La solución más obvia consiste en anotar el número de saltos que da Rodrigo en cada "vuelta" de su juego: Primero da 1 salto adelante y 1 salto atrás. Después da 2 saltos adelante y 2 atrás. Después 3 saltos adelante y 3 atrás. Y así sucesivamente hasta llegar a 9 saltos. (Fíjate que del 1 al 10 son 9 saltos, no 10.) Entonces, el total sería:

$$1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+7+7+8+8+9$$

(El 9 aparece una sola vez, porque después de dar los 9 saltos, Rodrigo llega al 10 y desde allí ya no regresa.)
Sería bastante trabajo calcular esta suma, pero ¿quizás encuentran una manera de simplificarla?

Unidad 44: Números hasta 1000

Pregunta capciosa: Ninguna papa “entra”, porque las papas no pueden caminar. ¡Tienes que ponerlas tú mismo!

Unidad 45: Sumas y restas hasta 1000

***Hoja de trabajo 45.7* – Construye puentes**
Podemos simplificar mucho la tarea si entendemos que la solución no depende del número donde comenzamos a construir el "puente". La solución depende únicamente de la *longitud del intervalo*. Por ejemplo, para construir un puente de 200 a 240 puedo usar exactamente las mismas piezas como para construir un puente de 0 a 40 – o sea, unas piezas que juntas suman 40. Entonces, te ayudará mucho si calculas primero cuánto mide el tramo que debe abarcar el puente. Tomando el ejemplo que está arriba en la hoja: Para llegar de 33 a 45, el puente tiene que medir 12 unidades. (***¿Por qué?***) Entonces, el problema se reduce a la pregunta: ¿Con cuáles de los números 5, 6, 7, puedo alcanzar una suma de 12?

En algunos de estos problemas nos ayudan también razonamientos que involucran las propiedades de par/impar o la divisibilidad de los números (aunque eso puede ser todavía un poco difícil de entender a este nivel). Por ejemplo:
En el problema no.4, la longitud del puente es impar. Tenemos una sola pieza impar, el 9. Entonces, el 9 necesariamente tiene que formar parte del puente, porque de otro modo la suma saldría par.
En el problema no.6, la longitud del puente es un número par de decenas. Todas las piezas consisten en puras decenas, y tenemos una sola pieza con un número impar de decenas, el 250. Entonces el 250 no puede ser parte del puente, porque si lo incluimos, la suma sale impar.
Descubran ustedes mismos cómo unos razonamientos similares pueden ayudarles también en algunos de los otros problemas.

Unidad 47: Conversión de medidas

¿Cómo medir la altura de una casa?
Por supuesto que eso depende del tipo de casa. Si se trata de un rascacielos, los siguientes métodos quizás no son tan prácticos. Pero veamos:
¿Es el techo accesible? – En este caso se puede hacer de una manera bastante sencilla. Consigan un cordel de una longitud suficiente, aten un peso en un extremo, suban al techo y bajen el extremo del cordel con el peso hasta que llegue al suelo. Marquen en el cordel el punto que está a la altura del techo, recojan el cordel y midan la distancia desde la marca hasta el extremo del cordel; esa es la altura de la casa.
Si no se puede subir al techo, quizás ***el techo es accesible por lo menos por debajo, desde adentro.*** – En este caso puede ayudar el siguiente razonamiento: Queremos saber la altura de la casa *entera*. Los "enteros" suelen componerse por partes. Entonces podemos medir la casa desde adentro "por partes". Seguramente encontrarán una manera de hacer eso.

Existen también unos métodos para medir la altura de una casa desde afuera, sin tener que subir arriba. (¡Y pueden funcionar incluso con un rascacielos!) Pero esos tienen que ver con el principio de la proporcionalidad; eso todavía no lo trataremos en este nivel.

***Problemas 10, 11, 12:** No existe ningún método "directo" para resolver estos problemas. Hay que probarlo de manera inteligente.
Las piezas que se piden, se pueden visualizar con tarjetitas y los números respectivos escritos encima. Por ejemplo en el Problema 10 tenemos estas seis mesas:

75cm	75cm	75cm	85cm	85cm	110cm

Intenten combinar algunas de estas piezas para que salga el total deseado de 3,10m.
En todos estos problemas, puede ser una buena idea intentar ubicar las piezas más grandes primero.

Unidad 48: Multiplicación de números de dos cifras; Ley distributiva

Investigación:
Aquí los seis procedimientos prometidos para calcular mentalmente 28 x 4. Cada uno de estos procedimientos es útil, lógico, y matemáticamente correcto. Solamente que no todos se pueden generalizar para otras multiplicaciones del mismo tipo.

1. El procedimiento "clásico", usando la ley distributiva:
28 x 4 = (20 + 8) x 4 = 20 x 4 + 8 x 4 = 80 + 32 = 112.

2. Suma repetida:
28 + 28 + 28 + 28 = [56, 84, ...] 112.

3. Duplicar dos veces puede ser más práctico que multiplicar por 4:
28 x 4 = 28 x 2 x 2 = 56 x 2 = 112.

4. Usando la ley distributiva restando en vez de sumando:
28 x 4 = (30 – 2) x 4 = 30 x 4 – 2 x 4 = 120 – 8 = 112.

5. 28 x 4 = 28 x (5 – 1) = 28 x 5 – 28 x 1
Pero 28 x 5 es fácil de calcular, como todas las multiplicaciones de un número par por 5. (Vea en la *Unidad 55*, "Multiplicación por 5".) Así continúa:
. . . = 14 x 10 – 28 = 140 – 28 = 112.

6. Sabiendo que 4 x 25 = 100:
28 x 4 = (25 + 3) x 4 = 25 x 4 + 3 x 4 = 100 + 12
= 112.

Con un poco de creatividad matemática, ¡seguramente se pueden encontrar aun más procedimientos posibles!

Ahora pueden ponerse a pensar: ¿Cuáles de estos procedimientos podemos generalizar para *todas* las multiplicaciones con números de dos cifras? – ¿Cuáles aplican solamente en casos especiales? – ¿Qué otros procedimientos podemos encontrar para *otros* casos especiales?
La *Unidad 49* les dará algunas ideas adicionales acerca de este tema.

Las preguntas capciosas en los problemas:
3) Si ambos chicos avanzan juntos, las velocidades no se suman, ni mucho menos se multiplican. Al contrario, el más rápido tiene que adaptar su velocidad al más lento, entonces juntos avanzan a 18 km/h.
7) Obviamente, los datos no tienen nada que ver con la edad del capitán, entonces no se puede calcular nada. Pero el problema comienza diciendo: “Imagínate que eres ...”, entonces *tú* eres el capitán. Y espero que sepas tu propia edad...

Unidad 52: Operaciones combinadas hasta 1000

Hoja de trabajo 52.2 *(abajo)*: ***"Más combinaciones (2)"***
Algunos razonamientos que pueden servir para encontrar más fácilmente las combinaciones:
Con los números 2, 3, 4, 5: Estos son números pequeños. Entonces, si queremos obtener números grandes, seguramente aparecerán una o varias multiplicaciones en la operación.
También podemos sumar o restar antes de multiplicar. Entonces, también las siguientes son multiplicaciones posibles: (2+3)x4, (4+5)x3, (2x3+4)x5, etc.
El 23 no está en ninguna de las tablas de multiplicación. Entonces para obtener 23, la última operación que realizamos no puede ser una multiplicación.
Para el 34 hay dos soluciones, ¿encontraste ambas?
Si usamos solamente sumas y restas, ¿el resultado será par o impar? Investiga esta propiedad. Solamente uno de los números 0 y 1 se puede alcanzar usando únicamente sumas y restas. Esto significa que para el otro de estos resultados tendrás que usar por lo menos una multiplicación o división. (Para el 0 y el 1 también hay varias soluciones. ¿Cuántas encuentras?)
Con los números 5, 6, 10, 120: El 120 es un número bastante grande. Entonces, si queremos obtener números pequeños, es casi seguro que tenemos que dividir el 120 entre alguno de los otros números (¡o entre una suma o diferencia de ellos!). – ¿O podemos sumar o restar algo del 120 *antes* de dividir? Eso será necesario para obtener uno de los resultados dados.
Con los números 3, 13, 34, 89: Para los resultados menores a 100, la idea más obvia consiste en probarlo primero con sumar y restar. Si esto no resulta, intenta usar el 3 para multiplicar o dividir. (¿Te diste cuenta de que la suma de 89 y 13, la suma de 89 y 34, y también la diferencia entre 34 y 13, se pueden todos dividir entre 3?) – Y puedo avisar aquí que ningún resultado requiere multiplicar 13x34, 13x89, ni 34x89; eso sería exigir demasiado.
Ah, ¿y cómo se puede alcanzar 0? – Solamente si podemos formar de nuestros números dos "grupos" de manera que con cada uno de los "grupos" podemos hacer una operación con el mismo resultado; entonces podemos restar estos dos números iguales y obtenemos 0.

Problema no.7
La ganancia es la diferencia entre los ingresos (por las ventas) y los gastos (por las compras). Entonces hay que calcular por separado el total de los gastos (cuánto costaron todas las compras juntas), y el total de los ingresos (cuánto dinero entró por la venta de los 60 platos). La diferencia entre estos dos totales es la ganancia.
Si quieren anotar esto en una sola operación, entonces habrá primero un paréntesis grande que contiene todos los gastos de las compras; y de este se resta otro paréntesis que contiene los ingresos por las ventas.

Problema no.8
Hay diferentes maneras de calcular esto; algunas son más fáciles que otras. Se podría calcular el área de una losa y el área de la sala; pero ese cálculo se hace complicado, y a este nivel todavía no hemos practicado calcular con áreas. Más fácil es de la siguiente manera:
Calculamos cuántas losas necesitamos para cada uno de los lados de la sala. Una fila de losas de 4,50m de largo, ¿cuántas losas contiene? ¿Y una fila de 5,40m de largo? – Entonces podemos ahora calcular con el número de losas: La sala es un rectángulo que tiene ... losas de ancho y ... losas de largo. ¿Cuántas losas son esas en total? Seguramente recordarás que el rectángulo significa una multiplicación. La multiplicación que resulta se ve quizás un poco complicada; pero con uno de los “trucos” de la *Unidad 49* se puede convertir en una más fácil.

Problema no.9
Podemos calcular para cada gallina aparte, cuántos huevos produce dentro de 60 días. Para la primera gallina es fácil: si pone un huevo cada dos días, el número de huevos es la mitad del número de días. ¿Cómo es ahora el caso de la gallina que pone 2 huevos cada 3 días? Imaginémonos que repartimos los 60 días en períodos de 3 días. ¿Cuántos de estos períodos tenemos? Ahora, en cada uno de estos períodos obtenemos 2 huevos. ¿Cuántos huevos son eso en total?
De manera similar podemos calcular también de las otras gallinas, cuántos huevos producen. Sumando todos estos resultados, sabremos cuántos huevos pusieron las gallinas en los 60 días. Ahora nos falta calcular cuántos de estos huevos consumió la familia Moreno; supongo que eso no es difícil. ¿Cuántos huevos les sobraron entonces?

Problema no.10
¡Este problema no se puede resolver con simples multiplicaciones! Ya que los conejos empiezan a procrearse después de un año, tenemos que mantener la cuenta de la edad de cada hembra que nace. Al final del primer año tenemos 2 + 4 + 4 = 10 conejos, de los cuales la mitad (5) son hembras. Pero de estas, 3 van a tener un año o más en el siguiente marzo, mientras las últimas 2 (las que nacieron en septiembre) recién tendrán medio año y por tanto todavía no tendrán crías. Entonces en marzo del segundo año nacen 3 x 4 = 12 crías, y en total tenemos 10 +12 = 22 conejos.
En septiembre del segundo año van a parir todas las hembras que hubo en septiembre del primer año, o sea 5. Eso hace 5 x 4 = 20 crías. Así podemos continuar, calculando para cada marzo y cada septiembre el número de las nuevas crías, basado en el número de hembras que hubo *un año antes*.
Nos podemos facilitar el cálculo un poco con el siguiente

razonamiento: El número de hembras que hubo hace un año es siempre la mitad del total de conejos que hubo; y el número de nuevas crías es siempre cuatro veces el número de hembras. O sea, tomamos el total de conejos hace un año, y aplicamos a este número las operaciones ÷2 y x4. ¿Podemos remplazar estas dos operaciones por una sola?
- En este problema es mejor que no intenten representar los cálculos como una sola operación; se volvería demasiado complicado. Es que aquí tenemos que usar un método recursivo; o sea, cada resultado nuevo se calcula a base del resultado anterior (o de los dos resultados anteriores). En tales sucesiones no es práctico escribirlo todo como una sola operación. Es más práctico escribir cada miembro como una operación que usa el miembro anterior (o los dos miembros anteriores). Así por ejemplo el número de conejos en septiembre del tercer año se puede escribir como una operación que contiene el número de conejos en marzo del mismo año, y el número de conejos en septiembre del año anterior.

Nota histórica:
Un problema similar fue planteado por el matemático Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci (se pronuncia "Fibonachi"), en el siglo 13. En la versión de Fibonacci se cuenta el número de *parejas* de conejos; y las parejas paren una sola pareja nueva a la vez (no cuatro crías). Las otras condiciones son iguales como en el problema anterior: Se comienza con una sola pareja, y cada pareja pare dos veces al año, a partir del momento en que cumple un año de edad. De esta manera resulta la famosa "Secuencia de Fibonacci". Si pudieron resolver el problema anterior, este ahora ya no será difícil.

Unidad 53: El calendario

Pregunta capciosa: En febrero, porque comen solamente la comida de 28 días.

Problema no.6: Solamente los años bisiestos tienen un 29 de febrero. Entonces, la pregunta equivale a preguntar: ¿Cuántos años bisiestos hubo desde 1984 hasta hoy? – A este nivel, los niños todavía no podrán calcularlo directamente; pero pueden contar de 4 en 4: 1988, 1992, 1996, ... hasta el año actual. Noten que la cuenta empieza con 1988 y no con 1984, porque en el año en que uno nace, todavía no celebra cumpleaños.

Problema no.7: Tenemos que ubicar correctamente los cumpleaños 10, 11 y 12 de Anita, respecto a la fecha de su conversación con Susana. Si el próximo año Anita cumple 12 años, entonces este año cumple 11, y el año pasado cumplió 10. Ahora tenemos que tomar en cuenta que en el día antes de cumplir 10 años, Anita todavía tenía 9 años. Entonces las fechas encajan solamente si ayer Anita cumplió 10 años (de manera que anteayer todavía tenía 9 años), y si ese día de ayer pertenece al año pasado. Por tanto, la conversación tuvo lugar un 1 de enero, y el cumpleaños de Anita es el 31 de diciembre.

Unidad 55: Viaje de exploración matemática – Exploramos la multiplicación

Multiplicación por 4 (Hoja de trabajo 55.3) – *abajo:*

Acerca de algunas de las preguntas al final:

¿De dónde vienen las regularidades que se observan?
Estamos pintando números de las tablas de multiplicación, que son patrones repetitivos: Por ejemplo en la tabla de 3, los números avanzan regularmente en pasos de 3. Además, las tablas de números en la hoja también tienen algo repetitivo (¿pueden ver qué es?). Es de esperar entonces que la combinación de un patrón repetitivo con otro patrón repetitivo produzca a su vez un patrón repetitivo o regular; y que esta regularidad se exprese gráficamente.

¿Qué propiedades tienen los cuadros que salieron verdes (o sea, se pintaron primero de amarillo y después de celeste)?
La respuesta más obvia es que estos números pertenecen a la tabla del 2 (amarillo) *y también* a la tabla del 3 (celeste). Pero eso lo podemos expresar de manera más sencilla con una sola propiedad: Estos números pertenecen a ... ¿qué?

¿Por qué no hay cuadros de puro rojo (o sea, que pertenecen solamente a la tabla del 4 y a ninguna otra)?
Primero observen qué pasó exactamente con los números de la tabla del 4: ¿*Por qué* no son de puro rojo? ¿Qué propiedad adicional tienen entonces todos los números de la tabla del 4? ¿Pueden descubrir *por qué* tienen esa propiedad?

¿Por qué aparecen esas franjas verticales celestes en el segundo cuadro, y amarillas y anaranjadas en el tercer cuadro? – ¿Qué influencia tiene el ancho del cuadro sobre el patrón que aparece?
Las franjas celestes en el segundo cuadro pertenecen a la tabla del 3. El ancho de este cuadro es de 9 números. Ahora, ¿qué relación existe entre el 3 y el 9? – ¿Encuentran

una relación similar entre las franjas anaranjadas y el ancho del tercer cuadro?

Pintamos tablas de multiplicación (Hoja 55.5):
Primera tabla: ¿Qué sucede cuando multiplicamos a) dos números pares; b) dos números impares; c) un número par con un número impar?
Lo que nos interesa aquí, es si el resultado saldrá par o impar en cada uno de estos casos. Un número es par cuando es un múltiplo de 2, o sea, "contiene" el factor 2. Por tanto, cada multiplicación que contiene un factor par, tendrá un resultado par. Examinen qué consecuencias tiene eso para el patrón de "par/impar" que resulta.

Segunda tabla: ¿Puedes formular exactamente la condición que tienen que cumplir los factores para que el producto sea un múltiplo de 3?
El énfasis está en "exactamente". Probablemente habrán descubierto que los factores tienen que ser números de la tabla del 3 (o sea, múltiplos de 3). ¿Pero es necesario que ambos factores sean de la tabla del 3, o solamente uno de ellos? - La ley es similar a la de la primera tabla.

Tercera tabla: ¿Cuáles son exactamente las propiedades de los números que terminan con 0, y de los que terminan con 5?
Otra pregunta que pide una formulación "exacta". La respuesta tiene que ver con la tabla del 5 y la tabla del 10, y posiblemente también con la propiedad de "par" o "impar". Pero ¿pueden decirlo de una manera clara y correcta, sin ambigüedades? ¿Cuáles de las propiedades mencionadas tienen los números que terminan en 5? ¿Y cuáles de estas propiedades tienen los números que terminan con 0?
- Ahora una pregunta adicional para desafiarles a seguir pensando de manera lógica y exacta: ¿Cuáles son las condiciones exactas que los factores tienen que cumplir para que el producto termine con 0?

Multiplicación por 6 (Hoja de trabajo 55.6) *– arriba**:***
y ***Multiplicación por 7 (Hoja de trabajo 55.7)*** *– abajo, a la derecha**:***
En realidad, las dos estrellas no son *exactamente* iguales. Observen bien ... (Su *forma* es igual; pero la *dirección* en la que las recorremos no es igual.) Entonces, ¿de qué manera es la tabla del 6 "la tabla del 4 al revés"? (E igualmente, la tabla del 7 es de cierta manera "la tabla del 3 al revés".) – La respuesta está relacionada con nuestra manera de escribir los números. Los escribimos según un sistema de numeración que tiene como base el número 10. Entonces, la respuesta estará de alguna manera relacionada con el número 10. (Y con eso casi ya he revelado el secreto.)

Pintamos tablas de multiplicación (II) (Hoja de trabajo 55.13):
¿De dónde vienen las simetrías?
Un asunto similar hemos analizado al comparar la "estrella de la tabla del 6" con la misma estrella en la tabla del 4; y lo mismo sucedió con la "estrella del 7" en comparación con la "estrella del 3". Las simetrías que observamos aquí tienen la misma explicación. Sigan razonando...

En las dos tablas de abajo tendremos mucho menos cuadros pintados que en las tablas de arriba. ¿Por qué?
En las tablas de abajo pintamos números impares, mientras en las tablas de arriba pintamos números pares. Ahora, ya nos hemos encontrado con este fenómeno de que en la tabla de multiplicación hay mucho más números pares que impares. (Hoja 55.5). ¿Se acuerdan? ¿Cuál fue la explicación?

Unidad 56: Múltiplos, divisores, y números primos

Investigación: Formamos rectángulos

c) No voy a dar las respuestas, pero para que puedan verificar su resultado: De los números dados, seis son primos y cinco son compuestos. De los compuestos, casi todos pueden representarse como un rectángulo donde un lado tiene 3 piedritas. Uno de ellos requiere un rectángulo con un lado de 7 piedritas.

d) "Sistemático" significa sobre todo *ordenado*. ¿Cómo pueden probar *en orden* las posibilidades que pueden existir para formar un rectángulo? (Los rectángulos se pueden ordenar, por ejemplo, según el tamaño de uno de sus lados ...)

e) ¿Encontraron un método sistemático en la pregunta d)? ¿Sí? Entonces pueden usar el mismo método aquí. Un método que sirve para descubrir *una* posibilidad de formar un rectángulo, puede servir también para encontrar *todas* las posibilidades.
Si no encontraron ningún método sistemático, piénsenlo otra vez. Ojo: "Sistemático" no necesariamente significa "rápido". Si pensaban que existe alguna operación "mágica" que les da la respuesta con una sola operación, tengo que desilusionarlos: Un tal método no existe. Siempre será necesario probar *varias* posibilidades. Algunas resultarán y otras no. Pero este proceso de probar se puede hacer de manera *ordenada*, y así nos aseguramos de encontrar *todas* las posibilidades, sin pasar ninguna por alto.

***f)** Existen cinco números menores a 100 que tienen 12 divisores. ¿Los encontraron todos?

***g)** Para verificar si encontraron todos: Existen 25 números primos menores a 100. Sin contar el 1, porque el 1 no se cuenta entre los números primos. En la *Unidad 57* hablaremos acerca de una de las razones por qué.

Unidad 57: Factorizar números; Divisibilidad entre 2 y entre 5

Hemos visto que se puede factorizar un número, probando los divisores en orden: ¿El 2 es un divisor? ¿El 3 es un divisor? Y entonces hicimos la pregunta:

¿Tenemos que probar con el 4 también?
Estamos hablando de *factores primos*. Pero el 4 no es un número primo, entonces no puede aparecer como factor primo. Eso ya debe indicarnos que no es necesario probar con el 4. Pero ¿cuál es la fundamentación matemática por qué no?
El 4 es 2 x 2. Entonces todos los múltiplos de 4 son a la vez múltiplos de 2. (Vea en la *Unidad 55*, "Multiplicación por 4".) Entonces, si el número que examinamos fuera divisible entre 4, ya hubiéramos encontrado antes que es divisible entre 2. Lo hubiéramos dividido entre 2 (tantas veces sucesivas como fuera posible), y entonces el divisor 4 ya estaría incluido en los divisores 2 x 2.
Por la misma razón no necesitamos probar con el 6 (=2x3), ni con el 8 (=2x2x2), ni con el 9 (=3x3), ni con ningún otro número compuesto. Todos esos, si fueran divisores, ya los hubiéramos encontrado antes. Si buscamos factores primos, tenemos que intentar dividir solamente con los números primos.

Factores primos y divisores:
Usando el ejemplo del 18: Encontramos los divisores si podemos expresar 18 como una multiplicación. Pero si tenemos los factores primos, ya sabemos que 18 = 2 x 3 x 3. Si queremos encontrar una multiplicación con dos factores, solamente tenemos que agrupar los factores primos en dos grupos:
18 = (2 x 3) x 3 = 6 x 3, entonces el 6 y el 3 son divisores.
18 = 2 x (3 x 3) = 2 x 9, entonces el 2 y el 9 son divisores.
Un caso especial es 18 = 1 x 18. Pero eso ya lo sabemos desde la *Unidad 56*: Cada número es divisible entre 1 y entre el número mismo.

En otras palabras: Cada divisor es un producto de algunos factores primos del número; porque de otro modo no podría ser un divisor.
Veamos otro ejemplo con el número 30 = 2 x 3 x 5:
30 = (2 x 3) x 5 = 6 x 5, entonces el 6 y el 5 son divisores.
30 = 2 x (3 x 5) = 2 x 15, entonces el 2 y el 15 son divisores.
30 = (2 x 5) x 3 (tuvimos que intercambiar los factores para obtener esta agrupación), entonces el 10 y el 3 son divisores.
Y 30 = 1 x 30, el 1 y el 30 son divisores.

De hecho no es tan difícil. La única dificultad está en encontrar todas las combinaciones y no pasar por alto ninguna, si hay muchos factores. En el nivel de Primaria II veremos una forma de hacer eso de manera sistemática.

Unidad 58: Fracciones sencillas

Pregunta capciosa: La manera más práctica es hacer puré de manzanas.

Unidad 59: El promedio

El día más frío y la semana más fría:
El ejemplo de los panecillos debe darles una pauta. Allí mencionamos la posibilidad de que uno de los invitados haya comido 11 panes y los otros invitados nada. En este caso, el promedio era el mismo como si algunos invitados hubieran comido 2 panes y otros hubieran comido 3 panes.

– Ahora imagínense dos grupos distintos de invitados, con 4 personas en cada grupo. Un grupo come 11 panes, el otro grupo come 13 panes. ¿En cuál de los grupos se encuentra la persona que comió más panes? – Sabiendo solamente los promedios, no podemos decirlo con seguridad. Aunque es más probable que la persona más

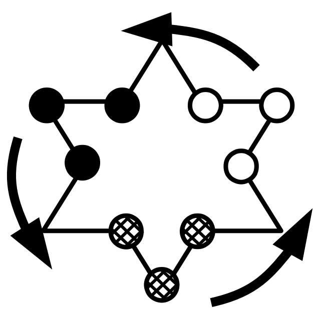
"comilona" se encuentre en el grupo que comió 13 panes, pero no necesariamente es así. Supongamos que en el primer grupo se dio el caso extremo de que una sola persona comió los 11 panes, mientras en el otro grupo cada uno comió 3 ó 4 panes (o aun alguien 5 ó 6). En este caso, obviamente la persona que comió más pertenece al grupo que "en promedio" comió menos. – El caso ni siquiera tiene que ser tan extremo. En el primer grupo puede haber tres personas que comieron 2 panes cada uno, y una persona que comió 5. En el segundo grupo, tres personas pueden haber comido 3 panes y una persona 4 panes. También en este caso, el "comilón" se encuentra en el grupo que comió menos.
Ahora, tomando en cuenta estos ejemplos, ¿pueden fabricar un ejemplo similar donde el día más frío no se encuentra en la semana más fría? Funciona igual, solamente que en vez de "personas" tenemos que decir "días"; y en vez de "grupos" tenemos que decir "semanas".

Unidad 61: Problemas con mover fichas y maniobrar trenes

Subiendo y bajando la escalera
Este problema es tan fácil que pienso que no se necesitan pautas. Pero puedo decir que se puede lograr en 12 movimientos.

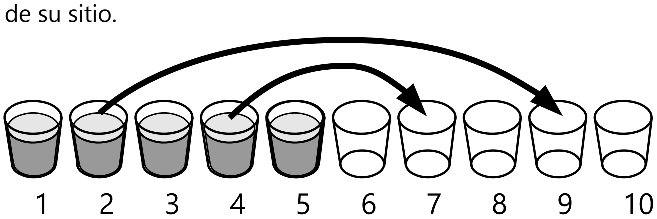
Perro, cabra y repollos
¿A cuál de los tres hay que llevar primero? – Si descubres eso, intenta continuar. Toma en cuenta que todo lo que se puede llevar al otro lado, también se puede llevar de regreso.

Damas chinas en miniatura
Puedes considerar la estrella como un circuito circular donde todas las fichas tienen que dar "media vuelta" para llegar a su destino. Así podrás resolver el problema con seguridad, pero no es la solución más corta.



Empezando con esta idea, ¿encuentras la manera de hacerlo en menos movimientos?

Los diez vasos
Ya que eso es "casi una pregunta capciosa", doy aquí la solución:
Coge los vasos no.2 y 4, y echa su contenido en los vasos no.7 y 9; después vuelve a colocarlos a su sitio. Eso cumple la condición; porque solamente dos vasos se han movido de su sitio.



Tren invertido
Si no se te ocurre ninguna idea de cómo hacerlo, inténtalo primero con solo dos vagones.
Recuerda que puedes: Desacoplar y acoplar vagones; dejar vagones parados en el riel adicional o también en el riel principal; jalar vagones hacia adelante o empujarlos hacia atrás con la locomotora.

Puente angosto
Piensa: ¿Cuál vagón debes llevar primero sobre el puente? Piensa también: ¿En qué orden debes dejar los vagones sobre el riel al lado izquierdo donde caben dos vagones? – Estas son las dos decisiones que deciden sobre el éxito o fracaso de tu intento.

Cruce difícil
Recuerda que las locomotoras pueden funcionar en ambas direcciones. Recuerda que una locomotora puede jalar o empujar también vagones que no son de su propio tren. Por fin, recuerda que puede ser necesario que una de las locomotoras retroceda con sus vagones, para dejar espacio a la otra locomotora para sus maniobras. (Algo que los conductores de vehículos a menudo olvidan cuando se encuentran en una situación como esta.)
La solución más rápida que encontré consiste en 13 movimientos; considerando que comienza un nuevo "movimiento" cada vez que una locomotora cambia de dirección, acopla o desacopla uno o varios vagones. ¿Encuentras cómo hacerlo? ¿O encuentras incluso una solución más rápida?

Unidad 63: Sucesiones

Hoja de trabajo 63.4, las últimas tres sucesiones:
Estas son un poco difíciles de descubrir, por eso daré las soluciones:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Esta sucesión es muy famosa y lleva el nombre de su inventor, un matemático italiano del siglo 13: se llama la secuencia de Fibonacci (se pronuncia "Fibonachi").
Su regla de construcción es la siguiente: Cada miembro es la suma de los dos anteriores: 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8, 5 + 8 = 13, etc.

0, 1, 8, 27, 64, ...

Podríamos analizar las diferencias entre un miembro y otro: 1, 7, 19, 37 – eso no parece muy lógico, pero las *diferencias de las diferencias* forman una sucesión más "lógica": 6, 12, 18 ... ahora ya podemos imaginarnos la continuación.
Por el otro lado, es más fácil si nos damos cuenta de que se trata de la secuencia de los "cubos perfectos": 0x0x0 = 0, 1x1x1 = 1, 2x2x2 = 8, 3x3x3 = 27, 4x4x4 = 64, ...

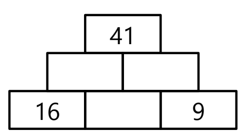
3, 3, 4, 6, 5, 4, 5, ...

Esta es una pregunta capciosa, porque esta sucesión no sigue ninguna regla matemática. Los números de la sucesión indican cuántas letras tienen los números naturales cuando los escribimos en palabras: "uno" = 3 letras; "dos" = 3 letras, "tres" = 4 letras, "cuatro" = 6 letras, "cinco" = 5 letras, "seis" = 4 letras, "siete" = 5 letras, etc...

Unidad 64: Razonar con números

Hoja de trabajo 64.9: Pirámides de sumas *(difíciles)*
En las pirámides no.1 a 12 siempre hay algún número que se puede calcular directamente (como suma o diferencia de sus vecinos inmediatos). Desde allí se puede continuar hasta llenar la pirámide entera.

En las pirámides no.13 a 19, eso no es posible. Pero existen diversas maneras de llegar a la solución. Una forma consiste en hacerlo "probando", pero de una manera sistemática. Consideremos la situación a la derecha. No podemos calcular directamente los números que faltan. Pero si colocamos un número en



la base de la pirámide, entre el 16 y el 9, entonces los números de la fila del medio están definidos, y estos a su vez definen la suma final en la punta de la pirámide. Podemos comenzar probando con un número cualquiera. Por ejemplo, ponemos el 1. Esto da en la segunda fila 17 y 10. 17 + 10 = 27, eso es obviamente incorrecto, porque esta suma debería dar 41.
Pero analicemos ahora qué pasa si aumentamos el número de la base en 1. Ponemos 2 en vez de 1. Esto da en la segunda fila 18 + 11 = 29. O sea, la suma final aumenta en 2. Probamos si esta ley se cumple si seguimos aumentando el número en la base. Ponemos 3, eso da 19 + 12 = 31. Efectivamente, la suma final ha aumentado otra vez en 2.
Ahora podemos usar esta propiedad para llegar directamente al resultado: Para llegar de 31 a 41 nos faltan 10. Para que la suma final aumente en 10, ¿en cuánto tiene que aumentar el número en la base? – Eso nos dará la solución.

(Métodos similares son conocidos desde la Edad Media bajo el nombre de "Regula falsi", o sea "la regla de los valores falsos" – que al final nos conduce a los valores verdaderos. Se ha usado a menudo para resolver problemas donde no se conocía ningún método directo de solución.)

Otro camino consiste en hacer unos razonamientos generales, analizando de qué manera los números de la base vuelven a aparecer en las sumas superiores. En nuestro ejemplo, el ladrillo izquierdo de la segunda fila va a contener la suma de 16 más el número desconocido del medio de la base. El ladrillo derecho va a contener la suma de este mismo número desconocido más 9. Entonces los dos ladrillos de la segunda fila juntos sumarán 16 + 9 + *dos veces el número desconocido de la base*.
Pero sabemos que esta suma de los dos ladrillos de la segunda fila es 41. O sea, 41 es igual a 16 + 9 + *dos veces el número desconocido de la base*. Entonces, ¿cuánto es "dos veces el número desconocido de la base"? ¿Y cuánto es entonces "una vez" este número?
- Este ya fue un razonamiento "casi algebraico", y por eso puede todavía ser inaccesible para los niños de este nivel. Si no lo entienden así, que lo hagan entonces con el primer método, que es más fácil de entender.

Por supuesto que estos problemas se podrían todos solucionar rápidamente con el uso del álgebra; pero eso no lo haremos hasta que los niños hayan alcanzado el desarrollo mental correspondiente.

La pirámide no.19:
Si probaste por suficiente tiempo, te habrás dado cuenta de que puedes poner un número arbitrario en uno de los ladrillos en blanco, y (casi) siempre puedes completar los demás y sale correcto. En cambio, si alteramos el número en la punta de la pirámide, *nunca* funciona. O sea, si conocemos los otros números dados (las dos esquinas inferiores y el número del medio), el número en la punta ya está definido, *sin importar qué números hay en los otros ladrillos*. ¿Por qué es esto así?
- Los alumnos de secundaria podrán encontrar una relación algebraica entre estos números. Todavía no exigimos esto de los alumnos de primaria; pero hay otro razonamiento que puede explicar el misterio: Comienza con cualquier solución correcta. En esta solución, aumenta 1 a uno de los números que escribiste en uno de los ladrillos en blanco. ¿Cómo tienes que corregir los números en los otros ladrillos en blanco, para que la solución sea nuevamente correcta? O sea, fíjate en los *cambios* que hacen los otros números: ¿Cuánto tienes que aumentar o quitar a cada uno de ellos? – Te darás cuenta de que puedes hacer esto *sin utilizar el número en la punta*. Con eso está demostrado que el número en la punta es independiente de los números en los ladrillos en blanco.

Con esta propiedad puedes hacer un truco de "magia" con tus amigos: Prepara una pirámide como esta, con cuatro pisos, y escribe dentro de ella estos tres "números importantes": la esquina inferior izquierda, la esquina inferior derecha, y el número del medio. Pide a uno de tus amigos que escriba un número cualquiera en el segundo ladrillo de la base (pero menor al número del medio) y que complete la pirámide. Sin saber el número que escribe tu amigo, podrás predecir cuál número resultará en la punta.

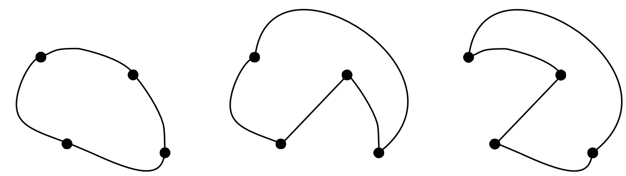
Hoja de trabajo 64.10-11: Cuadrados mágicos
¿Cómo descubrir la "suma mágica", si sabemos los números que conforman el cuadrado?
Observamos por ejemplo las filas horizontales del cuadrado. Los números de cada fila dan juntos la "suma mágica". ¿Y qué resulta si sumamos los números de *todas* las filas juntas? – Podemos interpretar esta suma de dos maneras: como una suma de "sumas mágicas" (porque cada fila nos da la "suma mágica") ... ¿o como la suma de qué? ¿Cómo puedes entonces usar los números dados para calcular la "suma mágica"?

Hoja de trabajo 64.12: Otros desafíos de razonamiento con números

Los triángulos mágicos: El tercer triángulo se puede solucionar de una manera similar a los pirámides de sumas no.13 a 19; vea las pautas allí.

El camino más corto: Como ya se dijo en la explicación del problema, no se conoce ninguna estrategia eficiente para resolver un problema como este. Simplemente hay que probarlo. – Uno podría pensar que el camino más corto tiene que contener el segmento más corto de todos, y que no puede contener el segmento más largo de todos; ¡pero no siempre es así! – En el primer problema (camino de A a B) uno podría pensar que el camino más corto debe contener el número mínimo de segmentos (2 segmentos), ¡pero eso tampoco es así! De hecho, en esta situación, el camino más corto contiene más de 2 segmentos.

El problema de las 4 ciudades se puede examinar en poco tiempo, porque aquí existen solamente 3 diferentes caminos cerrados que pasan por las 4 ciudades *(vea el dibujo siguiente)*:



¿Cuántos caminos cerrados existen para 5 ciudades? Intenta dibujarlos de la misma manera. Así podrás controlar si has tomado en cuenta todas las posibilidades que existen.

Combinaciones de máquinas: En el primer problema no hay muchas posibilidades de recorrer las máquinas. Si no las quieres probar todas, usa el siguiente razonamiento: La última "máquina" es "+5" o "+10". Usando esta máquina al revés, obtenemos el número que salió o de la máquina "x3", o de la máquina "x4". Pero de estas máquinas no puede salir cualquier número. ¿Qué clase de números salen de la máquina "x3"? ¿Y de la máquina "x4"? Entonces, para que el resultado sea 28, si la última máquina fue "+5", ¿obtienes un número que puede ser un resultado de la operación "x3" o "x4"? ¿Y si la última máquina fue "+10"? – De esta manera puedes descubrir bastante rápidamente cuáles fueron las últimas dos máquinas, y así te falta solamente encontrar la primera.
El segundo problema es más difícil. Pero aquí también tenemos una máquina "x3". Puedes usar un razonamiento similar al anterior para descubrir dónde en la cadena debe haber ocurrido una operación "x3".
*) ***¿Cuáles números hasta 100 no se pueden obtener?*** – Para responder a esta pregunta tendrás que enumerar sistemáticamente todos los números que sí se pueden obtener, hasta 100. Es importante que tu enumeración sea ordenada y sistemática, para asegurar que no pases por alto ninguna combinación posible. Eso lo puedes hacer, por ejemplo, con un diagrama de árbol.

Anexo B: Citas y notas bibliográficas

1) En el período de Primaria I, los niños son todavía muy vulnerables a ciertos trastornos causados por un exceso de "tiempo de pantalla". Se recomienda que en niños de esta edad se limite su uso de la televisión, computadora, celular, etc. a una hora por día.
La Alianza por la Niñez dice al respecto:

"Hacer hincapié en el uso de las computadoras en la infancia puede exponer a los niños a un ***mayor riesgo de sufrir lesiones*** repetitivas por estrés, tensión visual, obesidad, y otras consecuencias dañinas de un estilo de vida sedentario. Algunos expertos en desarrollo advierten también que, el aumento del tiempo que los niños pasan frente a una computadora, (...) puede contribuir a los ***retrasos en el desarrollo*** de la habilidad para coordinar impresiones sensoriales y de movimiento y darse cuenta de los resultados. Ello podría llevar a su vez a retrasos en el habla y a otros problemas del aprendizaje."
"La psicóloga educacional y antes maestra Jane Healy, apunta que la creatividad involucra la habilidad para generar 'imágenes personales y originales, visuales, físicas o auditivas- imágenes de la mente, a decir de las propias palabras de un niño'. Sin embargo, ella agrega: 'Los maestros encuentran hoy en día que los niños inmersos en los videos no pueden formar en sus mentes imágenes originales, o desarrollar representaciones imaginativas. Los maestros de niños pequeños lamentan el hecho de que *muchos niños deben ser enseñados a jugar simbólicamente o a pretender* - un síntoma que antes se daba solo en jóvenes con desórdenes emocionales o mentales."

(Alliance For Childhood)

En la misma obra, los autores resumen los riesgos que conlleva la exposición prolongada de los niños a la pantalla:

"Riesgos físicos
• Daños osteomusculares
• Fatiga visual y miopía
• Obesidad y otras complicaciones de un estilo de vida sedentario
• Posibles efectos colaterales por emisiones tóxicas y radiación electromagnética
Riesgos emocionales y sociales
• Aislamiento social
• Lazos débiles con los maestros
• Falta de autodisciplina y automotivación
• Separación emocional de la comunidad
• Explotación comercial
Riesgos intelectuales
• Falta de creatividad
• Imaginación poco desarrollada
• Lenguaje y habilidades alfabetizadoras empobrecidos
• Pobre concentración, déficits de atención
• Poca paciencia para el trabajo duro del aprendizaje
• Plagio
• Distracción del significado
Riesgos morales
• Exposición a la violencia en línea, la pornografía, fanatismo y otros materiales inapropiados
• Énfasis en la información desviada de su contexto ético y moral
• Falta de propósito e irresponsabilidad en la búsqueda y aplicación del conocimiento"

---

2) Ya hace muchos años, educadores conscientes sospecharon que la enseñanza acelerada de los niños pequeños hace más daño que bien en su desarrollo. Los Moore mencionan los siguientes datos:

"El doctor David Metcalf de la escuela de Medicina de la Universidad de Colorado cree que la división de la labor entre los dos lados *(del cerebro)* probablemente se establece entre los siete y nueve años de edad. No debemos estar sorprendidos si el niño pequeño es más una 'criatura emocional' que una racional. (...) Pero la habilidad de razonar es básica para aprender a leer, dominar la aritmética, y deletrear.
Ocasionalmente, han surgido preguntas acerca de si la estimulación hace que madure más rápido el cerebro o si las tareas de la escuela se vuelven más fáciles al dejar el cerebro del niño madurar antes. Lo primero confirmaría la necesidad de la escolaridad temprana; lo segundo la negaría. (...) Basado en la investigación relacionada, **la estimulación temprana parece involucrar más riesgos para el niño pequeño** que si se le permite más tiempo para madurar. (...) Los hallazgos del doctor Paul Yakovlev de Harvard con respecto a la estructura y función del cerebro, y los estudios clínicos hechos por el psiquiatra de niños, Humberto Nagera de la universidad de Michigan, concuerdan estrechamente con las conclusiones ofrecidas por el psicólogo suizo, Jean Piaget, que **no se debe apurar el cerebro del niño pequeño** en el proceso del aprendizaje."

(Moore 1995)

Estos datos han sido confirmados por hallazgos más recientes de la neurología:
"El proceso de mielinización en los cerebros humanos no está completo hasta que la mayoría de nosotros tenemos más de veinte años. Aunque unas investigaciones con animales mostraron que la mielina total podría reflejar unos niveles de estimulación, los científicos creen que su orden de desarrollo es principalmente predeterminado por un programa genético.
(...) Antes de ser mielinizadas, las regiones del cerebro no operan de manera eficiente. Por esta razón, los intentos de "hacer" que los niños dominen habilidades académicas sin la madurez necesaria del cerebro, pueden resultar en desórdenes en sus patrones de aprendizaje. Como hemos visto, la esencia de la plasticidad funcional es que cualquier forma de aprendizaje – lectura, matemática, ortografía, caligrafía, etc. – puede ser realizada por cualquiera de varios sistemas cerebrales. Por supuesto deseamos que los niños conecten cada parte del aprendizaje con aquel sistema que es el mejor para la tarea específica. Pero si el sistema apropiado todavía no está disponible, o todavía no funciona adecuadamente, y los niños son forzados a aprender, entonces el cerebro se organiza en una forma donde los sistemas menos adaptivos e "inferiores" son entrenados a hacer el trabajo.
(...) Aquellas áreas que reciben la dosis más tardía de mielina, son las áreas de asociación que se responsabilizan de manipular conceptos muy abstractos, tales como símbolos (X, Y, Z; gráficos de funciones) que representan otros símbolos (relaciones numéricas) que a su vez representan cosas reales (aviones, trenes, manantiales). Esta clase de aprendizaje depende mucho de la experiencia *[concreta]*, y por tanto puede realizarse a través de muchas rutas neurales potenciales. Al obligar cerebros inmaduros a un aprendizaje de nivel superior, serán forzados a trabajar con sistemas de nivel inferior, lo que dañará la habilidad deseada.
Yo mantengo que **muchos de los fracasos escolares actuales resultan de expectativas académicas que fueron forzadas sobre los alumnos como con una niveladora, antes que sus cerebros estuvieran preparados para ello.**
(...) Las reglas abstractas de gramática y uso del lenguaje deberían enseñarse no antes de la escuela secundaria. Entonces, si son preparados para ello, los alumnos pueden incluso disfrutar de los desafíos de esta clase de razonamiento abstracto, lógico. Pero solamente si los circuitos *[cerebrales]* no están ya demasiado obstruidos por una enseñanza chapuceada de reglas."

(Healy 1990)

---

3) La afirmación de que las emociones positivas son importantes para el aprendizaje, también tiene fundamento neurológico:

"**La emoción es el guardián del aprendizaje.** (...) Los neurotransmisores responsables por el salto sináptico entre las células del cerebro, son los únicos de la categoría de "substancias informativas" que acarrean el proceso que llamamos aprendizaje. Las substancias informativas del segundo sistema paralelo, son una variedad de transmisores: péptidos, hormonas y proteínas ligadas. Viajando vía intercelular por sendas como el sistema sanguíneo, estas substancias llegan a los receptores en la superficie exterior de las células a lo largo del cuerpo.
Algunos neurocientíficos especulan que menos del 2% de la comunicación neuronal, realmente ocurre en las sinapsis entre neuronas del cerebro. El resto de la comunicación ocurre a través de estas substancias informativas.
(...) Un ejemplo de esta retroalimentación entre el cuerpo y el cerebro ocurre cuando un estudiante es el receptor final de desprecios o es humillado por los compañeros de clase cuando comete un error en público. Cuando los sistemas de comunicación química y eléctrica del cuerpo-cerebro detectan amenaza, puede activar una secuencia automática, que enfoca toda la atención en la amenaza percibida y una pequeña o nula atención a lo que el maestro está diciendo o haciendo."

(McGeehan)

Y el neurólogo alemán Gerald Hüther dice:

"El cerebro no es una máquina, pero tampoco es un músculo. No se lo puede entrenar como pensaba la sociedad del rendimiento. El cerebro es un órgano especial que me cuida para que yo esté bien. Y por eso tiene una especie de "sensor de importancia" que detecta lo que es realmente importante, y tiene que ser importante para mí, no para los demás. Y entonces el cerebro cambia. Si algo es importante, percibimos que nos emociona, nos entusiasma, nos interesa, nos concierne. Y cada vez que eso sucede, se activan ciertos centros emocionales en el cerebro medio, que se encuentra por abajo bien adentro. Esos centros emocionales tienen unas prolongaciones bien largas, y cada vez que se activan porque nos emocionamos, los extremos de esas prolongaciones segregan esos transmisores neuroplásticos, y esos actúan como fertilizantes para la red neuronal que se usó intensamente en el estado de entusiasmo, por ejemplo para solucionar un problema, para ganar un partido de tenis, o para crear una obra de arte especial.
Por eso, cada vez que hacemos algo con entusiasmo, mejoramos mucho en poco tiempo. Por eso también recordamos mucho mejor lo que nos emociona. Y por eso es tan importante que este mensaje llegue también a nuestro sistema escolar y a nuestro sistema educativo: No sirve esforzarse. Podemos esforzarnos tanto como queremos con memorizar y con hacer tareas en casa: eso entra por aquí y sale por allí, porque no entra a profundidad, y porque no está siendo fertilizado. Eso significa que deberíamos desarrollar una cultura donde ya no nos espantamos unos a otros todo el tiempo, sino donde nos entusiasmamos unos a otros. Deberíamos animarnos e inspirarnos para hacer cosas que nos emocionan."

(Hüther)

4) "En esta etapa *(la etapa de las operaciones concretas)*, si como apoyo para el proceso del aprendizaje, se intenta utilizar símbolos, por mucho que se los haya simplificado – símbolos muy gráficos e "infantiles" – el niño se ve obligado a tomar una especie de medida de defensa: tendrá que utilizar su *memoria* para poder repetir, cuando se lo pidan, el saber requerido.
(...) La cantidad de horas que, precisamente en un país como Ecuador, se dedican al dictado y a la memorización de reglas es impresionante: reglas gramaticales, reglas de cálculo, reglas ortográficas, reglas de conducta, etc. Claparède formuló la siguiente ley: **todo lo que en su día fue aprendido de memoria, más tarde es mucho más difícil de entender.** No es extraño que observemos con tanta frecuencia lo mucho que esta práctica del aprender reglas dificulta una aplicación inteligente. Este es un hecho que habitualmente es reconocido en las críticas al sistema educativo que tan menudo se realizan en Ecuador, sin embargo, raras veces se comprenden las causas que verdaderamente lo motivan."

(Wild 1999)

---

5) Acerca de la relación entre experiencias físicas y desarrollo de la inteligencia, la neurología dice:

"Inteligencia: Una función de la experiencia.
(...) Nuevas experiencias cambian físicamente al cerebro causando en las neuronas, células del cerebro principalmente involucradas en el conocimiento, el desarrollo de nuevas ramas o dendritas incrementando así la comunicación los entre espacios microscópicos llamados sinapsis. El pasaje sináptico de un impulso eléctrico entre el axón de una neurona y la dendrita de otra es la base física del aprendizaje y la memoria. Cuando un sendero de comunicación dentro de una red de neuronas es usado repetidamente, se incrementa su eficiencia y decimos que hemos aprendido algo. (...)
Los descubrimientos de neurocientíficos afirman la importancia de la experiencia en el desarrollo de dendritas y por consiguiente, en los resultados del desarrollo al cual llamamos aprendizaje y observamos como inteligencia. (...)
Experiencias que proveen una ganancia sensorial enriquecida, más allá de la capacidad de un libro o papel de trabajo, tienen mayor oportunidad de disparar un crecimiento dendrítico e incrementar las conexiones sinápticas. Experiencias de primera mano en el mundo fuera de la escuela y con objetos reales dentro de la escuela evocan una rica entrada sensorial para el cerebro. Visitar el charco, inspeccionar el gusano de tierra de cerca, observar la semilla que se transforma en planta, son las experiencias que desarrollan redes nerviosas. Aprendiendo desde el inicio con experiencia práctica "estar ahí" le adiciona el poder a todas las otras clases de entradas, ya sea inmersión, práctica con objetos reales, práctica con modelos, segunda mano o simbólico. Entendiendo que esta red nerviosa, la cual es el sustrato del aprendizaje humano, depende primeramente de las experiencias de primera mano, proporciona a los educadores, nuevas y poderosas razones para dirigir un aula viva que comienza con el mundo real."

(McGeehan)

---

6) Piaget dice lo siguiente acerca de la relación entre maduración del cerebro y aprendizaje:
"... el sistema nervioso y su maduración tardía (mielogénesis y principalmente citoendrogénesis) se limitan así a abrir un cierto campo de posibilidades dentro del cual habrán de actualizarse cierto número de conductas (...); pero esta actualización supone determinadas condiciones de experiencia física (manipulación de los objetos, etc., lo cual es esencial también para la lógica) y ciertas condiciones sociales (intercambio regulado de las informaciones, control mutuo, etc.), y estas diversas condiciones serán las que determinen el perfeccionamiento de lo que la maduración hace solamente posible."

(Piaget 1973)

O sea, la experiencia concreta y el apoyo por el ambiente social favorecen el aprendizaje; pero no se puede forzar un aprendizaje más allá del "campo de posibilidades" que la maduración natural del cerebro ya provee. – Los Moore relatan la siguiente respuesta de Piaget a la pregunta acera de la enseñanza acelerada en la niñez:
"Muchas veces han preguntado a Piaget si él apoya los programas en Norteamérica que proveen la instrucción formal cada vez más temprano. Según John L. Phillip, cuando se le preguntó si se puede apurar la mente del niño, dijo que esta fue la "pregunta americana". El pensó que "probablemente fuera posible, pero **no se la debe apurar.**"

(Moore 1995)

En el mismo contexto, los Moore aportan las siguientes informaciones:

"William Rohwer sugiere que para muchos niños, los esfuerzos por aumentar la percepción independiente o la habilidad cognitiva tendrán **más probabilidades de ser exitosos "si se los demorara ... hasta cerca del fin de los años primarios."** Rohwer sugiere también que se puede adquirir todo el aprendizaje "necesario para tener éxito en enfrentar las exigencias de la escuela secundaria en solo dos o tres años si se demorara la instrucción formal hasta esos años." (...)

El psiquiatra J.T.Fisher apoya a Rohwer basándose en su experiencia personal y clínica. **El doctor Fisher empezó la escuela a los trece años y terminó la secundaria a los dieciséis años.** Se sentía "desilusionado más tarde cuando descubrió que esto no demostró que él fue un genio". Más bien, él tuvo que aceptar lo que dijeron los psicólogos que "han demostrado que **un niño normal que inicia su educación académica en el período de la adolescencia, pronto puede llegar al mismo punto de progreso al cual hubiera llegado si hubiera iniciado la escuela a los cinco o seis años de edad."**
(...) En otras palabras, los padres no tienen que temer que ellos están desperdiciando los primeros años de sus hijos si no los mandan a la escuela. Al contrario, si se deja a los niños inventar o resolver cosas por sí mismos en un ambiente relativamente libre, podrán llegar a ser personas más creativas y tener mejores habilidades para resolver problemas. (...)"

(Moore 1995)

Acerca de las operaciones básicas de la aritmética, Piaget dice:

"Sabemos que durante la primera infancia solo los primeros números son accesibles al sujeto porque son números intuitivos que corresponden a figuras perceptibles. La serie indefinida de los números y, sobre todo, **las operaciones de suma (y su inversa, la resta)** y de multiplicación (con su inversa, la división) **no son, en cambio, accesibles por término medio hasta después de los siete años.**"

(Piaget 1973)

---

7) El matemático Paul Lockhart dice:
"¿Por qué deberían saber calcular los niños de tercer grado? ¿Quieres entrenarlos para que sepan sumar 427 + 389? Esa no es la clase de preguntas que hacen los niños de ocho años normalmente. Aun muchos *adultos* no comprenden realmente el valor posicional en el sistema decimal. ¿Y tú esperas de los niños de ocho años que tengan un concepto claro de eso? ¿O no te importa si lo comprenden o no? Es simplemente demasiado temprano para esta clase de entrenamiento técnico. Uno puede hacerlo; pero al fin de cuentas hace más daño que provecho a los niños. Sería mucho mejor esperar hasta que despierte su propia curiosidad natural acerca de los números.
- ¿Qué debemos entonces hacer con los niños pequeños en las clases de matemática?
- ¡Déjenlos jugar! Enséñenles ajedrez y go, hex y chaquete, nim, o cualquier otro. Inventen sus juegos propios. Resuelvan rompecabezas y adivinanzas. Confróntenlos con situaciones donde tienen que razonar de manera deductiva. No se preocupen por las técnicas y notaciones. Ayúdenles a convertirse en pensadores matemáticos activos y creativos.
- Esto me parece un riesgo terrible. Si después nuestros alumnos ni siquiera saben sumar y restar, ¿entonces qué?
- Pienso que es un riesgo mucho más grande, eliminar toda expresión creativa de las escuelas, y solamente dejar que los alumnos memoricen datos, fórmulas y listas de palabras."

(Lockhart)

Y Raymond Moore dice:

"El juego es un medio vital de aprendizaje para un niño. En cierto sentido, el juego es su trabajo. Jugar y trabajar le gusta por igual, hasta que alguien lo desilusione con una actitud negativa hacia el trabajo. El niño aprende a jugar tan pronto como puede ver algo o alguien con quien jugar. Y así descubre conocimientos para sí mismo que no se pueden enseñar fácilmente de otra manera. A través de sus sentidos, y su manipulación de objetos ordinarios, descubre ciertas cualidades de las cosas: pesos, texturas, tamaños, formas, colores – la base del aprendizaje académico. A través de la interacción con otros, y la observación e imitación de las personas en su alrededor, aprende acerca de la vida – las habilidades sociales. A través de las sencillas actividades y experiencias cotidianas, desarrolla poco a poco los conceptos básicos del tiempo, de los números y del espacio. Esto continúa durante los primeros nueve o diez años de su vida."

(Moore 1981)

---

8) "Durante un período de varios años y en cientas de ciudades, el 'Comité de los Siete' investigó para determinar la edad mental a la que determinados temas podían enseñarse de manera 'acabada'. Típicamente, ellos encontraron que **la suma de fracciones homogéneas requirió una edad mental de 10 a 11 años, y la suma de fracciones heterogéneas, 14 a 15 años. La división entre números de dos cifras requirió una edad mental de 12 a 13 años.**"

En: "What does Research say about Arithmetic?" (¿Qué dice la investigación acerca de la aritmética?), por Vincent J. Glennon and C. W. Hunnicutt, Asociación Nacional de Educación de los EEUU, Washington D.C. - Citado en Bluedorn (sin fecha).

9) Jean Piaget dice acerca de la diferencia entre razonamiento concreto y razonamiento basado en enunciados verbales:
"Hasta esa edad (once a doce años), **las operaciones de la inteligencia infantil son únicamente 'concretas'**, es decir, que no se refieren más que a la realidad en sí misma y, especialmente, a los **objetos tangibles que pueden ser manipulados** y sometidos a experiencias efectivas. (...) En cambio, si pedimos a los sujetos que razonen sobre simples hipótesis, sobre un enunciado puramente verbal de los problemas, inmediatamente pierden pie y vuelven a caer en la intuición prelógica de los pequeños. Por ejemplo, todos los niños de nueve a diez años saben poner en serie los colores mejor aún que las magnitudes, pero son totalmente incapaces de resolver una cuestión como la siguiente, incluso puesta por escrito: 'Edith tiene los cabellos más oscuros que Lili. Edith es más rubia que Suzanne. ¿Cuál de las tres tiene los cabellos más oscuros?' Responden en general que, dado que Edith y Suzanne son rubias, es Lili la que tiene el pelo más oscuro. (...) No alcanzan, por consiguiente, en el plano verbal, más que una seriación por parejas incoordinadas a la manera de los pequeños de cinco o seis años con las seriaciones concretas. Y es por esto, en particular, por lo que sienten tanta dificultad en resolver en la escuela problemas de aritmética que se refieren, sin embargo, a operaciones bien conocidas: **si manipulasen los objetos, razonarían sin obstáculos**, mientras que los mismos razonamientos en apariencia, pero exigidos en el plano del lenguaje y de los enunciados verbales, constituyen de hecho, **otros razonamientos mucho más difíciles**, ya que están ligados a simples hipótesis sin realidad efectiva."

(Piaget 1973)

Bibliografía

ALLIANCE FOR CHILDHOOD (Alianza por la Niñez):
"La ilusión educativa",
http://drupal6.allianceforchildhood.org/fools_gold_spanish

BLUEDORN, Harvey: "Research on Teaching Math",
http://www.triviumpursuit.com/articles/research_on_teaching_math.php

HEALY, Jane M.: "Endangered Minds, Why Children Don't Think and What We Can Do About It" (Mentes en peligro: Por qué los niños no piensan, y lo que podemos hacer acerca de ello), Nueva York, 1990.

HÜTHER, Gerald: "Begeistern statt entgeistern" ("Entusiasmar en vez de espantar") - Traducción de una entrevista televisiva, publicada en internet:
https://www.youtube.com/watch?v=K0nud8EA0Ew

LOCKHART, Paul: "Lamento de un matemático"
Original inglés: "A Mathematician's Lament", accesible en:
https://www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament.pdf
Una traducción al español fue publicada en:
http://es.scribd.com/doc/47237369/Lamento-de-un-matematico-por-Paul-Lockhart

McGEEHAN, Jane: "Aprendizaje cerebro-compatible", publicado en internet:
http://www.greenteacher.com/articles
Original inglés: "Brain-compatible Learning"; publicado en:
https://lms.manhattan.edu/pluginfile.php/109118/mod_resource/content/1/Brain Compatible learning.pdf

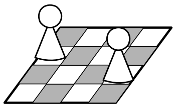
MOORE, Raymond y Dorothy: "Home Grown Kids" (Niños crecidos en casa), Word Publishing 1981

MOORE, Raymond y Dorothy: "Mejor tarde que temprano", Editorial Unilit, Miami 1995

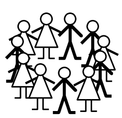
PIAGET, Jean: "Problemas de psicología genética" y "El desarrollo mental del niño", en: "Seis estudios de psicología", Seix Barral, Barcelona 1973 (6ta edición)

WILD, Rebeca: "Educar para ser – Vivencias de una escuela activa"
Editorial Herder, Barcelona 1999 (ISBN 978-84-254-2059-7)

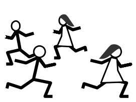
Anexo C: Índice de juegos



Juegos de mesa



Juegos en círculo



Juegos movidos

Anexo D:
Índice de temas matemáticos y pedagógicos

Nota: Este índice intenta enumerar todos los temas matemáticos significativos que intervienen de alguna manera en las unidades de aprendizaje. Pero eso no significa que los niños tengan que aprender todos los temas que figuran en este índice. Por ejemplo, si aparece el "Tercero excluido" como un tema en la Unidad 1, eso no implica que los niños tengan que aprender este principio formalmente; allí se lo menciona solamente para dar un poco de trasfondo a los educadores.

¿Cómo aprenden los niños la matemática?

Los métodos de la matemática activa, con éxito comprobado en la práctica, se orientan en las necesidades y características de los niños para un aprendizaje óptimo: Actividades lúdicas, movimiento físico, la representación de los principios matemáticos mediante materiales concretos, la conexión con la vida cotidiana, y todo eso en un ambiente alentador sin estrés.

Estos métodos son ideales para la educación en el hogar ("homeschooling") porque permiten adaptarse individualmente al desarrollo mental natural de cada niño. Usted no necesita conocimientos especiales en matemática; las explicaciones del libro le guiarán paso por paso. Igualmente los alumnos y educadores de escuelas alternativas encontrarán aquí muchas ideas que enriquecerán su práctica.

Sumérjase con sus niños en una aventura de aprendizaje que les permitirá ver la matemática desde una perspectiva nueva.

El tomo presente, para niños de 6 a 9 años aproximadamente, cubre las cuatro operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación, división); unidades de medida; conceptos básicos de la geometría y de la teoría de conjuntos; diversas habilidades de razonamiento que se entrenan mediante juegos de estrategia y rompecabezas de matemática recreativa; y otros temas.

La serie completa de "Matemática Activa" consiste en los siguientes tomos:

- Pre-Matemática (4 a 6 años aprox.)
- Primaria I (6 a 9 años aprox.)
- Primaria I - Hojas de trabajo
- Primaria II (9 a 12 años aprox.)
- Primaria II - Hojas de trabajo
- Secundaria I (12 a 15 años aprox.)
- Secundaria II (Pre-Universitario)
- Matemática divina (Tomo complementario)

Hans Ruegg tiene más de 20 años de experiencia educando a niños y adolescentes, y desarrollando alternativas pedagógicas. Ofrece asesoramiento a familias y escuelas. Sus cursos por internet han inspirado a cientos de participantes. Junto con su esposa educaron a sus dos hijos en casa, desde los primeros pasos hasta el ingreso a la universidad.